

4

Variáveis Aleatórias Unidimensionais (revisão)

ESQUEMA DO CAPÍTULO

4.1 NOÇÃO GERAL DE VARIÁVEL ALEATÓRIA

4.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

4.3 A DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

4.4 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

4.5 FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

4.6 DISTRIBUIÇÕES MISTAS

**4.7 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS UNIFORMEMENTE
DISTRIBUÍDAS**

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- O espaço amostral de um experimento não necessariamente é um número, embora em muitas situações experimentais, desejamos atribuir um número real x a todo elemento s do espaço amostral S , $x = X(s)$;
- **Definição:**
Sejam ε um experimento e S um espaço amostral associado ao experimento. Uma **função** X , que associe a cada elemento $s \in S$ um número real, $X(s)$, é denominada **variável aleatória**;

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- a) A definição pode trazer confusão (variável aleatória = função), mas será **mantida** por já ser bem aceita;
- b) **Nem** toda função imaginável pode ser uma variável aleatória; um requisito é que, para todo número real x , o evento $[X(s) = x]$ e, para todo intervalo I , o evento $[X(s) \in I]$ têm probabilidades bem definidas, consistentes com os axiomas básicos;
- c) Em algumas situações, o resultado s do espaço amostral **já** constitui a característica numérica que desejamos registrar, quando simplesmente tomaremos a função identidade, $X(s) = s$;

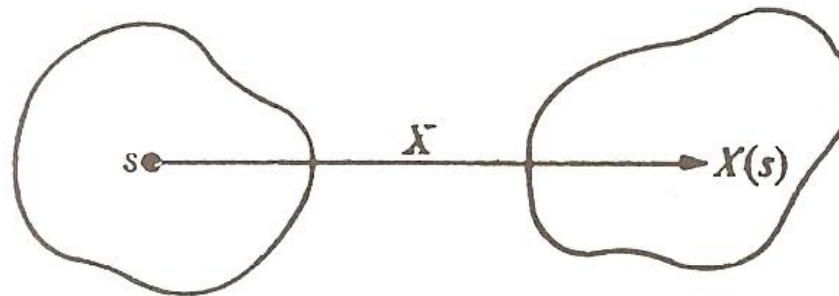
4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- d) Geralmente estaremos mais interessados nos valores de X do que na natureza **funcional** de X ;

Exemplo: No lançamento de duas moedas, cujo espaço amostral é $S = \{HH, HT, TH, TT\}$, definindo X como o número de caras (H), temos $X(HH) = 2$, $X(HT) = X(TH) = 1$, $X(TT) = 0$;

- e) Um exigência fundamental é que a função seja **unívoca**, i.e., a cada $s \in S$, corresponderá exatamente um valor $X(s)$, embora diferentes valores de s possam levar ao mesmo valor de X (vide figura).

$S = \text{espaço amostral de } \mathcal{E}$ $R_X = \text{valores possíveis de } X$



4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- Observações:
 - Espaço amostral R_x , conjunto de todos os valores possíveis de X , é denominado **contradomínio**;
 - R_x pode ser considerado como um **outro** espaço amostral;
 - O espaço amostral original S corresponde ao resultado (que pode ser não-numérico) do experimento, enquanto R_x corresponde ao espaço amostral associado à **variável aleatória** X ; se $X(s) = s$, então $S = R_x$.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Duas** interpretações para uma variável aleatória:
 - a) Realizamos um experimento ε , que dá um resultado $s \in S$, e **a seguir** calculamos $X(s)$;
 - b) Realizamos ε , obtemos o resultado s , e **imediatamente** calculamos $X(s)$, caso em que o número $X(s)$ é pensado como o próprio resultado do experimento e R_X se torna o espaço amostral do experimento
- **Observações:**
 - Embora a interpretação (a) seja a que descreve melhor o que ocorre na prática, a (b) pode ser mais **útil**;
 - Em outras palavras, estaremos **mais** interessados nos valores que X toma do que em sua forma funcional.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Exemplo:**

Três moedas são atiradas sobre uma mesa. Tão logo as moedas repousem, a fase “aleatória” do experimento terminou. Um resultado simples s poderia consistir na descrição detalhada de como e onde as moedas pousaram, mas mais comumente estaremos interessados em certas características numéricas associadas ao experimento. Poderíamos estar interessados em avaliar:

- a) $X(s)$ = número de caras que apareceram,
- b) $Y(s)$ = distância máxima entre duas moedas quaisquer,
- c) $Z(s)$ = distância mínima das moedas a um bordo qualquer da mesa.

- **Observações:**

- Podemos **incluir** a avaliação de $X(s)$ na descrição do experimento e afirmar que $S = \{0, 1, 2, 3\}$;
- A avaliação, entretanto, dá-se **depois** que os aspectos aleatórios do experimento tem terminado.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Comentários:**

Um **distinção muito importante** que deve feita é que, referindo-se a **variáveis aleatórias**, emprega-se letras **maiúsculas**:

- Ex.: X, Y, Z etc.;

Referindo-se ao **valor** que essas variáveis assumem resultante do experimento, usa-se letras **minúsculas**:

- Ex.: x, y, z etc.

