

5

Funções de Variáveis Aleatórias

ESQUEMA DO CAPÍTULO

5.1 UM EXEMPLO

5.2 EVENTOS EQUIVALENTES

5.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

5.4 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

5.1 Um Exemplo

- **Exemplo:**

Suponha que o raio do orifício de um tubo seja considerado uma variável aleatória X , com fdp f . Seja a área da secção transversal do orifício $A = \pi X^2$. Como o valor X é resultado de um experimento aleatório, logo o valor de A também.

- **Problema:** Se a fdp de X é f , qual é a fdp g de A ?

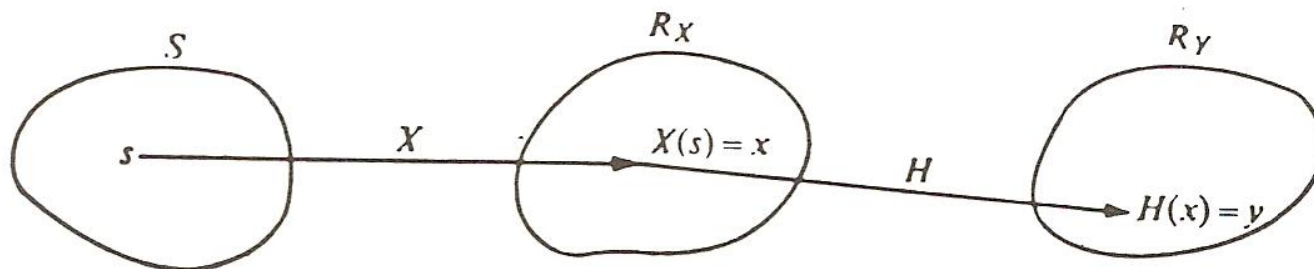
- **Solução:** Esperamos que a fdp g seja de alguma forma dedutível da fdp f .

5.2 Eventos Equivalentes

- Eventos Equivalentes:**

Seja ε um experimento e seja S um espaço amostral associado a ε . Seja X uma variável aleatória definida em S . Suponha que $y = H(x)$ seja uma função real de x .

Então, $Y = H(X)$ é uma variável aleatória, porque para todo $s \in S$, um valor de Y fica determinado, a saber $y = H[X(s)]$ (vide figura).



5.2 Eventos Equivalentes

- **Definição:**

Seja C um evento (subconjunto) associado ao contradomínio R_Y , de Y . Seja $B \subset R_X$ definido assim

$$B = \{x \in R_X : H(x) \in C\}.$$

B é o conjunto de todos os valores de X , tais que $H(x) \in C$. Se B e C forem relacionados desse modo, então B e C são denominados **eventos equivalentes**.

5.2 Eventos Equivalentes

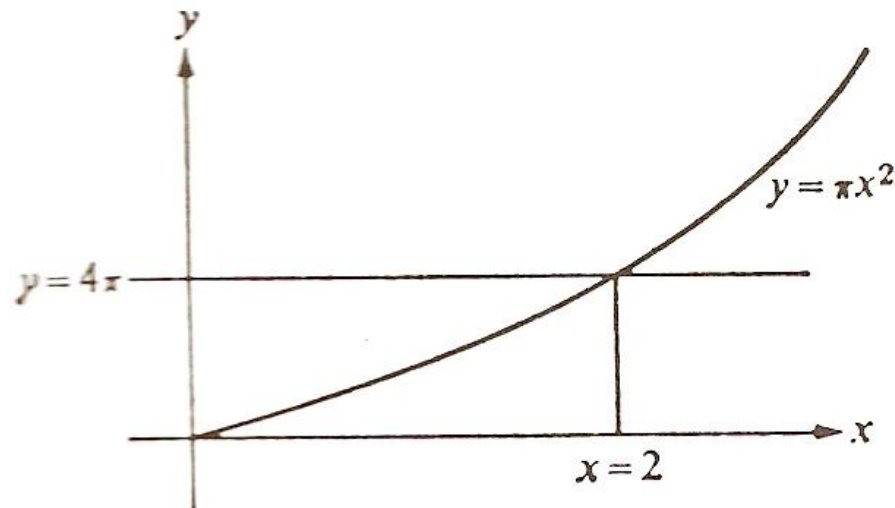
- **Observações:**
 - a) A interpretação não formal é que B e C serão eventos equivalentes se, e somente se, B e C ocorrerem **conjuntamente**;
 - b) Suponha-se que A seja um evento associado a S, o qual é equivalente a um evento B associado a R_X . Então, se C for um evento associado a R_Y o qual é equivalente a B, teremos que A será **equivalente** a C;
 - c) É importante ressaltar que quando falamos de eventos equivalentes, esses eventos são associados a **diferentes** espaços amostrais.

