Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Utilização do Planejamento de Experimentos no Projeto do Eixo da Barra de Torção da Suspensão Traseira de um Automóvel

I.A. Reis, A. V. M. Fonseca

Relatório Técnico RTA-05/99

Relatório Técnico
Série Assessoria

Utilização do Planejamento de Experimentos no Projeto do Eixo da Barra de Torção da Suspensão Traseira de um Automóvel

Ilka Afonso Reis
Departamento de Estatística
Universidade Federal de Minas Gerais

Augusto Virgilio Mascarenhas Fonseca
Departamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal de Minas Gerais

Prefácio

Este trabalho foi desenvolvido junto à equipe de projeto de uma empresa do setor automobilístico. Essa equipe não tinha experiência com a técnica de Planejamento de Experimentos. Desse modo, o trabalho também teve um caráter didático e de divulgação da técnica. Por motivos de sigilo industrial, não divulgaremos o nome da empresa e nem o nome das variáveis envolvidas. Acreditamos que isso não prejudica o entendimento do problema do ponto de vista estatístico, apesar de perdemos um pouco na interpretação e discussão dos resultados. Entretanto, esse trabalho não poderia ser divulgado sem o uso do sigilo.

Gostaríamos de agradecer, mesmo que anonimamente, à equipe de projeto com a qual trabalhamos pela disposição e ajuda na elaboração desse relatório, bem como pela permissão para a sua divulgação.

Em especial, gostaríamos de agradecer à Professora Maria de Fátima Brant Drumond, do Departamento de Estatística da UFMG, que, mesmo desempenhando todas as inúmeras funções na chefia desse departamento, encontrou tempo e disposição para nos conceder uma preciosa colaboração na análise dos dados.

Evidentemente, todas as falhas e omissões porventura presentes nesse relatório são de inteira responsabilidade dos autores.

Belo Horizonte, setembro de 1999

Sumário

O Planejamento de Experimentos é uma técnica estatística largamente usada no estudo de sistemas ou processos onde a experimentação é necessária. Isso ocorre em diversas áreas, como agronomia, veterinária, biologia, psicologia e, principalmente, na área industrial.

Nesse trabalho, a técnica do Planejamento de Experimentos é utilizada no projeto de um produto, o Eixo da Barra de Torção da Suspensão Traseira de um automóvel.

O objetivo desse estudo é definir qual a melhor geometria a ser utilizada na construção da peça e ainda verificar e quantificar os efeitos das variáveis geométricas em relação à inércia, definida a partir da geometria da seção transversal da barra.

Na análise exploratória dos resultados dos experimentos, verifica-se que a geometria escolhida a priori pela equipe de trabalho encontra-se bem próxima a experimentos cujos os resultados estão dentro das faixas especificadas para as inércias em estudo. Além disso, a geometria correspondente a esses experimentos podem representar alternativas à geometria escolhida.

Como os experimentos desse estudo são simulações em computador, apresentando um custo desprezível, dois tipos de planejamentos alternativos são utilizados : o planejamento fatorial completo e planejamento fatorial fracionado. Desse modo, os dois planejamentos poderão ser comparados. A vantagem do fatorial fracionado sobre o fatorial completo é a redução do número de experimentos requeridos, representando, em muitos casos, grande economia de recursos.

Nessa comparação, para o estudo em questão, conclui-se que os modelos obtidos pelos dois planejamentos são praticamente os mesmos, sendo o modelo obtido pelo fatorial fracionado reduzido em relação ao modelo do fatorial completo.

Conteúdo

1 - Introdução

1.1 - O problema

Quando se compra um automóvel, espera-se que ele possua certas características, como ter bom desempenho, ser econômico, confortável e, principalmente, seguro.

A suspensão de um automóvel tem sua importância nesse contexto e está diretamente ligada ao conforto e à segurança do automóvel.

Originalmente, um eixo traseiro do tipo dependente em autoveículo baseava-se em dois braços articulados, dispostos a cada lado (direito e esquerdo), e unidos por uma barra tubular transversal. Porém, a excessiva rigidez da barra transversal não era muito interessante. O ideal seria que o eixo tivesse uma pequena rotação ao longo da barra de modo a evitar a resistência à rolagem do veículo. Uma solução usada foi a substituição da barra tubular por barra em viga "U" ou "V" na qual permite uma boa flexibilidade à torção, mas é extremamente rígida quanto a tração, compressão e flexão. Com essa flexibilidade, de acordo com a posição da barra transversal, esta pode ser usada para produzir um D de cambagem em ambas as rodas numa condição de rolagem (curva), criando, assim, uma condição de maior estabilidade. A esse modelo de suspensão foi dado o nome de Eixo de Barra de Torção.

O uso da barra de torção foi pioneira pela Volkswagen no Golf e, desde então, o modelo foi difundido e copiado pelo bom desempenho, simplicidade de produção e baixos custos.

O controle da rigidez da barra de torção está diretamente ligada ao material utilizado, ao comprimento da barra e à inércia da seção transversal da barra. A inércia é definida a partir da geometria da seção transversal da barra. Com isso, todas as variáveis que definem a geometria estão, também, definindo a rigidez da barra de torção.

Especificamente para esse estudo, a geometria aproximada para a barra de torção foi definida a partir de um tubo e as variáveis dessa geometria que são cinco e serão designadas por A, B, C, D e E.

Através das exigências de solicitações da barra de torção, deve-se projetar uma seção transversal que possa garantir que a flexibilidade da barra seja controlada e os resultados sejam transmitidos para os passageiros em forma de estabilidade e conforto.

Como essa barra está sujeita a esforços de torção, tração, compressão e flexão simultaneamente, a definição da geometria torna-se um exercício trabalhoso. Com isso, o objetivo deste estudo está em verificar os efeitos das variáveis geométricas em relação à inércia e definir qual a melhor geometria a ser utilizada para que se obtenha a melhor condição de absorção dos esforços.

Esse estudo pode ser feito através de técnicas que fazem uso de experimentos, ou seja, através da *pesquisa experimental*.

1.2 - O que são experimentos?

A Figura 1.1 apresenta a representação esquemática de um *sistema*, que, a partir de uma entrada, produz uma *saída*. Em alguns sistemas, há mais de uma *variável de saída*. A variável de saída é influenciada por dois tipos de variáveis: *controláveis* e *não-controláveis*. As *variáveis controláveis* são aquelas que influenciam a variável de saída e podem ter seus valores definidos pelo experimentador. As *variáveis não-controláveis* também influenciam a variável de saída, mas não podem ter seus valores definidos pelo experimentador, embora algumas delas possam ter seus valores conhecidos. No caso da suspensão de um automóvel, a travessa pode ser tida como um sistema, cujas variáveis já citadas podem influenciar as inércias, as variáveis de saída do sistema.

Um *conjunto de experimentos* consiste num conjunto de mudanças intencionais nas variáveis controláveis de um sistema ou processo para que se possa observar e identificar os efeitos dessas mudanças na variável de saída. Cada mudança em particular constitui um *experimento*.

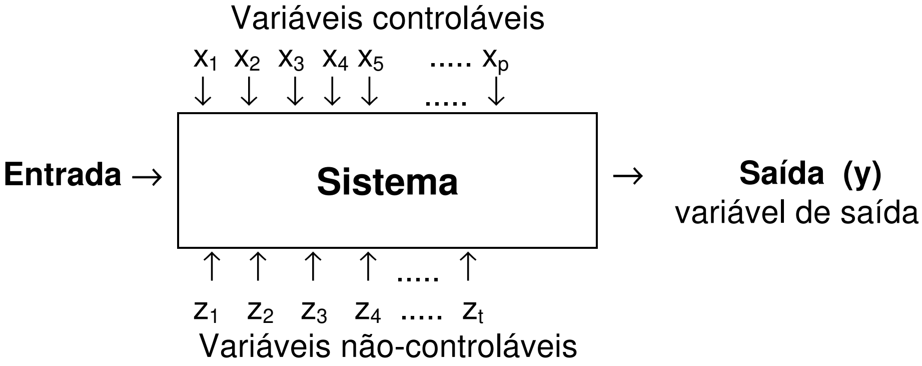

Figura 1.1 - Representação esquemática de um sistema e suas variáveis

Em estudos experimentais, é muito comum o uso da abordagem "*uma-de-cada-vez*". Essa abordagem consiste em fazer mudanças em uma das variáveis do sistema, mantendo fixas todas as outras, até se conseguir um valor que provoque uma mudança desejada na variável de interesse. Mantendo fixa essa variável do sistema no seu valor "ótimo", mudanças são feitas em outra variável do sistema até que se encontre também o seu valor "ótimo". Assim, todas as variáveis do sistema têm seus efeitos estudados, uma de cada vez. Um dos problemas com essa abordagem é o alto número de experimentos que podem ser necessários. Outro problema com essa abordagem é que ela supõe que as mudanças provocadas pelas variáveis do sistema na variável de interesse são independentes uma das outras. Ou seja, a mudança provocada por uma variável do sistema quando outras variáveis possuem certos valores é a mesma de quando essas variáveis possuírem outros valores. Isso quer dizer que as variáveis do sistema *não interagem* entre si, o que é uma suposição muito forte para a maioria dos sistemas encontrados.

Entre os métodos estatísticos para estudos experimentais, encontram-se as técnicas de Planejamento de Experimentos, que são muito eficientes e úteis na pesquisa experimental.

2 - O que é Planejamento de Experimentos?

Planejamento de Experimentos pode ser definido como um conjunto de técnicas estatísticas que permitem ao pesquisador realizar sua experimentação de modo mais eficiente e econômico, com a finalidade de produzir dados confiáveis e úteis na verificação de suas hipóteses de trabalho. Juntamente com as técnicas de Análise de Experimentos, formam uma ferramenta poderosa para a pesquisa experimental.

A primeira etapa do planejamento de um conjunto de experimentos é identificar o problema a ser estudado, identificando também a(s) variável(eis) de saída, as variáveis controláveis e não-controláveis do sistema.

Os valores da variável de saída são os resultados dos experimentos, assim, ela é chamada *variável resposta,* podendo haver mais de uma variável resposta num mesmo conjunto de experimentos.

As variáveis controláveis do sistema são tidas, a princípio, como de grande influência sobre a variável resposta e podem ser controladas. Dessas variáveis, as que serão estudadas recebem o nome de *fatores*, enquanto as que permanecerão com seus valores fixos durante os experimentos são denominadas *variáveis fixas*. Os valores que cada um dos fatores vai assumir nos experimentos são chamados *níveis dos fatores*. Geralmente, esses níveis são escolhidos levando-se em conta a experiência passada e/ou argumentos teóricos. As combinações desses níveis em cada um dos fatores são chamadas *tratamentos*. Assim, a quantidade de tratamentos corresponde à multiplicação do número de níveis de cada fator.

Das variáveis não-controláveis, existem aquelas que sabidamente podem afetar a resposta, mas que, por algum motivo, não podem ser controladas, embora seus valores podem ser conhecidos. Como exemplo tem-se as variáveis de ambiente (temperatura, umidade, luminosidade e pressão), o fator humano (experiência do operador), entre outros. Pode-se considerar essas variáveis no experimento através da formação de blocos, o que permite eliminar o efeito dessas variáveis na resposta, quando se acredita que esse efeito não pode ser desprezado. As variáveis não-controláveis que não podem ter seus valores conhecidos, mas cuja a influência na resposta pode ser considerada desprezível, são as *variáveis de ruído*. A aleatorização dos experimentos permite lidar com esse tipo de variável.

No caso do estudo da barra de torção, as variáveis resposta são as *inércias no eixo X, no eixo Y* e *polar*. Os fatores são as variáveis A, B, C, D e E. Como os experimentos consistem em simulações feitas em computador, as variáveis de ruído podem ser desconsideradas.

2.1 - Conceitos básicos: unidade experimental, aleatorização, erro experimental e o uso de réplicas

A *unidade experimental* é a unidade básica à qual o tratamento será aplicado. No caso da travessa, a unidade experimental é uma peça simulada em computador com uma certa combinação de níveis dos fatores (tratamento). É importante trabalhar com unidades experimentais que possam ser consideradas homogêneas, para que elas não possam ter influência na resposta.

Aleatorizar um experimento consiste em alocar os tratamentos às unidades experimentais de maneira aleatória, bem como ordenar a realização dos experimentos por um mecanismo aleatório (sorteio). A *aleatorização* permite minimizar os efeitos de variáveis que não são ou não podem ser levadas em conta no experimento. Além disso, se algum mecanismo de dependência existir entre os resultados de experimentos subsequentes (presença de resíduos, descalibração do instrumento de medição, entre outros), a aleatorização da ordem de execução dos experimentos permitirá que essa dependência seja diluída entre todos os tratamentos e, assim, não privilegie um ou outro tratamento.

O *erro experimental* pode ser definido como a variação na resposta de unidades experimentais submetidas a um mesmo tratamento. Essa variação pode ser fruto de fontes de variabilidade tais como unidades experimentais não exatamente homogêneas, erro na medição ou avaliação da resposta, variáveis desconhecidas, mas que estejam influenciando na resposta, entre outros. O erro experimental pode também ser pensado com sendo o representante da variabilidade existente no sistema. No estudo da barra de torção, o erro experimental não existe, pois simulações com um mesmo tratamento geram respostas idênticas. Essa peculiaridade desse experimento será discutida mais adiante.

O *uso de réplicas* consiste na repetição de um experimento usando um mesmo tratamento, mas em unidades experimentais distintas. Através do uso de réplicas, podemos estimar o erro experimental. As réplicas devem ser genuínas, ou seja, a utilização de uma mesma unidade experimental em dois experimentos não é replicação e sim sub-amostragem. No caso particular do estudo da travessa, as réplicas geram respostas idênticas, porque o experimento trata-se de uma simulação, e não são muito úteis na análise do problema.

3 - Os Experimentos Fatoriais

Geralmente, a pesquisa experimental envolve o estudo de dois ou mais fatores. Nesse caso, os planejamentos fatoriais são a alternativa mais eficiente. Em um planejamento fatorial completo, todas as possíveis combinações dos níveis dos fatores (os tratamentos) são investigados. Assim, se há dois fatores a serem investigados, diga-se fator A e fator B, cada um com a e b níveis respectivamente, tem-se pelo menos ab tratamentos a serem investigados . Se há n réplicas para cada tratamento, então serão abn experimentos.

Quando cada um dos k fatores a serem investigados possui um número fixo e igual de níveis, por exemplo, dois, três ou quatro, fala-se em planejamentos fatoriais 2^k, 3^k e 4^k, respectivamente. Os planejamentos fatoriais 2^k são os mais comuns, principalmente nas fases iniciais da pesquisa experimental, por serem os mais econômicos.

3.1 - Os Planejamentos Fatoriais 2^k

Num planejamento fatorial 2^k, cada um dos k fatores estão sendo investigados em dois níveis, chamados níveis *baixo* e *alto* do fator. Para facilitar a análise, os fatores são codificados de modo a valerem -1 no nível baixo e +1 no nível alto. A codificação é conseguida da seguinte maneira:

$$\text{nivel codificado} = \frac{\text{valor real - (nivel alto + nivel baixo)/2}}{\text{(nivel alto - nivel baixo)/2}}$$

No estudo da barra de torção, os níveis usados para cada um dos fatores são mostrados no Quadro 3.1. Esses valores foram obtidos com base no conhecimento prévio da equipe de trabalho.

Quadro 3.1 – Valores adotados para os níveis dos fatores do estudo da barra de torção no planejamento fatorial 2^5.

Fator	Nível baixo (-)		Nível alto (+)		
	Valor original	Valor codificado	Valor original	Valor codificado	
A	88	-1	90	+1	
A	2,4	-1	2,8	+1	
C	1	-1	2	+1	
D	8	-1	10	+1	
E	18	-1	20	+1	

3.2 - Representação Gráfica dos Planejamentos Fatoriais

Caso estivessem sendo estudados somente dois fatores, como, por exemplo, A e B, os resultados dos experimentos desse planejamento fatorial poderiam ser representados pelo esquema mostrado na Figura 3.1.

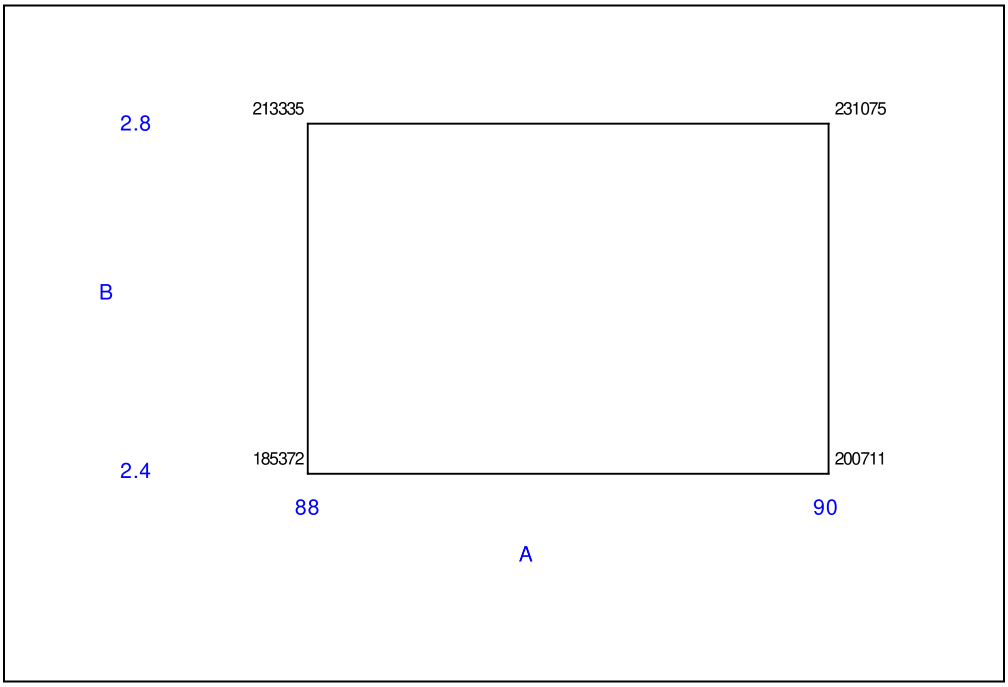

Figura 3.1 – Representação esquemática dos resultados para a variável inércia no eixo X (Ix) de um planejamento fatorial 2^2, envolvendo somente os fatores A e B para o estudo da barra de torção.

Se estivessem sendo estudados 3 fatores, como, por exemplo, A, B e E, a representação esquemática desse planejamento fatorial 2^3 seria um cubo, como mostra a Figura 3.2. Cada vértice do cubo representa um tratamento resultante da combinação dos níveis dos fatores A, B e E. O valor da variável inércia no eixo X para cada tratamento encontra-se em seu respectivo vértice.

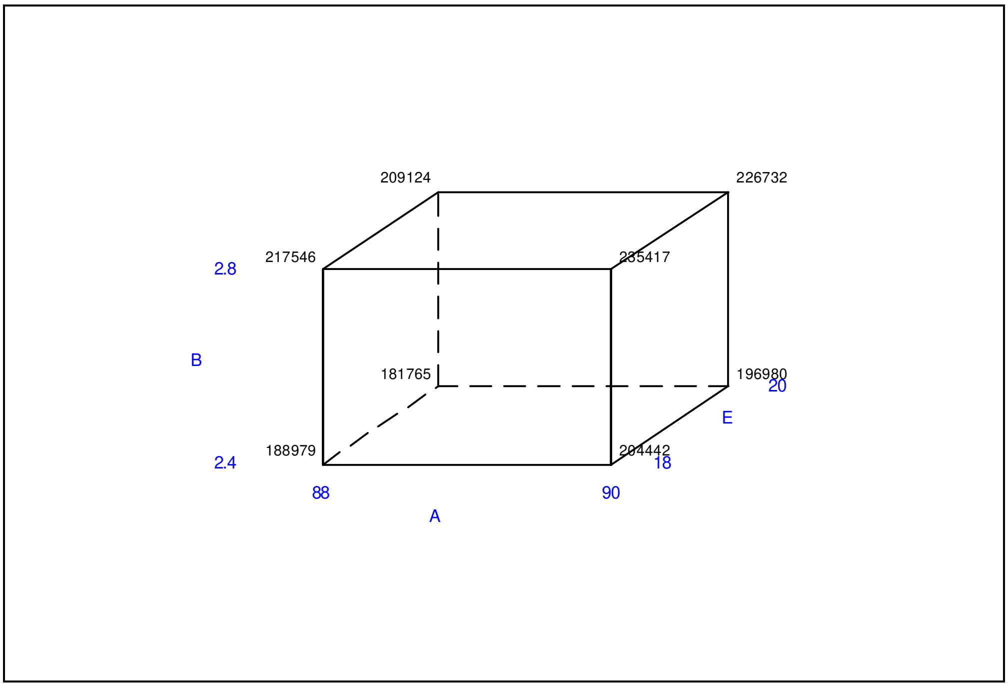

Figura 3.2 - Representação esquemática dos resultados para a variável inércia no eixo X (Ix) de um planejamento fatorial 2^3, envolvendo somente A, B e E como fatores no estudo da barra de torção.