Quando falamos em escolher um recém nascido ao acaso e medirmos sua altura, **podemos** então formular questões sobre X, tal como qual seja a probabilidade de que a altura seja maior que 60 centímetros, $P(X \geq 60)$;

No entanto, uma vez que a pessoa tenha sido selecionada e medida a sua altura, **não** há sentido em procurar $P(x \geq 60)$, uma vez que x já tem o valor conhecido e é ou não ≥ 60 , com certeza.

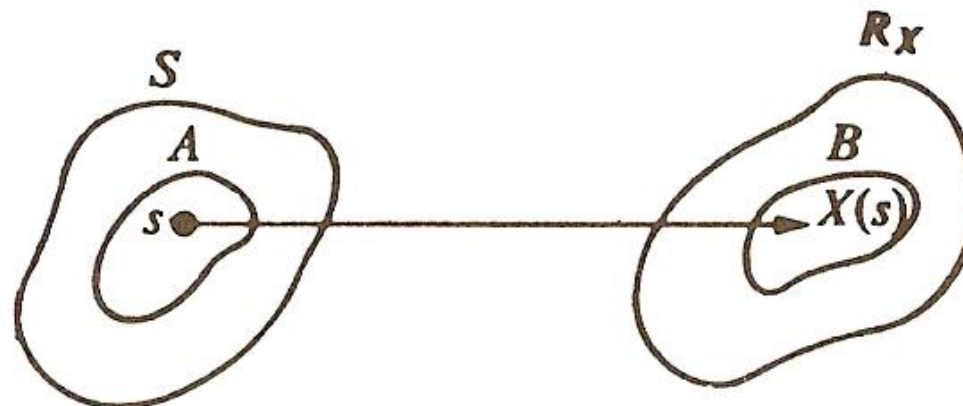
4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Definição:**

Sejam um experimento ε e seu espaço amostral S . Seja X uma variável aleatória definida em S e seja R_X seu contra-domínio. Seja B um evento definido em relação a R_X , isto é, $B \subset R_X$. Então A será definido assim:

$$A = \{s \in S \mid X(s) \in B\}.$$

Obs.: Assim, A será constituído por todos os resultados em S para os quais $X(s) \in B$ (vide figura). A e B são **eventos equivalentes**.



4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Comentários:**

- a) A e B serão equivalentes sempre que ocorram **juntos**; i.e., se A tiver ocorrido, então um resultado s terá ocorrido, para o qual $X(s) \in B$ e, portanto, B ocorreu; reciprocamente, se B ocorreu, um valor $X(s)$ terá sido observado, para o qual $s \in A$ e, portanto, A ocorreu;
- b) Entretanto, A e B são associados a espaços amostrais **diferentes**.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Exemplo:**

Duas moedas são lançadas, com $S = \{HH, HT, TH, TT\}$. Seja X o número de caras (H) obtido. Logo, $R_X = \{0, 1, 2\}$.

Seja $B = \{1\}$. Já que $X(HT) = X(TH) = 1$ se, e somente se, $X(s) = 1$, temos que $A = \{HT, TH\}$ é **equivalente** a B .

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Definição:**

Seja B um evento no contradomínio R_X . Nesse caso, **definimos** $P(B)$ da seguinte maneira

$$P(B) = P(A), \text{ em que } A = \{s \in S \mid X(s) \in B\}.$$

Obs.: Definimos $P(B)$ igual à probabilidade do evento $A \subset S$, o qual é equivalente a B .

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Exemplo:**

Se as moedas consideradas anteriormente forem **equilibradas**, teremos $P(HT) = P(TH) = \frac{1}{4}$. Portanto, $P(HT, TH) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

- **Obs.:**

- Visto que o evento $\{X = 1\}$ é equivalente ao evento $\{HT, TH\}$, teremos que $P(X = 1) = P(HT, TH)$.
- Note que uma vez que o valor da probabilidade de $P(HT, TH)$ tenha sido determinada, **não** há outra escolha possível para $P(X = 1)$, que não seja $P(HT, TH)$.
- As probabilidades associadas a eventos em R_x são ditas **induzidas**.

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Definição:**

Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X (isto é, o contradomínio R_x) for finito ou se for infinito numerável, denominaremos X de **variável aleatória discreta**.

- **Obs.:**

- Em outras palavras, os valores possíveis de X podem ser postos em uma lista como $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$;
- Se a lista acaba, o caso é finito, e se a lista não acaba, o caso é infinito numerável.

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Exemplo:**

Uma fonte radioativa está emitindo partículas α , cuja emissão é observada por um dispositivo contador. A variável aleatória de interesse é

X = número de partículas observadas.

