Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Um Estudo do Paradoxo das Três Portas via Teorema de Bayes

L. S. Bastos e R. H. Loschi

Relatório Técnico
RTP-06/2000

Relatório Técnico
Série Pesquisa

Um Estudo do Paradoxo das Três Portas via Teorema de Bayes

Leonardo Soares Bastos e Rosangela Helena Loschi

Departamento de Estatística, Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, Brasil - E-mail: bastos@est.ufmg.br

Resumo

Neste trabalho discutiremos o paradoxo das três portas enfocando-o como um problema de atualização de probabilidades (entenda-se construção de distribuição *a posteriori* partindo-se da distribuição *a priori*) e considerando duas diferentes óticas com respeito ao grau de conhecimento do participante ou jogador sobre o jogo. Na primeira situação considerada, o participante conhece toda a estrutura do jogo desde o início, e na segunda o jogador recebe informações sobre a estrutura do jogo após este já ter sido iniciado. Discutiremos o problema para diferentes distribuições *a priori* e não apenas as usualmente assumidas na literatura. Verificamos que o grau de incerteza inicial tende a se manter *a posteriori* quando o jogador é informado sobre a estrutura do jogo após ter revelado sua distribuição *a priori*. O mesmo pode não ocorrer na outra situação.

Palavras chave: Teorema de Bayes, informação não-antecipada, Condicionamento Bayesiano.

1 Introdução

Neste trabalho apresentaremos uma explicação para o paradoxo das três portas dentro da ótica Bayesiana, onde utilizaremos o teorema de Bayes como mecanismo de atualização das probabilidades *a priori*. O paradoxo das três portas é um problema conhecido do cálculo de probabilidade e que surge em situações similares àquelas que aparecem em programas de auditório onde o participante deve escolher uma entre três portas(A, B ou C), sabendo que existe um prêmio valioso em apenas uma das portas e as outras contêm algo menos expressivo. Após o jogador fazer sua escolha, o apresentador abre uma das portas restantes e é perguntado ao jogador se deseja trocar a porta inicialmente escolhida pela porta não aberta. Formalmente, o paradoxo das três portas pode ser assim descrito:

Um jogador é convidado a escolher uma entre três portas A, B e C. Atrás de uma delas existe um prêmio e nas outras duas algo menos expressivo. O jogador escolhe a porta A com probabilidade 1/3. Após sua escolha, o apresentador do programa abre a porta B e pergunta ao jogador se deseja trocar a porta A pela porta C. O jogador opta por não trocar pois afirma que a probabilidade do prêmio estar atrás da porta A aumentou para 1/2.

Admitiremos, sem perda de generalidade, que o jogador escolhe a porta A e o apresentador abre a porta B. Argumenta-se que o paradoxo existe pois saber que o prêmio não está atrás da porta B não é uma informação nova para o jogador, uma vez que já sabia que pelo menos uma entre as portas não escolhida por ele não continha o prêmio. Sendo assim, saber que esta porta aberta é a porta B não deveria modificar a probabilidade inicialmente atribuída ao evento "o prêmio está atrás da porta A "para $\frac{1}{2}$ uma vez que nenhuma informação nova sobre qual porta contém o prêmio é conhecida.(ver Jeffrey(1992))

Observe que este argumento apresenta uma inconsistência. Se nenhuma informação nova vem á luz, o grau de incerteza inicial deve ser mantido inalterado *a posteriori*, significando neste caso, que a equiprobabilidade dos eventos deveria ser mantida *a posteriori*. Ou seja, se o evento "o prêmio não está atrás da porta B "é não informativo sobre qual porta contém o prêmio, então a probabilidade *a posteriori* atribuída ao evento " o prêmio não estar atrás da porta A "deveria ser $\frac{1}{2}$ como determina o jogador.

As soluções usuais para este problema pressupõem que o jogador conhece desde o início as regras do jogo, que atribui *a priori* probabiliade $\frac{1}{3}$ para o evento " o prêmio está atrás da porta X "e quando o prêmio está na porta A, o apresentador abre a porta B ou C com probabilidades iguais. A partir disto, existem várias maneiras de decidir sobre qual é a melhor estratégia a ser tomada pelo jogador após o apresentador lhe informar que a porta B não contém o prêmio. Algumas destas soluções podem ser encontradas em Morgan, Chaganty, Dahiya e Doviak (1991) e Gillman (1992).