Como estão sendo estudados 5 fatores, a representação esquemática é aquela mostrada na Figura 3.3. Cada cubo representa uma das quatro combinações possíveis dos níveis dos fatores D e E. Nos vértices de cada cubo, estão as respostas para as oito combinações possíveis dos níveis dos fatores A, B e C.

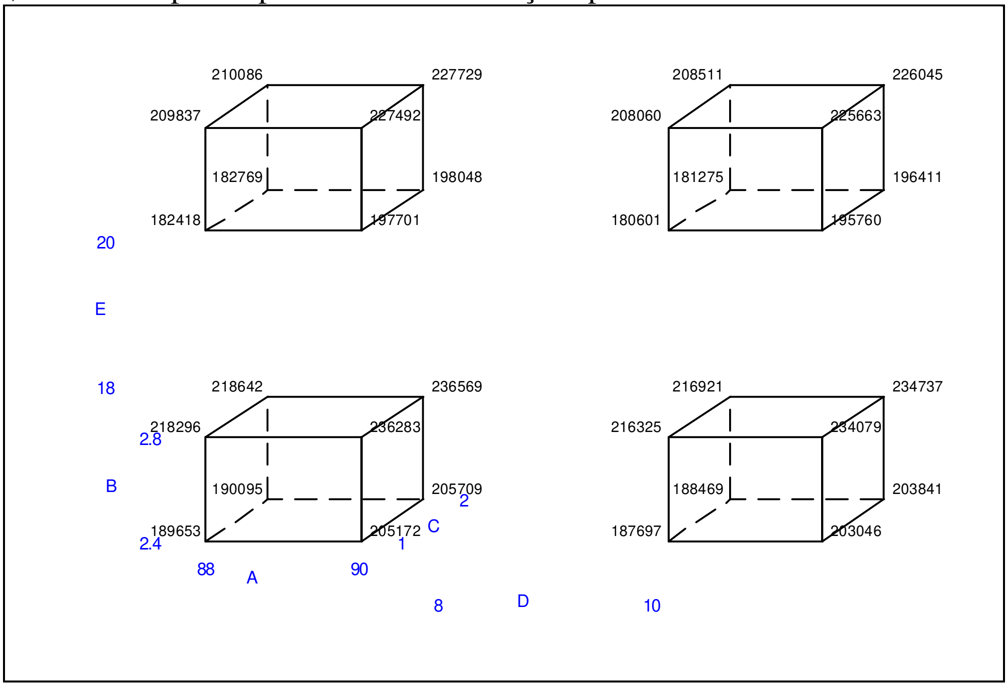

Figura 3.3 - Representação esquemática dos resultados para a variável inércia no eixo X (Ix) de um planejamento fatorial 2^5, envolvendo todos os fatores a serem investigados no estudo da barra de torção.

3.3 - Obtenção das estimativas dos efeitos principais e de interação entre os fatores

O efeito principal de um fator é definido como sendo a mudança na resposta produzida por uma mudança do nível baixo para o nível alto do fator. Quando se trabalha com dois fatores, A e B, por exemplo, essa mudança para A é calculada nos dois níveis de B e o efeito principal de A é a média desses dois valores.

Considerando o experimento fatorial realizado no estudo da travessa, inicialmente com dois fatores, E e B, tem-se os resultados da Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Resultados para a variável inércia no eixo X (Ix) do experimento fatorial para o estudo travessa, considerando apenas os fatores B e E

Fator		**B**	
		nível baixo (-)	**nível alto (+)**
E	**nível baixo (-)**	196710	226481
	nível alto (+)	189373	217928

Desse modo, o efeitos principais de B e E são calculados da seguinte maneira:

$$B = \frac{(226481 - 196710) + (217928 - 189373)}{2} = \frac{29771 + 28555}{2} = 29163$$

$$E = \frac{(189373 - 196710) + (217928 - 226481)}{2} = \frac{-7337 + (-8553)}{2} = -7945$$

A princípio, pode-se observar que o fator B tem efeito positivo sobre a inércia no eixo X, isto é, quando o fator B passa de 88mm para 90mm, há um aumento médio de 29163 unidades em Ix. Contrariamente, o fator E tem efeito negativo sobre a inércia no eixo X, ou seja, quando o valor do fator E muda do seu nível baixo (18mm) para seu nível alto (20mm), há uma diminuição média de 7945 unidades em Ix.

A representação gráfica desses efeitos principais sobre a inércia no eixo X é mostrada na Figura 3.4(a). As figuras 3.4(b) e 3.4(c) apresentam os gráficos dos efeitos principais dos fatores em estudo sobre as inércias no eixo Y e polar, respectivamente. Pode-se observar que o fator que possui maior efeito principal, em todas as respostas, é o fator B. O fator A apresenta o segundo maior efeito para as respostas Ix e J, seguido do fator E, que, em Ix, apresenta efeito negativo. Já em Iy, o fator E tem o segundo maior efeito principal e é positivo. Essa contrariedade de sinais pode ser explicada pelo fato de que, aumentando o valor do fator E, a peça fica mais “comprida” em relação ao eixo X, o que diminui a inércia naquele eixo, e fica mais “achatada” em relação ao eixo Y, aumentando a inércia nesse eixo.

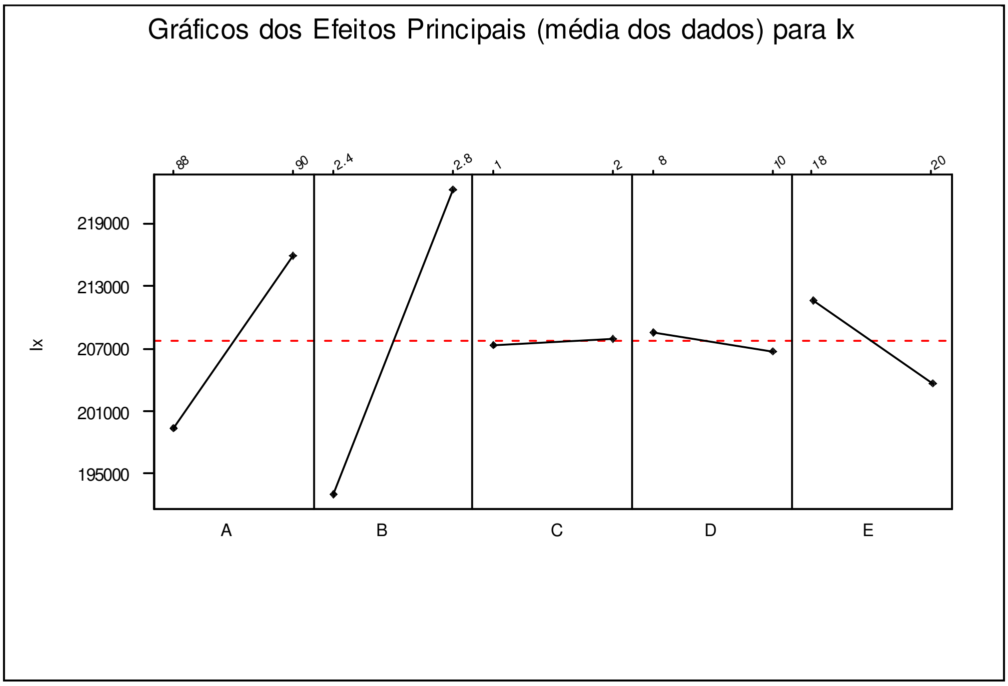

Figura 3.4(a) - Representação gráfica dos efeitos dos fatores A, B, C, D e E na inércia no eixo X (Ix).

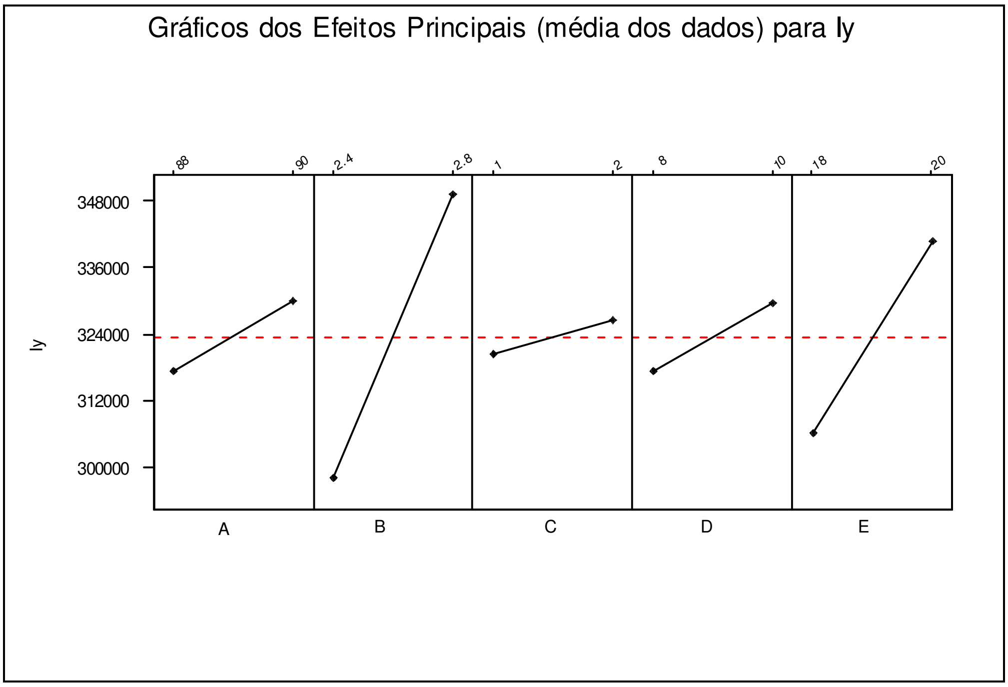

Figura 3.4(b) - Representação gráfica dos efeitos dos fatores A, B, C, D e E na inércia do eixo Y (Iy).

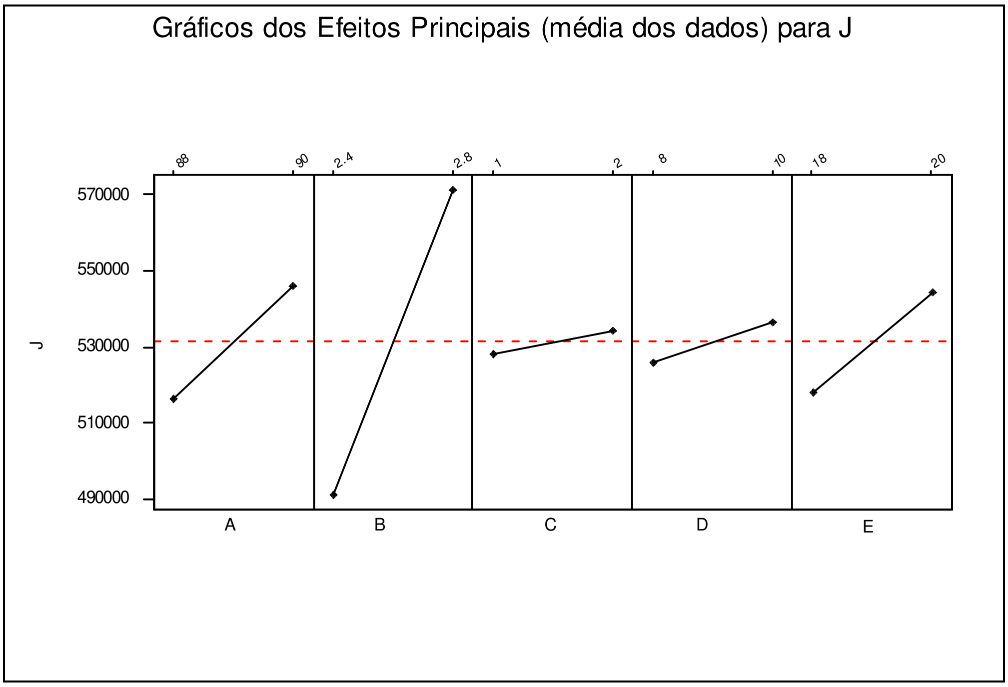

Figura 3.4(c) - Representação gráfica dos efeitos dos fatores A, B, C, D e E na inércia no eixo polar (J).

Quando a mudança na resposta devido a um fator não é a mesma em todos níveis do outro fator, diz-se que há *interação* entre os fatores. Na Figura 3.1, tem-se que, no nível alto de B, o efeito de A é calculado como 231075 - 213335 = 17740. Já no nível baixo de B, o efeito de A é calculado como 200711 - 185375 = 15339. Assim, vê-se que o efeito do fator A na resposta depende do nível do fator B e, então, poder-se-ia dizer que há *interação* entre A e B. O efeito da interação entre A e B é calculado como sendo a metade da diferença entre o efeito de A no nível alto de B e o efeito de A no nível baixo de B. Para os resultados na Tabela 3.1, tem-se que:

$$AB = \frac{(231075 - 213335) - (200711 - 185375)}{2} = \frac{17740 - 15339}{2} = 1200{,}5$$

Quando o efeito de uma interação tem *sinal positivo*, significa que o efeito do fator A em um dos níveis de B tem o *mesmo sinal* do efeito no outro nível de B, porém com magnitude diferente. Se o efeito de uma interação é *negativo*, significa que o efeito do fator A em um dos níveis de B tem *sinal diferente* do efeito no outro nível de B, podendo ser de mesma magnitude ou não.

A interação entre dois fatores pode ser representada graficamente, de modo similar à representação dos efeitos principais, porém o efeito de um fator é calculado em cada nível do outro fator, gerando duas linhas. Retas paralelas indicariam a ausência de interação entre os fatores, enquanto retas não-paralelas indicariam a presença de interação. As figuras de 3.5(a) a 3.5(c) apresentam esses gráficos de interação para as respostas Ix, Iy e J, respectivamente. Em todos os gráficos, as retas aparentam ser paralelas, indicando a possível ausência de interação entre os fatores, pelo menos, interações de grandes magnitudes, devido às escalas dos gráficos. A investigação da presença de interações será feita de modo mais objetivo adiante.

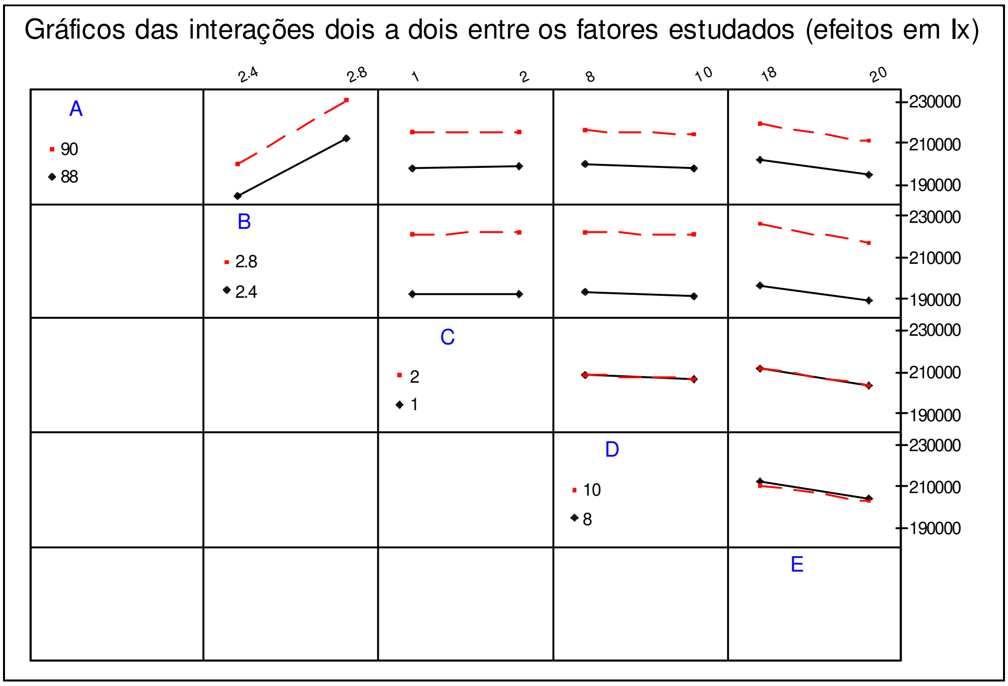

Figura 3.5(a) - Representação gráfica das interações dois a dois entre os fatores em estudo para a inércia no eixo X.

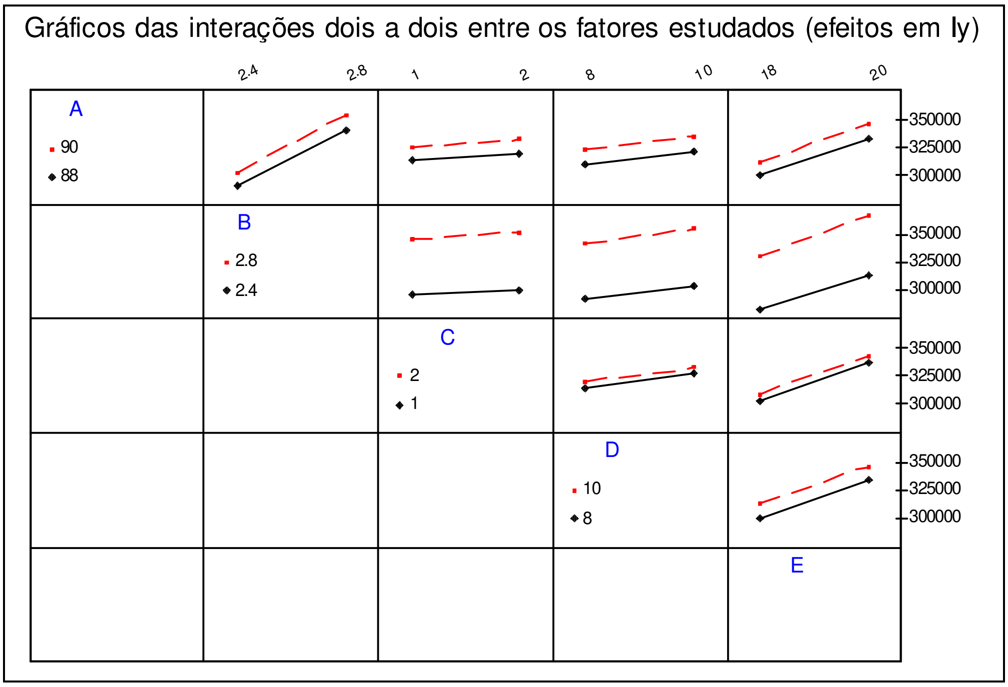

Figura 3.5(b) - Representação gráfica das interações dois a dois entre os fatores em estudo para a inércia no eixo Y.

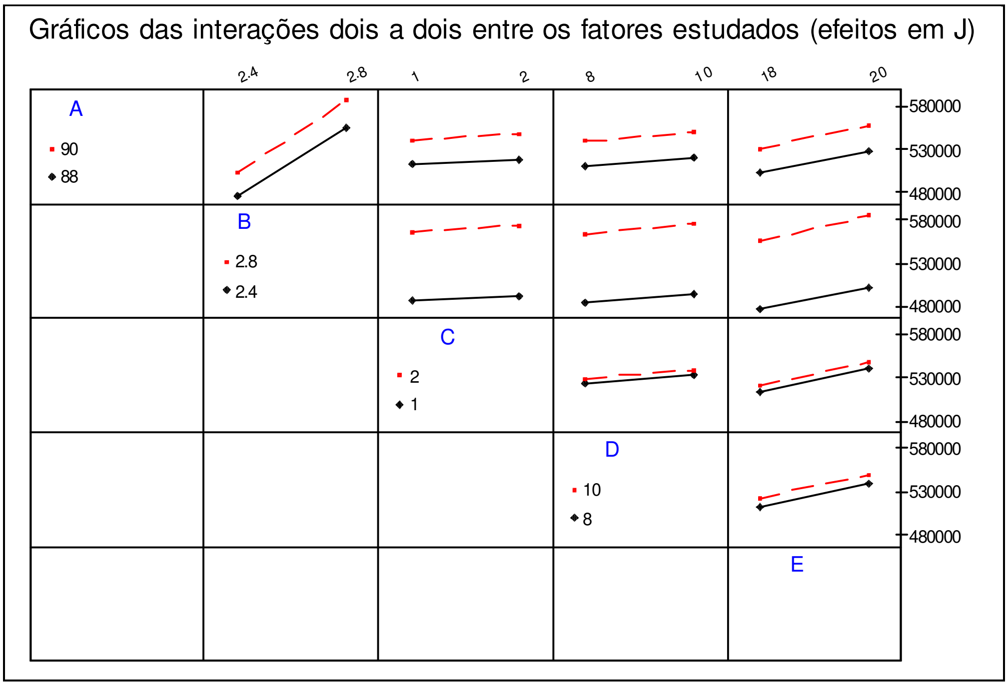

Figura 3.5(c) - Representação gráfica das interações dois a dois entre os fatores em estudo para a inércia polar.

