

3

Probabilidade Condicionada e Independência (revisão)

ESQUEMA DO CAPÍTULO

3.1 PROBABILIDADE CONDICIONADA

3.2 TEOREMA DE BAYES

3.3 EVENTOS INDEPENDENTES

**3.4 CONSIDERAÇÕES ESQUEMÁTICAS;
PROBABILIDADE CONDICIONADA E
INDEPENDÊNCIA**

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Probabilidade condicionada** é um conceito que pode auxiliar em muitas situações reais;
- **Exemplo:** No lote de 20 peças defeituosas e 80 peças não-defeituosas estudada no Cap. 2, suponha que escolhemos duas peças deste lote e estejamos interessados nos dois eventos:
 $A = \{\text{a primeira peça é defeituosa}\}$ e $B = \{\text{a segunda peça é defeituosa}\}$.

Solução: Se estivermos extraindo *com* reposição, temos $P(A) = P(B) = 20/100 = 1/5$.

Solução II: Se estivermos extraindo *sem* reposição, naturalmente ainda é verdade que $P(A) = 1/5$, mas o cálculo de $P(B)$ depende do conhecimento da composição do lote antes de extrair a segunda peça.

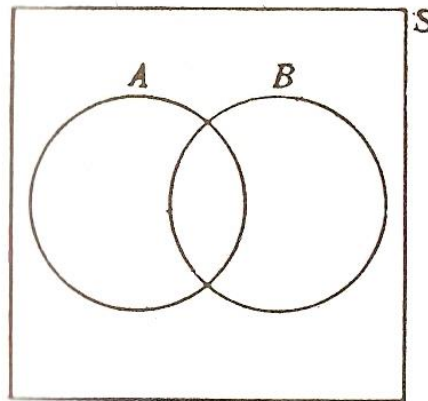
- **Definição:** Sejam A e B dois eventos associados ao experimento ε . Denotaremos por $P(B|A)$ a **probabilidade condicionada** do evento B quando o evento A tiver ocorrido.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Exemplo II:** Ainda com relação ao lote do exemplo anterior, temos $P(B|A) = 19/99$,

porque se A tiver ocorrido, então para a segunda extração restarão somente 99 peças, das quais 19 são defeituosas;

Obs.: Para calcularmos $P(B|A)$, estamos calculando $P(B)$ em relação ao **espaço amostral reduzido** A , em lugar de fazê-lo em relação ao espaço amostral original S (ver Diagrama de Venn).



3.1 Probabilidade Condicionada

- **Definição:**

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ desde que } P(A) > 0.$$

Obs.:

- a) Isto não é um teorema nem um axioma;
- b) É simples verificar que $P(B|A)$, para A fixado, satisfaz aos vários postulados de probabilidade;
- c) Se $A = S$,
$$P(B|S) = P(B \cap S)/P(S) = P(B);$$
- d) A cada evento $B \subset S$, poderemos associar dois números, $P(B)$, a probabilidade (não-condicionada) de B , e $P(B|A)$, a probabilidade condicionada de B , desde que algum evento A (para o qual $P(A) > 0$) tenha ocorrido;
- e) A probabilidade condicionada está definida em termos da medida de probabilidade não-condicionada P , isto é, se conhecermos $P(B)$ para todo $B \subset S$, poderemos calcular $P(B|A)$, para todo $B \subset S$.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Formas de calcular a probabilidade condicionada $P(B|A)$:**
 - a) Diretamente, pela consideração da probabilidade de B em relação ao espaço amostral reduzido A;
 - b) Empregando a definição anterior, em que $P(A \cap B)$ e $P(A)$ são calculadas em relação ao espaço amostral original S.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Exemplo:** Suponha-se que um escritório possua 100 máquinas de calcular, algumas elétricas (E) e outras manuais (M), algumas novas (N) e outras usadas (U), conforme apresentado na tabela abaixo.

	E	M	total
N	40	30	70
U	20	10	30
total	60	40	100

Uma pessoa entra no escritório, pega uma máquina ao acaso, e descobre que é nova. Qual a probabilidade de que seja elétrica (isto é, procuramos $P(E|N)$)?

