Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Implementação do Método de Alisamento Exponencial Duplo a Um Parâmetro no Minitab 12

O. F. Neves, F. R. B. Cruz e E. M. M. Toscano

Relatório Técnico
RTA-02/2000

Relatório Técnico
Série Assessoria

Implementação do Método de Alisamento Exponencial Duplo a Um Parâmetro no Minitab 12

Otaviano F. Neves, Frederico R. B. Cruz e Ela M. M. Toscano

Caixa Postal 702
Departamento de Estatística
Instituto de Ciências Exatas - UFMG
30.123-970 - Belo Horizonte -MG

e-mail: {otaviano,fcruz,mercedes}@est.ufmg.br

Resumo

Apresentamos uma descrição do método de alisamento exponencial duplo a um parâmetro (*one parameter double exponential smoothing*), bem como uma implementação do mesmo no Minitab®, versão 12. Exemplificamos a utilização desta metodologia, apresentando a análise de duas séries, uma de vendas e outra de custo de vida. Os resultados obtidos mostram que a implementação é efetiva e pode ajudar a difundir o uso desta técnica

Sumário

Resumo 2

Sumário 3

1. Introdução 4

2. Alisamento Exponencial Duplo a Um Parâmetro 4

3. Descrição da Implementação 8

4. Dois Exemplos de Utilização 9

5. Conclusões 14

Agradecimentos 15

Referências Bibliográficas 15

Apêndice A - Código do Programa 16

1. Introdução

Uma importante área de conhecimento da estatística é a que trata de séries temporais. Definimos com série temporal um conjunto de observações ordenadas ao longo do tempo. Um dos principais objetivos da análise de séries temporais é obter previsões de valores futuros da série. Existem vários métodos de previsão. Entre eles, podemos citar os métodos chamados automáticos, tais como, o média móvel simples, o alisamento exponencial [1], entre outros.

Os métodos automáticos de previsão são assim conhecidos por serem aplicados diretamente à série, bastando para tanto, a utilização de processos computacionais elementares. O termo "automático" significa que existem algumas equações prontas para modelar a série e que estamos interessados apenas em estimar seus parâmetros. É importante salientar que esses métodos não são baseados em nenhum modelo estatístico, o que os torna vantajosos em algumas situações.

Este trabalho tem como objetivo a implementação do método de alisamento exponencial duplo a um parâmetro para o programa Minitab® [2]. Este método é geralmente usado em séries que apresentam tendência.

Apresentamos a seguir a descrição do método. Em seqüência, ilustramos a utilização da implementação proposta, através da análise de duas séries. Conclusões finais encerram o texto.

2. Alisamento Exponencial Duplo a Um Parâmetro

Suponhamos que uma série temporal possa ser descrita convenientemente

por uma tendência linear. Assim, podemos escrever

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t,$$

onde β_0 é o coeficiente linear, β_1 é o coeficiente angular e ε_t é o erro.

Quando os parâmetros β_0 e β_1 não estão mudando com o tempo, um modelo de regressão pode ser usado para prever valores futuros de y_t. Quando fazemos isto, estamos ponderando as observações de forma equivalente, e calculando os estimadores de β_0 e β_1, pelo método dos mínimos quadrados.

Quando os valores dos parâmetros β_0 e β_1 estão mudando lentamente com o tempo, ponderações iguais podem não ser apropriadas. Neste caso o alisamento exponencial duplo pode ser usado para aplicar ponderações diferenciadas às observações da série. Duas versões do alisamento exponencial duplo são usadas; de um e de dois parâmetros, as quais empregam uma ou duas constantes de alisamento respectivamente. A constante de alisamento determina que ponderação é atribuída a cada observação da série temporal. Estas ponderações são aplicadas de forma a dar maior valor as observações mais recentes e menor valor para as demais. A seguir, apresentamos os passos do método de alisamento exponencial duplo com um parâmetro.

Suponha que no tempo $T-1$ calculamos as estimativas $b_0(T-1)$ e $b_1(T-1)$ dos parâmetros β_0 e β_1. A notação $(T-1)$ enfatiza o tempo em que as estimativas foram calculadas. Suponha também que obtemos uma nova observação y_T no tempo T e que gostaríamos de usá-la para atualizar nossas estimativas de β_0 e β_1.