5.2 Eventos Equivalentes

- **Exemplo:**

Suponha que $H(x) = \pi x^2$. Então os eventos $B: \{X > 2\}$ (isto é, $\{s \mid X(s) > 2\}$), e $C: \{Y > \pi 4\}$ (isto é, $\{x \mid Y(x) > 4\pi\}$), são **equivalentes**.

De fato, se $Y = \pi x^2$, então $\{X > 2\}$ ocorrerá se, e somente se, $\{Y > \pi 4\}$ ocorrer, desde que X não pode tomar valores negativos no caso presente (vide figura).



5.2 Eventos Equivalentes

- **Definição:**

Seja uma variável aleatória X definida no espaço amostral S . Seja R_X o contradomínio de X . Seja H um função real e considere-se a variável aleatória $Y = H(X)$ com contradomínio R_Y . Para qualquer evento $C \subset R_Y$, **definiremos** $P(C)$ assim

$$P(C) = P[\{x \in R_X : H(x) \in C\}].$$

Em outras palavras, a probabilidade de um evento associado ao contradomínio de Y é definida como a probabilidade do evento **equivalente**.

5.2 Eventos Equivalentes

- **Comentários:**

- a) A definição anterior torna possível calcular probabilidades que envolvam eventos associados a Y , se conhecemos a distribuição de probabilidades de X e se pudermos determinar o respectivo evento **equivalente**;
- b) Uma vez que explicamos como relacionar probabilidades associadas a R_X com probabilidades associadas a S , podemos **reescrever** a equação

$$P(C) = P[\{x \in R_X : H(x) \in C\}]$$

assim

$$P(C) = P[\{s \in S : H[X(s)] \in C\}].$$

5.2 Eventos Equivalentes

- Exemplo:**

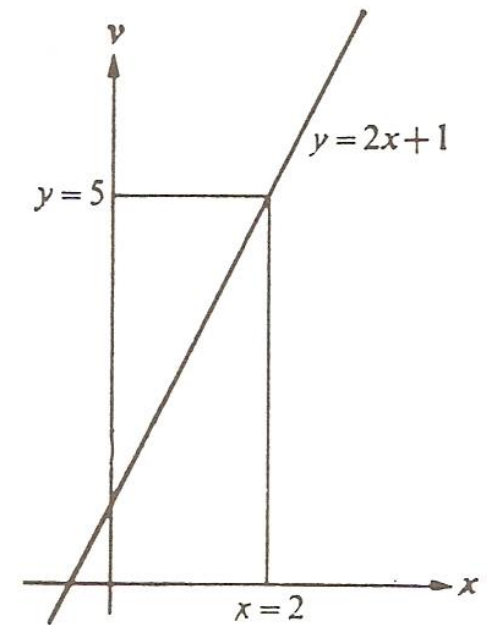
Seja X uma variável aleatória contínua com fdp (uma integração simples confirma que $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$)

$$f(x) = e^{-x}, x > 0.$$

Suponha que $H(x) = 2x + 1$. Em consequência, $R_X = \{x | x > 0\}$, enquanto $R_Y = \{y | y > 1\}$. Suponha que o evento C seja definido como $C = \{Y \geq 5\}$.

Então, $y \geq 5$ se, e somente se, $2x + 1 \geq 5$, o que por sua vez acarreta $x \geq 2$. Daí, C é equivalente a $B = \{X \geq 2\}$ (vide figura) e, assim,

$$P(Y \geq 5) = P(X \geq 2) = \int_2^{\infty} e^{-x} dx = 1/e^2.$$



5.2 Eventos Equivalentes

- **Observações:**
 - a) É possível que consideremos a incorporação de **ambas** as avaliações, isto é, de $x = X(s)$ e de $y = H(x)$, no experimento ε e, conseqüentemente, consideremos apenas R_Y , o contradomínio de Y , como o espaço amostral do experimento ε ;
 - b) Exatamente da mesma forma que a distribuição de probabilidade de X foi induzida em R_X pela distribuição de probabilidade sobre o espaço amostral original S , a distribuição de probabilidade de Y será **determinada** quando a distribuição de probabilidade de X for conhecida;
 - c) Ao considerar uma função de uma variável aleatória X , digamos $Y = H(X)$, devemos observar que nem toda função H poderá ser aceita. Felizmente, as funções que surgem na prática **são** aceitáveis.