- **Obs.:**

$$R_X = \{0, 1, \dots, N\}.$$

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Definição:**

Seja X uma variável aleatória discreta. Portanto, o contradomínio R_X de X será formado no máximo por um número infinito numerável de valores $x_1, x_2, \dots$. A cada possível resultado x_i associaremos um número $p(x_i) = P(X = x_i)$, denominado **probabilidade** de x_i . Os números $p(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, devem satisfazer às seguintes condições:

- a) $p(x_i) \geq 0$, para todo i ;
- b) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

A função p , definida acima, é denominada **função de probabilidade**, (ou **função de probabilidade no ponto**), da variável aleatória X ;

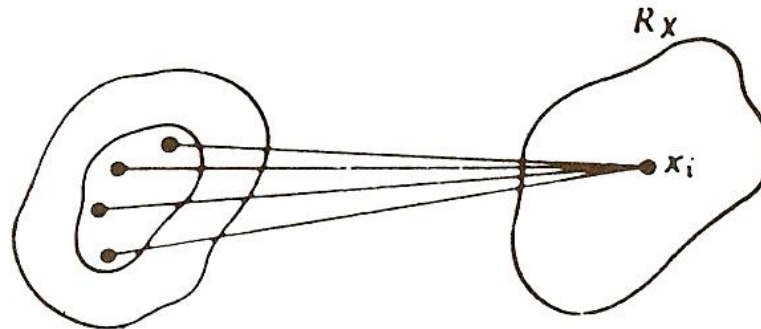
A coleção de pares $[x_i, p(x_i)]$, $i = 1, 2, \dots$, é algumas vezes denominada **distribuição de probabilidade** de X .

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Observações:**

- a) A escolha dos números $p(x_i)$ é determinada a partir da função de probabilidade associada aos eventos no espaço amostral S , no qual X seja definida, isto é (vide figura)

$$p(x_i) = P[s | X(s) = x_i];$$

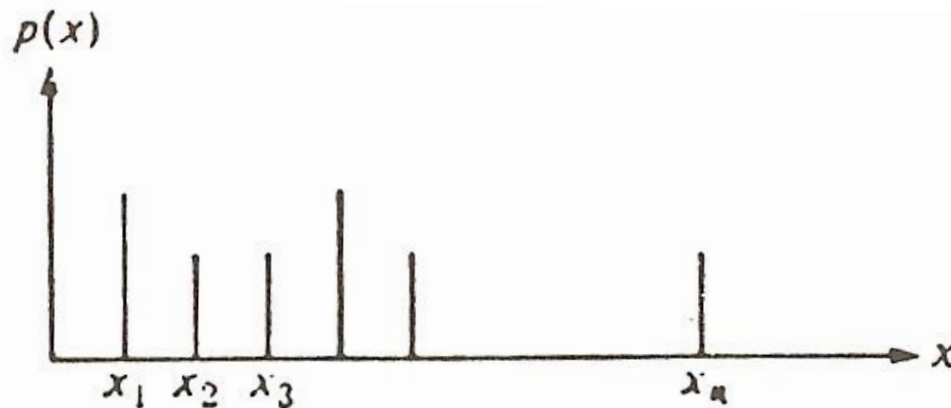


- b) Se X tomar apenas um número finito de valores, $x_1, x_2, \dots, x_N$, então $p(x_i) = 0$, para $i > N$, e a série infinita $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$ da definição transforma-se em uma soma finita;

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Observações (final):**

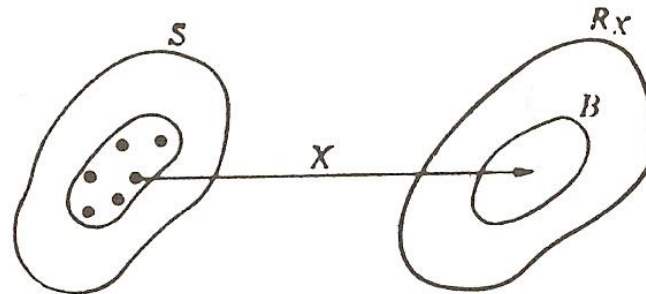
- c) Por analogia com a Mecânica, se considerarmos a massa total de um unidade distribuída sobre a reta real, com massa total concentrada nos pontos $x_1, x_2, \dots$, os números $p(x_i)$ representam a quantidade de massa no ponto x_i .
- d) A representação gráfica de uma distribuição é bastante útil (vide figura).



4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- Observação:**

Seja B um evento associado à variável aleatória X , isto é, $B \subset R_X$ (vide figura).



Suponha que $B = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots\}$. Daí

$$P(B) = P[s | X(s) \in B] = P[s | X(s) = x_{ij}, j = 1, 2, \dots] = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{ij}).$$

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Exemplo:**

Suponha que uma válvula eletrônica seja posta em um soquete e ensaiada. Admitamos que a probabilidade de que o teste seja positivo seja $\frac{3}{4}$. Segue daí que a probabilidade de que seja negativo é igual a $\frac{1}{4}$. Admitamos também que estejamos ensaiando uma partida grande dessas válvulas. Os ensaios continuam até que a primeira válvula positiva apareça. Definamos a variável aleatória X como o número de testes necessários até a conclusão do experimento.

