

**Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Estatística**

**Experiência Computacional com  
um Novo Método para Análise de  
Filas Finitas Dependentes do Estado**

C. J. Klechen & F. R. B. Cruz

**Relatório Técnico  
RTP-02/2004**

**Relatório Técnico  
Série Pesquisa**



# Experiência Computacional com um Novo Método para Análise de Filas Finitas Dependentes do Estado

Clecio Juliano Klechen & Frederico R. B. Cruz  
Departamento de Estatística, Universidade Federal de Minas Gerais,  
Av. Antônio Carlos, 6627, 31270-901 - Belo Horizonte - MG  
E-mail: [klechen@grad.est.ufmg.br](mailto:klechen@grad.est.ufmg.br), [fcruz@ufmg.br](mailto:fcruz@ufmg.br)

Julho de 2004

## Resumo

Neste relatório são apresentados os resultados alcançados durante o desenvolvimento do projeto de iniciação científica intitulado “Sobre filas sujeitas a congestionamento”, que é parte integrante do projeto de pesquisa intitulado “Otimização em redes estocásticas modelos e algoritmos” que vem sendo desenvolvido desde 1997. Ao estudarmos alguns modelos para alocação de serviço em redes estocásticas sujeitas a congestionamento, via utilização de um algoritmo para avaliação de desempenho de redes de filas, deparamo-nos com um inesperado problema no método analítico implementado, que descrevemos nas seções seguintes.

Palavras-Chave: Teoria de filas, modelos dependentes do estado, filas finitas, método analítico.

## 1. Introdução

Ultimamente, os sistemas de redes de filas têm alcançado uma substancial valorização na maioria das aplicações práticas via, principalmente, métodos de simulação intensiva, mas também via métodos analíticos. Há um grande interesse em se investigar o comportamento de um particular conjunto de modelos de filas, conhecido como filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado[1], apropriadas para avaliar o congestionamento em sistemas de tráfego de veículos e pedestres[2,3], assim como outros sistemas de serviço e manufatura[4]. Adotando-se a notação de Kendall,  $M$  indica que a chegada é um processo markoviano,  $G$  representa um serviço com distribuição geral dependente do estado,  $c$  se refere ao número de servidores e, por fim, a capacidade do sistema é restrita a  $c$  usuários. A principal característica do modelo aqui tratado, é o decaimento da taxa de serviço em função do aumento do número de usuários no sistema.

Os modelos para problemas do mundo real envolvendo redes estocásticas têm alcançado um alto nível de complexidade. Há então, uma forte motivação para a procura por sistemas de apoio à decisão, que integram ferramentas computacionais e técnicas de otimização. Assim, o desenvolvimento de modelos de alocação de serviço, em redes estocásticas sujeitas a congestionamento, representa um grande estímulo para as aplicações, via, principalmente,

desenvolvimento de técnicas analíticas eficazes para previsão de medida de desempenho.

Este relatório encontra-se organizado da seguinte forma: Na Seção 2, explica o problema da alocação de capacidades e o funcionamento do algoritmo. Já a Seção 3 são descritos os modelos matemáticos de rede de filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado que avaliam fenômenos de fluxos sujeitos a congestionamento. A Seção 4 é subdividida em duas partes: na primeira estuda-se o desempenho do algoritmo em uma rede de filas com congestionamento; já na segunda estudam-se as limitações do método analítico implementado. A seção 5 conclui este relatório com resultados importantes obtidos e algumas observações finais.

## 2. Problema da Alocação de Capacidades

Assuma que a topologia de rede, conhecida de antemão, é definida como um grafo  $G(N,A)$ , no qual  $N$  é o número de nós (corredores) e  $A$  é o número de arcos (conexões entre os pares de nós). O problema de alocação de serviços e capacidades (ASC) preocupa-se com a capacidade que deve ser alocada aos nós para que as probabilidades de bloqueio estejam abaixo de um limiar especificado. Em outras palavras, o problema ASC é encontrar o menor inteiro  $c_i > 0$  para que  $\Pr[C_i = c_i] \leq \varepsilon$ , para todo  $i \in N$ , sendo  $C_i$  o número (aleatório) de usuários no sistema e  $c_i$  a capacidade do sistema.