Para obtermos estimativas atualizadas, o alisamento exponencial duplo a um parâmetro emprega o que chamamos de estatísticas de alisamento simples e dupla, denotadas por S_T e $S_T^{[2]}$. Estas estatísticas são calculadas usando-se duas equações de alisamento:

$$S_T = \alpha y_T + (1-\alpha) S_{T-1} \text{ e}$$

(1)

$$S_T^{[2]} = \alpha S_T + (1-\alpha) S_{T-1}^{[2]},$$

onde ambas empregam a mesma constante de alisamento α, definida entre 0 e 1. A primeira equação alisa as observações originais da série temporal. A segunda alisa os valores de S_T que foram obtidos usando a primeira equação. Através de S_T e $S_T^{[2]}$ obtemos estimativas atualizadas como se segue:

$$b_1(T) = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_T - S_T^{[2]}) \text{ e}$$

(2)

$$b_0(T) = 2S_T - S_T^{[2]} - Tb_1(T).$$

A previsão feita no tempo T para o valor futuro $y_{T+\tau}$, isto é, τ passos a frente, é:

$$\hat{y}_{T+\tau}(T) = \left(2 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)}\right) S_T - \left(1 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)}\right) S_T^{[2]}.$$

(3)

Um intervalo de 100(1 - α)% de confiança para $y_{T+\tau}$ é:

$$[\hat{y}_{T+\tau}(T) \pm z_{\alpha/2} d_\tau \Delta(T)],$$

(4)

onde:

$$\Delta(T) = \frac{\sum_{t=1}^{T} | y_t - \hat{y}_t(t-1) |}{T},$$

$$d_\tau = 1{,}25\left[\frac{1+\frac{\alpha}{(1+\nu)^3}[(1+4\nu+5\nu^2)+2\alpha(1+3\nu)\tau+2\alpha^2\tau^2]}{1+\frac{\alpha}{(1+\nu)^3}[(1+4\nu+5\nu^2)+2\alpha(1+3\nu)+2\alpha^2]}\right]^{1/2},$$

e

$$\nu = 1-\alpha\,.$$

Além disso, se observarmos y_{T+1} no tempo $T+1$, podemos atualizar $\Delta(T)$ para $\Delta(T+1)$ usando a equação:

$$\Delta(T+1) = \frac{T\Delta(T)+|\,y_{T+1}-\hat{y}_{T+1}(T)\,|}{T+1},$$

(5)

onde S_T, $S_T^{[2]}$, $b_0(T)$ e $b_1(T)$ são atualizados usando-se as equações (1) e (2), com o T substituído por $T+1$. Segue que a previsão de $y_{T+1+\tau}$, feita no tempo $T+1$, é obtida usando-se a equação (3), com o T substituído por $T+1$, e que o intervalo de $100(1 - \alpha)\%$ de confiança, para $y_{T+1+\tau}$ é:

$$[\hat{y}_{T+1+\tau}(T+1) \pm z_{\alpha/2} d_\tau \Delta(T+1)]\,.$$

(6)

A determinação da constante de alisamento para o alisamento exponencial duplo com um parâmetro é efetuada pela previsão simulada de um conjunto de dados históricos. Primeiramente, uma reta é ajustada a uma parte dos dados avaliados (freqüentemente, metade dos dados são empregados, embora um número menor de observações possa também ser adequado). Esta regressão produz estimativas iniciais $b_0(0)$ e $b_1(0)$, para os parâmetros β_0 e β_1. Usando-se as equações *(2)*, que relacionam $b_0(T)$ e $b_1(T)$ com S_T e $S_T^{[2]}$, pode ser mostrado que:

$$S_0 = b_0(0) - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) b_1(0) \text{ e}$$

$$S_0^{[2]} = b_0(0) - 2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) b_1(0). \quad (7)$$

Portanto, as equações (7) são usadas para obter valores iniciais S_0 e $S_0^{[2]}$ de S_T e $S_T^{[2]}$. Começando-se com esses valores iniciais, o conjunto de dados históricos é usado para atualizar S_T e $S_T^{[2]}$, e, a cada tempo, uma previsão é calculada, usando-se os valores atuais dessas estatísticas alisadas. Este procedimento é repetido para vários valores de α e o valor de α que minimiza a soma dos quadrados dos erros é selecionado para ser usado em previsões de valores futuros.

