

Ex. 6.8:

Admita que X represente a duração da vida de um dispositivo eletrônico e suponha que X seja uma variável aleatória contínua com fdp

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2}, & x > 1000, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Sejam X_1 e X_2 duas determinações independentes da variável aleatória X acima. (Isto é, suponha que estejamos ensaiando a duração da vida de dois desses dispositivos.) Ache a fdp $q(z)$, da variável aleatória $Z = \frac{X_1}{X_2}$.

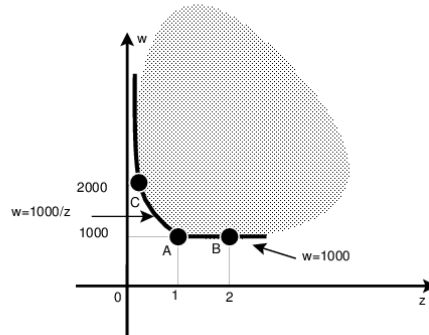
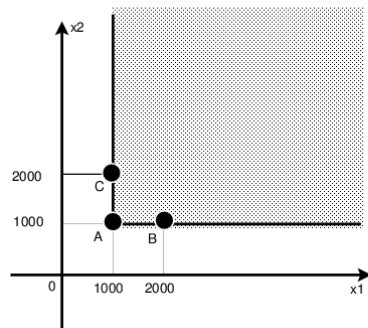
Seja:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1000}{x_1^2} \times \frac{1000}{x_2^2}, & x_1 > 1000, x_2 > 1000, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$z = H_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}, \quad x_1 = G_1(z, w) = zx_2 = zw,$$

$$w = H_2(x_1, x_2) = x_2, \quad x_2 = G_2(z, w) = w,$$

$$k(z, w) = f(x_1, x_2) \left| \frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial w} \right| = f(zw, w) \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1000}{(zw)^2} \times \frac{1000}{(w)^2} \times w = 1000^2 z^{-2} w^{-3},$$



(x_1, x_2)

$\rightarrow$

(z, w)

$$A: (x_1 = 1000; x_2 = 1000) \rightarrow A: (z = x_1/x_2 = 1; w = x_2 = 1000)$$

$$B: (x_1 = 2000; x_2 = 1000) \rightarrow B: (z = x_1/x_2 = 2; w = x_2 = 1000)$$

$$C: (x_1 = 1000; x_2 = 2000) \rightarrow C: (z = x_1/x_2 = 0,5; w = x_2 = 2000)$$

$$\begin{cases} x_1 > 1000, \\ x_2 > 1000, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z > 0, \\ w > \frac{1000}{z}, \text{ se } 0 < z < 1, \\ w > 1000, \text{ se } z \geq 1, \end{cases}$$

$$q(z) = \begin{cases} \int_{\frac{1000}{z}}^{+\infty} \frac{1000^2}{z^2} w^{-3} dw = \frac{10^6}{z^2} \frac{w^{-2}}{-2} \Big|_{\frac{10^3}{z}}^{+\infty} = \frac{10^6}{2z^2} \times \frac{10^{-6}}{z^{-2}} = \frac{1}{2}, & 0 < z < 1 \\ \int_{1000}^{+\infty} \frac{1000^2}{z^2} w^{-3} dw = \frac{10^6}{z^2} \int_{10^3}^{+\infty} w^{-3} dw = \frac{10^6}{z^2} \frac{w^{-2}}{-2} \Big|_{10^3}^{+\infty} = \frac{10^6}{z^2} \frac{10^{-6}}{2} = \frac{1}{2z^2}, & z \geq 1, \end{cases}$$