5.3 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Funções de Variáveis Aleatórias Discretas - Caso 1:**

X é uma variável aleatória discreta e $Y = H(X)$; logo, Y será também uma variável aleatória discreta e

$$y_i = H(x_i), i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

- **Exemplo:**

Suponha que a variável aleatória X tome os três valores, -1, 0 e 1, com probabilidades $1/3$, $1/2$ e $1/6$, respectivamente. Seja $Y = 3X + 1$. Nesse caso, os valores possíveis de Y são -2, 1 e 4, tomados com probabilidades $1/3$, $1/2$ e $1/6$.

5.3 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Procedimento geral:**

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, os valores possíveis de X , com distribuição de probabilidade

$$p(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

e seja H for uma função tal que, **a cada valor y corresponda exatamente um valor x .**

Então, a distribuição de probabilidade de Y pode ser obtida do seguinte modo

$$y_i = H(x_i), i = 1, 2, \dots, n, \dots ;$$

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_i).$$

5.3 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Exemplo II:**

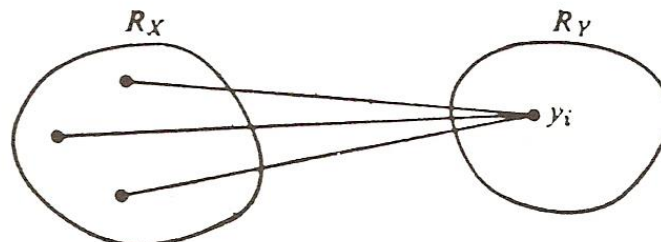
Suponha-se que consideramos a mesma variável do exemplo anterior, mas agora $Y = X^2$. Nesse caso, os valores possíveis de Y são 0 e 1, tomados com probabilidades $1/2$ e $1/2$, porque $Y = 1$ se, e somente se, $X = -1$ ou $X = 1$ e a probabilidade do evento $\{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ é $1/3 + 1/6 = 1/2$.

- **Procedimento geral:**

Sejam $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, \dots$, os valores de X que tenham a propriedade $H(x_{ij}) = y_i$, para todo j . Então

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_{i1}) + p(x_{i2}) + \dots,$$

isto é, deve-se achar o evento equivalente a $\{Y = y_i\}$ (ver figura).



5.3 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Funções de Variáveis Aleatórias Discretas - Caso 2:**

X é uma variável contínua enquanto Y é discreta.

- **Exemplo:**

Suponha-se que X possa tomar todos os valores reais, enquanto Y seja definido igual a $Y = 1$, se $X \geq 0$, e $Y = -1$, se $X < 0$.

A fim de obter a distribuição de probabilidade de Y , determina-se apenas o evento equivalente (no contradomínio R_X) correspondente aos diferentes valores de Y . Assim

$$q(1) = P(Y = 1) = P(X \geq 0) = \int_0^{\infty} f(x)dx \text{ e}$$

$$q(-1) = P(Y = -1) = P(X < 0) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx.$$

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Funções de variáveis aleatórias contínuas:**

O caso mais **importante** e mais frequentemente encontrado surge quando X for uma variável aleatória contínua com fdp f e H for uma função também contínua.

Consequentemente, $Y = H(X)$ será uma variável aleatória contínua e nossa tarefa será **obter** sua fdp g .

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Procedimento geral:**
 - a) Obter G , a fd de Y , na qual $G(y) = P(Y \leq y)$, achando-se o evento A (no contradomínio X) o qual é equivalente ao evento $\{Y \leq y\}$;
 - b) Derivar $G(y)$ em relação a y , a fim de obter $g(y)$;
 - c) Determinar aqueles valores de y no contradomínio de Y , para os quais $g(y) > 0$.