Quando o valor ótimo da constante de alisamento α for escolhido, novas estimativas iniciais de β_0 e β_1 são calculadas, usando-se, desta vez, uma regressão linear simples com todo o conjunto de dados históricos. Então S_0 e $S_0^{[2]}$ são recalculadas e estes novos valores iniciais são atualizados usando-se os dados históricos. Quando valores atualizados de S_T e $S_T^{[2]}$ forem obtidos, previsões de valores futuros da série temporal podem ser calculadas. Quando não há um conjunto de dados históricos, a primeira observação obtida é comumente usada como o valor inicial de S_T e $S_T^{[2]}$.

3. Descrição da Implementação

A implementação foi desenvolvida como uma *macro* para o Minitab®, versão 12, e está disponível aos interessados no Apêndice A, ou diretamente com os autores, a pedido.

A análise de uma série arbitrária se inicia pela procura da melhor constante de alisamento α. Em outras palavras, o valor de α a ser utilizado é aquele que minimiza a soma dos quadrados dos erros de previsão a um passo à frente, $\varepsilon = y_T - \hat{y}_T(T-1)$.

O algoritmo escolhido para resolver este problema de otimização foi o da seção áurea [3], pela simplicidade, facilidade de implementação e por apresentar geralmente um desempenho computacional bastante satisfatório. De fato, vale ressaltar que, para as séries testadas, a determinação do valor ótimo para α se dá em poucos segundos, utilizando-se um computador pessoal Pentium® 90 MHz , 16 Mb de RAM, sob o sistema operacional Windows® 95.

Dada uma constante de alisamento α, ajustamos uma linha reta às primeiras 6 observações, conforme sugerido por Bowerman e O'Connel [1]. Encontramos estimativas para β_0 e β_1, via mínimos quadrados. Calculamos os valores das estatísticas de alisamento, S_T e $S_T^{[2]}$, das previsões y_T, e o quadrado da soma do erros de previsão. Assim, o programa varre diversos valores para a constante de alisamento α, segundo o algoritmo da seção áurea, repetindo os passos anteriores, até que a soma de quadrado dos erros seja mínima, quando então considera-se que o α ótimo foi encontrado. São feitas então as previsões, através das equações de previsão.

4. Dois Exemplos de Utilização

Utilizaremos o alisamento exponencial duplo a um parâmetro para prever valores em uma série de vendas de um determinado estabelecimento, utilizada por Riggs [4], e na série do índice do custo de vida, no município de São Paulo, de janeiro de 1978 a junho de 1980, obtida junto à Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (FIPE).

Os valores históricos da série *vendas* estão apresentados na Tabela 1 e na Figura 1. Para esta série, o alisamento exponencial é uma boa alternativa por não haver disponíveis muitas observações, o que dificultaria a determinação de um padrão de comportamento. Em particular, o alisamento exponencial duplo capta tendências. Finalmente, a existência de apenas um parâmetro é vantajosa, do ponto de vista computacional, por exigir o esforço de otimizar apenas uma variável.

Tabela 1: Série Vendas

trimestre	vendas	trimestre	vendas	trimestre	vendas
1	106,8	6	92,7	11	93,5
2	102,3	7	94,6	12	92,9
3	97,4	8	94,9	13	94,5
4	93,5	9	94,3	14	94,1
5	92,4	10	94,1	15	96,2

Fonte: Riggs [4].