Assim como pode existir interação entre dois fatores, também é possível a existência de interações entre 3, 4 e assim por diante, até a interação entre os *k* fatores estudados, embora efeitos significativos de interações de alta ordem sejam bastante raros. O cálculo de efeito dessas interações de ordem maior do que 2 é feito de maneira similar à que foi mostrada, porém agora levando em conta os níveis dos outros fatores.

Num planejamento fatorial completo, todos os efeitos principais e todas as interações podem ser estimados.

Para determinar quais serão os tratamentos utilizados no planejamento fatorial 2^k, é útil montar uma tabela como a seguinte, escrevendo os sinais - e + designando o nível baixo e alto, respectivamente, de cada fator. Na Tabela 3.2, os cinco fatores do estudo da barra de torção são utilizados como exemplos.

Tabela 3.2 - Desenho esquemático para montagem dos tratamentos do planejamento fatorial 2^5

Experimento	A	B	C	D	E	resposta
1	+	+	+	+	+	y_1
2	-	+	+	+	+	y_2
3	+	-	+	+	+	y_3
4	-	-	+	+	+	y_4
5	+	+	-	+	+	y_5
6	-	+	-	+	+	y_6
7	+	-	-	+	+	y_7
8	-	-	-	-	+	y_8
9	+	+	+	-	+	y_9
10	-	+	+	-	+	y_{10}
11	+	-	+	-	+	y_{11}
12	-	-	+	-	+	y_{12}
13	+	+	-	-	+	y_{13}
14	-	+	-	-	+	y_{14}
15	+	-	-	-	+	y_{15}
16	-	-	-	-	+	y_{16}
17	+	+	+	+	-	y_{17}
18	-	+	+	+	-	y_{18}
19	+	-	+	+	-	y_{19}
20	-	-	+	+	-	y_{20}
21	+	+	-	+	-	y_{21}
22	-	+	-	+	-	y_{22}
23	+	-	-	+	-	y_{23}
24	-	-	-	+	-	y_{24}
25	+	+	+	-	-	y_{25}
26	-	+	+	-	-	y_{26}
27	+	-	+	-	-	y_{27}
28	-	-	+	-	-	y_{28}
29	+	+	-	-	-	y_{29}
30	-	+	-	-	-	y_{30}
31	+	-	-	-	-	y_{31}
32	-	-	-	-	-	y_{32}

Assim, por exemplo, o experimento número 1 será realizado com todos os fatores em seus níveis altos e o experimento número 32, com todos os fatores nos seus níveis baixos.

3.4 - A Análise dos Experimentos : o modelo de regressão

Além de verificar quais fatores e como eles têm efeito sobre a variável resposta, o objetivo da realização de um conjunto de experimentos pode ser encontrar um modelo matemático que descreva as relação entre os fatores e a variável resposta. Por exemplo, considerando apenas os fatores A e B, a inércia no eixo X pode ser descrita pelo modelo

$$Ix = \mu + \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_{12}(AB) + \varepsilon$$

onde os coeficientes da equação, μ, β_1, β_2 e β_{12}, são constantes a serem estimadas através dos dados dos experimentos.

Esse modelo é chamado de *modelo de regressão linear* (Montgomery & Peck, 1982) e o modelo descrito acima é chamado *modelo completo*, por conter todos os termos possíveis (fatores e interação entre eles, representada pelo termo AB). O coeficiente β_1 representa a mudança na variável resposta quando o valor do fator A aumenta em 1 unidade, mantidos fixos os valores dos outros fatores. Essa interpretação para β_1 é válida na ausência de interação, ou seja, quando $\beta_{12} = 0$. Na presença de interação, a mudança na resposta quando A é acrescido de 1 unidade é igual a $(\beta_1 + \beta_{12}B)$. Note que, quando há interação entre os fatores, a influência de A na resposta depende do valor de B, isto é, o efeito de A na resposta depende o nível do fator B, como já foi discutido anteriormente. A interpretação para o coeficiente β_2 é similar, porém referente ao fator B.

O termo ε é uma variável aleatória, chamado *componente aleatório* do modelo ou *componente de erro*, pois representa a ineficiência do modelo em descrever completamente a variável resposta. Como os coeficientes do modelo são constantes, decorre que a variável resposta também é tida como uma variável aleatória.

Cada observação da variável resposta pode ser escrita na forma do modelo. No caso da variável Ix, tem-se

$$Ix_i = \mu + \beta_1 A_i + \beta_2 B_i + \beta_{12}(AB)_i + \varepsilon_i$$

onde $i = 1,2,3,4,..., n$, sendo n o número de experimentos realizados. O termo A_i, por exemplo, representa o nível do fator A no i-ésimo experimento.

Se os níveis dos fatores estão codificados em -1 e +1, a mudança do nível baixo para o nível alto implica numa mudança de 2 unidades no valor do fator, pois +1-(-1) = +1+1 = 2. Assim, lembrando a definição de efeito feita anteriormente, a relação entre o efeito do fator e seu coeficiente no modelo de regressão é

efeito do fator = 2 x (coeficiente do fator)

Assim, o efeito do fator B, por exemplo, é $2\beta_2$. Se o valor de um coeficiente é igual a zero, isso significa que o fator correspondente a ele não tem efeito sobre a variável resposta.

Os coeficientes do modelo são considerados constantes a serem estimadas e as expressões usadas para estimar esses coeficientes, chamadas *estimadores*, são encontradas através do *Método dos Mínimos Quadrados* (Montgomery & Peck, 1982). Esse método consiste em encontrar o valor dos coeficientes que minimizem a soma dos quadrados dos erros. De fato, o componente aleatório pode ser escrito como

$$\varepsilon_i = Ix_i - (\mu + \beta_1 A_i + \beta_2 B_i + \beta_{12}(AB)_i)$$

onde i = 1,2,3,..., n.

Os estimadores dos coeficientes são expressões que dependem da variável resposta e dos fatores. Os valores desses estimadores são denominadas *estimativas.* Como a variável resposta é uma variável aleatória, um estimador também é uma variável aleatória, cujo valor esperado (a média) é o valor do coeficiente que ele pretende estimar. Desse modo, para que se possa saber se a hipótese de que um determinado coeficiente do modelo é igual a zero pode ou não ser rejeitada, é preciso *testar a significância* desse coeficiente. No caso do modelo de regressão, testar a significância de um coeficiente quer dizer testar a hipótese de que a estimativa daquele coeficiente veio de uma distribuição de probabilidade com média zero.

Para realizar o teste da significância dos coeficientes, é necessário fazer algumas suposições acerca do componente aleatório. Para todo $i = 1, 2, 3,..., n$

1. ε_i tem distribuição Normal com média zero e variância σ^2;
2. ε_i é independente de ε_j, para $i \neq j$.

Essas suposições dizem que, considerando todos experimentos, os componentes de erro são independentes uns dos outros e ainda possuem uma distribuição Normal com média zero e variância constante igual a σ^2. A variância σ^2, assim como os coeficientes do modelo, também é um parâmetro a ser estimado através dos dados dos experimentos.

Após a estimação dos coeficientes do modelo, podem ser calculados os *valores ajustados* correspondentes a cada um dos *n* experimentos. Isso é feito simplesmente substituindo os valores estimados dos coeficientes na equação do modelo. A diferença entre o valor observado para a resposta (Ix_i) e o valor que foi estimado pelo modelo (o ajustado) é chamado *resíduo*. Assim, os resíduos são a estimativa do componente de erro. O exame desses resíduos, a *análise de resíduos*, é a maneira de verificar as suposições feitas acerca do erro experimental.

A variância σ^2 é estimada através da soma dos quadrados desses resíduos, de acordo com a seguinte relação

$$s^2 = \frac{\text{soma de quadrados de residuos}}{n\text{-}p}$$

onde s^2 é o estimador da variância σ^2, *n* é o número de experimentos realizados e *p* é o número de coeficientes do modelo (número de fatores mais um).

Sendo assim, para que a variância do componente aleatório possa ser estimada, é preciso que o número de experimentos realizados seja maior do que o número de coeficientes a serem estimados no modelo. Essa observação evidencia a importância das réplicas em um experimento. Sem réplicas, a maneira de se obter estimativas para o componente de erro e, consequentemente, para a sua variância, é reduzir o número de coeficientes no modelo completo. Isso é feito, geralmente, desprezando as interações de mais alta ordem, ou seja, assumindo que seus coeficientes são iguais a zero. No entanto, a presença de réplicas permite a estimação do *erro experimental puro*, que representa da parte da variação da resposta que nenhum modelo pode explicar.

O teste da significância dos efeitos de cada um dos termos do modelo é feito através da estatística de teste T, definida como sendo

$$\text{T} = \frac{\text{estimativa do coeficiente}}{\text{desvio - padrao da estimativa do coeficiente}}$$

A estatística T tem distribuição *t-Student* com (*n-p*) graus de liberdade.

O desvio-padrão da estimativa de cada coeficiente é calculado a partir da estimativa da variância σ^2, s^2, da seguinte forma

$$\text{Desvio} - \text{padrao da estimativa do coeficiente} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

Assim, para um nível de significância α, rejeita-se a hipótese de que o coeficiente em questão é igual a zero se o valor absoluto da estatística T for maior do que $t_{\alpha/2;(n-p)}$, o ponto da distribuição t-*student* com (*n-p*) graus de liberdade que deixa uma área $\alpha/2$ acima dele.

Para o estudo da barra de torção, foi realizado um conjunto de experimentos segundo o planejamento fatorial 2^5. Os níveis dos fatores utilizados são mostrados no Quadro 3.1 e a representação esquemática dos resultados dos experimentos para a variável inércia no eixo X é apresentada na Figura 3.3.

Os quadros de 3.2 a 3.4 mostram as estimativas dos coeficientes dos modelos para as respostas Ix, Iy e J, respectivamente, considerando o modelo completo, isto é, aquele que possui todos os efeitos principais e os efeitos das interações de todas as ordens.

Observe que, o fator de maior efeito sobre as respostas é o B, seguido pelo fator A e o fator E, para as respostas Ix e J, e pelos fatores E e A para a resposta Iy. O fator E tem efeito negativo sobre Ix, mas positivo sobre Iy e J. Como destacado anteriormente, esse efeito negativo pode ser explicado pelo fato de que, aumentando o valor do fator E, a peça fica mais "comprida" em relação ao eixo X, o que diminui a inércia naquele eixo, e fica mais "achatada" em relação ao eixo Y, aumentando a inércia nesse eixo.

Quadro 3.2 - Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação de segunda , terceira, quarta e quinta ordens na resposta inércia no eixo X (Ix) utilizando o planejamento fatorial 2^5 para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para Ix

Term	Efeito	Coef
Constant		207623
A	16540	8270
B	29163	14582
C	486	243
D	-1816	-908
E	-7946	-3973
A*B	1200	600
A*C	1	0
A*D	-74	-37
A*E	-128	-64
B*C	-85	-43
B*D	-8	-4
B*E	-608	-304
C*D	137	68
C*E	-68	-34
D*E	97	49
A*B*C	-11	-5
A*B*D	11	5
A*B*E	-3	-2
A*C*D	-2	-1
A*C*E	-14	-7
A*D*E	20	10
B*C*D	-15	-8
B*C*E	-3	-1
B*D*E	11	5
C*D*E	-15	-7
A*B*C*	10	5
A*B*C*E	4	2
A*B*D*E	2	1
A*C*D*E	-8	-4
B*C*D*E	-20	-10
A*B*C*D*E	-15	-7

Quadro 3.3 - Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação de segunda , terceira, quarta e quinta ordens na resposta inércia no eixo Y (Iy) utilizando o planejamento fatorial 2^5 para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para Iy

Termo	Efeito	Coef.
Constant		323530
A	12779	6390
B	51279	25640
C	6090	3045
D	12388	6194
E	34694	17347
A*B	1089	544
A*C	184	92
A*D	565	282
A*E	674	337
B*C	715	357
B*D	616	308
B*E	2534	1267
C*D	-253	-127
C*E	-39	-19
D*E	-559	-280
A*B*C	27	14
A*B*D	18	9
A*B*E	49	25
A*C*D	-11	-5
A*C*E	-1	-1
A*D*E	14	7
B*C*D	-93	-47
B*C*E	-9	-5
B*D*E	-18	-9
C*D*E	-20	-10
A*B*C*D	-7	-4
A*B*C*E	-5	-3
A*B*D*E	6	3
A*C*D*E	6	3
B*C*D*E	-1	-1
A*B*C*D*E	6	3

Quadro 3.4 - Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação de segunda , terceira, quarta e quinta ordens na resposta inércia no eixo polar (J) utilizando o planejamento fatorial 2^5 para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para J

Termo	Efeito	Coef.
Constant		531153
A	29319	14659
B	80442	40221
C	6575	3288
D	10572	5286
E	26749	13374
A*B	2289	1145
A*C	185	92
A*D	491	245
A*E	546	273
B*C	629	315
B*D	608	304
B*E	1926	963
C*D	-117	-58
C*E	-107	-53
D*E	-462	-231
A*B*C	17	8
A*B*D	29	14
A*B*E	46	23
A*C*D	-12	-6
A*C*E	-15	-8
A*D*E	34	17
B*C*D	-109	-54
B*C*E	-12	-6
B*D*E	-7	-4
C*D*E	-35	-18
A*B*C*D	3	1
A*B*C*E	-1	-1
A*B*D*	8	4
A*C*D*E	-2	-1
B*C*D*E	-21	-10
A*B*C*D*E	-8	-4

A interação de maior efeito na resposta Ix é aquela entre os fatores AB, que domina as outras interações. Já para as respostas Iy e J, há duas interações cujos os efeitos são grandes em relação aos efeitos das demais: AB e BE. Na presença de interação, um fator não pode ser avaliado somente com base em seu efeito principal. Pode ocorrer do efeito principal desse fator ser muito pequeno, mas o efeito de sua interação com outro fator ser grande.

Como não há réplicas nesse conjunto de experimentos, o erro experimental não pode ser estimado e nem sua variância. Consequentemente, os desvios-padrão dos coeficientes também não podem ser estimados e nem os testes de significância podem ser feitos. A maneira encontrada para verificar quais efeitos são significantes quando não é possível fazer testes de significância é usar o *gráfico de probabilidade normal* dos efeitos. Essa idéia baseia-se no fato de que as estimativas dos efeitos desprezíveis têm distribuição normal com média zero e variância constante. Quando colocados num gráfico de probabilidade normal, essas estimativas dos efeitos desprezíveis tenderiam a estar numa linha em torno de zero. As estimativas dos efeitos considerados significativos estariam afastados dessa linha, pois estariam estimando efeitos diferentes de zero.

Esses gráficos são mostrados nas figuras de 3.6 a 3.8 . Todos os efeitos principais foram considerados significativos para as três respostas. Para as interações de segunda ordem, todos os efeitos foram considerados significativos em pelo menos uma das respostas. Os efeitos de interação de terceira ordem considerados significativos em pelo menos uma das respostas foram entre os fatores A, B e E e entre os fatores A, C e D. Desse modo, foi ajustado o modelo reduzido contendo somente os termos considerados significativos pelo método do gráfico de probabilidade normal.

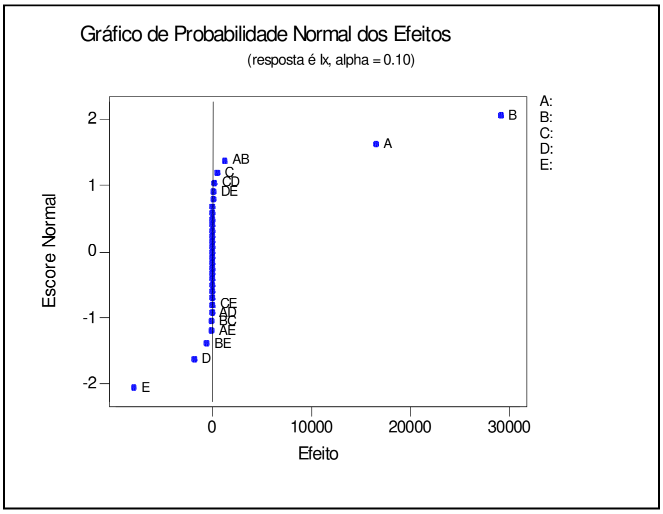

Figura 3.6-Gráfico de probabilidade normal para Ix

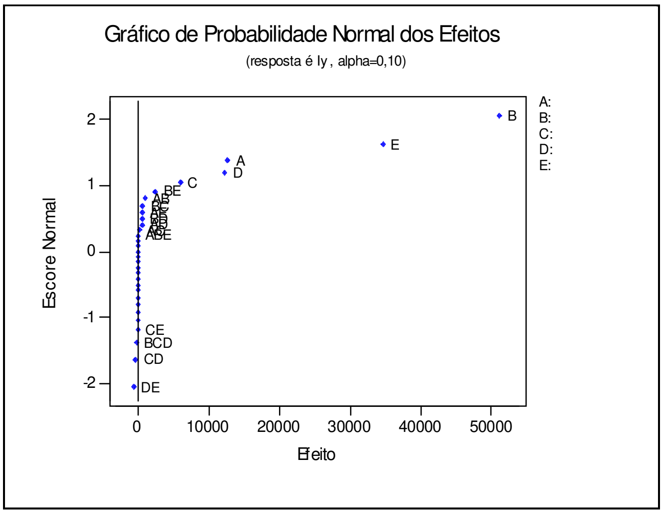

Figura 3.7-Gráfico de probabilidade normal para Iy

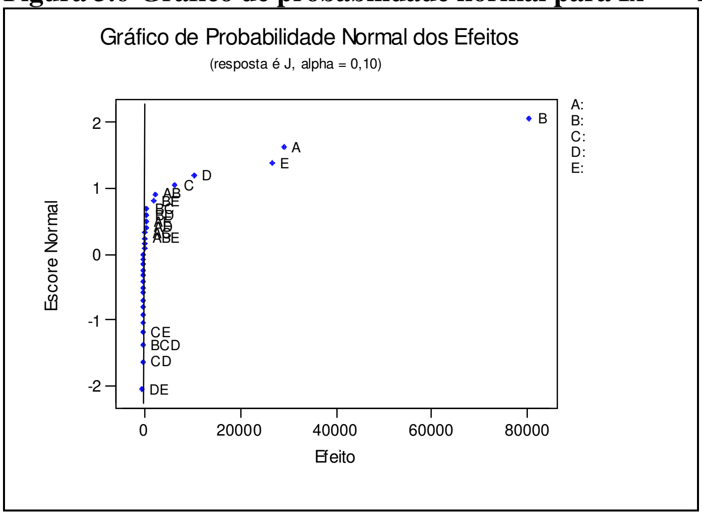

Figura 3.8-Gráfico de probabilidade normal para J

3.5 - Modelo reduzido: A, B, C, D, E, AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, ABE, BCD

As estimativas para os efeitos usando o primeiro modelo reduzido são apresentadas nos quadros de 3.5 a 3.7 para as respostas Ix, Iy e J, respectivamente. Como os efeitos de 8 das 10 interações de segunda ordem e de todas as interações de terceira, quarta e quinta ordens foram considerados desprezíveis, nesse modelo reduzido, eles formam o correspondente ao erro experimental.

Através da estatística T (*t-student*), todos os efeitos principais foram considerados significativos em todas as respostas e permanecem no modelo. Todos os efeitos de interação de segunda ordem foram considerados significativos em pelo menos uma das respostas e, assim, também permanecem no modelo. Os efeitos de terceira ordem presentes no modelo (ABE e BCD) não foram considerados significativos para a resposta Ix, ao nível de 5%, mas o foram para as respostas Iy e J. Desse modo, o modelo não pode ser mais reduzido e permanecem todos os termos.