O espaço amostral associado ao experimento é

$$S = \{+, -+, --+, ---+, \dots\}.$$

A distribuição de probabilidade de X pode ser determinada pelo seguinte raciocínio. Os valores de X são, $1, 2, \dots, n, \dots$, e será $X = n$ se, e somente se, as primeiras $(n-1)$ válvulas forem negativas e a n -ésima válvula for positiva. Assim, assumindo independência entre as válvulas, temos

$$p(n) = P(X = n) = (1/4)^{n-1} \times (3/4), n = 1, 2, \dots$$

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Comentários:**

Obviamente temos que os valores $p(n) \geq 0$.

Para verificarmos se $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$, observaremos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) &= \frac{3}{4} \times (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots) = \\ &= \frac{3}{4} \times (1/(1-\frac{1}{4})) = 1.\end{aligned}$$

- **Observação:**

Empregamos aqui a soma de uma **P.G.**, $1 + r + r^2 + \dots$, que converge para $1/(1-r)$, quando $|r| < 1$.

4.3 A Distribuição Binomial

- **Exemplo:**

Suponha que peças saiam de uma linha de produção e sejam classificadas como defeituosas (D) e como não-defeituosas (N). Admita que três dessas peças sejam escolhidas ao acaso e classificadas de acordo com esse esquema. O espaço amostral para esse experimento pode assim ser apresentado

$$S = \{DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN\}.$$

Suponha que seja 0,2 a probabilidade de uma peça ser defeituosa e 0,8 a de ser não-defeituosa. Admitamos que essas probabilidades sejam as mesmas para cada peça e que a classificação de uma peça seja independente da da outra. Assim, as probabilidades associadas aos vários resultados do espaço amostral S são

$$(0,2)^3, (0,8)(0,2)^2, (0,8)(0,2)^2, (0,8)(0,2)^2, (0,2)(0,8)^2, (0,2)(0,8)^2, (0,2)(0,8)^2, (0,8)^3.$$

4.3 A Distribuição Binomial

- **Exemplo (continuação):**

Geralmente nosso interesse está no **número** de peças defeituosas, isto é, desejamos estudar a variável aleatória X , a qual atribui a cada resultado de $s \in S$ o número de peças defeituosas encontradas em s . Consequentemente temos

$$R_x = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Para obtermos a **distribuição de probabilidade** de X , $p(x_i) = P(X=x_i)$ fazemos

$X = 0$ se, e somente se, ocorrer NNN;

$X = 1$ se, e somente se, ocorrer DNN, NDN, ou NND;

$X = 2$ se, e somente se, ocorrer DDN, DND, ou NDD;

$X = 3$ se, e somente se, ocorrer DDD.

Então

$$p(0) = P(X=0) = (0,8)^3; \quad p(1) = P(X=1) = 3(0,2)(0,8)^2;$$

$$p(2) = P(X=2) = 3(0,2)^2(0,8); \quad p(3) = P(X=3) = (0,2)^3.$$

4.3 A Distribuição Binomial

- **Definição:**

Consideremos um experimento ε e seja A algum evento associado a ε . Admita-se que $P(A) = p$ e consequentemente $P(\bar{A}) = 1-p$. Considerem-se n repetições de ε . O espaço amostral será formado por todas as sequências possíveis $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, em que cada a_i é A ou $\bar{A}$, dependendo de o que tenha ocorrido na i -ésima repetição de ε (há 2^n dessas sequências). Além disso, suponha-se que $P(A) = p$ permaneça a mesma para todas as repetições. A variável aleatória X será definida como sendo o número de vezes que o evento A tenha ocorrido. Denominaremos X de variável aleatória **binomial**, com parâmetros n e p .

- **Obs.:**

Os valores **possíveis** de X são evidentemente $0, 1, 2, \dots, n$;
Diz-se que X tem **distribuição binomial**;
As repetições individuais serão denominadas **Provas de Bernoulli**.

4.3 A Distribuição Binomial

- **Teorema:**

Seja X uma variável binomial, baseada em n repetições. Então

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n.$$

- **Demonstração:**

Considere-se um particular elemento do espaço amostral de ε que satisfaça à condição $X = k$. Um resultado como esse poderia surgir, em particular, se nas primeiras k repetições de ε ocorresse A , enquanto que nas últimas $n-k$ repetições ocorresse $\bar{A}$, isto é

$$\underbrace{AA \dots AA}_{k} \underbrace{\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}}_{n-k}.$$

4.3 A Distribuição Binomial

- **Demonstração (continuação):**

A sequência anterior teria probabilidade $p^k(1-p)^{n-k}$, assim como qualquer outra para a qual $X = k$. O número total de tais sequências é igual ao número de combinações de n elementos k a k , $\binom{n}{k}$, pois devemos escolher exatamente k posições dentre n , para a ocorrência do evento A . Isto dá o resultado do teorema, porque esses $\binom{n}{k}$ resultados são todos mutuamente excludentes.