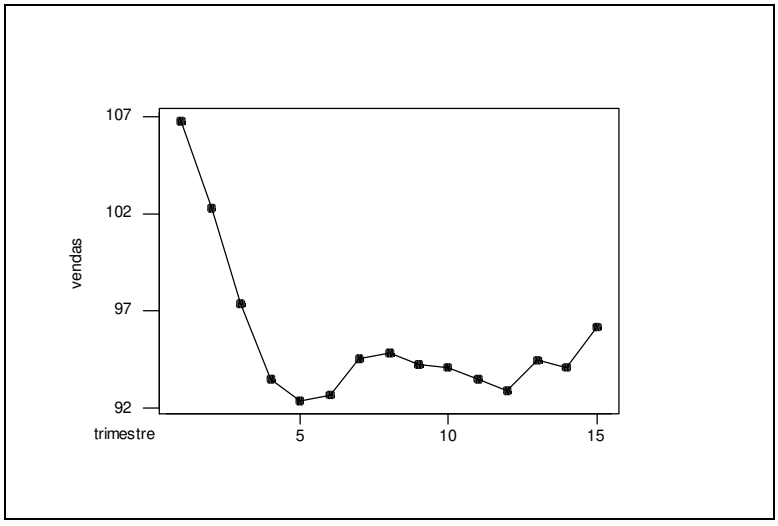

Figura 1: Série Vendas

Para analisarmos a série *vendas*, a partir do programa aqui implementado e disponibilizado, precisamos inicialmente de determinar o valor ótimo de α. Isto pode ser feito através dos seguintes comandos:

```
Current worksheet: vendas.MTW

MTB > %c:\opdes c2;
SUBC> origin 10;
SUBC> sumsqerror k1;
SUBC> noplot.
```

Note que assumimos que a série se encontra na coluna c2, apenas os 10 primeiros valores serão utilizados para ajuste da série, a partir dos quais começam as previsões, a soma dos quadrados dos erros será armazenada na variável k1 e não será requisitado a representação gráfica da série neste momento. Normalmente, decide-se utilizar apenas parte da série (neste exemplo, os 10 primeiros valores), para deixar o restante da série para avaliar a adequação do modelo, através dos erros de previsão. O resultado obtido foi:

```
One Parameter Double Exponential Smoothing

Macro running ... please wait

Data Display

Alpha     0,998814
K1        31,8536
Macro exiting ...
```

Encontramos, portanto, um α ótimo igual 0,998814. Através deste valor, serão feitas as previsões. Os comandos para a previsão são:

```
MTB > %c:\opdes c2;
SUBC> weight 0,998814;
SUBC> origin 10;
SUBC> number 5;
SUBC> smoothed c3;
SUBC> forecasts c4;
SUBC> levels 0,95;
SUBC> lowers c5;
SUBC> uppers c6.
```

Utilizando o α ótimo e considerando a origem a partir do 10º ponto,

pedimos 5 previsões. A série amortecida será armazenada na coluna c3, a série de previsões, na coluna c4, o nível de confiança é de 0,95, para construção dos intervalos e os limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança ficarão nas colunas c5 e c6, respectivamente. Os resultados de previsão, bem como os limites de confiança estão representados na Tabela 2 e na Figura 2. Observamos que as previsões são boas, porém os limites de confiança são bastante largos.

Tabela 2: Previsões para a Série Vendas

Trimestre	Valor Real	Previsão	Limite Inferior	Limite Superior
11	93,5	93,8991	87,8338	99,964
12	92,9	93,6981	84,4406	102,956
13	94,5	93,4972	80,8859	106,108
14	94,1	93,2962	77,2708	109,322
15	96,2	93,0953	73,6270	112,564

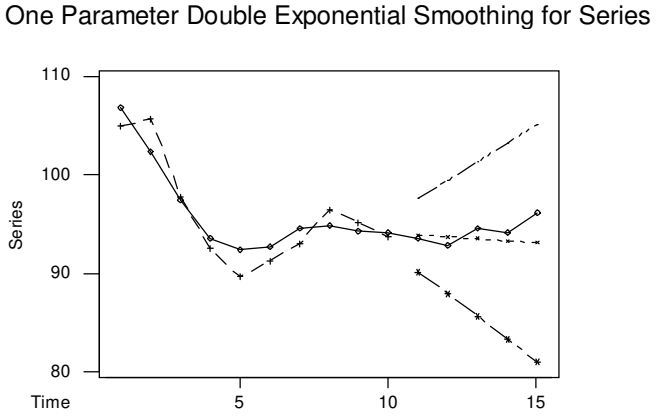

Figura 2: Previsões para a Série Vendas

A seguir, analisaremos, através do mesmo procedimento, a série de custo de vida. O método de alisamento exponencial duplo a um parâmetro é adequado a esta série pelas mesmas razões anteriormente expostas. A Tabela 3 e a Figura 3 representam as observações da série.