Quadro 3.5 - Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação para o primeiro modelo reduzido para a resposta inércia no eixo X (Ix) utilizando o planejamento fatorial 2^5 para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para Ix

Term	Efeito	Coef	Desv.pad(Coef)	T	P
Constant		207623	5.930	3.5E+04	0.000
A	16540	8270	5.930	1394.47	0.000
B	29163	14582	5.930	2458.79	0.000
C	486	243	5.930	40.96	0.000
D	-1816	-908	5.930	-153.14	0.000
E	-7946	-3973	5.930	-669.91	0.000
A*B	1200	600	5.930	101.22	0.000
A*C	1	0	5.930	0.06	0.955
A*D	-74	-37	5.930	-6.23	0.000
A*E	-128	-64	5.930	-10.78	0.000
B*C	-85	-43	5.930	-7.20	0.000
B*D	-8	-4	5.930	-0.68	0.509
B*E	-608	-304	5.930	-51.26	0.000
C*D	137	68	5.930	11.52	0.000
C*E	-68	-34	5.930	-5.74	0.000
D*E	97	49	5.930	8.19	0.000
A*B*E	-3	-2	5.930	-0.28	0.783
B*C*D	-15	-8	5.930	-1.30	0.215

Quadro 3.6 - Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação para o primeiro modelo reduzido para a resposta inércia no eixo Y (Iy) utilizando o planejamento fatorial 2^5 para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para Iy

Term	Efeito	Coef	Desv.pad(Coef)	T	P
Constant		323530	6.557	4.9E+04	0.000
A	12779	6390	6.557	974.43	0.000
B	51279	25640	6.557	3910.12	0.000
C	6090	3045	6.557	464.34	0.000
D	12388	6194	6.557	944.61	0.000
E	34694	17347	6.557	2645.51	0.000
A*B	1089	544	6.557	83.02	0.000
A*C	184	92	6.557	14.02	0.000
A*D	565	282	6.557	43.05	0.000
A*E	674	337	6.557	51.40	0.000
B*C	715	357	6.557	54.49	0.000
B*D	616	308	6.557	46.97	0.000
B*E	2534	1267	6.557	193.23	0.000
C*D	-253	-127	6.557	-19.32	0.000
C*E	-39	-19	6.557	-2.95	0.011
D*E	-559	-280	6.557	-42.66	0.000
A*B*E	49	25	6.557	3.74	0.002
B*C*D	-93	-47	6.557	-7.12	0.000

Quadro 3.7 - Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação para o primeiro modelo reduzido para a resposta inércia polar (J) utilizando o planejamento fatorial 2^5 para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para J

Term	Efeito	Coef	Desv.pad(Coef)	T	P
Constant		531153	9.120	5.8E+04	0.000
A	29319	14659	9.120	1607.31	0.000
B	80442	40221	9.120	4410.02	0.000
C	6575	3288	9.120	360.48	0.000
D	10572	5286	9.120	579.57	0.000
E	26749	13374	9.120	1466.43	0.000
A*B	2289	1145	9.120	125.50	0.000
A*C	185	92	9.120	10.12	0.000
A*D	491	245	9.120	26.90	0.000
A*E	546	273	9.120	29.94	0.000
B*C	629	315	9.120	34.50	0.000
B*D	608	304	9.120	33.33	0.000
B*E	1926	963	9.120	105.60	0.000
C*D	-117	-58	9.120	-6.40	0.000
C*E	-107	-53	9.120	-5.85	0.000
D*E	-462	-231	9.120	-25.35	0.000
A*B*E	46	23	9.120	2.51	0.025
B*C*D	-109	-54	9.120	-5.96	0.000

3.6 - A Análise de Variância

A idéia do modelo de regressão é tentar explicar a variabilidade da resposta dividindo-a em duas partes: uma devida aos fatores que se acredita influenciarem a resposta, parte essa representada pelos termos constantes do modelo; e outra devida à variabilidade intrínseca da resposta, representada por ε. Assim, pode-se dividir a variabilidade total da resposta em duas fontes: uma devida à regressão e outra devida aos resíduos. Essa divisão é esquematizada numa tabela chamada *tabela de análise de variância.*

Exemplo de uma Tabela de Análise de Variância

Fonte de Variação	**Soma de Quadrados**	**Graus de Liberdade**	**Quadrado médio**	**Estatística F**
Regressão	SQReg	(p - 1)	QMReg = SQReg / (p -1)	QMReg / QMR
Resíduos	SQR	(n -1) - (p - 1) = (n - p)	QMR = SQR / (n - p)	------------
Total	SQT	(n -1)	-----------	------------

A *Soma de Quadrados Total* (SQT), que representa a variação total, pode ser escrita como

$$SQT = SQReg + SQR$$

isto é, SQT pode ser decomposta na *Soma de Quadrados devido à Regressão* (SQReg) e na *Soma de Quadrados devido ao Resíduo* (SQR).

Os *Graus de Liberdade* da SQT e da SQReg estão relacionados com o número de termos envolvidos em cada um deles. Na SQReg, estão envolvidos p coeficientes e, se forem conhecidos os valores das respostas, da SQReg e de (p-1) coeficientes, pode-se determinar o valor do coeficiente faltante. Na SQT, estão envolvidas n observações e, se forem conhecidos o valor da média de todas as observações, o valor de SQT e os valores de (n-1) observações, pode-se determinar o valor da observação faltante. Os graus de liberdade de SQR são calculados como sendo os graus de liberdade da SQT menos os graus de liberdade da SQReg, pois SQR = SQT - SQReg.

O *Quadrado Médio* é definido como sendo a divisão da Soma de Quadrados pelos respectivos graus de liberdade (veja tabela). O quadrado médio do resíduo (QMR) estima a variância σ^2, ou seja, s^2 = QMR.

A *Estatística F,* definida como a divisão do quadrado médio da regressão pelo quadrado médio do resíduo (a estimativa de σ^2), tem distribuição *F-Snedecor* com (p-1) e (n-p) graus de liberdade. Essa é a estatística que testa a hipótese de que os coeficientes do modelo são iguais a de zero. Essa hipótese será rejeitada, a um nível α de significância, se o valor observado de F for maior do que o chamado *valor crítico do teste.* Nesse caso, o valor crítico do teste é o ponto da distribuição F com (p-1) e (n-p) graus de liberdade que deixa uma área α acima dele. A conclusão de um teste de hipóteses pode ser feita também através do *valor-p*, que é definido, nesse caso, como sendo a probabilidade de obtermos valores maiores do que o valor de F observado. Se o *valor-p* é menor de α, rejeita-se a hipótese de que os coeficientes do modelo são iguais a zero. A hipótese alternativa, nesse caso, é a de que pelo menos um dos fatores tem efeito sobre a resposta.

Se grande parte da variabilidade da resposta é explicada pelos fatores, a parte constante do modelo, esse é considerado um bom modelo para descrever a resposta em função dos fatores.

A análise descrita acima refere-se ao *modelo de efeitos fixos*, onde se considera que os níveis dos fatores estudados foram fixados pelo pesquisador, que se interessa por esses níveis em particular. As conclusões dos experimentos só são válidas para os níveis escolhidos. No *modelo de efeitos aleatórios*, os níveis de um fator a serem usados nos experimentos são escolhidos através de amostra aleatória de uma população de níveis desse fator. O interesse não está em conclusões para níveis particulares e sim para toda a população de níveis. Entretanto, esse tipo de modelo não será abordado nesse texto (ver Montgomery, 1982).

As tabelas de 3.3 a 3.5 mostram a análise de variância para o modelo reduzido no caso do estudo da barra de torção usando o planejamento fatorial 2^5 para as respostas Ix, Iy e J, respectivamente.

Tabela 3.3- Tabela de Análise de Variância do Modelo Reduzido para Ix utilizando o fatorial 2^5

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado médio	Estatística F	Valor p
Efeitos principais	9525714378	5	1905142876	2E+06	0.000
Interações 2 a 2	14981330	10	1498133	1E+03	0.000
Interações 3 a 3	1989	2	994	0.88	0.435
Resíduos	15756	14	1125	--------	-------
Total	9540713453	31	--------	--------	-------

Tabela 3.4- Tabela de Análise de Variância do Modelo Reduzido para Iy utilizando o fatorial 2^5

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado médio	Estatística F	Valor p
Efeitos principais	33496746570	5	6699349314	5E+06	0.000
Interações 2 a 2	77462673	10	7746267	6E+03	0.000
Interações 3 a 3	88923	2	44461	32.31	0.000
Resíduos	19263	14	1376	--------	-------
Total	33574317428	31	--------	--------	-------

Tabela 3.5- Tabela de Análise de Variância do Modelo Reduzido para J utilizando o fatorial 2^5

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado médio	Estatística F	Valor p
Efeitos principais	65608242814	5	1.3122E+10	5E+06	0.000
Interações 2 a 2	84227882	10	8422788	3E+03	0.000
Interações 3 a 3	111295	2	55648	20.91	0.000
Resíduos	37265	14	2662	--------	-------
Total	65692619256	31	--------	--------	-------

Através da estatística F da tabela de análise de variância para as três respostas, confirmam-se os resultados obtidos anteriormente. Todos os efeitos principais e efeitos de interação de segunda ordem foram considerados significativos para todas as respostas, a 5%. Os efeitos de terceira ordem só foram considerados significativos para Iy e J.

3.7 - Análise de Resíduos: verificando as suposições do modelo

Os *resíduos* do modelo são definidos como sendo a diferença entre o valor observado para a variável resposta e o valor ajustado pelo modelo, isto é, o valor calculado para a resposta usando as estimativas para os coeficientes do modelo. Esses resíduos podem ser considerados as estimativas do componentes de erro ε_i's. Desse modo, as suposições feitas acerca dos erros e, consequentemente, acerca da variável resposta, podem ser verificadas através da análise desses resíduos.

A *análise de resíduos* usual é feita de forma gráfica, porém nada impede a realização de testes estatísticos usando os resíduos. Os gráficos geralmente examinados são o gráfico dos resíduos versus os valores ajustados, os gráficos de probabilidade normal dos resíduos, os gráficos dos resíduos versus cada um dos fatores e o gráfico dos resíduos versus a ordem de experimentação.

No gráfico dos *resíduos versus os valores ajustados*, espera-se observar um padrão aleatório no conjunto de pontos, indicando nenhuma relação entre os resíduos e os ajustados. De fato, pode-se provar matematicamente que, se o modelo foi bem ajustado aos dados, não há nenhuma relação entre os resíduos e os valores ajustados. Isso pode ser intuitivamente entendido quando se pensa que o resíduo é a parte da variável resposta que o modelo não conseguiu explicar, enquanto o valor ajustado é a parte da resposta que o modelo explica. Para um modelo bem ajustado, não deveria haver nenhuma relação entre essas partes, já que o resíduo representaria a parte da variável resposta devida à sua variabilidade intrínseca e que nenhum modelo pode explicar. A presença de algum tipo de padrão nesse gráfico indicaria que os resíduos têm alguma relação com a parte explicada pelo modelo, o que seria um sinal de que o modelo não foi bem ajustado (ausência de algum fator importante, entre outros). A Figura 3.9(a) mostra um gráfico de resíduos versus ajustados, onde se pode considerar que os pontos se distribuem do modo aleatório em torno da linha zero. Já no gráfico da Figura 3.9(b), não se pode considerar que existe aleatoriedade no padrão formado pelos pontos. Vale notar que a diferença entre o número de pontos nos dois gráficos não influencia na aleatoriedade do padrão.

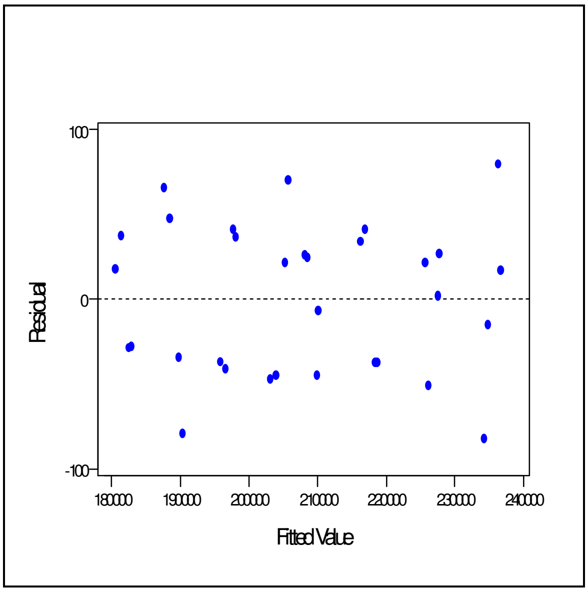

Figura 3.9(a) - Exemplo de padrão aleatório

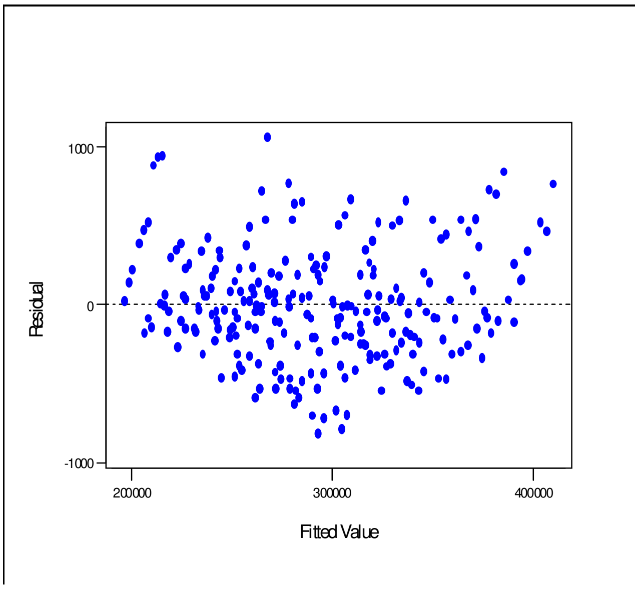

Figura 3.9(b) - Exemplo de padrão não-aleatório

O *gráfico de probabilidade normal dos resíduos* é feito para verificar a suposição de que os erros seguem distribuição normal. Ele pode ser feito como um gráfico dos resíduos padronizados versus seus escores normais. Um resíduo padronizado é definido da seguinte forma

$$\text{residuo padronizado} = \frac{\text{residuo - media(residuos)}}{\text{desvio - padrao(residuos)}}$$

Para calcular o escore normal dos resíduos, esses são ordenados do menor para o maior e a cada um é atribuída a sua posição nessa relação ordenada, diga-se, k, $k = 1,2,...,n$. A *distribuição acumulada empírica* desses resíduos é então calculada como $P_k=(k-1/2)/n$, $k = 1,2,...n$, onde P_k fornece a estimativa da probabilidade de se obter resíduos menores ou iguais ao k-ésimo resíduo. O *escore normal* de um resíduo é definido como o ponto da distribuição normal padrão que deixa uma área P_k abaixo dele. Se a suposição de normalidade é válida, espera-se uma correspondência estreita entre os resíduos padronizados e seus escores normais. Assim, num gráfico dos resíduos versus seus escores normais espera-se que a maioria dos pontos, principalmente os mais centrais, ajustem-se a uma linha reta que passa pela origem e tem inclinação de 45^o graus. A Figura 3.10 mostra um gráfico de probabilidade normal mostrando que a suposição de normalidade dos resíduos parece ser satisfeita.

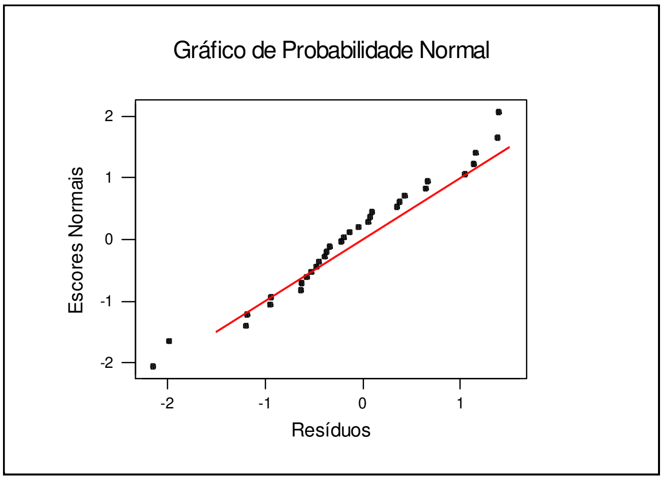

Figura 3.10 - Gráfico de Probabilidade Normal para resíduos onde a suposição de normalidade dos resíduos pode ser considerada válida.

Nos *gráficos dos resíduos versus cada um dos fatores*, pode-se verificar a suposição de variância constante dos erros. Ao se observar gráficos como o da Figura 3.11(a), onde a amplitude de variação dos resíduos é praticamente a mesma nos dois níveis do fator, pode-se considerar válida a suposição de variância constante dos erros no níveis desse fator. No entanto, gráficos como o da Figura 3.11(b) indicam problemas com essa suposição, já que a amplitude de variação dos resíduos é claramente menor no nível mais baixo do fator do que no nível alto.

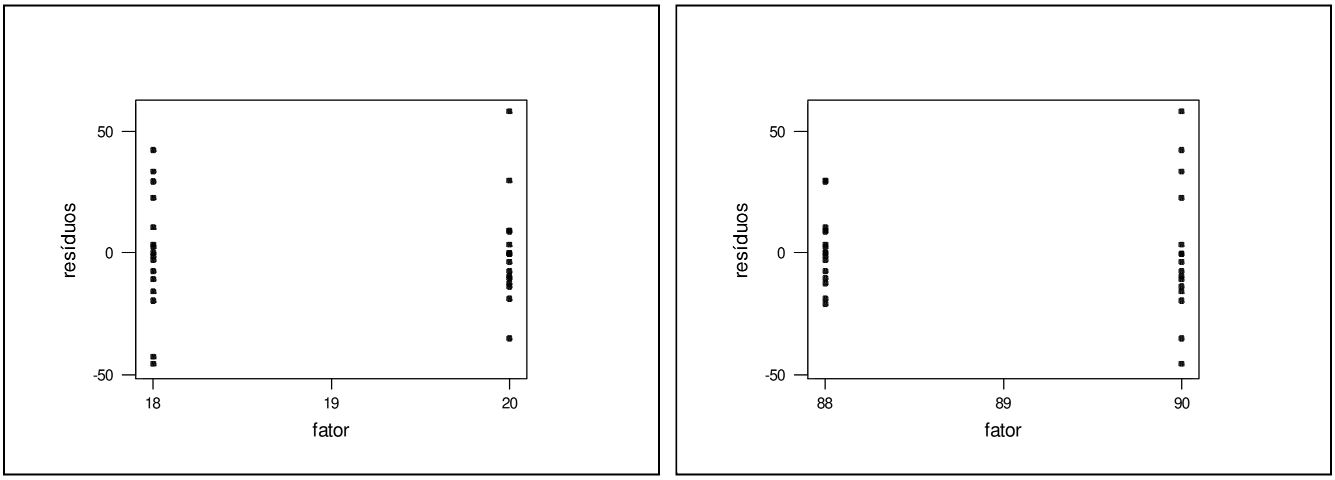

Figura 3.11(a)– Indicativo de variabilidade constante **Figura 3.11(b)–Indicativo de variabilidade não-constante**

O *gráfico dos resíduos versus a ordem de realização dos experimentos* é feito para verificar a suposição de independência dos erros. Novamente, espera-se observar um padrão aleatório como o da Figura 3.12. A presença de algum outro tipo de padrão (sequências crescentes ou decrescentes, por exemplo) indicaria que a observação de um experimento é influenciada pela observação do experimento anterior. Isso significa uma dependência temporal entre os erros e, consequentemente, entre as observações da variável resposta, o que invalida a suposição de independência necessária aos testes de significância dos coeficientes do modelo.

A rigor, a análise dos resíduos deve ser feita antes mesmo da análise da significância dos efeitos no modelo, pois desvios das suposições feitas podem levar a sérios problemas com a validade dos testes estatísticos realizados na análise de variância.

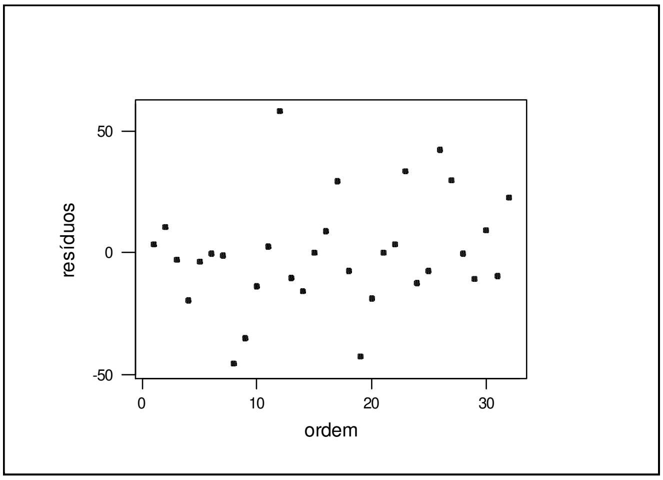

Figura 3.12 - Gráfico de resíduos versus ordem indicando padrão aleatório

Para o estudo da barra de torção, a Figura 3.13 mostra os gráficos de probabilidade normal e os gráficos dos resíduos versus ajustados para Ix, Iy e J, respectivamente. Nos gráficos de probabilidade normal, os resíduos não estão padronizados. Assim, para validar a suposição de normalidade, os pontos, principalmente os mais centrais, devem se ajustar em torno de uma linha reta, não necessariamente passando pelo zero e com inclinação de 45^o graus. Um exame dos gráficos da Figura 3.13 não revela nenhum problema grave com a suposição de normalidade dos erros e nenhum indicativo de falta de ajuste do modelo.

As figuras 3.14 a 3.16 apresentam os gráficos de resíduos versus os fatores para cada uma das respostas Ix, Iy e J, respectivamente. A suposição de variância constante não parece ser invalidada por nenhum dos gráficos.