- **Obs.:**

- a) Obviamente **observamos** $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$, pelo teorema binomial;
- b) Sempre que realizarmos repetições independentes de um experimento com resultados **dicotômicos**, estaremos lidando com uma variável aleatória binomial; enquanto as condições de experimentação se mantiverem, podemos empregar o modelo acima;
- c) Se n for grande, os cálculos podem ficar **incômodos** (usa-se, então, tabelas).

4.3 A Distribuição Binomial

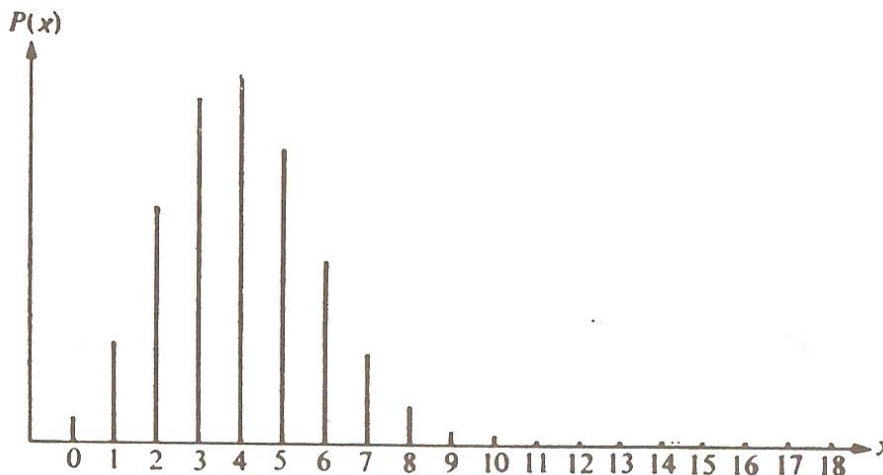
- **Exemplo:**

Suponha-se que uma válvula eletrônica, instalada em determinado circuito, tenha probabilidade 0,2 de funcionar mais do que 500 horas. Se ensaiarmos 20 válvulas, qual será a probabilidade de que delas, exatamente k funcionem mais de 500 horas, $k = 0, 1, \dots, 20$?

Se X for o número de válvulas que funcionem mais de 500 horas, admitiremos que X tenha uma distribuição binomial. Então

$$P(X = k) = \binom{20}{k} (0,2)^k (0,8)^{20-k}.$$

Os valores podem ser visto na figura, que apresenta uma configuração bastante geral.



4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Definição:**

Diz-se que X é uma **variável aleatória contínua**, se existir uma função f , denominada **função de densidade de probabilidade (fdp)** de X que satisfaça às seguintes condições:

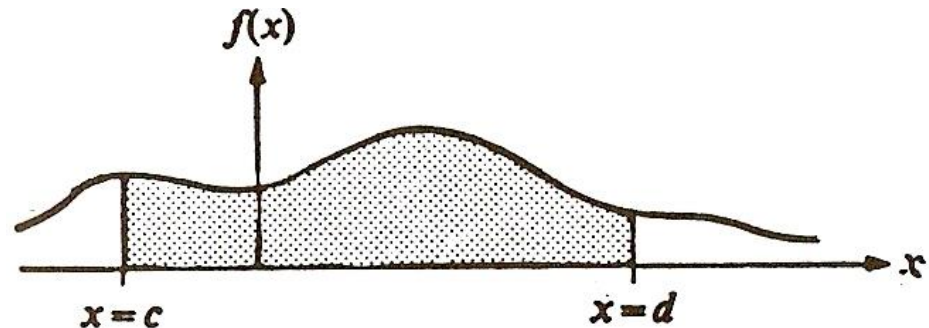
- a) $f(x) \geq 0$, para todo x ;
- b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
- c) para quaisquer a, b , com $-\infty < a < b < +\infty$, teremos

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Comentários:**

- a) Dizemos que X é uma variável aleatória contínua, se X puder tomar **todos** os valores em algum intervalo (c, d) , em que c e d podem ser $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente;
- b) $P(c < X < d)$ representa a **área** sob a curva da fdp f , entre $x = c$ e $x = d$ (vide figura);



- c) Constitui uma **consequência** da descrição probabilística de X que, para qualquer valor especificado x_0 de X teremos $P(X = x_0) = 0$;

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Comentários (continuação):**

d) Pode-se mostrar que essa atribuição de probabilidades a eventos em R_X **satisfaz** aos axiomas básicos da probabilidade, em que podemos tomar $\{x \mid -\infty < x < +\infty, \}$ como espaço amostral;

e) Se uma função f^* satisfizer às condições $f^* \geq 0$, para todo x , e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) dx = K,$$

em que K é um número real positivo não necessariamente igual a 1, então f^* não satisfaz a todas as condições para uma fdp, mas uma f assim definida **satisfará**

$$f(x) = f^*(x)/K, \text{ para todo } x;$$

f) Se X assumir valores somente em algum intervalo finito $[a, b]$, poderemos simplesmente **colocar** $f(x) = 0$, para todo $x \notin [a, b]$.