- **Solução I:** Considerando apenas o espaço amostral reduzido N (isto é, as 70 máquinas novas), temos

$$P(E|N) = 40/70 = 4/7;$$

- **Solução II:** Empregando a definição de probabilidade condicionada, temos que

$$P(E | N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{40/100}{70/100} = 4/7.$$

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Definição:** Importante consequência da definição de probabilidade condicionada anteriormente fornecida é escrever

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = P(A|B) \times P(B),$$

denominada **teorema da multiplicação**.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Exemplo:** Considerando novamente o problema das 20 peças defeituosas e 80 não-defeituosas, anteriormente estudado, qual será a probabilidade de duas peças escolhidas ao acaso serem ambas defeituosas?
- **Solução:** Sejam os eventos
 $A = \{\text{a primeira peça é defeituosa}\}$ e
 $B = \{\text{a segunda peça é defeituosa}\}$.
Desejamos encontrar $P(A \cap B)$, que pode ser calculada pelo teorema da multiplicação
$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = 19/99 \times 1/5 = 19/495.$$

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Definição:**

Dizemos que os eventos $B_1, B_2, \dots, B_k$, representam uma **partição** do espaço amostral S , quando

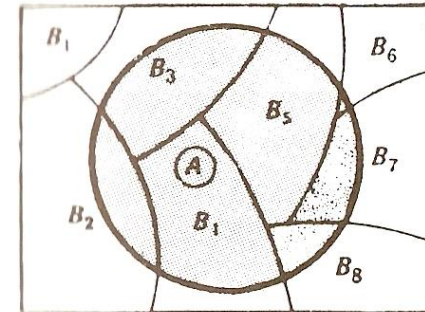
- a) $B_i \cap B_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$;
- b) $\bigcup_{i=1}^k B_i = S$;
- c) $P(B_i) > 0$, para todo i .

Em outras palavras, quando o experimento ε é realizado **um**, e **somente um**, dos eventos B_i ocorre.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Teorema da Probabilidade Total:**

Consideremos A um evento qualquer referente a S e $B_1, B_2, \dots, B_k$, uma partição de S (ver Diagrama de Venn, para $k=8$).



Portanto, podemos escrever

$$A = A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup \dots \cup A \cap B_k.$$

Como os eventos $A \cap B_i$ são mutuamente excludentes dois a dois podemos escrever

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k).$$

Escrevendo cada termo $P(A \cap B_i)$ na forma $P(A|B_k) \times P(B_k)$ temos

$$P(A) = P(A|B_1) \times P(B_1) + P(A|B_2) \times P(B_2) + \dots + P(A|B_k) \times P(B_k),$$

denominado **teorema da probabilidade total**.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Exemplo:** Voltando novamente no lote de 20 peças defeituosas e 80 não defeituosas, definimos os eventos $A = \{\text{a primeira peça é defeituosa}\}$ e $B = \{\text{a segunda peça é defeituosa}\}$. Calcular $P(B)$.
- **Solução:** Utilizando o teorema da probabilidade total, temos

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}),$$

igual a

$$P(B) = \frac{19}{99} \times \frac{1}{5} + \frac{20}{99} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Obs.: Este é um resultado surpreendente, quando lembramos que extraíndo com reposição obtivemos $P(B) = 1/5$.

3.2 Teorema de Bayes

- **Definição:**

Seja $B_1, B_2, \dots, B_k$, uma partição do espaço amostral S e seja A um evento associado a S . Aplicando-se a definição de probabilidade condicionada, podemos escrever

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i) \times P(B_i)}{\sum_{j=1}^k P(A | B_j) \times P(B_j)}.$$

Este resultado é conhecido como **Teorema de Bayes**, também denominado fórmula da probabilidade das causas ou antecedentes.

3.2 Teorema de Bayes

- **Exemplo:**

Um determinada peça é manufaturada por três fábricas, 1, 2 e 3. Sabe-se que 1 produz o dobro de peças que 2, e que 2 e 3 produziram o mesmo número de peças. Sabe-se que 2% das peças produzidas por 1 e por 2 são defeituosas, enquanto que 4% daquelas produzidas por 3 são defeituosas. Todas as peças produzidas são misturadas em um depósito e depois uma delas é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de que seja defeituosa?

- **Solução:** Sejam os eventos $A = \{\text{a peça é defeituosa}\}$ e $B_i = \{\text{a peça provém de } i\}$. Como os eventos B_i são mutuamente excludentes, **pelo teorema da probabilidade total** podemos escrever

$$P(A) = P(A|B_1) \times P(B_1) + P(A|B_2) \times P(B_2) + P(A|B_3) \times P(B_3),$$
que fornece

$$P(A) = 0,02 \times 1/2 + 0,02 \times 1/4 + 0,04 \times 1/4 = 0,025.$$

3.2 Teorema de Bayes

- **Exemplo (continuação):**

Suponha que uma peça retirada do depósito seja identificada como defeituosa. Qual a probabilidade de que tenha sido produzida pela fábrica 1?