A formulação matemática proposta para o problema ASC é a seguinte:

$$z = \min \left[ g(c) = \sum_{\forall i \in N} f_i c_i \right], \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \\ p_i(c_i) \equiv \Pr[C_i = c_i] \leq \varepsilon, \quad \forall i \in N, \quad (2)$$

$$c_i \in \{1, 2, \dots\}, \quad \forall i \in N, \quad (3)$$

que minimiza o custo da alocação total  $\sum_i f_i c_i$ , restrito a uma probabilidade de bloqueio mínima  $p_i(c_i)$  para cada nó  $i$ .

Para a resolução deste problema, o algoritmo principal implementa uma variação do método de busca por coordenadas. Assim, o algoritmo lê as configurações iniciais e então é alocada uma capacidade inicial suficiente para satisfazer às restrições (2), ou seja, que dê uma probabilidade de bloqueio inferior ao limiar dado  $\varepsilon$ . Para auxiliar o algoritmo de busca, esta capacidade inicial é dada na forma  $2^M$ , em que  $M$  é um número “grande”. O algoritmo percorre cada nó (corredor)  $i$  e aloca para ele dois limites para sua capacidade, que, para facilitar a busca, é sempre potência de 2. O primeiro valor é denominado limite inferior ( $C^{inf}$ ) e é dado pelo valor de uma capacidade qualquer que não atenda às restrições (2). Já o limite superior ( $C^{sup}$ ) é dado pelo valor de capacidade  $2^M$ , que atende à restrição de que a probabilidade de bloqueio seja menor que o limiar dado. Daí o algoritmo começa a redução do intervalo da seguinte forma: considera-se a média dos dois limites  $((C^{inf} + C^{sup})/2)$ . Se a probabilidade de

bloqueio para a média for menor que a probabilidade dada na restrição, esta média assume o valor de capacidade superior ( $C^{sup}$ ). Se não, o valor será da capacidade inferior ( $C^{inf}$ ). E assim é feito até que a diferença entre os dois limites seja menor ou igual a um. Então o valor dado para o limite superior é a menor capacidade que tem a probabilidade de bloqueio inferior ou igual a do limiar.

Como observação final, apesar de a função objetivo (1) ser linear, o problema ASC tem complicações inerentes. Do ponto de vista prático, um dos aspectos mais sérios seria a falta de expressões para  $p_i(c_i)$  numa topologia qualquer. Na topologia apresentada na Figura 4, a probabilidade de bloqueio do  $i$ -ésimo nó depende de todo o fluxo anterior e também das probabilidades de bloqueio dos nós seguintes.

Em seguida trataremos dos métodos para estimação de medidas de desempenho em geral, e da  $p_i(c_i)$  em particular.

### 3. Estimação de Desempenho em Filas $M/G/c/c$

#### 3.1. Modelo Analítico de um Corredor Único

Considerando aplicações ao fluxo de pedestres, vários fatores podem ser associados a diferentes velocidades de caminhada. Quando a densidade do tráfego aumenta, estes fatores têm um efeito grande sobre a velocidade de caminhada de pedestres individuais. Portanto, dentro de um corredor (ver Figura 1) o movimento de pedestres tende a ser mais lento à medida que o espaço do corredor é ocupado por mais pedestres.

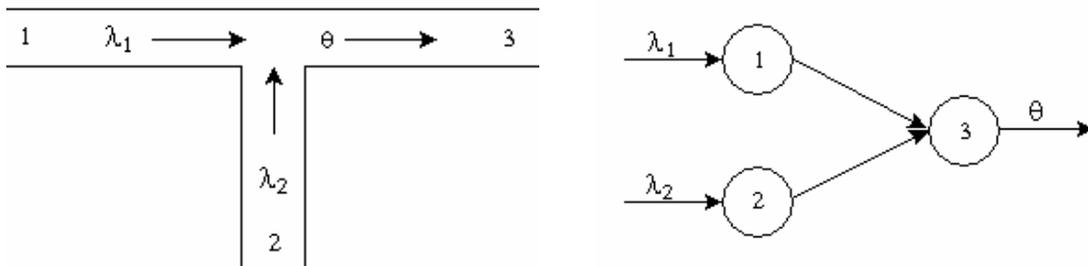


Figura 1: Movimento de pedestres em um corredor.