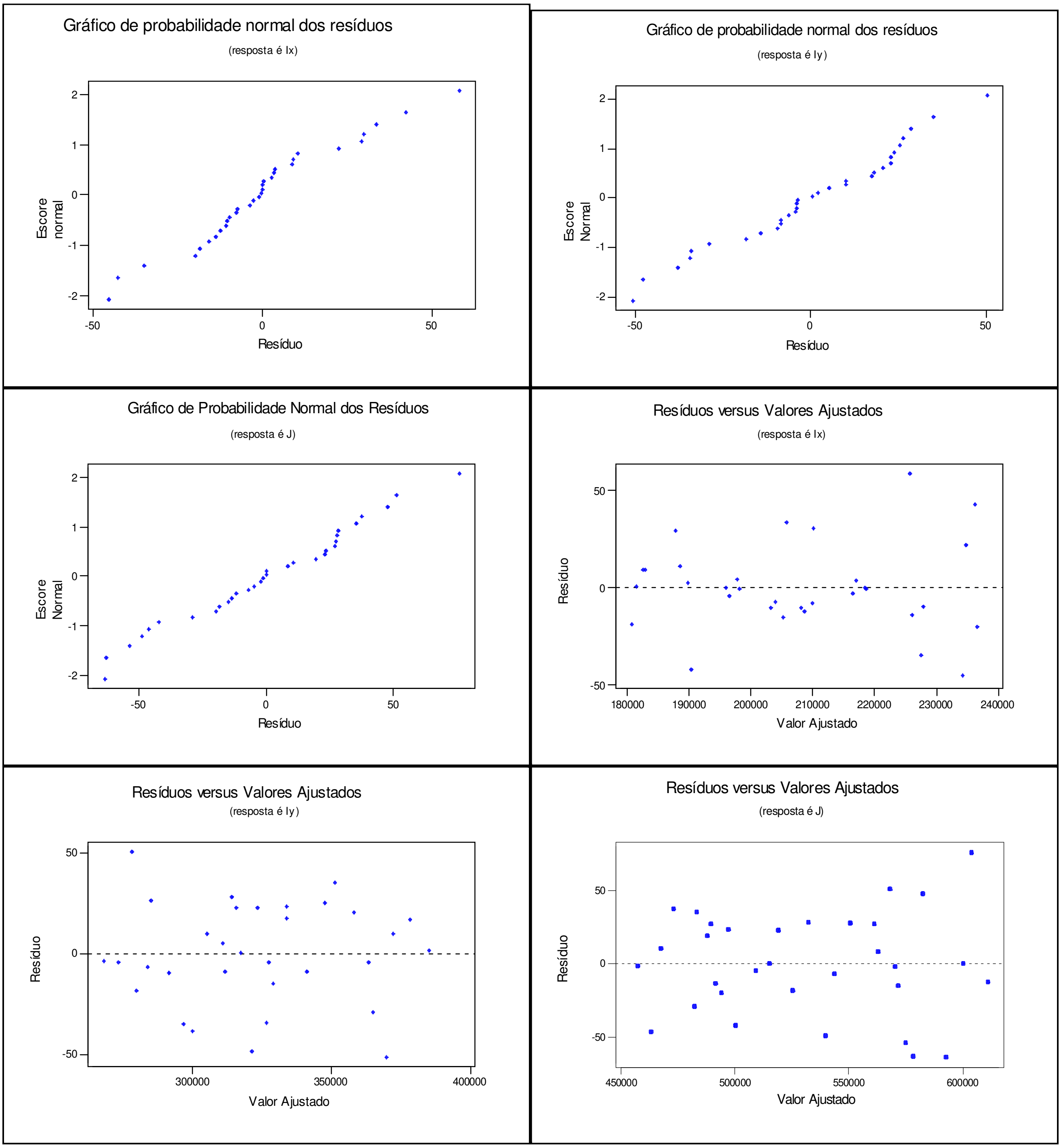

Figura 3.13 - Gráficos de probabilidade normal para os resíduos do primeiro modelo reduzido para Ix, Iy e J, respectivamente (três primeiros gráficos). Gráficos dos resíduos versus os valores ajustados pelo modelos para Ix, Iy e J, respectivamente (três últimos gráficos), utilizando o planejamento fatorial 2^5.

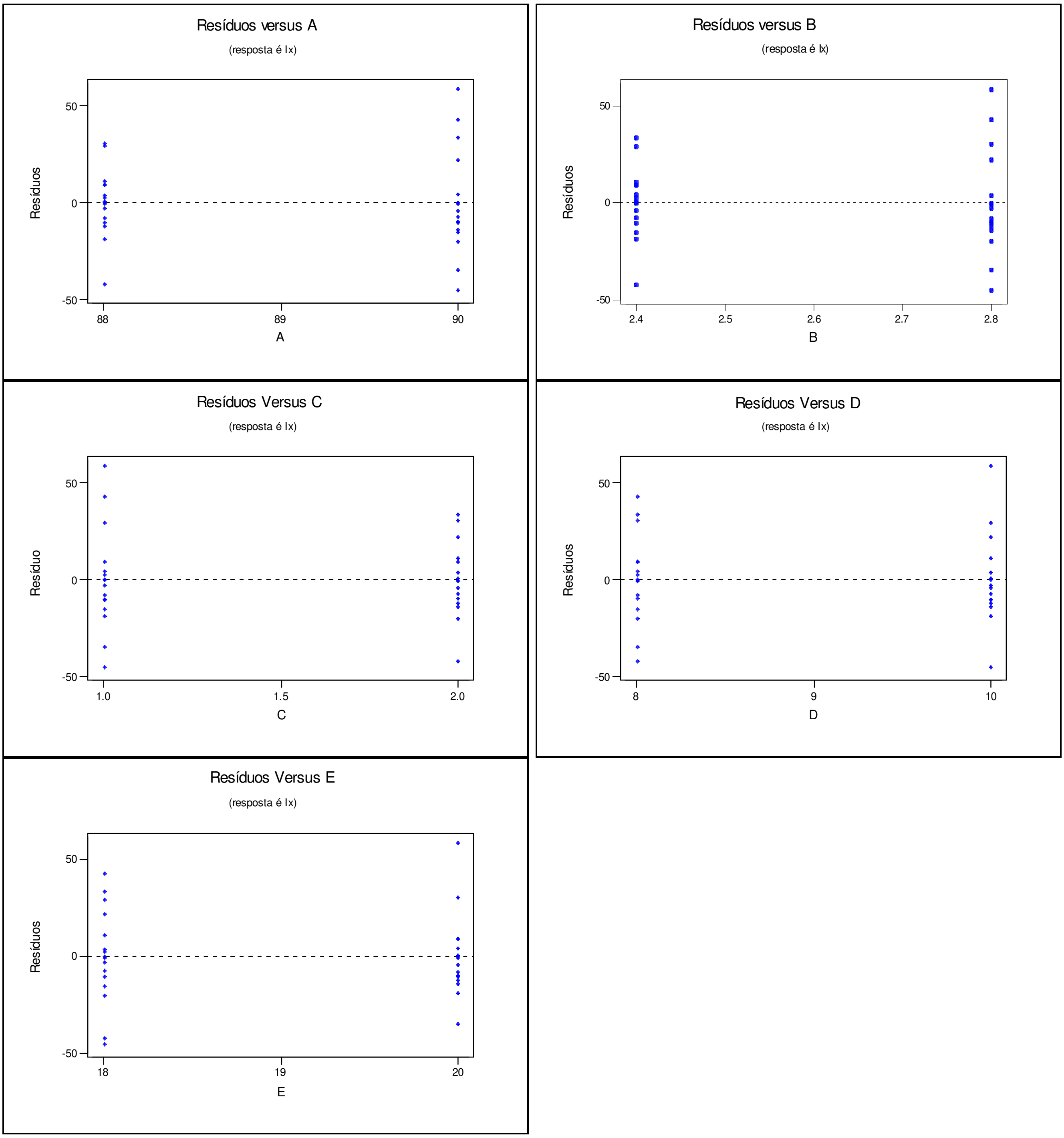

Figura 3.14 - Gráficos dos resíduos do primeiro modelo reduzido para Ix contra os fatores A, B, C, D e E, respectivamente, utilizando o planejamento fatorial 2^5.

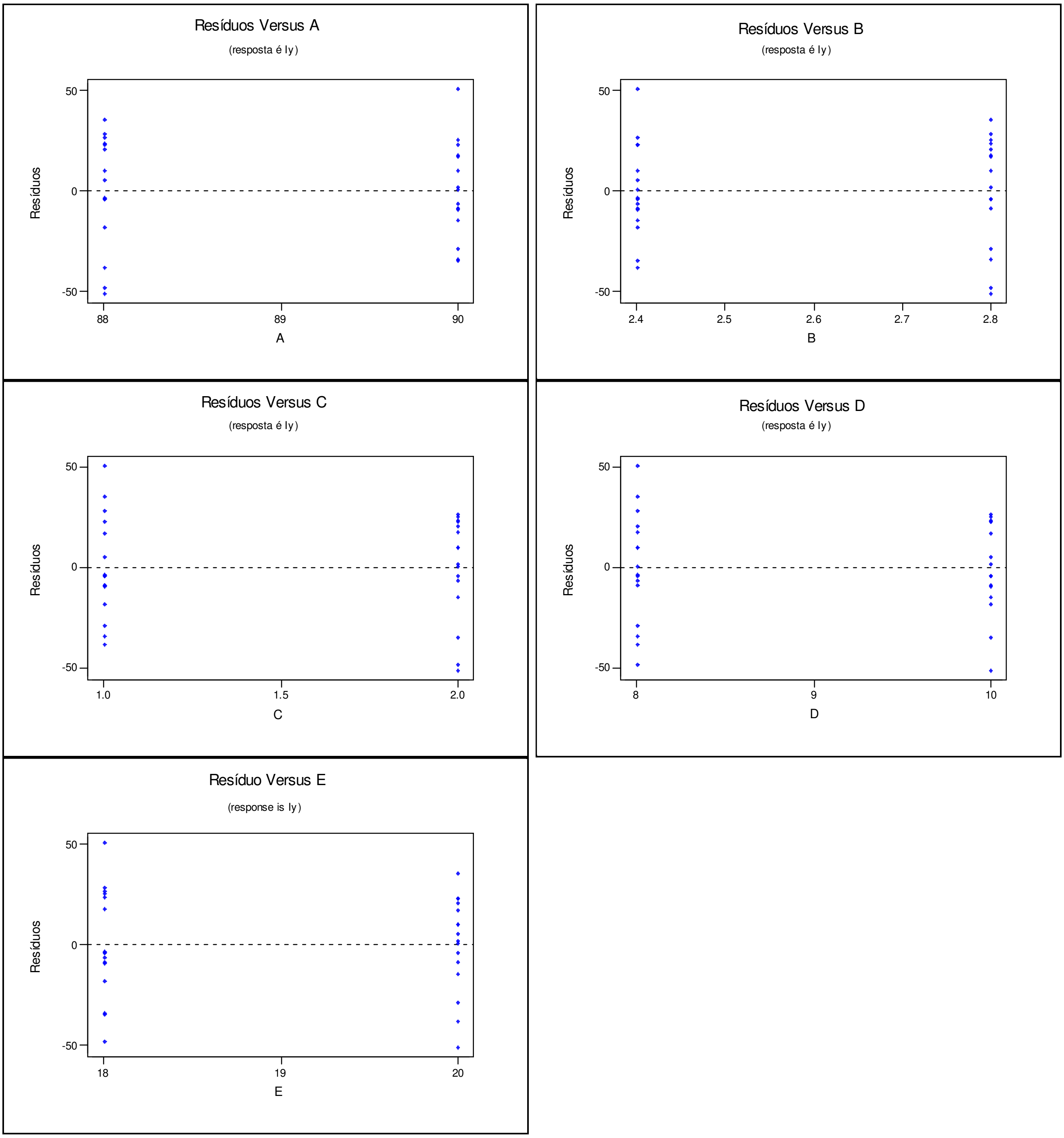

Figura 3.15 - Gráficos dos resíduos do primeiro modelo reduzido para Iy contra os fatores A, B, C, D e E, respectivamente, utilizando o planejamento fatorial 2^5.

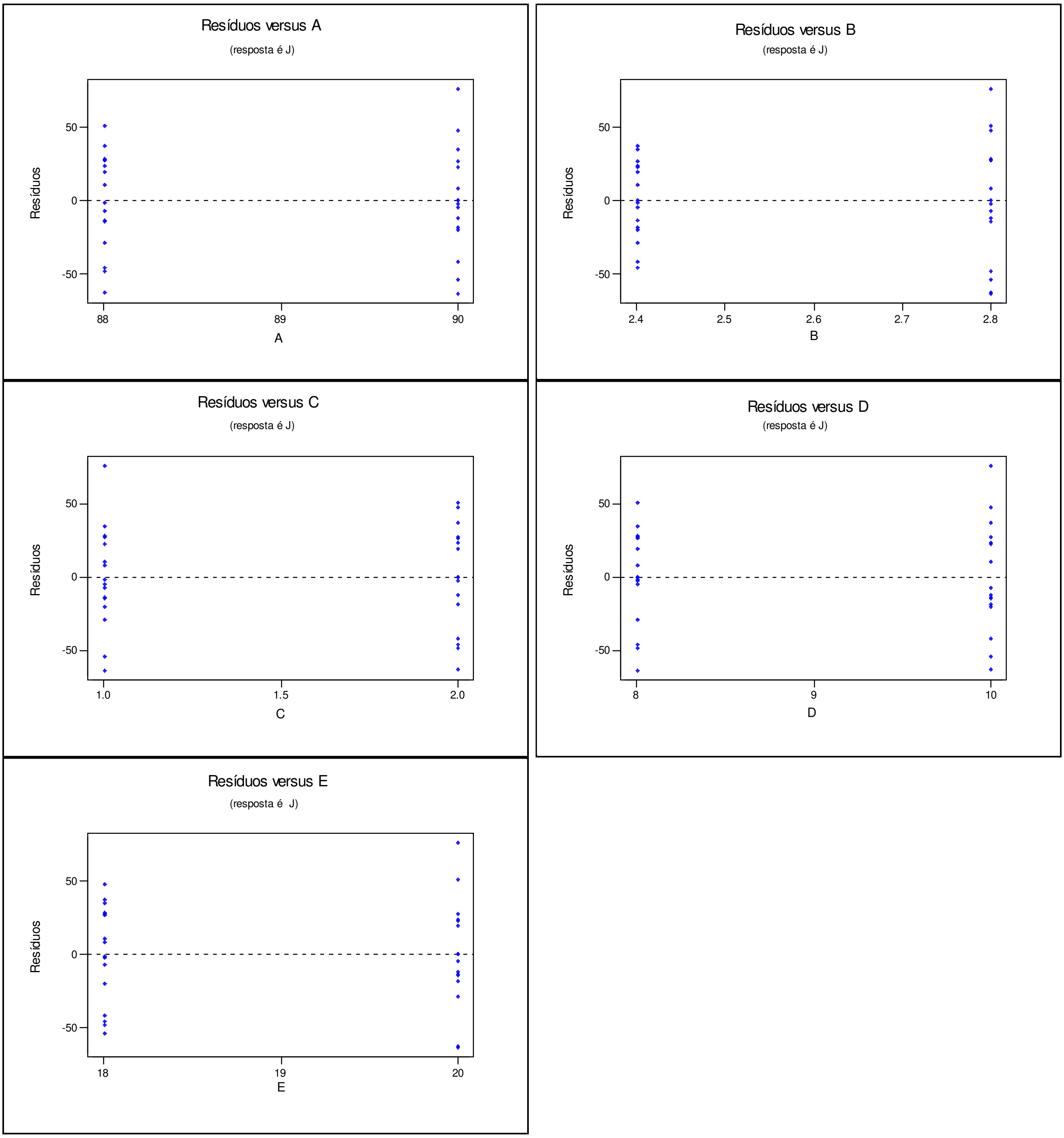

Figura 3.16 - Gráficos dos resíduos do primeiro modelo reduzido para J contra os fatores A, B, C, D e E, respectivamente, utilizando o planejamento fatorial 2^5.

3.8 - Conclusões

O modelo final para as respostas Ix, Iy e J, apontado pelo planejamento fatorial 2^5, foi o seguinte (de acordo com os quadros de 3.5 a 3.7):

Ix = **207623 + 8270(A) + 14582(B) + 243(C) − 908(D) − 3973(E) + 600(AB)− 37(AD) + − 64(AE) − 43(BC) − 4(BD) − 304(BE) + 68(CD) − 34(CE) + 49(DE) − 2(ABE) + − 2(BCD)**

Iy = **323530 + 6390(A) + 25640(B) + 3045(C) + 6194(D) + 17347(E) + 544(AB) + + 92(AC) + 282(AD) + 337(AE) + 357(BC) + 308(BD) + 1267(BE) − 127(CD) + − 19(CE) − 280(DE) + 25(ABE) − 47(BCD)**

J = **531153 + 14659(A) + 40221(B) + 3288(C) + 5286(D) + 13374(E) + 1145(AB) + + 92(AC) + 245(AD) + 273(AE) + 315(BC) + 304(BD) + 963(BE) − 58(CD) + − 53(CE) − 231(DE) + 23(ABE) − 54(BCD)**

Note que os maiores coeficientes, para todas as respostas, são os correspondentes aos termos dos fatores principais e das interações AB e BE, como já observado anteriormente. Esses são os termos que possuem os maiores efeitos. Apesar de serem estatisticamente significantes, a significância prática dos outros coeficientes do modelo pode ser questionada.

Vale lembrar que, para usar as equações do modelo, os níveis dos fatores devem estar codificados (seção 3.1). Por exemplo, o valor esperado para a inércia no eixo X de uma peça na qual todos os fatores assumem seus níveis altos (+1) seria calculado substituindo-se +1 em todos os termos da equação para Ix e fazendo-se as devidas multiplicações. O resultado é a soma de todos os coeficientes do modelo, já que os valores de todos os termos serão positivos, e igual a 226064.

4 - **O Planejamento Fatorial Fracionado 2^{k-1}**

Mesmo sendo um dos experimentos fatoriais mais econômicos, já que usa o número mínimo de níveis (dois), a realização de um conjunto de experimentos fatoriais 2^k pode ser tornar dispendioso à medida que cresce o número de fatores envolvidos. No caso de 3 fatores, o número mínimo de experimentos a serem realizados é igual a 2^3=8. Quando k=7, esse número sobe para 2^7=128. No caso do estudo da barra de torção, número mínimo de experimentos a serem realizados é 2^5=32.

Para tentar reduzir esse número de experimentos requeridos, sem grandes perdas de eficácia da técnica, foram propostos os planejamentos fatoriais fracionados, onde somente uma fração do planejamento completo é executada. Esses planejamentos são denominados por fatoriais fracionados 2^{k-p}, onde 2^p determina qual será o fracionamento do planejamento completo. Por exemplo, num fatorial fracionado 2^{k-2}, somente a quarta parte ($1/2^2$) do planejamento completo será utilizada.

Num planejamento fatorial fracionado 2^{k-1}, somente uma metade do planejamento fatorial completo 2^k é utilizada, o que pode representar grande economia no caso da maioria das pesquisas experimentais.

A estratégia usada para se montar um fatorial fracionado 2^{k-1} é, geralmente, escrever um dos fatores como a multiplicação dos outros. Desse modo, usando a Tabela 3.2 como exemplo, os sinais dos níveis do fator E seriam escritos como uma multiplicação dos sinais dos níveis dos outros fatores, gerando a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Desenho esquemático para montagem dos tratamentos do planejamento fatorial 2^{5-1}, utilizando a coluna do fator E como a multiplicação das outras colunas

Experimento	A	B	C	D	E	-E
1	+	+	+	+	+	-
2	-	+	+	+	-	+
3	+	-	+	+	-	+
4	-	-	+	+	+	-
5	+	+	-	+	-	+
6	-	+	-	+	+	-
7	+	-	-	+	+	-
8	-	-	-	+	-	-
9	+	+	+	-	-	+
10	-	+	+	-	+	-
11	+	-	+	-	+	-
12	-	-	+	-	-	+
13	+	+	-	-	+	-
14	-	+	-	-	-	+
15	+	-	-	-	-	+
16	-	-	-	-	+	-
17	+	+	+	+	+	-
18	-	+	+	+	-	+
19	+	-	+	+	-	+
20	-	-	+	+	+	-
21	+	+	-	+	-	+
22	-	+	-	+	-	+
23	+	-	-	+	+	-
24	-	-	-	+	-	+
25	+	+	+	-	-	+
26	-	+	+	-	+	-
27	+	-	+	-	+	-
28	-	-	+	-	-	+
29	+	+	-	-	+	-
30	-	+	-	-	-	+
31	+	-	-	-	-	+
32	-	-	-	-	+	-

Note que, na segunda metade da Tabela 4.1 (experimentos de 17 a 32), os tratamentos se repetem. Assim, a fração do experimento a ser realizada pode ser a primeira metade da Tabela 4.1. Para realizar a fração complementar, bastaria substituir a coluna do fator E por -E, que é a coluna E multiplicada por -1, como mostrado na última coluna da Tabela 4.1. Essas duas frações formam o fatorial completo.

Na Figura 4.1, é apresentada a representação esquemática dos resultados para a resposta Ix nos experimentos do planejamento fatorial 2^{5-1} usado no estudo da barra de torção. Note que somente alguns vértices dos cubos possuem valores para a resposta , pois são os vértices correspondentes aos tratamentos que compõem a meia-fração utilizada nos experimentos.

