

10

A Função Geratriz de Momentos

ESQUEMA DO CAPÍTULO

10.1 INTRODUÇÃO

10.2 A FUNÇÃO GERATRIZ DE MOMENTOS

10.3 EXEMPLOS DE FUNÇÕES GERATRIZES DE MOMENTOS

10.4 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO GERATRIZ DE MOMENTOS

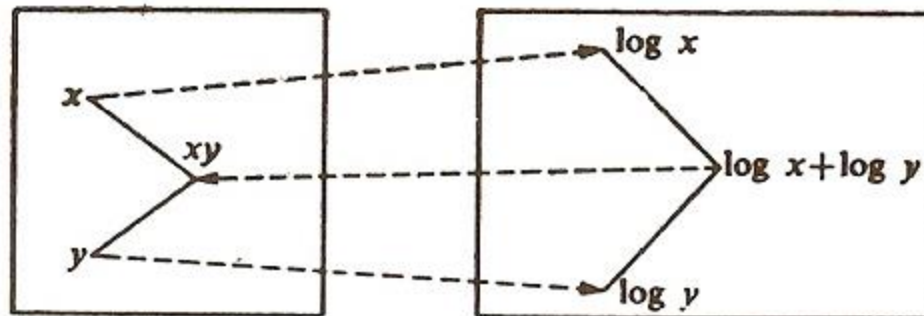
10.5 PROPRIEDADES REPRODUTIVAS

10.6 SEQUENCIAS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

10.1 Introdução

- **Transformações matemáticas:**

Em lugar de executar certas contas diretamente com os números x e y , pode ser mais simples transformá-los por meio de alguma função, fazer as contas e depois transformá-los novamente, em um esquema conforme ilustrado na figura.



10.2 A Função Geratriz de Momentos

- **Definição:**

Seja X uma variável aleatória discreta, com distribuição de probabilidade $p(x_j) = P(X = x_j)$, $j = 1, 2, \dots$. A função M_X , denominada **função geratriz de momentos** de X , é definida por

$$M_X(t) = \sum_{\forall j} e^{tx_j} p(x_j).$$

Se X for uma variável aleatória contínua com fdp f , definiremos a função geratriz de momentos por

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

- **Comentários:**

- a) Em qualquer dos casos, o discreto ou o contínuo, $M_X(t)$ é apenas o **valor esperado** de e^{tX} . Por isso, podemos combinar as expressões acima e escrever

$$M_X(t) = E(e^{tX}).$$

10.2 A Função Geratriz de Momentos

- **Comentários (cont.):**
 - b) $M_X(t)$ é o valor que a função M_X toma para a variável (real) t . A notação, que indica a dependência de X , é empregada porque nós poderemos desejar considerar duas variáveis aleatórias, X e Y , e depois investigarmos a função geratriz de momentos de cada uma delas, a saber M_X e M_Y .
 - c) É normalmente empregada a abreviatura fgm para designá-la.
 - d) A fgm é escrita como uma série infinita ou integral (imprópria), conforme a variável aleatória seja discreta ou contínua. Essa série (ou integral) poderá nem sempre existir (isto é, convergir para um valor finito) para todos os valores de t . Consequentemente, poderá acontecer que a fgm não seja definida para todos os valores de t . No entanto, não nos preocuparemos com esta dificuldade potencial e admitiremos que ela **sempre** exista (note que a fgm existe sempre para $t = 0$ e é igual a 1).

10.2 A Função Geratriz de Momentos

- **Comentários (final):**

- e) Existe uma outra função, estreitamente relacionada com a fgm, a qual é frequentemente empregada em seu lugar.
Ela é denominada *função característica*, denotada por C_X e definida por
- $$C_X(t) = E(e^{itX}),$$
- em que i é a unidade imaginária, $i = \sqrt{-1}$.
Por motivos teóricos, existe enorme vantagem em empregar-se $C_X(t)$ em lugar de $M_X(t)$
[Por esta razão: $C_X(t)$ sempre existe, para todos os valores de t].
Contudo, a fim de evitarmos cálculos com números complexos, restringiremos nossa exposição à função geratriz de momentos.
- f) Adiaremos até a Sec. 10.4 a justificativa para denominar M_X de função geratriz de momentos.