Tabela 3: Série Custo de Vida

Mês	Índice	Mês	Índice	Mês	Índice
1	456	11	617	21	894
2	474	12	628	22	936
3	486	13	653	23	980
4	495	14	667	24	1049
5	510	15	707	25	1096
6	535	16	731	26	1133
7	558	17	746	27	1182
8	572	18	778	28	1237
9	586	19	812	29	1309
10	602	20	840	30	1374

Fonte: Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (FIPE).

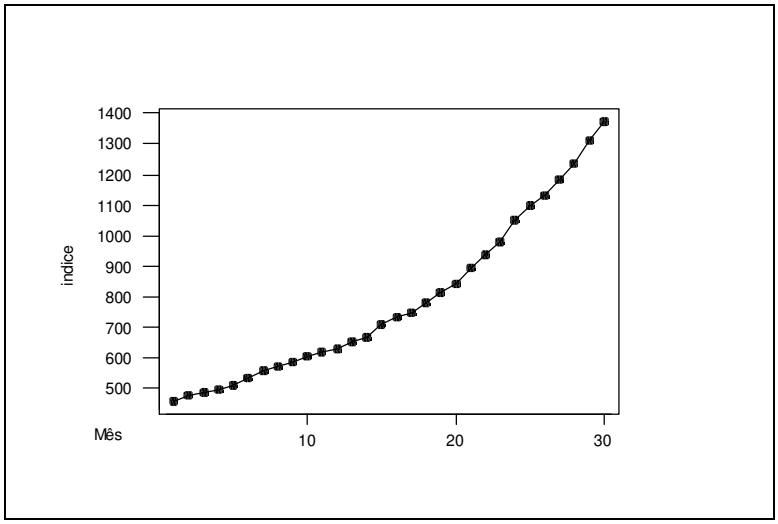

Figura 3: Série Custo de Vida

De maneira análoga ao exemplo anterior, o α ótimo pode ser obtido através dos seguintes comandos:

```
Current worksheet: custo de vida.MTW

MTB > %c:\opdes c2;
SUBC> origin 24;
SUBC> sumsqerror k1;
SUBC> noplot.
```

Utilizando-se o α ótimo encontrado (0,698887) e executando-se os

comandos para cálculo das previsões, obtiveram-se os resultados apresentados na Tabela 4 e na Figura 4.

Tabela 4: Previsões para a Série Custo de Vida

Mês	Valor Real	Previsão	Limite Inferior	Limite Superior
25	1096	1102,70	1075,22	1130,18
26	1133	1158,72	1124,05	1193,39
27	1182	1214,74	1172,25	1257,23
28	1237	1270,76	1220,12	1321,40
29	1309	1326,78	1267,79	1385,77
30	1374	1382,80	1315,34	1450,27

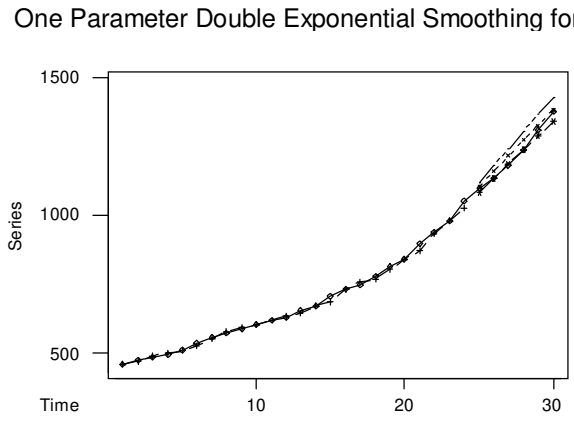

Figura 4: Previsões para a Série Custo de Vida

Por uma análise subjetiva puramente visual, as previsões apresentadas na Figura 4 parecem ser bastante satisfatórias. Entretanto, uma análise objetiva, incluindo análise de erros de previsão, bem como comparações com outras metodologias disponíveis, foge ao escopo deste trabalho.