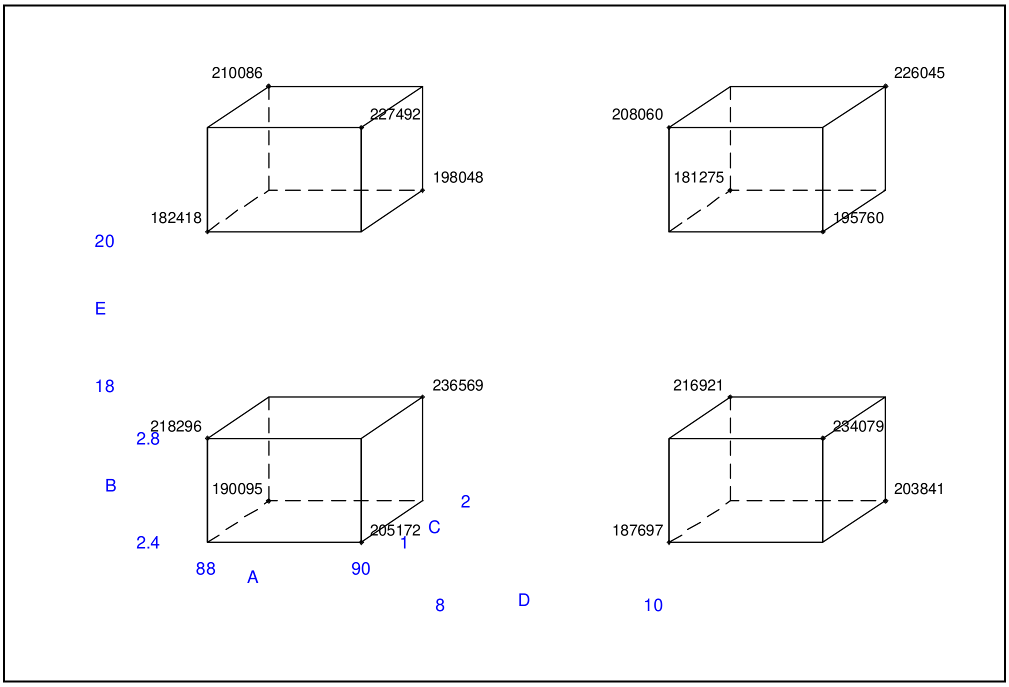

Figura 4.1 - Representação esquemática dos resultados dos experimentos do planejamento fatorial fracionado 2^{5-1} usado no estudo da barra de torção. Note que somente alguns vértices dos cubos possuem resultados associados.

Quando o fatorial fracionado é adotado, acontece um fenômeno chamado *confundimento* na estimação dos efeitos. Ocorre que certos efeitos estarão confundidos com outros e não há como separá-los no momento da estimação. Geralmente, os efeitos principais e os efeitos de interação de baixa ordem estão confundidos com os efeitos de interação de mais alta ordem. Diz-se que os efeitos são *aliases*. Caso seja plausível assumir que os efeitos de mais alta ordem são de tal magnitude que podem ser desprezados, as estimativas dos efeitos principais e de interações de baixa ordem não fica comprometida. Usualmente, essa suposição acerca dos efeitos de interações de mais alta ordem pode ser feita sem maiores problemas.

A *estrutura de confundimento* de um fatorial fracionado é conseguida através do chamado *gerador do planejamento*. No caso da Tabela 4.1, o gerador do experimento é o fator E. Então, diz-se que E = ABCD. Se o gerador é multiplicado por si mesmo, tem-se I, a *identidade*. Assim,

$$I = E \times E = E \times ABCD = ABCDE$$

e I = ABCDE é chamada *relação de definição* do planejamento. A coluna I representa a multiplicação de quaisquer das outras colunas por elas mesmas. Sendo assim, I é uma coluna de sinais +.

Para se conseguir determinar quais efeitos são *aliases*, ou seja, a estrutura de confundimento, basta multiplicar todos os termos do planejamento (fatores e interações) pela identidade I. Para se descobrir, por exemplo, que efeitos são aliases do efeito do fator A, deve-se proceder como se segue

$$A \times I = A \times ABCDE \rightarrow AI = A^2BCDE \rightarrow A = BCDE$$

pois AI = A, já que I é uma coluna de sinais positivos e A^2 é igual a I, pois A^2 é também uma coluna de sinais positivos. Assim, nota-se que o efeito principal do fator A e o efeito da interação BCDE são *aliases*. Se a suposição de que o efeito de BCDE é desprezível, o efeito do fator A pode ser estimado sem problemas.

A estrutura de confundimento para o caso do estudo da barra de torção, usando I=ABCDE é mostrada no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 - Estrutura de confundimento para o caso do estudo da barra de torção, usando I=ABCDE

I	**+**	**A*B*C*D*E**
A	**+**	**B*C*D*E**
B	**+**	**A*C*D*E**
C	**+**	**A*B*D*E**
D	**+**	**A*B*C*E**
E	**+**	**A*B*C*D**
A*B	**+**	**C*D*E**
A*C	**+**	**B*D*E**
A*D	**+**	**B*C*E**
A*E	**+**	**B*C*D**
B*C	**+**	**A*D*E**
B*D	**+**	**A*C*E**
B*E	**+**	**A*C*D**
C*D	**+**	**A*B*E**
C*E	**+**	**A*B*D**
D*E	**+**	**A*B*C**

Note que os efeitos principais dos fatores (em negrito) são *aliases* somente dos efeitos de interação de quarta ordem. Isso se deve à *resolução do planejamento*. A Tabela 4.2 mostra como se dá o esquema de confundimento de acordo com a resolução do planejamento.

Tabela 4.2 - Características da estrutura de confundimento de um planejamento fatorial fracionado segundo sua resolução.

Resolução	Efeitos principais confundidos com	Efeitos de interações de segunda ordem confundidos com	Alguns Casos
III	efeitos de segunda ordem	efeitos principais	No fatorial 2^{3-1} com I=ABC, tem-se, por exemplo, C=AB
IV	efeitos de terceira ordem	efeitos de segunda ordem	No fatorial 2^{4-1} com I=ABCD, tem-se, por exemplo, D=ABC e AB=CD
V	efeitos de quarta ordem	efeitos de terceira ordem	No fatorial 2^{5-1} com I=ABCDE, tem-se, por exemplo, E=ABCD e AB=CDE

O planejamento usado no estudo da travessa é de resolução V, isto é, os efeitos principais são *aliases* somente dos efeitos de quarta ordem e os efeitos de segunda e terceira ordem são *aliases* entre si. Assim, se os efeitos de interação de quinta, quarta e terceira ordens puderem ser considerados desprezíveis, não haverá problemas com a estimação dos efeitos principais e dos efeitos da interação de segunda ordem.

Usualmente, a estratégia para uma pesquisa experimental usando planejamento de experimentos é, numa primeira etapa, utilizar o planejamento fatorial fracionado 2^{k-p} para selecionar aqueles fatores que realmente são importantes para o problema, além de permitir uma primeira visão do relacionamento entre eles e a resposta. Isso é feito principalmente quando o número de fatores é grande e ainda não está muito claro quais fatores são realmente relevantes para o problema.

Um dos objetivos desse estudo é também avaliar a eficácia do procedimento do fatorial fracionado frente a alternativa do fatorial completo, aproveitando-se do fato de que o custo de experimentação nesse caso pode ser considerado desprezível, por se tratar de experimentação feita através de simulações em computador.

Sendo assim, foi realizado também um conjunto de experimentos segundo o planejamento fatorial 2^{5-1}. A meia-fração utilizada (16 experimentos) foi a correspondente à primeira metade da Tabela 4.1, com E=ABCD. Desse modo, a estrutura de confundimento é aquela mostrada no Quadro 4.1 .

4.1 - Análise do conjunto de experimentos fatoriais 2^{5-1} para o estudo da barra de torção

Como os efeitos principais dos fatores e os efeitos de interação de segunda ordem são *aliases* dos efeitos de interações de ordens superiores (terceira, quarta e quinta), o modelo a ser ajustado inicialmente (modelo completo) contém apenas os termos correspondentes aos efeitos principais e às interações de segunda ordem. Aliás, com apenas 16 observações, pode-se ajustar um modelo com, no máximo, 16 termos (intercepto, 5 fatores e 10 interações), que é o chamado modelo completo.

As estimativas dos efeitos principais dos cinco fatores investigados e para os efeitos das interações de segunda ordem nas respostas Ix, Iy e J são mostradas, respectivamente, nos quadros de 4.3 a 4.5. Observe que, o fator de maior efeito sobre as respostas é o B, seguido pelo A e o E, para as respostas Ix e J, e por E e A para a resposta Iy. O fator E tem efeito negativo sobre Ix, mas positivo sobre Iy e J. Como observado anteriormente, isso pode explicado pelo fato de que, aumentando o valor do fator E, a peça fica mais “comprida” em relação ao eixo X, o que diminui a inércia naquele eixo, e fica mais “achatada” em relação ao eixo Y, aumentando a inércia nesse eixo.

A interação de maior efeito na resposta Ix é aquela entre os fatores A e B (AB), que domina as outras interações. Já para as respostas Iy e J, há duas interações cujos os efeitos são grandes em relação aos efeitos das demais: AB e BE. Na presença de interação, um fator não pode ser avaliado somente com base em seu efeito principal. Pode ocorrer do efeito principal desse fator ser muito pequeno, mas o efeito de sua interação com outro fator ser grande.

Note que as estimativas dos efeitos de todos os termos possuem o mesmo sinal das estimativas conseguidas com modelo final no planejamento fatorial 2^5 (quadros de 3.5 a 3.7), havendo pequenas diferenças somente na magnitude do efeito, sendo que as maiores diferenças estão nas estimativas dos efeitos de interações.

Quadro 4.3 – Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação de segunda ordem na resposta inércia no eixo X (Ix) utilizando o planejamento fatorial 2^{5-1} para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para Ix

Term	Efeito	Coef
Constant		207616
A	16520	8260
B	29155	14578
C	488	244
D	-1813	-906
E	-7936	-3968
A*B	1186	593
A*C	12	6
A*D	-77	-38
A*E	-143	-72
B*C	-65	-32
B*D	-22	-11
B*E	-610	-305
C*D	133	67
C*E	-57	-29
D*E	86	43

Quadro 4.4 – Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação de segunda ordem na resposta inércia no eixo Y (Iy) utilizando o planejamento fatorial 2^{5-1} para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para Iy

Term	Efeito	Coef
Constant		323534
A	12778	6389
B	51285	25643
C	6095	3048
D	12383	6191
E	34687	17344
A*B	1068	534
A*C	166	83
A*D	555	278
A*E	581	290
B*C	728	364
B*D	615	307
B*E	2523	1262
C*D	−204	−102
C*E	−21	−10
D*E	−532	−266

Quadro 4.5 – Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação de segunda ordem na resposta inércia polar (J) utilizando o planejamento fatorial 2^{5-1} para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para J

Term	Efeito	Coef
Constant		531149
A	29298	14649
B	80440	40220
C	6583	3292
D	10570	5285
E	26751	13376
A*B	2254	1127
A*C	177	89
A*D	478	239
A*E	437	219
B*C	663	332
B*D	593	296
B*E	1914	957
C*D	−71	−36
C*E	−78	−39
D*E	−446	−223

Como não há réplicas nesse conjunto de experimentos e o modelo ajustado foi o completo, o erro experimental não pode ser estimado e nem sua variância. Consequentemente, os desvios-padrão dos coeficientes também não podem ser estimados e nem os testes de significância podem ser feitos. Para verificar quais efeitos são significantes, foram usados os *gráficos de probabilidade normal* dos efeitos.

As figuras de 4.2(a) a 4.2(c) mostram os gráficos de probabilidade normal para as três respostas estudadas, sendo os efeitos rotulados aqueles considerados significativos. Note que, para todas as respostas, todos os efeitos principais foram considerados significativos. Somente os efeitos das interações entre B e E (BE) e A e B (AB) foram consideradas significativas, sendo o efeito de AB considerado significativo apenas para as respostas Ix e J.

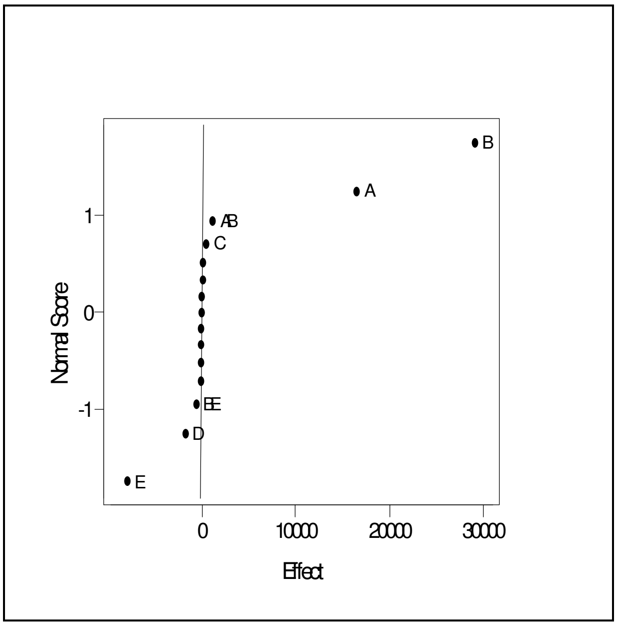

Figura 4.2(a) – Gráfico de probabilidade normal para Ix

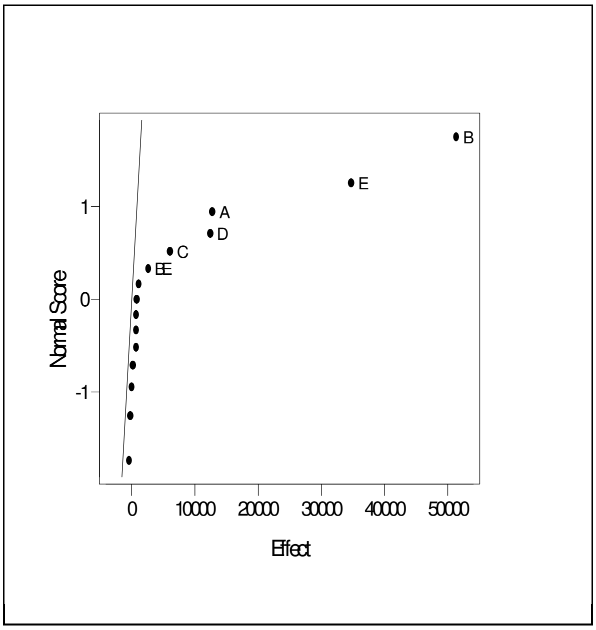

Figura 4.2(b) – Gráfico de probabilidade normal para Iy

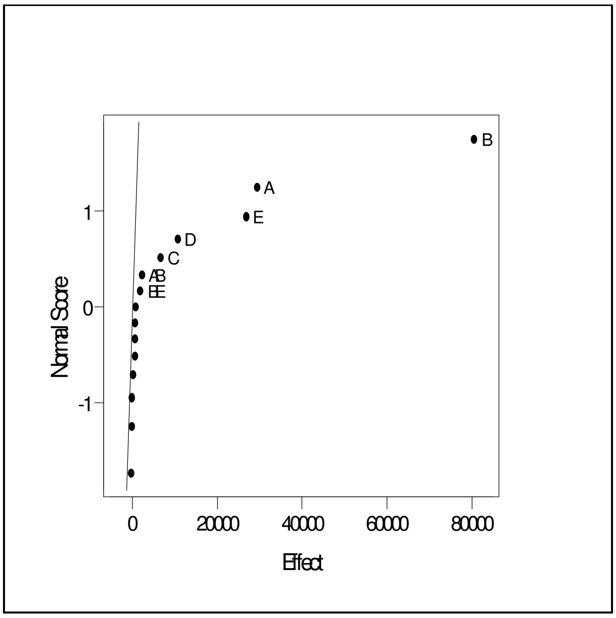

Figura 4.2(c) – Gráfico de probabilidade normal para J

Prosseguindo com a seleção do melhor modelo para descrever as respostas em função dos fatores, foram mantidos todos os efeitos considerados significativos em pelo menos uma das respostas. Assim, mantiveram-se todos os efeitos principais e os efeitos das interações entre A e B (AB) e B e E (BE).

4.2 - O modelo reduzido

Os Quadros de 4.6 a 4.8 mostram as estimativas dos efeitos para o modelo reduzido, aquele que contém apenas os termos A, B, C, D, E, AB e BE, para as respostas Ix, Iy e J, respectivamente. Como os efeitos de 8 das 10 interações de segunda ordem foram consideradas desprezíveis, nesse modelo reduzido, eles formam o correspondente ao erro experimental. Através dos testes *t-student*, ao nível de 5%, foi confirmada a significância de todos os efeitos principais e da interação entre B e E para todas as respostas. O efeito da interação entre A e B (AB) só foi considerado significante para a inércia no eixo X e a inércia polar, como no modelo completo.

Para as respostas Iy e J, há uma observação considerada não usual (observação 4), que se refere ao experimento cujos os níveis dos fatores são (88 ; 2,4 ; 2 ; 10 ; 20), sendo a ordem dos fatores a mesma do Quadro 4.6. No entanto, o valor de Iy e J para esse experimento não é de nenhum modo distoante do restante dos experimentos. Sendo assim, não haveria razões fortes para se descartar essa observação, lembrando ainda que, a retirada de uma observação comprometeria a ortogonalidade do planejamento e, consequentemente, a interpretação dos efeitos.

Quadro 4.6 – Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação de segunda ordem AB e BE na resposta inércia no eixo X (Ix) utilizando o planejamento fatorial 2^{5-1} para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para Ix

Term	Efeito	Coef	Desv.pad(Coef)	T	P
Constant		207616	43.22	4803.92	0.000
A	16520	8260	43.22	191.12	0.000
B	29155	14578	43.22	337.30	0.000
C	488	244	43.22	5.65	0.000
D	-1813	-906	43.22	-20.97	0.000
E	-7936	-3968	43.22	-91.81	0.000
A*B	1186	593	43.22	13.72	0.000
B*E	-610	-305	43.22	-7.05	0.000

Análise de Variância para Ix

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	5	4757751963	4757751963	951550393	3E+04	0.000
2-Way Interactions	2	7110576	7110576	3555288	118.97	0.000
Residual Error	8	239078	239078	29885		
Total	15	4765101617				

Quadro 4.7 – Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação de segunda ordem AB e BE na resposta inércia no eixo Y (Iy) utilizando o planejamento fatorial 2^{5-1} para o estudo da barra de torção

Efeitos Estimados e Coeficientes para Iy

Term	Efeito	Coef	Desv.pad(Coef)	T	P
Constant		323534	244.1	1325.41	0.000
A	12778	6389	244.1	26.17	0.000
B	51285	25643	244.1	105.05	0.000
C	6095	3048	244.1	12.49	0.000
D	12383	6191	244.1	25.36	0.000
E	34687	17344	244.1	71.05	0.000
A*B	1068	534	244.1	2.19	0.060
B*E	2523	1262	244.1	5.17	0.000

Análise de Variância para Iy

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	5	16748510468	1.6749E+10	3349702094	4E+03	0.000
2-Way Interactions	2	30032649	30032649	15016325	15.75	0.002
Residual Error	8	7626914	7626914	953364		
Total	15	16786170031				

Observações não usuais para Iy

Obs	Iy	Fit	StDev Fit	Residual	St Resid
4	315656	317357	690	-1701	-2.46R

Quadro 4.8 – Estimativas dos efeitos principais dos fatores e efeitos de interação de segunda ordem AB e BE na resposta inércia polar (J) utilizando o planejamento fatorial 2^{5-1} para o estudo da barra de torção

```
Efeitos Estimados e Coeficientes para J

Term                 Efeito       Coef  Desv.pad(Coef)    T       P
Constant                        531149        213.1 2492.63  0.000
A                     29298      14649        213.1   68.75  0.000
B                     80440      40220        213.1  188.75  0.000
C                      6583       3292        213.1   15.45  0.000
D                     10570       5285        213.1   24.80  0.000
E                     26751      13376        213.1   62.77  0.000
A*B                    2254       1127        213.1    5.29  0.000
B*E                    1914        957        213.1    4.49  0.000

Análise de Variânica para J

Source                DF      Seq SS      Adj SS      Adj MS       F       P
Main Effects           5 32798950718 3.2799E+10 6559790144  9E+03  0.000
2-Way Interactions     2    34974176    34974176    17487088  24.07  0.000
Residual Error         8     5812028     5812028      726504
Total                 15 32839736923

Observações não usuais para J

Obs          J         Fit  StDev Fit   Residual   St Resid
  4     496931      498403        603      -1472      -2.44R
```

4.3 - Análise de Resíduos para o Modelo Reduzido

Os três primeiros gráficos da Figura 4.3 são os de probabilidade normal dos resíduos do ajuste do modelo reduzido para as respostas Ix, Iy e J, respectivamente. O teste de normalidade de Anderson-Darling não rejeita a hipótese de distribuição normal para os resíduos, com p-valores de 0,399 , 0,233 e 0,438, respectivamente.

Os três gráficos restantes da Figura 4.3 são os de resíduos versus ajustados para as respostas Ix, Iy e J, respectivamente. Aparentemente, não há um padrão que revele problemas em nenhum dos gráficos.