10.3 Exemplos de Funções Geratrizes de Momentos

- **Exemplo:**

Suponha-se que X seja *uniformemente distribuída* sobre o intervalo $[a, b]$. Logo, a fgm será dada por

$$M_X(t) = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{bt}}{t} - \frac{e^{at}}{t} \right], \quad t \neq 0.$$

- **Exemplo II:**

Suponha-se que X seja *binomialmente distribuída*, com parâmetros n e p . Nesse caso

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [pe^t + (1-p)]^n.$$

10.4 Propriedades da Função Geratrizes de Momentos

- **Teorema:**

$$M_X^{(n)}(0) = E(X^n).$$

Ou seja, a derivada n -ésima de $M_X(t)$, avaliada no ponto $t = 0$, fornece $E(X^n)$.

- **Comentários:**

- a) Os números $E(X^n)$, $n = 1, 2, \dots$, são denominados os **momentos de ordem n** da variável aleatória X , em relação a zero. A partir do conhecimento da função M_X , os momentos podem ser gerados. Daí, o nome “função geratriz de momentos”.
- b) Em particular
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = M''(0) - [M'(0)]^2.$$
- c) Pode parecer surpreendente, mas em muitos problemas é mais fácil obter a fgm da variável aleatória X e depois derivá-la, para obter os seus momentos.

10.4 Propriedades da Função Geratrizes de Momentos

- **Exemplo:**

Suponha-se que X tenha uma distribuição binomial com parâmetros n e p . Consequentemente (de exemplo anterior)

$$M_X(t) = [pe^t + q]^n.$$

Por isso,

$$M_X'(t) = n(pe^t + q)^{n-1}pe^t,$$

$$M_X''(t) = np[e^t(n-1)(pe^t + q)^{n-2}pe^t + (pe^t + q)^{n-1}e^t].$$

Logo,

$$E(X) = M_X'(0) = np,$$

o que concorda com resultado anterior.

10.4 Propriedades da Função Geratrizes de Momentos

- **Exemplo (final):**

Também,

$$E(X^2) = M_X''(0) = np[(n-1)p + 1].$$

Daí,

$$V(X) = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2 = np(1-p),$$

também de acordo com resultado anterior.

10.4 Propriedades da Função Geratrizes de Momentos

- **Teorema II:**

Suponha-se que a variável aleatória X tenha uma fgm M_X . Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, M_Y , a fgm da variável aleatória Y , será dada por

$$M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t).$$

- **Explicação:**

Para achar a fgm de $Y = \alpha X + \beta$, calcule-se a fgm de X para αt (em vez de t) e multiplique-se por $e^{\beta t}$.

- **Demonstração:**

$$M_Y(t) = E(e^{Yt}) = E[e^{(\alpha X + \beta)t}] = e^{\beta t} E(e^{\alpha t X}) = e^{\beta t} M_X(\alpha t).$$

10.4 Propriedades da Função Geratrizes de Momentos

- **Teorema III:**

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com fgm $M_X(t)$ e $M_Y(t)$, respectivamente. Se $M_X(t) = M_Y(t)$ para todos os valores de t , então X e Y terão a mesma distribuição de probabilidade.

- **Comentário:**

A demonstração deste teorema é bastante difícil para ser dada aqui, mas o importante é que compreenda exatamente o que ele significa, ou seja, a fgm determina univocamente a distribuição de probabilidade da variável aleatória.

10.4 Propriedades da Função Geratrizes de Momentos

- **Exemplo:**

Suponhamos que X tenha uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, Y será também distribuída normalmente, com $N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.