Para o modelo de fila de um corredor, o tempo de ocupação é igual ao tempo gasto para que um pedestre o atravesse. A taxa de serviço  $f(n)$  depende do número de ocupantes  $n$  e segue uma distribuição geral  $G$  dependente do estado.

Considera-se, ainda, que a densidade de aglomeração de pedestres dentro do sistema está aproximadamente distribuída de maneira uniforme e que essa densidade determina a velocidade média de um indivíduo. Assim, se existirem  $n$  pedestres dentro de um corredor, esses terão uma taxa de serviço  $f(n)$ , enquanto que numa determinada chegada ou saída, essa taxa de serviço será alterada para  $f(n+1)$  ou  $f(n-1)$ , respectivamente.

Sob esse ponto de vista, pode-se expressar a probabilidade do número de pedestres  $\Pr\{C = n\} \equiv p(n)$  num modelo de fila  $M/G/c/c$  dependente do estado por:

$$p(n) = \left[ \frac{[\lambda E[T_1]]^n}{n! \prod_{i=1}^n f(i)} \right] p(0), \quad n = 1, 2, \dots, c, \quad (4)$$

sendo

$$p(0)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^c \left[ \frac{[\lambda E[T_1]]^i}{i! \prod_{j=1}^i f(j)} \right], \quad (5)$$

em que  $\lambda$  é a taxa de chegada,  $p(0)$  é a probabilidade de não ter pedestre esperando na fila,  $E[T_1]$  é o tempo de atendimento esperado considerando-se um único pedestre e  $f(n)$  é a taxa de serviço igual a  $V_n/V_1$ .

Utilizando-se a Equação (4) para o modelo de fila  $M/G/c/c$  dependente do estado, é possível calcular medidas de desempenho. Essas medidas incluem, entre outras, a probabilidade de bloqueio, a taxa de atendimento, o número médio de usuários e o tempo médio no sistema. O bloqueio ocorre quando  $n$  for igual à capacidade máxima  $c$  do corredor  $p(c) \equiv \Pr\{C=c\}$ . A taxa de atendimento pode ser denotada por:

$$\theta = \lambda(1 - p(c)). \quad (6)$$

O número médio de usuários no sistema é:

$$L = E[N] = \sum_{n=1}^c np(n) \quad (7)$$

O tempo médio no sistema pode ser dado pela lei de Little:

$$W = E[T] = \frac{L}{\theta}. \quad (8)$$

Ao analisar as várias propriedades de fluxo de pedestres através de um único corredor, comprova-se a existência de três fatores que afetam significativamente o tráfego e as medidas de desempenho do sistema, quais sejam o comprimento, a largura e a taxa de chegada. Dessa forma, variando-se um deles e mantendo-se os outros constantes, pode-se avaliar o efeito desse fator no fluxo. Entretanto, Mitchaell e MacGregor Smith [5] mostraram que a largura do corredor parece ter um efeito mais significativo sobre a taxa de atendimento do que sobre o seu comprimento. Em estudos anteriores observou-se que, para um comprimento fixo, a taxa de atendimento para diferentes larguras aumenta de acordo com o aumento da largura, já para uma largura fixa e diferentes comprimentos, a taxa de atendimento é praticamente a mesma.

Apresentamos em seguida os modelos para determinação de taxa de serviço  $f(n)$ .

### 3.2. Capacidade e Modelos de Congestionamento

Utilizando-se o modelo de filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado, um corredor pode ser considerado como servidores para seus ocupantes. O número de servidores em paralelo é igual à capacidade do corredor que também representa o número total de pedestres permitidos simultaneamente no sistema sendo dado por:

$$C = \lfloor 5 \times l \times \omega \rfloor. \quad (9)$$

na qual  $l$  é o comprimento do corredor,  $\omega$  é a largura,  $c$ , sua capacidade e  $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro não superior a  $x$ . De acordo com estudos realizados por Tregenza [6], pode-se constatar que 5 ped/m<sup>2</sup> representa a densidade máxima de aglomeração.

No modelo de congestionamento, o fluxo de tráfego uni-direcional através de corredores segue uma velocidade média do caminhar de um pedestre  $V_n$ , como uma função do número de indivíduos  $n$  que ocupam o corredor e sua capacidade,  $C$ .