O nosso objetivo é determinar a chance *a posteriori* do jogador ganhar o prêmio considerando duas situações distintas quanto ao grau de conhecimento do jogador antes de atribuir sua distribuição *a priori*. Na 1^a situação iremos admitir que o jogador, antes de definir as suas probabilidades *a priori*, sabe que após escolher uma porta, o apresentador abrirá outra. Neste trabalho assumiremos que o apresentador sempre abrirá uma porta que não contém o prêmio e diferente da escolhida pelo jogador. Na 2^a situação o jogador não sabe inicialmente que o apresentador vai abrir uma das portas. Esta informação só é dada ao jogador após sua escolha ser feita. Em ambos os casos, utilizaremos o teorema de Bayes e assumiremos valores genéricos para as probabilidades inicialmente atribuídas à ocorrência dos eventos X = " o prêmio está atrás da porta X ", onde X = A, B ou C, e não $\frac{1}{3}$ como é considerado no problema.

Loschi, Wechsler e Iglesias (2000) apresentam soluções a um problema similar a este usando não só a fórmula de Bayes como outros procedimentos de atualização de probabilidades. Este trabalho generaliza parte dos resultados obtidos por estes autores por considerar probabilidades *a priori* genéricas.

Na seção 2 daremos uma breve explicação sobre inferência Bayesiana. Na seção 3 iremos resolver o problema de maneira genérica para as duas situações de interesse. Finalmente, na seção 4 estudaremos o problema para alguns casos particulares, isto é, para diferentes escolhas de probabilidades *a priori* considerando as situações de interesse.

2 Inferência Bayesiana

Nesta seção iremos apresentar alguns conceitos de inferência Bayesiana que serão utilizados no decorrer do trabalho.

Seja θ o parâmetro que desejamos estimar. Como θ é desconhecido, podemos descrever a incerteza sobre θ através de uma distribuição de probabilidade, pois a escola Bayesiana encara como aleatório qualquer objeto que seja desconhecido. Se a incerteza sobre o parâmetro é descrita antes de observarmos a amostra x ou antes de recebermos uma informação, esta distribuição é dita distribuição *a priori*, denotemo-la por $f(\theta)$. O comportamento de X para cada θ fixo é descrito pela função de verossimilhaça $f(x|\theta)$. Desta forma, a incerteza sobre o parâmetro após observamos um conjunto de dados é conhecida como distribuição *a posteriori*, a qual será denotada por $f(\theta|x)$. Usualmente, obtemos a distribuição *a posteriori* usando o teorema Bayes da seguinte forma:

$$f^*(\theta) = f(\theta|x) = \frac{f(\theta)f(x|\theta)}{\int_{\theta\in\Theta} f(\theta)f(x|\theta)d\theta},$$

onde Θ é o espaço paramétrico.

Existem outros procedimentos para construir a distribuição de probabilidade (ver Diaconis e Zabell(1982), Jeffrey(1992) e Loschi, Wechsler e Iglesias(2000)).

A função de distribuição *a priori* é uma escolha subjetiva, que depende do conhecimento que o especialista tem sobre o parâmetro, e a distribuição *a posteriori* é uma atualização da *priori* após a informação contida nos dados. Toda inferência ou tomada de decisão dentro da escola Bayesiana é feita com base na distribuição *a posteriori*.

No paradoxo das três portas, o parâmetro θ é a porta que contém o prêmio, e a informação contida nos dados x é o nome da porta aberta pelo apresentador assim que o jogador escolhe uma das três portas. Na seção 3, iremos usar este procedimento para encontrarmos a probabilidade *a posteriori* do prêmio estar atrás de cada uma das portas admitindo inicialmente que o jogador sabe desde antes de declarar sua *priori* que o apresentador abrirá uma das portas e posteriormente admitindo que esta informação só será revelada após ele declarar sua distribuição *a priori*.

3 Solução do Problema

Nesta seção apresentaremos solução genérica para o paradoxo dentro dos dois contextos descritos anteriormente, na seção 1.