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Comentários (final):**

- g) $f(x)$ **não** representa a probabilidade de coisa alguma; somente quando a função for integrada entre dois limites, ela produzirá uma probabilidade;
- h) A distribuição de probabilidade (neste caso a fdp) é induzida em R_X pela probabilidade subjacente associada com eventos em S ; quando escrevemos $P(c < X < d)$, queremos dizer $P[c < X(s) < d]$, que por sua vez é igual a $P[s | c < X(s) < d]$;
- i) O caso contínuo também admite a analogia com a Mecânica, em que $f(x)$ representa a densidade de massa no ponto x e a massa contida no intervalo $c \leq x \leq d$ corresponde à integral

$$\int_c^d f(x)dx.$$

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo:**

A existência de uma fdp foi admitida na exposição de uma variável aleatória contínua. Vamos considerar um exemplo simples, no qual poderemos facilmente determinar a fdp, fazendo uma suposição apropriada sobre o comportamento probabilístico da variável aleatória. Suponhamos que um ponto seja escolhido no intervalo $(0,1)$. Representemos por X a variável aleatória cujo valor seja a abscissa x do ponto escolhido. Suponhamos também que se I for qualquer intervalo em $(0,1)$, então $P[X \in I]$ será diretamente proporcional ao comprimento de I , designado por $L(I)$. Assim, $P[X \in I] = kL(I)$, em que k é a constante de proporcionalidade. Portanto, encontramos

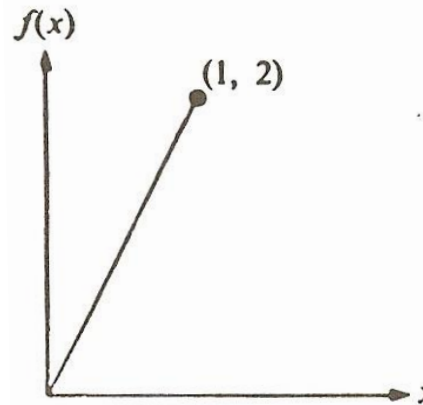
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exemplo II:**

Suponhamos que a variável aleatória X seja contínua (vide figura).
Seja a fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Para calcular $P(X \leq 1/2)$, deve-se apenas calcular a integral

$$\int_0^{1/2} 2x dx = 1/4.$$

Para calcular $P(X \leq 1/2 \mid 1/3 \leq X \leq 2/3)$, aplica-se

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B).$$

4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Definição:**

Seja X uma variável aleatória, discreta ou contínua. Define-se a função F como a **função de distribuição acumulada** da variável aleatória X (abreviadamente fd) como $F(x) = P(X \leq x)$.

4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Teorema:**

a) Se X for uma variável aleatória discreta

$$F(x) = \sum_j p(x_j).$$

em que o somatório é estendido a todos os índices j que satisfaçam à condição $x_j \leq x$;

b) Se X for uma variável aleatória contínua com fdp f ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds.$$

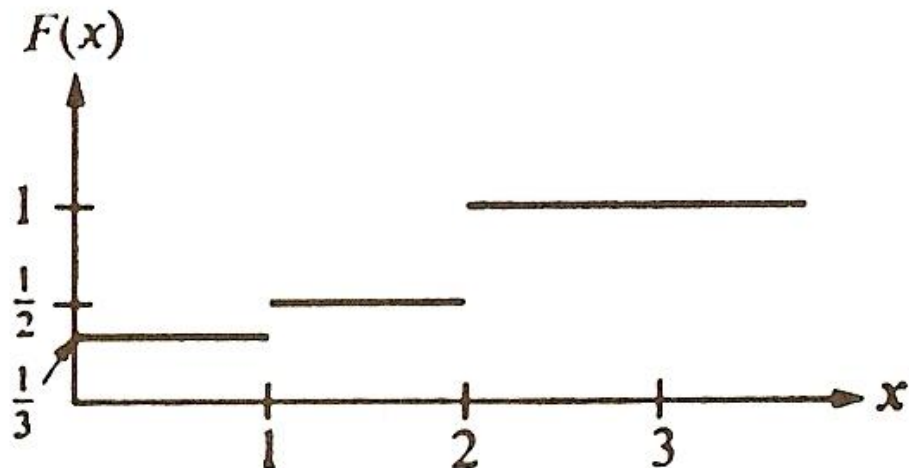
- **Demonstração:**

Decorrem da definição.