Baseados nesta e em outras observações empíricas, modelos analíticos, linear e exponencial, foram desenvolvidos para essa velocidade (uni-direcional) em função do número de pedestres em um corredor [7], usando as seguintes definições:

- $V_n \rightarrow$  velocidade média para uma ocupação de  $n$  pedestres;
- $V_1 \rightarrow$  velocidade média de um pedestre sozinho, que corresponde a 1,5 m/s;
- $V_a \rightarrow$  velocidade média quando a densidade de aglomeração é de 2 ped/m<sup>2</sup>;
- $V_b \rightarrow$  velocidade média quando a densidade de aglomeração é de 4 ped/m<sup>2</sup>;
- $\gamma$  e  $\beta \rightarrow$  parâmetros de forma e escala para o modelo exponencial;
- $a = 2 \times l \times \omega$ ;
- $b = 4 \times l \times \omega$ .

De acordo com Tregenza [6], a velocidade de um único ocupante no corredor,  $V_1$ , é cerca de 1,5 m/s. Assumindo-se que uma população de  $n=C+1$  não é possível,  $V_n$  é zero para todo  $n \geq C+1$ . Segue-se, abaixo, uma relação linear que satisfaz a essas condições:

$$V_n = \frac{V_1}{C}(C+1-n). \quad (10)$$

Um modelo exponencial parece fornecer uma aproximação também aceitável para a média da velocidade de um pedestre *versus* a densidade de aglomeração, conforme o formato das curvas apresentadas por Tregenza [6], Figura 2.

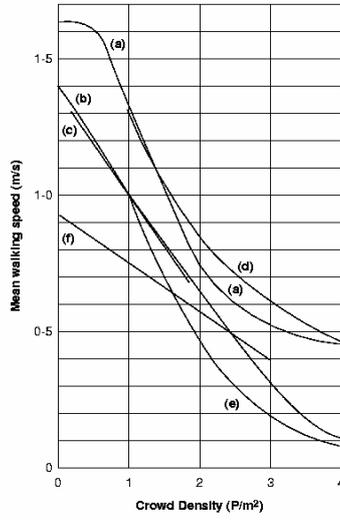


Figura 2: Curvas empíricas de Tregenza [6].

O modelo exponencial de fluxo uni-direcional, proposto por Yuhaski e Smith [7] é o seguinte:

$$V_n = V_1 \exp \left[ - \left( \frac{n-1}{\beta} \right)^\gamma \right], \quad (11)$$

no qual:

$$\gamma = \ln \left[ \frac{\ln(V_a/V_1)}{\ln(V_b/V_1)} \right] / \ln \left( \frac{a-1}{b-1} \right), \quad (12)$$

e

$$\beta = \frac{a-1}{[\ln(V_1/V_a)]^{1/\gamma}} = \frac{b-1}{[\ln(V_1/V_b)]^{1/\gamma}}. \quad (13)$$

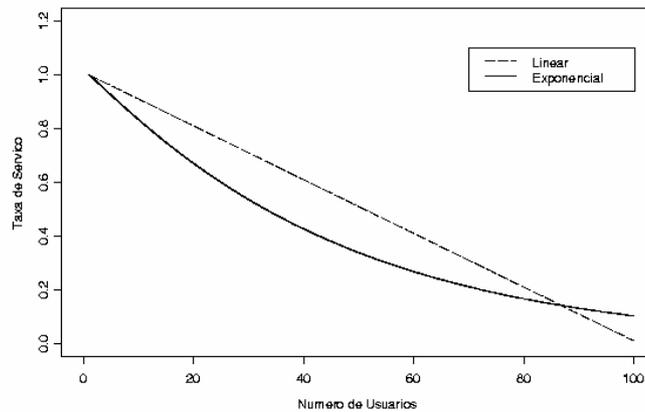


Figura 3: Taxa de serviço  $f(n) = V_n/V_1$  versus número de usuários  $n$  para um corredor de 8 x 2,5 m.