5. Conclusões

Podemos concluir que os método automáticos de previsão são uma opção a considerar, quando trabalhamos com séries relativamente pequenas, como as exemplificadas neste trabalho. As análises apresentadas mostraram que,

mesmo para um conjunto pequeno de observações, podem-se encontrar previsões úteis, para um futuro não muito distante. Esperamos que a implementação desta *macro* no Minitab® possibilite uma utilização ainda mais ampla do método de alisamento exponencial duplo a um parâmetro, visto que este procedimento até então não estava disponibilizado neste *software*, de utilização tão difundida na comunidade da área.

Agradecimentos

Agradecimentos bem especiais vão à Prof. Glaura C. Franco, pela cuidadosa leitura e pelas valiosas críticas e sugestões que tornaram este trabalho mais legível.

Referências Bibliográficas

[1] Bowerman, B. L; O´Connell, R. T. *Forecasting And Time Series: An Applied Approach*. Duxbury Press, Belmont, USA, 1993.

[2] Minitab Inc. *MINITAB Reference Manual – Release 12*. Pennsilvania : The Pennsilvania States University, 1996.

[3] Mateus, G. R. e Luna, H. P. L. *Programação Não-linear*. V Escola de Computação, UFMG, Belo Horizonte, 1986.

[4] Riggs, J. L. *Administração da Produção*. Editora Atlas S.A., Vol. 1, São Paulo, 1981.