3.1 1^a Situação:

Admitiremos que o jogador conhece bem a estrutura do jogo antes de declarar sua distribuição *a priori*. Ou seja, o jogador sabe desde o início que, após sua escolha, o apresentador abrirá uma das portas (que não é a escolhida por ele, nem a que tem o prêmio) e lhe oferecerá a oportunidade de troca. Neste caso, o jogador está incerto tanto sobre qual porta contém o prêmio quanto sobre a informação que será dada pelo apresentador. Portanto, o espaço amostral relacionado ao experimento realizado é $\Omega = \{Ab, Ac, Bc, Cb\}$ onde Xy significa que "o prêmio está atrás da porta X e o apresentador abre a porta Y".

Denote por $A = \{Ab \cup Ac\}$ o evento " prêmio está na porta A "; por $B = \{Bc\}$ " o prêmio está na porta B "; por $C = \{Cb\}$ " o prêmio está na porta C ". Denote por $infX$ o evento " o apresentador abre a porta X ", X = A, B ou C. Note que $infB = \{Ab \cup Cb\}$ e $infC = \{Ac \cup Bc\}$.

Assuma que P(X) é a probabilidade *a priori* atribuída pelo jogador do evento X, $X \in \{A, B, C\}$. Usando o teorema de Bayes, a probabilidade *a posteriori* do evento X é:

$$P^*(X) = P(X|infY) = \frac{P(infY|X)P(X)}{\sum_X P(infY|X)P(X)},$$

onde X,Y = A, B ou C.

Assumindo que o jogador escolhe a porta A e o apresentador abre a porta B, temos que:

$$P^*(A) = \frac{P(A)P(infB|A)}{P(A)P(infB|A) + P(B)P(infB|B) + P(C)P(infB|C)}.$$

Como assumimos que o apresentador não abre a porta que contém o prêmio, temos $P(infB|B) = 0$. Além disto, se o prêmio estiver atrás da porta C, é inevitável que o apresentador escolha a porta B, pois também é assumido que o apresentador não abre a porta escolhida pelo jogador, $P(infB|C) = 1$. Observando as definições dos eventos A, C e $infB$, a probabilidade *a posteriori* para a ocorrência do evento A em função dos eventos atômicos de Ω torna-se:

$$P^*(A) = \frac{P(A)P(infB|A)}{P(A)P(infB|A) + P(C)}. \tag{1}$$

3.2 2^a Situação:

Admitamos que o jogador não conhece a estrutura completa do jogo. Sabe apenas que deverá escolher uma porta entre as 3 portas existentes mas não sabe qual será a atitude do apresentador. Neste caso, a incerteza do jogador reside apenas sobre qual das três portas contém o prêmio e, portanto, o espaço amostral de interesse é $\Omega = \{A, B, C\}$ onde X = {A, B ou C} denota o evento "o prêmio está atrás da porta X". Denote por P(X) a probabilidade *a priori* estabelecida pelo jogador para o evento "o prêmio está atrás da porta X", X = {A, B, C}.

Após o jogador declarar suas probabilidades *a priori* para os eventos de Ω e após escolher uma das portas , o apresentador abre uma porta entre as não escolhidas. Chamemos de $infY$ o evento " o apresentador informa que o prêmio não está atrás da porta Y ".

Após o apresentador informar que o prêmio não está atrás da porta Y, a distribuição *a posteriori* para cada evento de Ω é

$$P^*(X) = P(X|infY) = \frac{P(infY|X)P(X)}{\sum_X P(infY|X)P(X)},$$

onde X,Y = A, B ou C.

Consequentemente, assumindo que o jogador escolhe a porta A e que o apresentador informa que o prêmio não está atrás da porta B, temos que:

$$P^*(A) = \frac{P(infB|A)P(A)}{P(infB|A)P(A) + P(infB|B)P(B) + P(infB|C)P(C)}$$

Pelas mesmas razões mencionadas na 1^a Situação, temos que $P(infB|B) = 0$ e $P(infB|C) = 1$. Além disso, observe que o evento $infB = B^C$. Desta maneira, a probabilidade *a posteriori* do prêmio estar atrás da porta A torna-se

$$P^*(A) = \frac{P(A)}{P(A) + P(C)}. \tag{2}$$

Na próxima seção, apresentaremos algumas soluções para o paradoxo das três portas considerando algumas distribuições *a priori* particulares. Utilizaremos as expressões (1) e (2) aqui obtidas para determinarmos as distribuições *a posteriori*.