As figuras de 4.4 a 4.6 apresentam os gráficos dos resíduos do ajuste do modelo reduzido para Ix, Iy e J, respectivamente, versus os fatores envolvidos no modelo. A princípio, poder-se-ia pensar que a variância dos resíduos de Ix não é constante nos níveis dos fatores A, B e D, mas o teste F para homogeneidade de variâncias não rejeita a hipótese de variâncias homogêneas nos níveis desses fatores com p-valores de 0,709 , 0,214 e 0,414 , respectivamente. Para os resíduos das respostas Iy e J, desconsiderando a observação 4, não parece haver problemas de variância não-constante nos níveis dos fatores considerados.

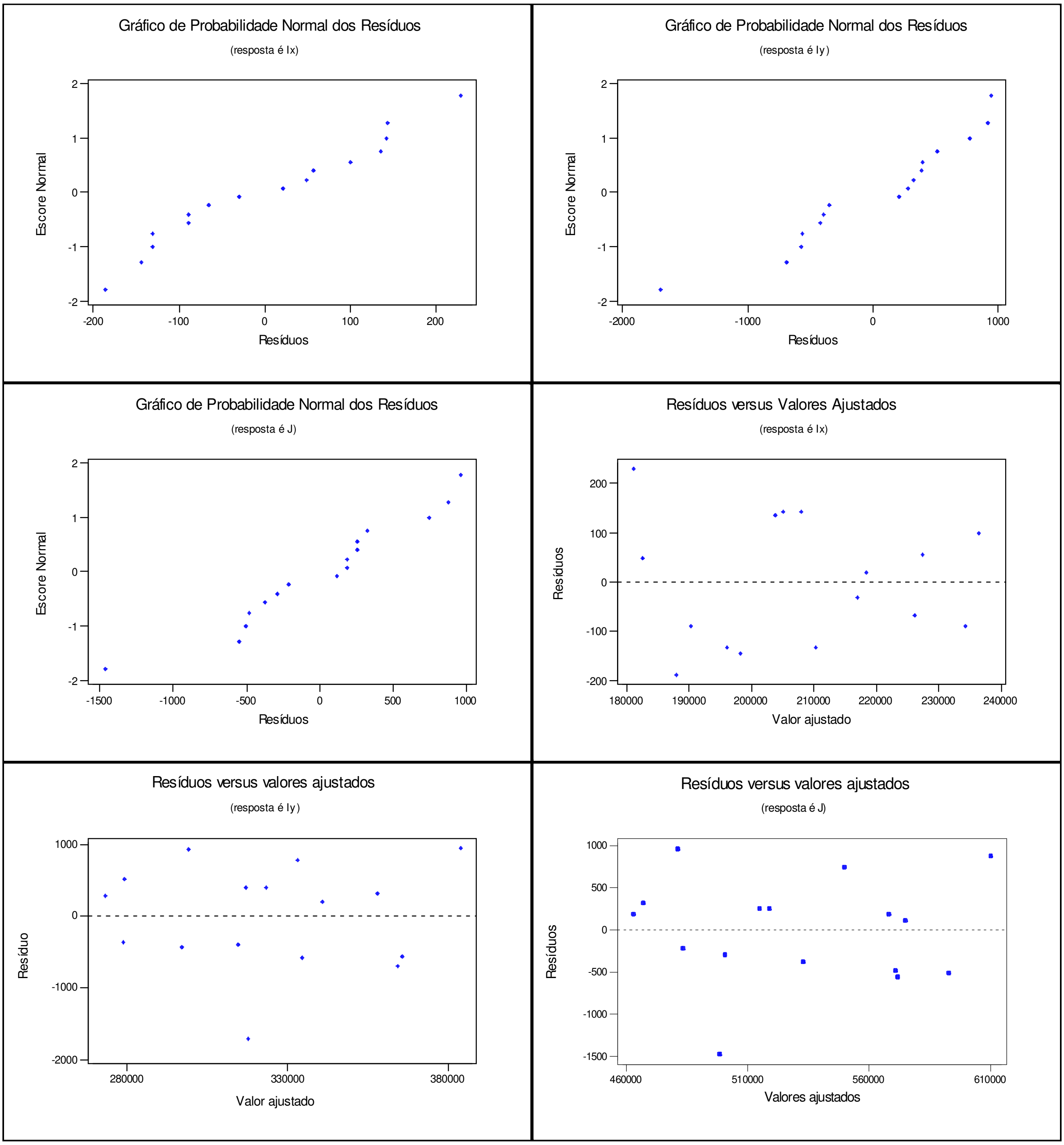

Figura 4.3 – Gráficos de probabilidade normal para os resíduos dos modelos para Ix, Iy e J, respectivamente (três primeiros gráficos). Gráficos dos resíduos versus os valores ajustados pelo modelos para Ix, Iy e J, respectivamente (três últimos gráficos).

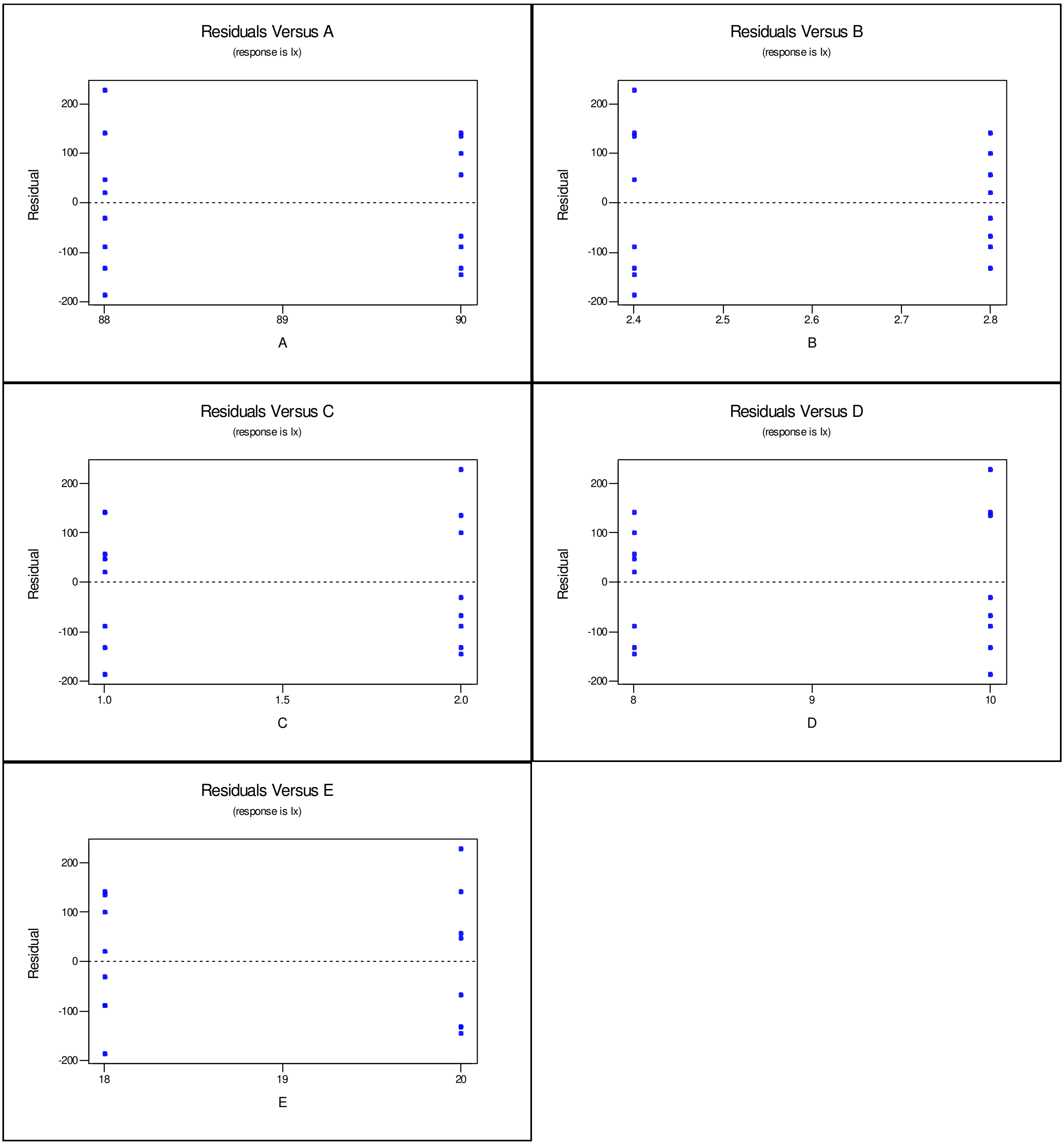

Figura 4.4 - Gráficos dos resíduos do modelo para Ix contra os fatores A, B, C, D e E, respectivamente.

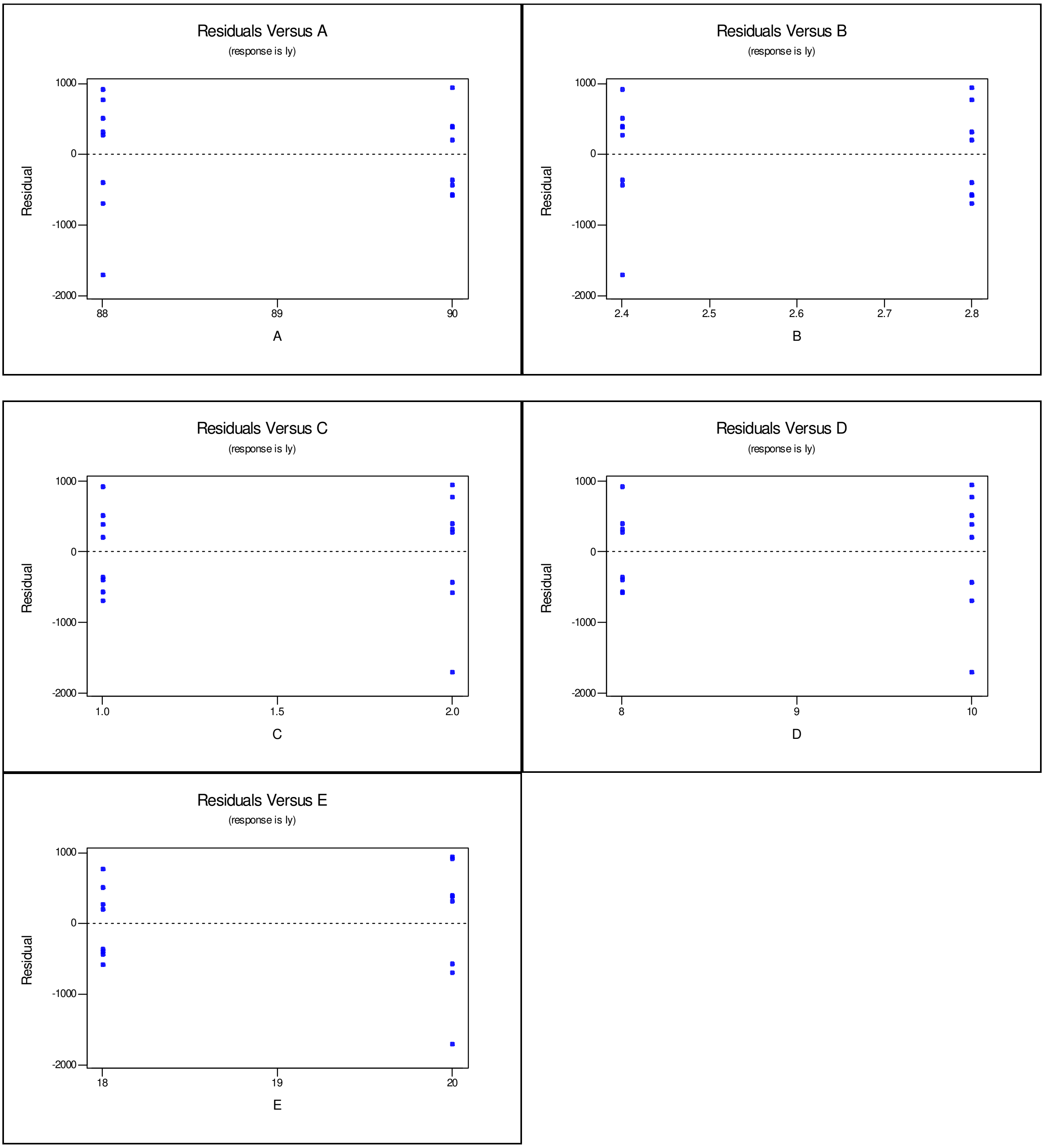

Figura 4.5 - Gráficos dos resíduos do modelo para Iy contra os fatores A, B, C, D e E, respectivamente.

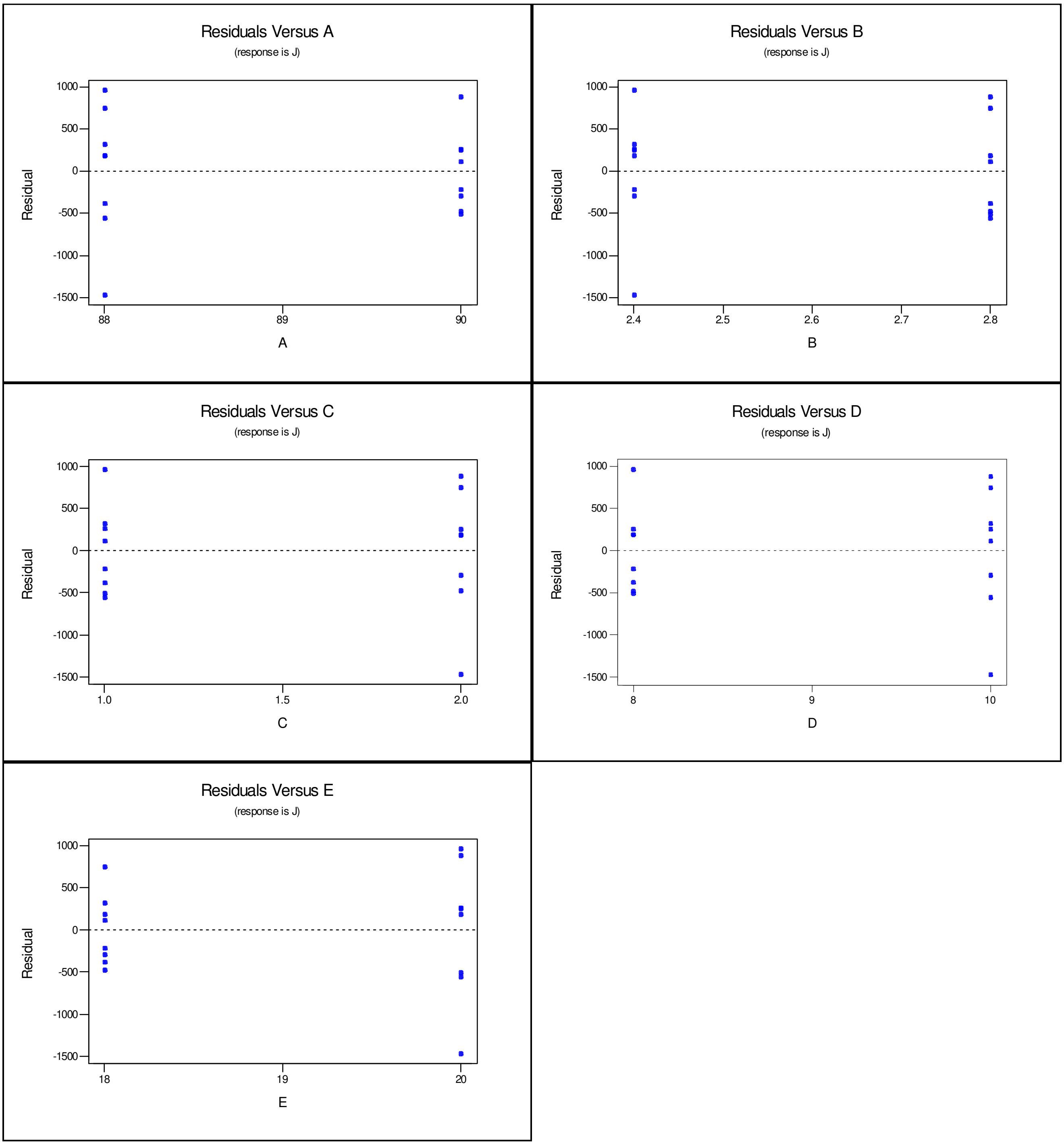

Figura 4.6 - Gráficos dos resíduos do modelo para J contra os fatores A, B, C, D e E, respectivamente.

4.4 - Conclusões

Como todos os fatores e interações contemplados no modelo reduzido tiveram seus efeitos considerados significantes para pelo menos uma das respostas, o modelo considerado final será aquele descrito pela seguintes equações:

$$Ix = 207616+8260(A)+14578(B)+244(C)-906(D)-3968(E)+593(AB)-305(BE)$$

$$Iy = 323534+6389(A)+25643(B)+3048(C)+6191(D)+17344(E)+534(AB)+1262(BE)$$

$$J = 531149+14649(A)+40220(B)+3292(C)+5285(D)+13376(E)+1127(AB)+957(BE)$$

Note que as estimativas dos coeficientes dos modelos acima são muito semelhantes às estimativas dos coeficientes dos modelos obtidos com o planejamento fatorial completo.

Para que essas equações possam ser usadas, os níveis dos fatores devem estar codificados (seção 3.1). Por exemplo, o valor esperado para a inércia no eixo X de uma peça na qual todos os fatores assumem seus níveis altos (+1) seria calculado substituindo-se +1 em todos os termos da equação para Ix e fazendo-se as devidas multiplicações. O resultado é a soma de todos os coeficientes do modelo, já que os valores de todos os termos serão positivos, e igual a 226112. Comparando esse valor com o que seria obtido modelo do fatorial completo (seção 3.8), tem-se que a diferença absoluta relativa entre os resultados dos dois modelos é |226064-226112|/226064=0,0002, menos de 0,05%.

5 - Análise Exploratória dos Resultados dos Experimentos do Planejamento Fatorial 2^5

As faixas de interesse para as inércias em estudo foram definidas como se segue:

- Para a inércia no eixo X (Ix): 180000 a 300000;
- Para a inércia no eixo Y (Iy): 200000 a 300000;
- Para a inércia polar (J): 450000 a 550000.

O perfil escolhido a priori pela equipe de trabalho foi:

- A : 88;
- B: 2,4;
- C : 2,0;
- D: 7;
- E: 18.

A Figura 5.1 mostra os experimentos cujos os resultados de inércia encaixam-se nessas faixas e a Tabela 5.1 detalha quais são esses experimentos e seus respectivos resultados. Note que o perfil escolhido encontra correspondentes em muitos dos experimentos cujos os resultados estão nas faixas especificadas (experimentos número 2, 11, 17 e 19), com algumas diferenças nos fatores C e D. Porém, esses são os fatores que têm os menores efeitos nas variáveis de inércia.

O Apêndice A contém essa mesma análise, mas para experimentos onde foram usados mais níveis para os fatores (três níveis, fatorial 3^5, e quatro níveis, fatorial 4^5). Em todos os dois planejamentos, o perfil escolhido a priori encontra correspondentes em muitos dos experimentos cujos os resultados estão nas faixas especificadas (linhas destacadas em negrito nos quadros A.3 e A.4).

Em todos os três fatoriais, os perfis correspondentes aos outros experimentos podem representar alternativas ao perfil escolhido.