Apêndice A - Código do Programa

```
#######################################################################
#                                                                     #
# Macro:   OPDES.MAC                                                  #
# Version: 2.00                                                       #
# Date :   June, 1999                                                 #
# Author:  F. R. B. Cruz, O. F. Neves, and E. M. M. Toscano           #
#          Departamento de Estatistica - ICEx                         #
#          UFMG - Brazil                                              #
# Note:    This macro implements the one parameter                    #
#          double exponential smoothing as described by:              #
#          B. L. Bowerman and R. T. O'Connell                         #
#          Forecasting and Time Series: An Applied Approach           #
#          Duxbury Press, Belmont, USA, 1993                          #
#                                                                     #
#######################################################################
#
macro
opdes      Series;
weight     Alpha;
origin     InitPt;
number     NuOfFor;
smoothed   Smooth;
forecasts  Forecast;
levels     Level;
lowers     Lower;
uppers     Upper;
SumSqError SumSqEr;
NoPlot.
#
# declarations
mcolumn Series Smooth Forecast Lower Upper
mconstants Alpha InitPt NuOfFor Level SumSqEr
mcolumn SAux time c2 c3 c4 AbsError
mconstants SSize Size Beta0 Beta1 Index S S2 StartPt EndPt Delta V Dt Aux Z
mconstants Epsilon F A B W GV GW
default Alpha=-1 InitPt=-1 NuOfFor=0 Level=0.95
#
noecho
brief 2
mtitle 'One Parameter Double Exponential Smoothing'
note Macro running ... please wait
brief 0
#
erase Smooth
erase Forecast
erase Upper
erase Lower
count Series SSize
nmiss Series
if InitPt=-1
   let InitPt = SSize
endif
```

```
if InitPt < SSize
   let SSize = InitPt
endif
if Alpha > 0
note do know Alpha, computing SumSqError right away
# compute beta0 and beta1
#   create vector of time
#  if NuOfFor = 0
#     note assuming I optimize, I shall use part of data
     copy Series SAux;
       Use 1:6.
     set Time
       1:6
     end
#  else
#     note assuming optimum was found, I shall use all data
#     copy Series SAux;
#       Use 1:SSize.
#     set Time
#       1:SSize
#     end
#  endif
#   perform regression
  Regress SAux 1 Time;
    Coefficients c2;
    Constant.
  let beta0 = c2(1)
  let beta1 = c2(2)
  copy Series SAux;
     Use 1:SSize.
# compute sum of square errors
  let S = beta0 - (1-Alpha)*beta1/Alpha
  let S2 = beta0 - 2*(1-Alpha)*beta1/Alpha
  do Index = 1:SSize
     let Smooth(Index) = (2+Alpha/(1-Alpha))*S - (1+Alpha/(1-Alpha))*S2
     let S = Alpha*SAux(Index) + (1-Alpha)*S
     let S2 = Alpha*S + (1-Alpha)*S2
  enddo
  let AbsError = ABS(SAux - Smooth)
  let SumSqEr = sum(AbsError**2)
# compute Forecast and confidence intervals for NuOfFor steps ahead
#   compute Delta
  let Delta = SUM(AbsError)/SSize
  let V = 1 - Alpha
  let Aux = (1+Level)/2
  InvCDF Aux Z;
     Normal 0.0 1.0.
#   compute forecasts and confidence intervals
  let Index = InitPt+1
  let EndPt = InitPt+NuOfFor
  while ( Index <= EndPt )
     let Forecast(Index) = (2+Alpha*(Index-SSize)/(1-Alpha))*S -
         (1+Alpha*(Index-SSize)/(1-Alpha))*S2
     let Dt = 1 + Alpha/(1+V)**3*(1+4*v + 5*V**2 +
         2*Alpha*(1+3*V)*(Index-SSize) + 2*Alpha**2*(Index-SSize)**2)
     let Dt = 1.25*SQRT(Dt/(1+Alpha/(1+V)**3*
```

```
              (1+4*v + 5*V**2 + 2*Alpha*(1+3*V) + 2*Alpha**2)))
     let Lower(Index) = Forecast(Index)-Z*Dt*Delta
     let Upper(Index) = Forecast(Index)+Z*Dt*Delta
     let Index = Index + 1
  endwhile
  brief 2
  print Alpha SumSqEr
  brief 0
  if noplot = 0
#      plot graphs
      brief 2
      note Ploting graph ... please wait
      brief 0
      TSPlot Series Smooth Forecast Lower Upper;
        TDisplay 11;
        Symbol;
        Connect;
        Title "One Parameter Double Exponential Smoothing for Series";
        Overlay;
        Axis 11;
        Label "Time";
        Axis 2;
        Label "Series".
  endif
else
# don't know Alpha, optimize Alpha first (Golden Section Method)
note don't know Alpha, optimizing first
  copy Series SAux;
    use 1:SSize.
  let Epsilon = 0.005
  let F = (SQRT(5)-1)/2
  let A = 0.0
  let B = 1.0
  let V = B - F*(B-A)
  let W = A + F*(B-A)
  %opdes        SAux;
     weight     V;
     smoothed   Smooth;
     SumSqError GV;
     NoPlot.
  %opdes        SAux;
     weight     W;
     smoothed   Smooth;
     SumSqError GW;
     NoPlot.
  while (F*(B-A) > Epsilon)
      if GV < GW
         let B = W
         let W = V
         let GW = GV
         let V = B - F*(B-A)
         %opdes       SAux;
           weight     V;
           smoothed   Smooth;
           SumSqError GV;
           NoPlot.
```

```
      else
         let A = V
         let V = W
         let GV = GW
         let W = A + F*(B-A)
         %opdes       SAux;
           weight     W;
           smoothed   Smooth;
           SumSqError GW;
           NoPlot.
      endif
  endwhile
  if GV < GW
     let B = W
     let Alpha = B - F*(B-A)
  else
     let A = V
     let Alpha = A + F*(B-A)
  endif
  if NoPlot = 0
     %opdes        Series;
        weight     Alpha;
        origin     InitPt;
        number     NuOfFor;
        smoothed   Smooth;
        forecasts  Forecast;
        levels     Level;
        lowers     Lower;
        uppers     Upper;
        SumSqError SumSqEr.
  else
     %opdes        Series;
        weight     Alpha;
        origin     InitPt;
        number     NuOfFor;
        smoothed   Smooth;
        forecasts  Forecast;
        levels     Level;
        lowers     Lower;
        uppers     Upper;
        SumSqError SumSqEr;
        NoPlot.
  endif
endif
brief 2
# exit
note Macro exiting ...
endmacro
```