4 Análise do problema considerando distribuições *a priori* particulares.

Como pode ser observado na seção anterior, existe um número infinito de soluções para o paradoxo das três portas. A solução depende não só das probabilidades atribuídas inicialmente pelo jogador aos eventos de Ω como também da opinião que o jogador tem sobre a estratégia a ser adotada pelo apresentador após sua escolha ter sido feita.

Nesta seção estudaremos o comportamento da distribuição *a posteriori* nas duas situações abordadas na seção 3 considerando algumas probabilidades *a priori* particulares.

4.1 Idêntico Grau de Incerteza *a priori* sobre eventos de Ω.

Aqui discutiremos o caso considerado na literatura onde, inicialmente, o jogador está igualmente incerto sobre qual porta contém o prêmio. Isto é, ele declara *a priori* que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

Consideremos inicialmente a 1^a Situação onde o jogador conhece bem a estrutura do jogo antes de declarar as suas probabilidades *a priori*. Admita primeiramente que o jogador considera como igualmente provável a ocorrência dos eventos "o prêmio está atrás da porta

A e o apresentador abrirá a porta Y", onde Y = B ou C. Sob estas suposições temos que

$$P(Ac) = P(Ab) \Longleftrightarrow P(infB|A) = \frac{1}{2}$$

Substituindo estes valores em (1) temos que

$$P^*(A) = \frac{1}{3},$$

concordando com o que usualmente é dito na literatura. Observe que apesar da probabilidade *a posteriori* para o evento A ser igual à probabilidade inicialmente atribuída a ele, a incerteza do jogador sobre qual porta está o prêmio diminui. Se as considerações são razoáveis, *a posteriori* o jogador está mais certo de que o prêmio está atrás da porta C.

Por outro lado, admita que por alguma razão o jogador acredita que jamais o apresentador abrirá a porta C se o prêmio estiver em A, isto é, para o jogador P(Ac)=0. Sob as hipóteses de (1) temos que

$$P(Ac) = 0 \Longleftrightarrow P(infB|A) = 1 \Longrightarrow P^*(A) = \frac{1}{2}.$$

Neste caso a probabilidade *a priori* para A é modificada mas a incerteza inicial do jogador se mantém *a posteriori*. Ou seja a informação dada pelo apresentador - a saber, o nome de uma das portas que não contém o prêmio - nada de novo revela ao jogador sobre qual porta contém o prêmio.

Na 2^a Situação, quando o jogador não conhece desde o início a estrutura do jogo, por (2), a probabilidade *a posteriori* para o evento A será sempre $\frac{1}{2}$, isto é, $P^*(A) = \frac{1}{2}$. Ou seja, neste caso a probabilidade do prêmio estar atrás da porta A aumenta, mas a incerteza do jogador sobre que decisão tomar permanece.

4.2 Grau de Incerteza *a priori* revela maior probabilidade do prêmio estar atrás da porta C.

Suponha que $P(C) = 2P(A)$, ou seja, o jogador julga que *a priori* é duas vezes mais provável que o prêmio esteja atrás da porta C do que atrás da porta A e, apesar disto, aposta em A.

Na 1^a Situação, admitamos primeiramente que $P(Ac) = P(Ab)$. Isto é equivalente a dizer que $P(infB/A) = \frac{1}{2}$. Consequentemente, por (1), teremos $P^*(A) = \frac{1}{5}$. Neste caso, o jogador está ainda mais certo de que o prêmio está atrás da porta C. Então, se lhe for dada a chance de troca, ele deverá trocar de porta. Se o jogador julgue inicialmente que $P(Ac) = 0$, teremos que $P(infB/A) = 1$. Neste caso, teremos $P^*(A) = \frac{1}{3}$. Ou seja, *a posteriori*, sua incerteza inicial se mantém pois o jogador continua acreditando que é duas vezes mais provável que o prêmio esteja em C do que em A. Note que jamais poderíamos ter $P^*(A) = \frac{1}{2}$.

Na 2^a Situação, teremos $P^*(A) = \frac{1}{3}$. Nestas circunstâncias, o jogador revela a posteriori que a chance do prêmio estar em A se mantém, ou seja,o jogador continua mais certo de que o prêmio esteja atrás da porta C.

4.3 Grau de Incerteza *a priori* revela maior probabilidade do prêmio estar atrás da porta A.

Considere que $P(A) = 2P(C)$. Nestas circunstâncias, o jogador julga que *a priori* é duas vezes mais provável que o prêmio esteja atrás da porta A do que atrás da porta C.