- **Solução:** Reutilizando a notação definida, o que se pede é $P(B_1|A)$, claramente uma aplicação do **Teorema de Bayes**, ou fórmula da probabilidade das causas, que nos permite obter as probabilidades condicionais $P(B_i|A)$ em termos das probabilidade já conhecidas $P(A|B_i)$. Assim, temos

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1) \times P(B_1)}{P(A | B_1) \times P(B_1) + P(A | B_2) \times P(B_2) + P(A | B_3) \times P(B_3)}$$

$$P(B_1 | A) = \frac{0,02 \times 1/2}{0,02 \times 1/2 + 0,02 \times 1/4 + 0,04 \times 1/4} = 0,40.$$

3.2 Teorema de Bayes

- **Exemplo II:** A probabilidade de que um teste identifique corretamente alguém com uma doença, dando positivo, é 0,99; e a probabilidade de que o teste identifique corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é 0,95. A incidência da doença na população em geral é 0,0001. Você fez o teste e o resultado foi positivo. Qual é a probabilidade de que você tenha a doença?
- **Solução:** Faça D denotar o evento em que você tenha a doença e faça S denotar o evento em que o teste seja positivo. A probabilidade requerida pode ser denotada como $P(D|S)$. A probabilidade de que o teste identifique corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é 0,95. Consequentemente, a probabilidade de um teste positivo sem a doença é $P(S|D') = 0,05$. Do Teorema de Bayes,

$$P(D|S) = \frac{P(S|D) \times P(D)}{P(S|D) \times P(D) + P(S|D') \times P(D')} = \frac{0,99 \times 0,0001}{0,99 \times 0,0001 + 0,05 \times (1 - 0,0001)} = 0,002.$$

3.3 Eventos Independentes

- **Definição:**
A e B serão **eventos independentes** se, e somente se,
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- **Obs.:** Esta definição equivale a dizer que se A e B são independentes quando
 $P(B|A) = P(B)$ e $P(A|B) = P(A)$.
- **Obs. II:** Na maioria das aplicações, teremos que **adotar a hipótese de independência** de dois eventos A e B e depois empregá-la para calcular $P(A \cap B)$ por meio de $P(A) \times P(B)$.

3.3 Eventos Independentes

- **Exemplo:**

Um grande lote de 10.000 peças possui 10% defeituosas. Duas peças são extraídas. Qual a probabilidade de ambas estarem perfeitas?

- **Solução I:** Definamos os eventos $A = \{\text{a primeira peça é perfeita}\}$ e $B = \{\text{a segunda peça é perfeita}\}$. Admitindo-se que a primeira peça seja repostada, temos que os eventos A e B podem ser considerados **independentes** e portanto

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,9 \times 0,9 = 0,81.$$

- **Solução II:** Sejam os mesmo eventos A e B anteriormente definidos. Sem reposição teremos que

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = 8999/9999 \times 0,9 \cong 0,81.$$

- **Obs.:** Neste caso, a hipótese de independência simplifica os cálculos e acarreta apenas um **erro desprezível**. Isto não seria verdade se o lote fosse pequeno.

3.3 Eventos Independentes

- **Definição:**

Diremos que três eventos A , B e C são **mutuamente independentes** se, e somente se, todas as condições seguintes forem válidas

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A) \times P(B), & P(A \cap C) &= P(A) \times P(C), \\P(B \cap C) &= P(B) \times P(C), & P(A \cap B \cap C) &= P(A) \times P(B) \times P(C).\end{aligned}$$

- **Definição:**

Os n eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$, serão **mutuamente independentes** se, e somente se, tivermos, para $k = 2, 3, \dots, n$,

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times \dots \times P(A_{i_k})$$

(**Obs.:** existem ao todo $2^n - n - 1$ condições deste tipo).

3.3 Eventos Independentes

- **Exemplo:**

Entre seis parafusos, dois são menores do que um comprimento especificado. Se dois forem escolhidos ao acaso, qual será a probabilidade de que os dois parafusos mais curtos sejam extraídos? Seja o evento $A_i = \{\text{o } i\text{-ésimo parafuso escolhido é curto}\}$, para $i = 1, 2$.