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exemplo:**

Suponhamos que X tenha fdp

$$f(x) = 2x, \text{ se } 0 < x < 1, \text{ e}$$

$$f(x) = 0, \text{ caso contrário.}$$

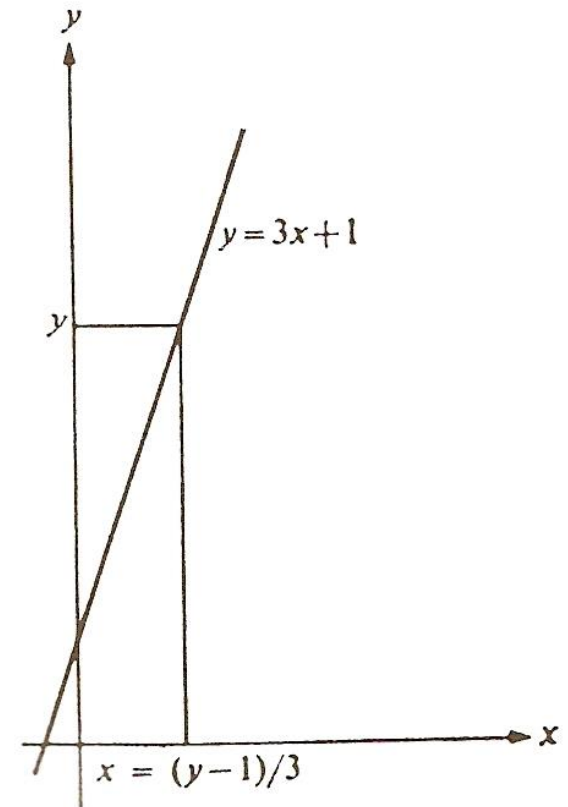
Seja $H(x) = 3x + 1$. Daí, para obter a fdp de $Y = H(X)$, teremos (ver figura)

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(3X + 1 \leq y) \\ &= P[X \leq (y-1)/3] \\ &= \int_0^{(y-1)/3} 2x dx = [(y-1)/3]^2. \end{aligned}$$

Daí

$$g(y) = G'(y) = 2(y-1)/9.$$

Desde que $g(y) > 0$ para $0 < x < 1$, encontramos que $g(y) > 0$ para $1 < y < 4$.



5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Procedimento alternativo:**

Considere novamente

$$G(y) = P(Y \leq y) = P[X \leq (y-1)/3] = F[(y-1)/3],$$

em que F é a fd de X , isto é

$$F(x) = P(X \leq x).$$

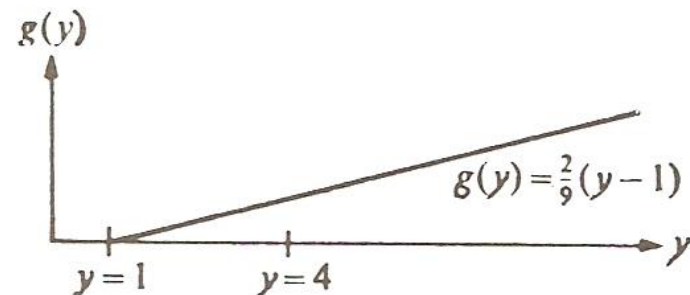
A fim de calcular a derivada de G , $G'(y)$, empregaremos a regra de derivação de função

$$G'(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{dG(y)}{du} \cdot \frac{du}{dy}, \text{ em que } u = \frac{y-1}{3}.$$

Portanto (ver fdp de Y na figura)

$$G'(y) = F'(u) \cdot \frac{1}{3} = f(u) \cdot \frac{1}{3} = 2 \left(\frac{y-1}{3} \right) \cdot \frac{1}{3},$$

como anteriormente obtido.



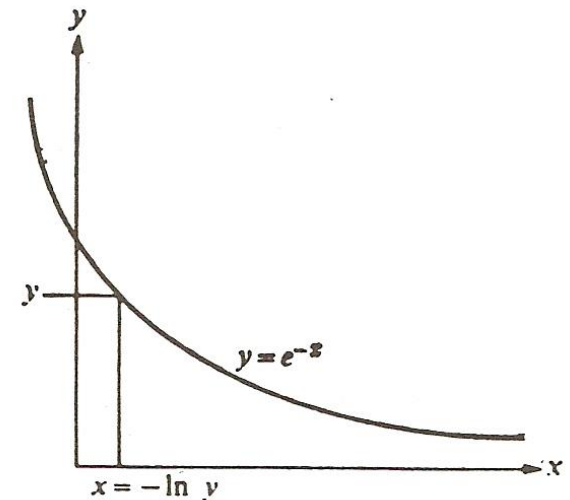
5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo II:**

Suponhamos que uma variável aleatória contínua tenha a fdp como foi dado no exemplo anterior. Seja $H(x) = e^{-x}$.