Em Fruin [9], os parâmetros para o fluxo de tráfego uni-direcional seriam  $V_a=0,64$  e  $V_b=0,25$ . Adicionalmente, Cheah e MacGregor Smith [10] constataram que, ao estender o estudo para fluxos bi e multi-direcional, os valores apresentados permaneciam quase inalterados, sendo  $V_a=0,60$ ,  $V_b=0,21$  (bi-direcional) e  $V_a=0,56$ ,  $V_b=0,17$  (multi-direcional). A Figura 3 mostra o comportamento da taxa de serviço,  $f(n) = V_n/V_1$  de um pedestre, com o aumento da densidade, para fluxos unidirecionais.

### 3.3. O Método da Expansão Generalizado

Devido à complexidade associada às redes de filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado, para encontrar uma expressão explícita para cálculo das principais medidas de desempenho, foi desenvolvido um método aproximado conhecido por método da expansão generalizado. Detalhes do método são apresentados a seguir.

#### 3.3.1. Método da Expansão Generalizado para Topologias Gerais

O método da expansão generalizado (GEM) desenvolvido anteriormente no trabalho de Kerbache e MacGregor Smith (1987), pode ser estendido a redes de filas  $M/G/c/c$ . Assim, para a análise de topologias complexas como a apresentada na Figura 4, será usada uma técnica de aproximação, uma vez que parece improvável a existência de um método exato. O GEM tem sido bem sucedido em problemas similares. É uma combinação de avaliações repetidas e métodos aproximados de decomposição nó-a-nó, com uma característica chave que um nó artificial é adicionado precedendo cada fila finita da rede para registrar o bloqueio de clientes que tentam entrar no nó quando este está na sua capacidade total. Da adição destes nós, a rede de filas é expandida numa equivalente rede de Jackson, na qual cada nó pode ser decomposto e analisado separadamente. Detalhes de como o GEM pode ser adaptado a uma rede  $M/G/c/c$  dependente do estado, não serão apresentados aqui mas poderão ser encontrados no trabalho de Araújo et al. [8].

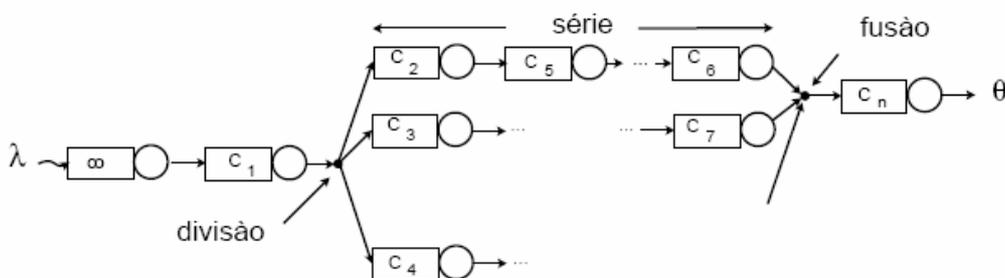


Figura 4: Rede de filas em topologia genérica

## 4. Experimentos Computacionais

Apresentado o contexto do trabalho, nosso interesse foi avaliar o GEM, de cujo bom funcionamento depende o bom desempenho do algoritmo para resolução do problema ACS.

Para implementar este algoritmo, preferimos utilizar o ambiente C++, devido, principalmente, à sua capacidade de abstração de dados, bem como à praticidade de gerar códigos facilmente modificáveis. Para avaliação da exatidão dos resultados utilizamos o sistema de simulação a eventos discretos desenvolvido por Cruz et al. [11]. Adicionalmente, trabalhou-se no sistema operacional Windows® XP, em um equipamento com 512 MB de memória RAM, usando um processador AMD Athlon XP 1800+.

### 4.1. Análise de uma Rede de Filas via Simulação Díceta

Estávamos interessados em testar o comportamento do algoritmo de análise de desempenho em uma rede de filas conforme Figura 5. O foco principal é verificar o que acontece com a taxa de atendimento conforme a taxa de chegada aumenta.

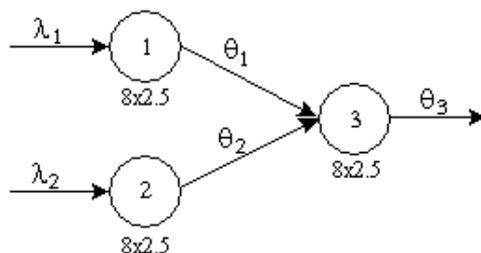


Figura 5: Modelo analisado.