De fato, de teorema anteriormente visto, teremos que a fgm de Y será

$$M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t).$$

Também, de exemplo anterior, teremos que:

$$M_X(t) = e^{(\mu)t + \frac{(\sigma^2)t^2}{2}}.$$

Portanto,

$$M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t) = e^{\beta t} \left[e^{\alpha\mu t + \frac{(\alpha\sigma)^2 t^2}{2}} \right] = e^{(\alpha\mu + \beta)t + \frac{(\alpha\sigma)^2 t^2}{2}}.$$

10.4 Propriedades da Função Geratrizes de Momentos

- **Teorema IV:**

Suponha-se que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes. Façamos $Z = X + Y$. Sejam $M_X(t)$, $M_Y(t)$ e $M_Z(t)$ as fgm das variáveis aleatórias X , Y e Z , respectivamente. Então

$$M_Z(t) = M_X(t) \times M_Y(t).$$

- **Demonstração:**

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E(e^{Zt}) = E[e^{(X + Y)t}] = E(e^{Xt + Yt}) \\ &= E(e^{Xt}) \times E(e^{Yt}) = M_X(t) \times M_Y(t). \end{aligned}$$

10.4 Propriedades da Função Geratrizes de Momentos

- **Comentário:**

Este teorema pode ser generalizado assim. Se $X_1, \dots, X_n$ forem variáveis aleatórias independentes, com fgm $M_{X_i}(t)$, $i = 1, \dots, n$, então $M_Z(t)$, a fgm de

$$Z = X_1 + \dots + X_n,$$

será dada por

$$M_Z(t) = M_{X_1}(t) \times \dots \times M_{X_n}(t).$$

10.5 Propriedades Reprodutivas

- **Definição:**

Se duas (ou mais) variáveis aleatórias tiverem uma determinada distribuição, forem somadas e a variável aleatória resultante desta soma tiver uma distribuição do mesmo tipo que aquela das parcelas, dizemos que elas obedecem à *propriedade reprodutiva* (ou *aditiva*).

- **Exemplo:**

Suponha-se que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, com distribuições $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, respectivamente. Façamos $Z = X + Y$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}M_Z(t) &= M_X(t) \times M_Y(t) \\&= e^{\mu_1 t + \sigma_1^2 \frac{t^2}{2}} \times e^{\mu_2 t + \sigma_2^2 \frac{t^2}{2}} \\&= e^{(\mu_1 + \mu_2)t + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{t^2}{2}},\end{aligned}$$

que representa a fgm de uma variável aleatória normalmente distribuída, com valor esperado $\mu_1 + \mu_2$ e variância $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

10.5 Propriedades Reprodutivas

- **Teorema (Propriedade aditiva da distribuição normal):**

Sejam $X_1, \dots, X_n$ n variáveis aleatórias independentes com distribuição $N(\mu_i; \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$.

Façamos $Z = X_1 + \dots + X_n$. Então, Z terá distribuição

$$N(\sum_{i=1}^n \mu_i; \sum_{i=1}^n \sigma_i^2).$$

- **Demonstração:**

Deixada como exercício.

10.5 Propriedades Reprodutivas

- **Teorema II:**

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson, com parâmetro α_i , $i = 1, \dots, n$. Então $Z = X_1 + \dots + X_n$ terá distribuição de Poisson com parâmetro

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

- **Demonstração:**

Considera-se, inicialmente o caso de $n = 2$, e completa-se por indução matemática

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(t) \\ &= e^{\alpha_1(e^t-1)} \times e^{\alpha_2(e^t-1)} \\ &= e^{(\alpha_1 + \alpha_2)(e^t-1)}. \end{aligned}$$

10.5 Propriedades Reprodutivas

- **Teorema III:**

Suponha-se que a distribuição de X_i seja $\chi^2_{n_i}$, $i = 1, \dots, k$, em que os X_i sejam variáveis aleatórias independentes. Então, $Z = X_1 + \dots + X_k$ terá distribuição χ^2_n , em que $n = n_1 + \dots + n_k$.