4.5 Função de Distribuição Acumulada

- Exemplo:**

Suponhamos que a variável aleatória X tome os três valores 0, 1 e 2, com probabilidades $1/3$, $1/6$ e $1/2$, respectivamente. Então $F(x)$ pode ser vista na figura.



4.5 Função de Distribuição Acumulada

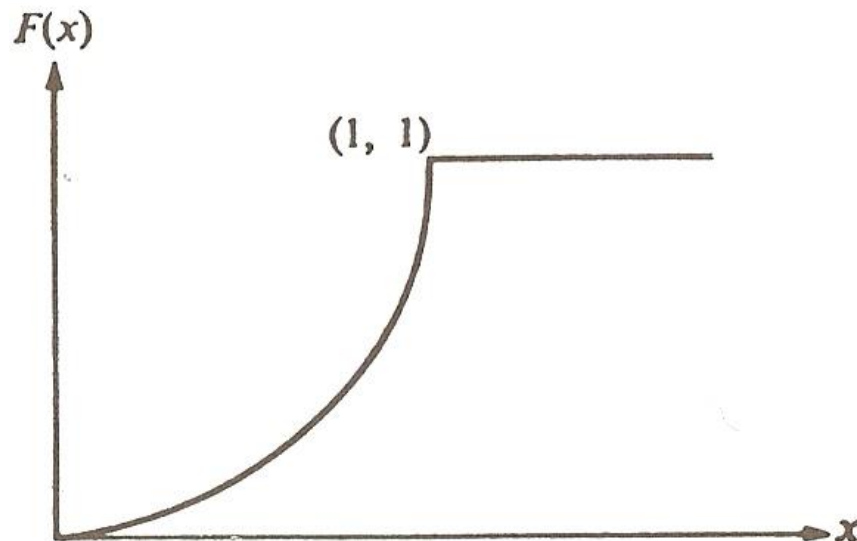
- Exemplo II:**

Suponhamos que X seja uma variável contínua com fdp

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, F é dada por (vide figura)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ \int_0^x 2s ds = x^2, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$



4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Observações:**

Os gráficos apresentados para as fd são, em cada caso, bastante **típicos**

- a) Se X for uma variável aleatória discreta, com um número finito de valores possíveis, o gráfico da fd será constituído por **segmentos** de reta horizontais;
- b) Se X for uma variável aleatória contínua, F será uma função **contínua** para todo x ;
- c) A fd F é definida para **todos** os valores de x .

4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Teorema:**

- a) A função F é não-decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$, teremos $F(x_1) \leq F(x_2)$;
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

- **Demonstração:**

- a) Definamos os eventos $A = \{X \leq x_1\}$ e $B = \{X \leq x_2\}$. Como $x_1 \leq x_2$, teremos $A \subset B$, o que, por teorema anteriormente visto, implica $P(A) \leq P(B)$.
- b) No caso contínuo (o discreto é análogo), teremos

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(s)ds = 0,$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(s)ds = 1.$$

4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Teorema II:**

- a) Seja F a fd de uma variável aleatória contínua, com fdp f . Então

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x),$$

para todo x no qual F seja derivável;

- b) Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis $x_1, x_2, \dots$, e suponha-se que esses valores tenham sido indexados de modo que $x_1 < x_2 < \dots$. Seja F a fd de X . Então

$$p(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1}).$$

- **Demonstração:**

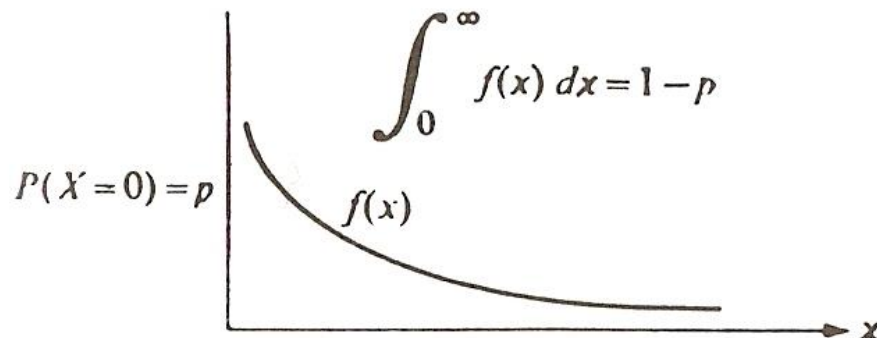
- a) (do teorema fundamental do Cálculo);
 - b) ...

4.6 Distribuições Mistas

- **Exemplo:**

Suponha-se que estejamos ensaiando algum equipamento e façamos igual a X o tempo de funcionamento. Normalmente pensaríamos em X como uma variável **puramente** contínua, mas podem surgir situações nas quais queiramos atribuir uma probabilidade $p > 0$ ao resultado $X = 0$ (isto é, há uma probabilidade de que o equipamento não funcione de modo algum). Teríamos, assim, $P(X = 0) = p$ e $P(X > 0) = 1 - p$.