O problema foi analisado em dois grupos de simulações a eventos discretos. A primeira é realizada sendo a taxa de entrada no nó 1 igual a  $\lambda$  e no nó 2 igual a  $2\lambda$ . Na segunda, a taxa de entrada no nó 1 igual a  $2\lambda$  e no nó 2 igual a  $\lambda$ . Todos os corredores têm a dimensão de 8m de comprimento por 2,5m de largura. O nó 3 recebia dos nós 1 e 2 os seus ocupantes com probabilidade 1 gerando assim um “gargalo”. Os valores obtidos do comportamento das taxas de atendimento em cada nó estão na Tabela 1 e na Tabela 2.

Tabela 1: Valores da taxa de atendimento para  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = 2\lambda$ .

$\theta$	$\lambda$			
	0,25	0,5	1	2
$\theta_1$	0,249870	0,500553	0,961178	0,965595
$\theta_2$	0,499277	0,997873	0,973162	0,966277
$\theta_3$	0,749128	1,498468	1,934035	1,931872

Tabela 2: Valores da taxa de atendimento para  $\lambda_1 = 2\lambda$  e  $\lambda_2 = \lambda$ .

$\theta$	$\lambda$			
	0,25	0,5	1	2
$\theta_1$	0,498870	0,997868	0,973040	0,966277
$\theta_2$	0,250262	0,500570	0,961305	0,965633
$\theta_3$	0,749143	1,498452	1,934043	1,931910

Podemos observar que à medida que a taxa de chegada aumenta o atendimento tende a se estabilizar devido ao congestionamento gerado pelo “gargalo”. Note que o sistema é simétrico e as diferenças encontradas existem meramente por flutuação amostral da simulação a eventos discretos.

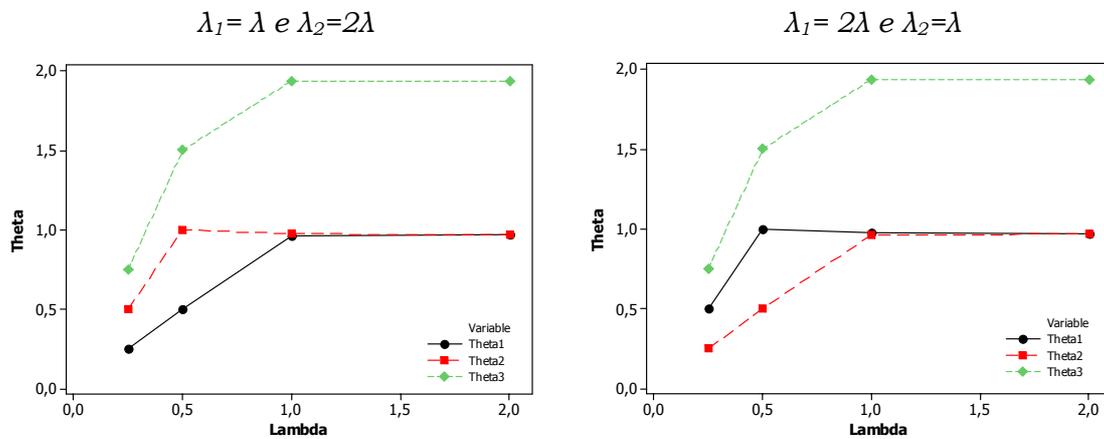


Figura 6: Taxas de atendimento para as simulações

Nota-se, claramente, pelo gráfico da Figura 6, que à medida que a taxa de chegada aumenta, as taxas de atendimento nos nós 1 e 2 se aproximam e convergem para um mesmo valor. Portanto, devido ao congestionamento gerado, mesmo as filas com taxas de chegadas diferentes possuem taxas de atendimento semelhantes.

Passaremos ao estudo de um outro modelo, em que também temos variações na taxa de entrada, mas temos agora uma entrada proveniente de uma fila e outra entrada direta, Figura 7.

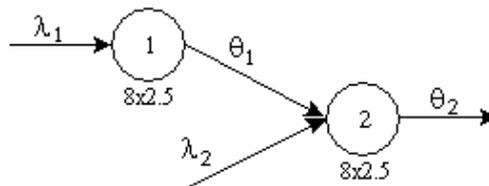


Figura 7: Modelo analisado.