Analisemos inicialmente a 1^a Situação, considerando $P(Ac) = P(Ab)$. Isto é equivalente a dizer que $P(infB/A) = \frac{1}{2}$. Consequentemente, teremos $P^*(A) = \frac{1}{2}$. Ou seja, *a posteriori*, o jogador está igualmente incerto sobre que porta contém o prêmio. A incerteza inicial do jogador foi alterada pois ele acreditava que era duas vezes mais provável que o prêmio estivesse atrás da porta A do que atrás da porta C. Caso o jogador atribua valor zero a $P(Ac)$, teremos que $P(infB/A) = 1$ e, consequentemente, teremos $P^*(A) = \frac{2}{3}$. Ou seja, *a posteriori*, sua incerteza se mantém pois o jogador continua acreditando que é duas vezes mais provável que o prêmio esteja em A do que em C. Então a melhor estratégia a ser tomada pelo jogador é não trocar de porta.

Para que $P^*(A) = \frac{1}{3}$, o jogador deve julgar *a priori* que é três vezes mais provável o apresentador abrir a porta C do que abrir a porta B quando o prêmio estiver atrás da porta

A, ou seja $P(Ac) = 3P(Ab) \Longrightarrow P(infB/A) = \frac{1}{4}$. Se isto ocorre, a incerteza inicial do jogador *a posteriori* não se mantém e a melhor estratégia a ser tomada por ele é trocar de porta.

Na 2^a Situação, a probabilidade *a posteriori* sobre o evento A sempre será $P^*(A) = \frac{2}{3}$. Nestas circunstâncias, o jogador revela *a posteriori* que está duas vezes mais certo de que o prêmio esteja atrás da porta A, o que coincide com seu grau de incerteza inicial.

5 Conclusão

O jogador deve trocar ou não de porta? Como vimos neste trabalho, a resposta a esta pergunta depende de quanto o jogador sabe *a priori* sobre o jogo e também da opinião que tem sobre a estratégia de escolha adotada pelo apresentador. Por exemplo, supondo que o jogador conhece toda a estrutura do jogo desde o início e que considera igual probabilidade que o prêmio esteja atrás de cada porta, é possível provar que $P^*(A) < \frac{1}{3}$ sempre que o jogador também julgar que $P(Ab) < P(Ac)$. Neste caso a melhor estratégia seria a troca de portas.

Note também que nos casos particulares vistos na seção 4, se a informação é recebida inesperadamente - isto é, o jogador entra no jogo sem saber as regras desde o início - o grau de incerteza *a priori* é sempre mantido *a posteriori*. O mesmo ocorre quando o recebimento da informação é previamente antecipado mas o jogador tem motivos para acreditar que a porta C jamais seja aberta caso o prêmio esteja atrás da porta A.

O paradoxo das três portas, assim como qualquer problema que envolva atualização de probabilidades, não é um problema de solução única. No caso do paradoxo das três portas vimos que várias soluções são possíveis e não só $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ como habitualmente se considera. Se outros procedimentos para a construção de distribuições *a posteriori* são consideradas, outras soluções mais podem ser dadas a este problema (Loschi, Iglesias e Wechsler, 2000). Ressaltamos que no caso discutido aqui, a regra de Jeffrey utilizada por Loschi, Iglesias e Wechsler(2000) para explicar o paradoxo dos três prisioneiros seria sempre equivalente ao uso do teorema de Bayes.

6 Referências

Diaconis, P. e Zabell. S. L. (1982). Updating Subject Probability. *Journal American Statistical Association*, 77, 822-830, No. 380.

Gilman, L. (1992) - The Car and the Goats. *American Mathematical Monthly*, 99, 3-7.

Jeffrey, R. (1992) *Probability and the art of Judgment.* Cambridge University Dress. Cambridge.

Loschi R.H., P.L. Iglesias e S. Wechsler (2000). On Three Prisioners Paradox, Submetido ao *Journal of Statistical Planning and Inference.*

Morgan, J. P., Chaganty, N. R., Dahiya, R. C. e Doviak,M. J. (1991). Let's Make a Deal: The Player's Dilemma.*The American Statistician*, November 1991, Vol. 45, No. 4, p. 284-287