Para achar a fdp de $Y = H(X)$, procederemos da seguinte forma (ver figura)

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P[e^{-X} \leq y] \\ &= P[X \geq -\ln y] = \int_{-\ln y}^{\infty} 2x dx \\ &= 1 - (-\ln y)^2. \end{aligned}$$



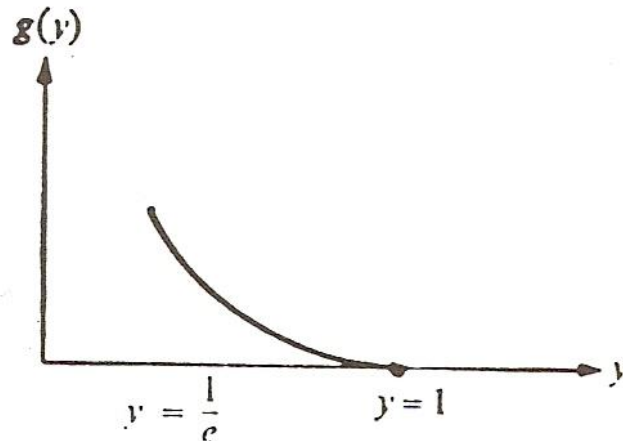
5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo II (continuação):**

Daí

$$g(y) = G'(y) = -2(\ln y)/y.$$

Visto que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$, encontramos que $g(y) > 0$ para $1/e < y < 1$ (ver figura).



5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Teorema:**

Seja X uma variável aleatória contínua com fdp f , em que $f(x) > 0$, para $a < x < b$. Suponha-se que $y = H(x)$ seja uma função de x estritamente monótona (ou crescente ou decrescente). Admita-se que essa função seja derivável (e, portanto, contínua) para todo x . Então, a variável aleatória Y , definida como $Y = H(X)$ possui a fdp g dada por

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|,$$

em que x é expresso em termos de y .

Se H for crescente, então g será não-nula para aqueles valores de y que satisfaçam $H(a) < y < H(b)$.

Se H for decrescente, então g será não-nula para aqueles valores de y que satisfaçam $H(b) < y < H(a)$.

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo:**

Reexaminar exemplo anterior, pelo teorema, quando tivermos

$$f(x) = 2x, 0 < x < 1, \text{ e}$$

$$y = 3x + 1.$$

Consequentemente,

$$x = (y-1)/3 \text{ e}$$

$$dx/dy = 1/3.$$

Logo,

$$g(y) = f(x)|dx/dy| = 2[(y-1)/3](1/3), 1 < y < 4,$$

o que **confirma** resultado anteriormente obtido.

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

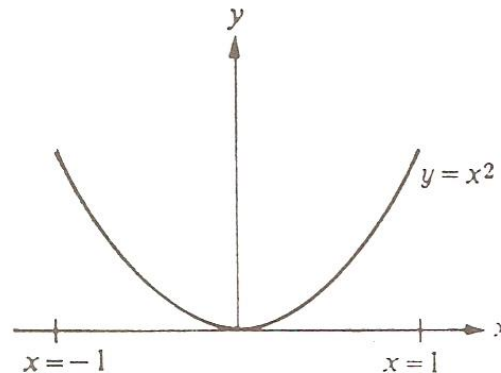
- **Exemplo II:**

Suponha que

$$f(x) = 1/2, \text{ se } -1 < x < 1, \text{ e}$$

$$f(x) = 0, \text{ fora desse intervalo.}$$

Seja $H(x) = x^2$. Obviamente, esta **não** é uma função monótona sobre o intervalo $[-1, 1]$ (ver figura).



5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo II (continuação):**

Para obter a fdp de $Y = X^2$, isto é, de uma função **não-monótona**, procedemos da seguinte forma

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

em que F é a fd da variável aleatória X .

Logo (ver figura)

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) = \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} - \frac{f(-\sqrt{y})}{-2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} (1/2 + 1/2) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, 0 < y < 1. \end{aligned}$$