Deste modo, p descreveria a distribuição de X no ponto 0, enquanto a fdp f descreveria a distribuição de valores para $X > 0$ (vide **figura**).



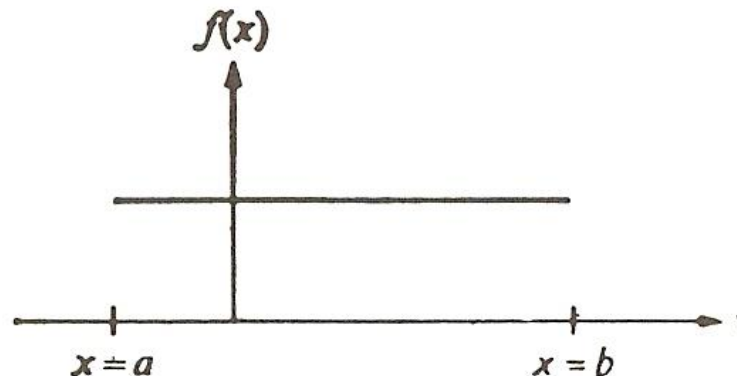
4.7 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- **Definição:**

Suponha-se que X seja uma variável aleatória contínua que tome todos os valores no intervalo $[a, b]$, no qual a, b sejam ambos finitos. Se a fdp de X for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores,} \end{cases}$$

diremos que X é **uniformemente distribuída** sobre o intervalo $[a, b]$ (vide figura).



4.7 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- **Comentários:**

- a) Uma variável aleatória uniformemente distribuída tem uma fdp **constante**, $f(x) = K$, sobre o intervalo de definição. A fim de satisfazer à condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

essa constante K deve ser igual ao inverso do comprimento do intervalo;

- b) Uma variável aleatória uniformemente distribuída representa o análogo contínuo dos resultados **igualmente** prováveis, no sentido de que a probabilidade para qualquer subintervalo é a mesma para todos aqueles que tenham o **mesmo** comprimento;
- c) Temos agora uma forma de tornar mais precisa a noção intuitiva de escolher ao **acaso** um ponto P em um intervalo $[a, b]$.

4.7 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- **Exemplo:**

Um ponto é escolhido ao acaso no segmento de reta $[0, 2]$. Qual será a probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 1 e $3/2$?

- **Solução:**

Fazendo-se X representar a coordenada do ponto escolhido, temos que a fdp de X é dada por $f(x) = \frac{1}{2}$, $0 < x < 2$, e portanto, $P(1 \leq X \leq 3/2) = \frac{1}{4}$.

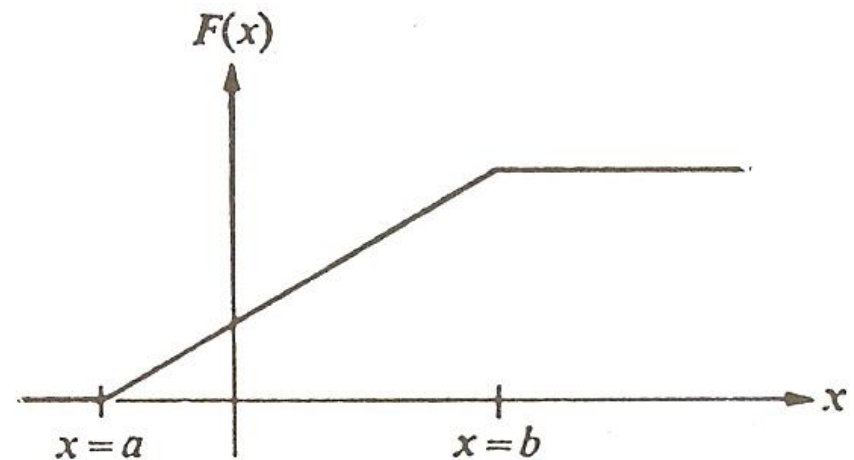
4.7 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- **Exemplo II:**

Vamos obter a expressão da fd de uma variável aleatória uniformemente distribuída.

- **Solução (vide figura):**

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds \\ &= 0, \quad \text{se } x < a, \\ &= \frac{x-a}{b-a}, \quad \text{se } a \leq x < b, \\ &= 1, \quad \text{se } x \geq b. \end{aligned}$$



4.8 Uma Observação

- Por que não podemos obter todas as probabilidades em que estejamos interessados por meio **não-dedutivos** (tais como, com base em evidência experimental, p.e., frequências relativas, ou a experiência passada com o fenômeno)?
- **Resposta:** Alguns eventos cujas probabilidades desejamos conhecer são tão complicados que nosso conhecimento intuitivo é **insuficiente**.
- Os vários métodos (estudados e a serem estudados) para cálculo de probabilidades são de enorme **importância** para tais situações complicadas, de difícil obtenção por meios intuitivos ou empíricos.