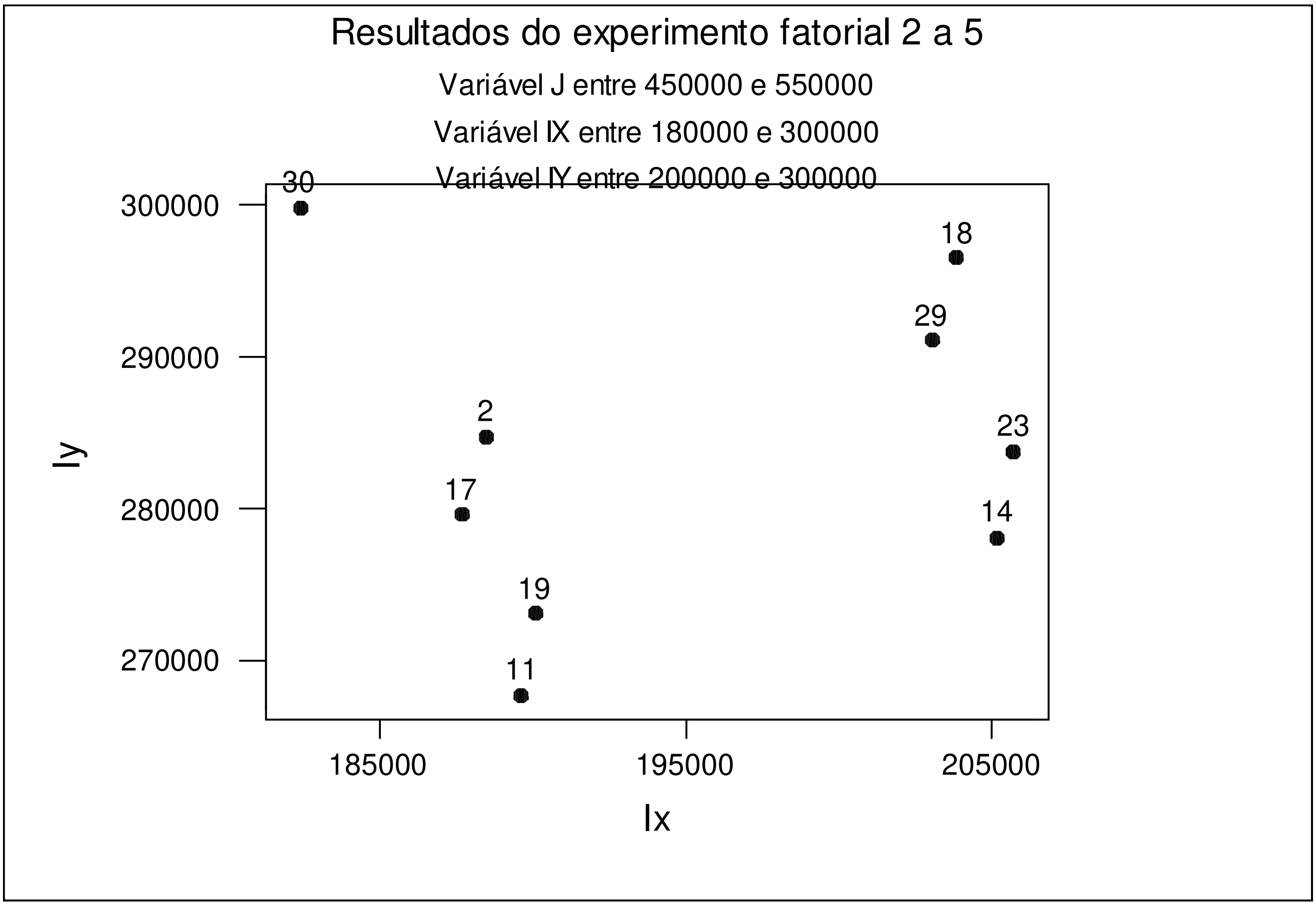

Figura 5.1 - Representação gráfica dos experimentos cujos os valores para as inércias estão entre as faixas 450000 e 550000 para J, 180000 a 300000 para Ix e 200000 e 300000 para Iy.

Tabela 5.1 - Valores dos níveis dos fatores utilizados nos experimentos representados na Figura 5.1 e seus respectivos resultados para as inércias (as unidades de medida são as mesmas do Quadro 3.1).

Legenda	A	B	C	D	E	Ix	Iy	J
2	88	2,4	2	10	18	188469	284722	473191
11	88	2,4	1	8	18	189653	267696	457349
14	90	2,4	1	8	18	205172	278067	483239
17	88	2,4	1	10	18	187697	279608	467305
18	90	2,4	2	10	18	203841	296476	500316
19	88	2,4	2	8	18	190095	273085	463181
23	90	2,4	2	8	18	205709	283768	489477
29	90	2,4	1	10	18	203046	291063	494109
30	88	2,4	1	8	20	182418	299795	482213

6 - Comparação entre os planejamentos fatoriais completo e fracionado

Comparando-se os modelos obtidos pelo dois planejamentos, observa-se que o modelo obtido pelo fatorial fracionado está contido no modelo obtido pelo fatorial completo. Nota-se ainda que os dois modelos têm em comum os termos com os maiores efeitos. Isto é, o modelo do fatorial completo é um complemento para o modelo do fatorial fracionado, porém os termos complementares não têm efeitos de magnitude muito grande se comparados aos efeitos dos termos em comum.

Porém, se os dados do fatorial fracionado correspondem à metade do fatorial completo, por que os modelos obtidos pelos dois planejamentos não são iguais?

Primeiramente, o modelo do fatorial fracionado não poderia conter os termos de interação de terceira ordem ABE e BCD, pois esses têm seus efeitos confundidos com as interações de segunda ordem CD e AE, respectivamente (Quadro 4.1). Então, por que os efeitos de AE e CD não são considerados significantes no modelo do fatorial fracionado? Observando-se os quadros de 3.2 a 3.4, nota-se que os componentes desses pares de *aliases* têm estimativas de efeitos de sinais contrários e magnitude pequena. Quando somadas para formar o efeito de CD e AE pelo modelo fatorial fracionado, essas estimativas tornam-se menores ainda, não sendo consideradas significantes. Por exemplo, a estimativa do efeito de CD em J é -117 e de ABE é 46 (Quadro 3.4). Quando somadas para formar o efeito de CD em J pelo modelo do fatorial fracionado, a estimativa do efeito de CD em J é 46-117 = -71.

Isso ocorre com quase todas as interações de segunda ordem. Vale lembrar que a decisão sobre a significância ou não dos efeitos dos termos do modelo completo é feita com base no gráfico de probabilidade normal dos efeitos, para o qual a magnitude do efeito é de grande importância na decisão de quais efeitos podem ser considerados desprezíveis. Isso pode explicar porque as interações de segunda ordem, tendo a magnitude de seus efeitos diminuída por seus *aliases,* não são consideradas significantes no modelo do fatorial fracionado.

As interações AB e BE foram as únicas cujos os efeitos foram considerados significantes. Essas interações, apesar de serem *aliases* de interações de terceira ordem com efeitos de sinais contrários, têm efeitos de magnitudes muito grandes em relação aos efeitos de seus *aliases* e, assim, não foram muito afetadas por essa subtração.

7 - Considerações finais

7.1 - Considerações quanto à utilização do Planejamento de Experimentos nesse estudo

A técnica do Planejamento de Experimentos apresenta grande vantagem relativamente à prática comum de experimentação ('uma-variável-de-cada-vez'), pois permite a sistematização do conhecimento acerca do sistema em estudo de modo mais objetivo. Permite ainda o estudo das relações entre os fatores (interação) e seus efeitos na resposta de interesse. Além disso, a utilização do Planejamento de Experimentos pode representar grande economia de recursos.

Nesse estudo em particular, o Planejamento de Experimentos possibilitou a quantificação dos efeitos das variáveis (fatores) que definem a geometria da barra de torção nas variáveis de inércia, mostrando (ou confirmando) quais delas têm os maiores efeitos e em qual direção. A verificação da presença de interação entre alguns fatores foi possível devido à utilização do Planejamento de Experimentos.

A análise dos experimentos permitiu a estimação de modelos para as variáveis de inércia em função dos fatores, que podem representar alternativas mais simples de estimação dessas inércias, apesar desse cálculo ser possível através dos métodos que possibilitaram a realização dos experimentos.

7.2 - Considerações quanto a comparação entre os fatoriais completo e fracionado

Os planejamentos fatoriais fracionados representam uma grande economia em relação aos fatoriais completos, principalmente quando o número de fatores cresce. Os recursos economizados com a realização de somente uma fração dos experimentos podem ser gastos com a realização de experimentos posteriores, já incorporando informações obtidas com os resultados da experimentação inicial.

No entanto, a alternativa do fatorial fracionado dá origem à seguinte questão: os resultados obtidos com a realização de somente uma parte dos experimentos são equivalentes aos resultados que seriam obtidos se fossem analisados os resultados de todo o conjunto de experimentos?

Na tentativa de responder a essa questão, foram analisados os resultados da experimentação utilizando-se os dois planejamentos. Os modelos obtidos segundo cada um dos planejamentos são essencialmente o mesmo. O modelo do fatorial fracionado é uma versão mais "enxuta" do modelo do fatorial completo, contendo somente os termos de maiores efeitos.

Principalmente na fase inicial de estudo de um sistema, quando o número de fatores a serem investigados é grande, o planejamento fatorial fracionado pode ser utilizado sem prejuízo na descrição do sistema em estudo, bem como na obtenção de modelos, e ainda economizando recursos.

7.3 - Considerações quanto aos resultados da análise dos experimentos

Considerando os resultados do fatorial fracionado, a estimação de efeitos principais e de interação entre fatores, bem como a estimação dos modelos, identificou o fator B como aquele que mais tem efeito sobre as variáveis de inércia, seguido do fator A do Tubo, para as inércias no eixo X e polar, e do fator E, para a inércia no eixo Y. Todos os efeitos principais são positivos, exceto os efeitos dos fatores D e E na inércia no eixo X. O efeito da interação entre B e E foi considerado estatisticamente significante em todas as inércias. O efeito da interação entre A e B foi considerado estatisticamente significante somente nas inércias no eixo X e polar.

Na análise exploratória dos resultados dos experimentos realizados, verificou-se que a geometria da peça escolhida a priori pela equipe de trabalho encontra correspondentes em vários experimentos cujos resultados de inércia estão nas faixas especificadas. Além disso, os perfis correspondentes aos outros experimentos podem ser alternativas ao perfil escolhido a priori.

8 - Referências Bibliográficas

Milliken,G. A .,Johnson, D. E. (1943) *Analysis of Messy Data*, New York: Chapman & Hall, pag 18-22.

Montgomery, D. C., Peck, E. A. (1982). *Introduction to linear regression analysis.* New York: John Wiley and Sons

Montgomery, D. C., (1991) *Design and Analysis of Experiments*. New York: John Wiley and Sons

Apêndice A

Quadro A.1 - Níveis dos fatores utilizados nos experimentos do planejamento fatorial 3^5:

A	86	88	90
B	2,0	2,4	2,8
C	1	1,5	2
D	7	9	11
E	17	19	21

Quadro A.2 - Níveis dos fatores utilizados nos experimentos do planejamento fatorial 4^5:

A	86	88	90	92
B	2,0	2,4	2,8	3,2
C	1	1,33	1,66	2
D	6	8	10	12
E	16	18	20	22

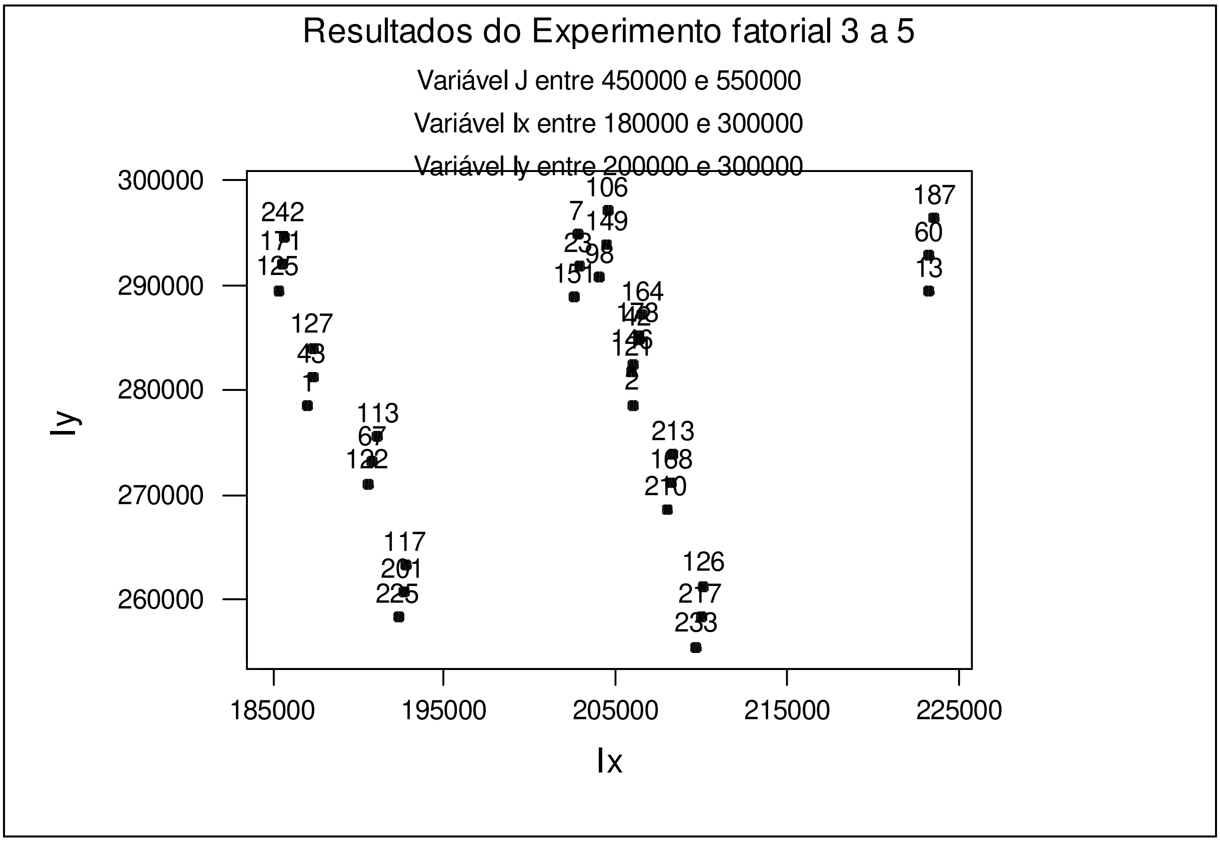

Figura A.1 - Representação gráfica dos experimentos fatoriais 3^5 cujos os valores para as inércias estão entre as faixas 450000 e 550000 para J, 180000 a 300000 para Ix e 200000 e 300000 para Iy (legenda no Quadro A.3).

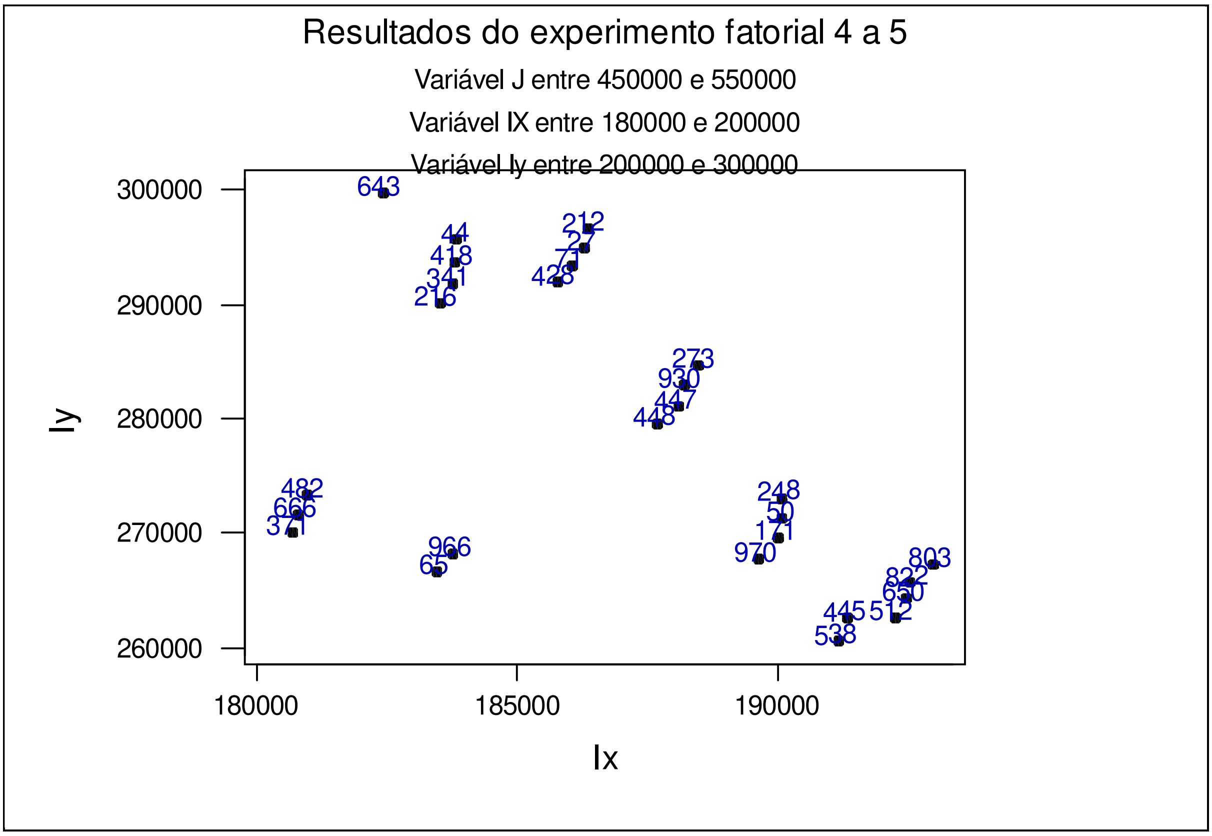

Figura A.2 - Representação gráfica dos experimentos fatoriais 4^5 cujos os valores para as inércias estão entre as faixas 450000 e 550000 para J, 180000 a 300000 para Ix e 200000 e 300000 para Iy (legenda no Quadro A.4).

Quadro A.3 - Valores dos níveis dos fatores utilizados nos experimentos representados na Figura A.1 e seus respectivos resultados para as inércias (as unidades de medida são as mesmas do Quadro 3.1).

N°	Legenda	A	B	C	D	E	Ix	Iy	J
1	1	88	2.4	1.0	7	19	187052	278389	465441
2	2	86	2.8	1.0	7	17	205959	278540	484499
3	7	90	2.4	2.0	7	19	202767	294807	497574
4	13	88	2.8	1.0	7	17	223220	289370	512589
5	23	90	2.4	1.5	7	19	202854	291740	494593
6	42	90	2.4	1.5	11	17	206282	284807	491089
7	43	88	2.4	1.5	7	19	187333	281131	468464
8	60	88	2.8	1.5	7	17	223226	292775	516001
9	67	88	2.4	1.5	11	17	190813	273243	464056
10	98	86	2.8	1.0	9	17	204020	290747	494767
11	106	86	2.8	2.0	9	17	204518	297048	501566
12	113	88	2.4	2.0	11	17	191097	275520	466618
13	117	88	2.4	2.0	9	17	192724	263296	456020
14	121	86	2.8	1.5	7	17	205936	281767	487703
15	122	88	2.4	1.0	11	17	190533	271019	461552
16	125	88	2.4	1.0	9	19	185332	289475	474807
17	126	90	2.4	2.0	7	17	210101	261285	471386
18	127	88	2.4	2.0	7	19	187265	284013	471278
19	146	90	2.4	1.0	11	17	205998	282460	488458
20	149	86	2.8	1.5	9	17	204438	293771	498209
21	151	90	2.4	1.0	7	19	202560	288856	491416
22	164	90	2.4	2.0	11	17	206567	287204	493771
23	168	90	2.4	1.5	9	17	208236	271060	479296
24	171	88	2.4	1.5	9	19	185518	291937	477455
25	173	86	2.8	2.0	7	17	206264	285141	491405
26	187	88	2.8	2.0	7	17	223563	296335	519897
27	201	88	2.4	1.5	9	17	192608	260639	453247
28	210	90	2.4	1.0	9	17	207951	268584	476535
29	213	90	2.4	2.0	9	17	208343	273869	482212
30	217	90	2.4	1.5	7	17	209929	258296	468224
31	225	88	2.4	1.0	9	17	192330	258304	450634
32	233	90	2.4	1.0	7	17	209699	255452	465152
33	242	88	2.4	2.0	9	19	185632	294600	480232

Quadro A.3 - Valores dos níveis dos fatores utilizados nos experimentos representados na Figura A.2 e seus respectivos resultados para as inércias (as unidades de medida são as mesmas do Quadro 3.1).

N°	Legenda	A	B	C	D	E	Ix	Iy	J
1	27	88	2.4	1.66	12	18	186289	294935	481224
2	44	88	2.4	2.00	6	20	183844	295635	479478
3	50	88	2.4	1.66	8	18	190089	271299	461388
4	65	92	2.0	1.66	12	18	183449	266653	450103
5	71	88	2.4	1.33	12	18	186041	293431	479473
6	171	88	2.4	1.33	8	18	190024	269663	459686
7	212	88	2.4	2.00	12	18	186348	296566	482914
8	216	88	2.4	1.00	6	20	183515	290063	473578
9	248	88	2.4	2.00	8	18	190095	273085	463181
10	273	88	2.4	2.00	10	18	188469	284722	473191
11	341	88	2.4	1.33	6	20	183753	291748	475500
12	371	92	2.0	1.33	8	20	180686	270029	450715
13	418	88	2.4	1.66	6	20	183805	293648	477454
14	428	88	2.4	1.00	12	18	185767	291901	477668
15	445	88	2.4	2.00	6	18	191342	262551	453893
16	447	88	2.4	1.33	10	18	188105	281034	469139
17	448	88	2.4	1.00	10	18	187697	279608	467305
18	482	92	2.0	2.00	8	20	180961	273328	454289
19	512	88	2.4	1.00	12	16	192259	262645	454904
20	538	88	2.4	1.66	6	18	191187	260526	451713
21	643	88	2.4	1.00	8	20	182418	299795	482213
22	650	88	2.4	1.33	12	16	192465	264291	456756
23	666	92	2.0	1.66	8	20	180802	271579	452381
24	803	88	2.4	2.00	12	16	192993	267306	460298
25	822	88	2.4	1.66	12	16	192556	265647	458203
26	930	88	2.4	1.66	10	18	188185	282985	471170
27	966	92	2.0	2.00	12	18	183771	268201	451973
28	970	88	2.4	1.00	8	18	189653	267696	457349