- **Solução I:** A solução **correta** é

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \times P(A_1) = 1/5 \times 2/6 = 1/15.$$

- **Solução II:** A solução comum, **e incorreta**, é obtida escrevendo-se

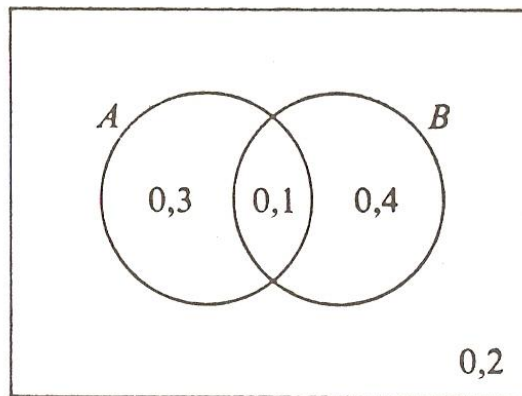
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2) \times P(A_1) = 1/5 \times 2/6 = 1/15.$$

- **Obs.:** Muito embora a solução incorreta apresente o mesmo valor numérico, a identificação de $1/5$ com $P(A_2)$ é incorreta, pois $1/5$ representa $P(A_2|A_1)$, sendo que $P(A_2)$ pode ser calculada corretamente, pelo Teorema da Probabilidade Total

$$P(A_2) = P(A_2|A_1) \times P(A_1) + P(A_2|\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_1) = 1/5 \times 2/6 + 2/5 \times 4/6 = 1/3.$$

3.4 Considerações Esquemáticas; Probabilidade Condicionada e Independência

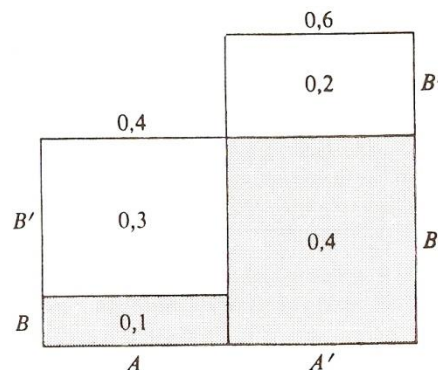
- A abordagem esquemática auxilia a compreensão da probabilidade condicionada. Sejam dois eventos A e B associados a um espaço amostral, com as probabilidades indicadas no Diagrama de Venn.



- Tem-se $P(A \cap B) = 0,1$; $P(A) = 0,1 + 0,3 = 0,4$; $P(B) = 0,1 + 0,4 = 0,5$.

3.4 Considerações Esquemáticas; Probabilidade Condicionada e Independência

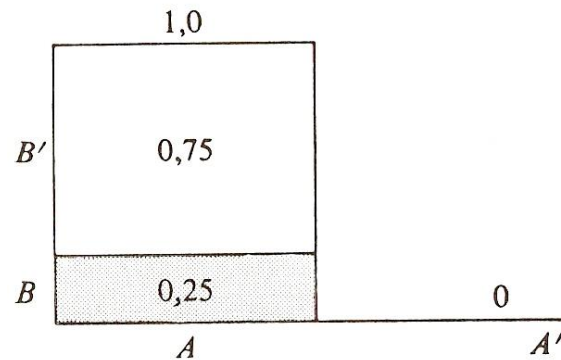
- Esses eventos podem ser representados pelas áreas dos retângulos:



- As regiões sombreadas indicam o evento B . O retângulo sombreado da esquerda representa $A \cap B$ e o da direita $A' \cap B$.

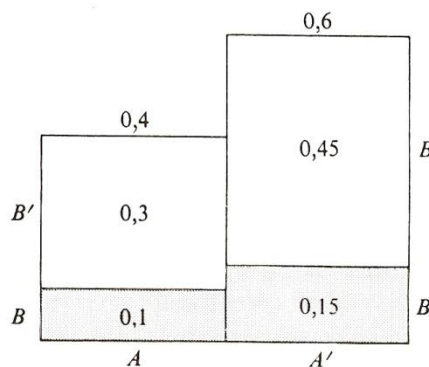
3.4 Considerações Esquemáticas; Probabilidade Condicionada e Independência

- Para calcular $P(B|A)$, necessitamos somente considerar A , isto é, A' pode ser ignorado no cálculo. Logo a proporção de B em A é $1/4$, igual a $P(B|A)$. Da mesma forma, $P(B'|A) = 3/4$.



3.4 Considerações Esquemáticas; Probabilidade Condicionada e Independência

- Pela abordagem esquemática, podemos também ilustrar a noção de **independência**. Suponha que A e B sejam como indicado na figura abaixo.



- Como as proporções nos dois retângulos que representam A e A', são as mesmas, 3:1, teremos a independência entre A e B e:

$$P(B) = 0.1 + 0.15 = 0,25 \text{ e } P(B|A) = 0,1/0,4 = 0,25.$$