- **Demonstração:**

Demonstra-se, pelo produto das fgm da distribuição chi-quadrado

$$M_{X_i}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n_i}{2}}, i = 1, \dots, k,$$

o que fornece

$$M_Z(t) = (1 - 2t)^{-\frac{(n_1 + \dots + n_k)}{2}}.$$

10.5 Propriedades Reprodutivas

- **Teorema IV:**

Suponha-se que $X_1, \dots, X_k$ sejam variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição $N(0,1)$. Então, $S = X_1^2 + \dots + X_k^2$ terá distribuição χ_k^2 .

- **Comentários:**

- a) Para $T = \sqrt{S}$, quando $n = 2$, T segue uma distribuição conhecida como *distribuição de Rayleigh*.
- b) Para $T = \sqrt{S}$, quando $n = 3$, T segue uma distribuição conhecida como *distribuição de Maxwell*.

10.5 Propriedades Reprodutivas

- **Teorema V:**

Seja $Z = X_1 + \dots + X_r$, em que os X_i são r variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, cada uma tendo distribuição exponencial, com o mesmo parâmetro α . Então Z terá uma distribuição gama, com parâmetros α e r .

- **Comentários:**

- a) O teorema não será verdadeiro se os parâmetros das várias distribuições exponenciais forem diferentes, o que fica evidente quando consideramos a fgm da soma das variáveis aleatórias.
- b) O seguinte corolário do teorema apresenta considerável importância em algumas aplicações estatísticas. A variável aleatória $W = 2\alpha Z$ tem distribuição χ^2_{2r} . Assim, podemos calcular determinadas probabilidades associadas a Z pelo uso de tábuas da distribuição qui-quadrado, se α e r forem dados. Por exemplo

$$P(Z \leq 3) = P(2\alpha Z \leq 2\alpha 3) = P(W \leq 6\alpha).$$

10.6 Sequencias de Variáveis Aleatórias

- Suponha-se que temos uma sequência de variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_i, \dots$. Cada uma dessas variáveis aleatórias poder ser descrita em termos de F_i , sua fd, em que $F_i(t) = P(X_i \leq t)$, $i = 1, 2, \dots$. É frequente estarmos interessados no que ocorre a F_i , quando $i \rightarrow \infty$, isto é, na **função distribuição limite** F correspondente a alguma variável aleatória X , tal que em algum sentido as variáveis aleatórias X_i convirjam para X .
- Situações como essa podem surgir quando consideramos n observações independentes de uma variável aleatória X , por exemplo, $X_1, \dots, X_n$. Poderemos estar interessados na média aritmética dessas observações
$$\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n) / n,$$
que é também uma variável aleatória. Seja $\bar{F}$ a fd de $\bar{X}$. Poderá interessar saber o que ocorre à distribuição de $\bar{X}$ quando n se torna grande. O teorema seguinte auxilia na resolução desse problema.

10.6 Sequencias de Variáveis Aleatórias

- **Teorema:**

Seja $X_1, \dots, X_n, \dots$, uma sequência de variáveis aleatórias com fd $F_1, \dots, F_n, \dots$, e fgm $M_1, \dots, M_n, \dots$. Suponha-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t) = M(t),$$

em que $M(0) = 1$. Então, $M(t)$ é a fgm da variável aleatória X , cuja fd F é dada pelo $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t)$.

- **Comentários:**

O teorema diz que para obter a distribuição limite F procurada é *suficiente* estudar as funções geratrizes de momentos das variáveis aleatórias sob exame. Obteremos a forma limite da sequência $M_1, \dots, M_n, \dots$, digamos $M(t)$. Em virtude da unicidade das fgm, existirá apenas uma distribuição de probabilidade correspondente à fgm $M(t)$. Assim, poderemos reconhecer M como a fgm de uma distribuição conhecida (tal como a normal, a de Poisson etc.).