Novamente adotamos duas simulações diferenciadas na taxa de entrada. Na primeira simulação adotou-se uma taxa de entrada igual a  $\lambda$  para o nó 1 e  $2\lambda$  para a entrada direta no nó 2. Na segunda simulação adotou-se uma taxa de entrada igual a  $2\lambda$  para o nó 1 e  $\lambda$  para o nó 2. O interesse é verificar o que acontece com as taxas de atendimento no nó 1 e no nó 2. Todos os corredores possuem a dimensão de 8m de comprimento por 2,5m de largura

Tabela 3: Valores da taxa de atendimento para  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = 2\lambda$ .

$\theta$	$\lambda$			
	0,25	0,5	1	2
$\theta_1$	0,249870	0,500553	0,999697	1,906282
$\theta_2$	0,749158	1,498455	1,981660	1,931773

Tabela 4: Valores da taxa de atendimento para  $\lambda_1 = 2\lambda$  e  $\lambda_2 = \lambda$ .

$\theta$	$\lambda$			
	0,25	0,5	1	2
$\theta_1$	0,498870	0,997868	1,917155	1,905988
$\theta_2$	0,749113	1,498437	1,933805	1,932348

Observamos que à medida que aumentamos a taxa de chegada, as taxas de atendimento tendem a serem semelhantes. Note que o sistema, neste caso, não é simétrico.

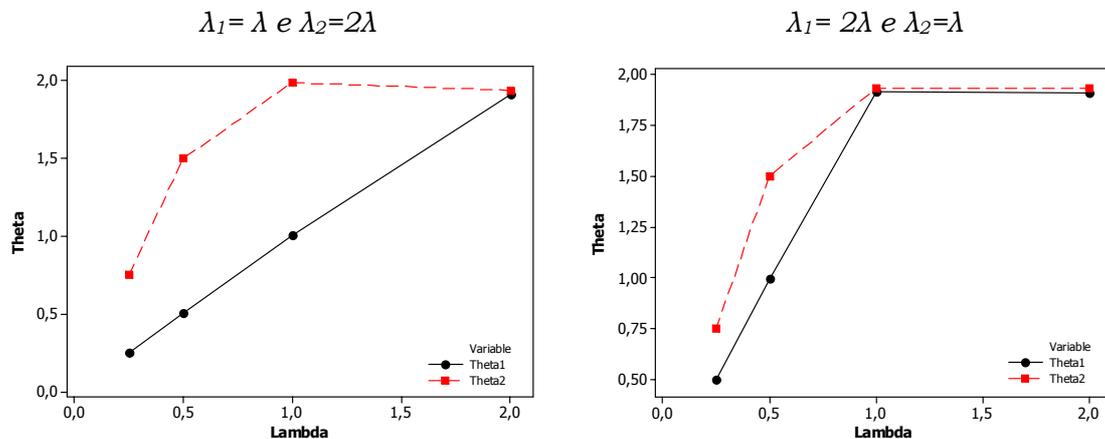


Figura 8: Taxas de atendimento para as simulações.

Nota-se que à medida que se aumenta a taxa de chegada, a taxa de atendimento se estabiliza devido ao congestionamento. Observe na Figura 8 que a maior participação na taxa de chegada no nó 2, é da entrada que é feita através de uma fila, portanto, a entrada direta contribui menos na taxa de chegada. Vemos que o comportamento da fila neste caso é diferente de acordo com a maneira como é feita a entrada no nó.

## 4.2. Problemas do GEM

Nossa motivação inicial era testar o comportamento do GEM na análise de desempenho em uma estrutura de rede de filas um pouco mais complexa. Estudamos o sistema da Figura 9, em que temos indivíduos contornando uma área (quarteirão) e a cada cruzamento existe a possibilidade de cada indivíduo continuar o contorno ou sair do sistema. Além disso em cada cruzamento indivíduos entram no sistema. Consideramos que ao chegar ao final do sistema os indivíduos não podem retornar ao mesmo, assim o abandonando. Todos os corredores possuem a dimensão de 8 de comprimento por 2,5 de largura. Fixamos as taxas de chegadas em  $\lambda=0,5$  e a probabilidade de se continuar no sistema ao chegar em um cruzamento igual a 0,5.

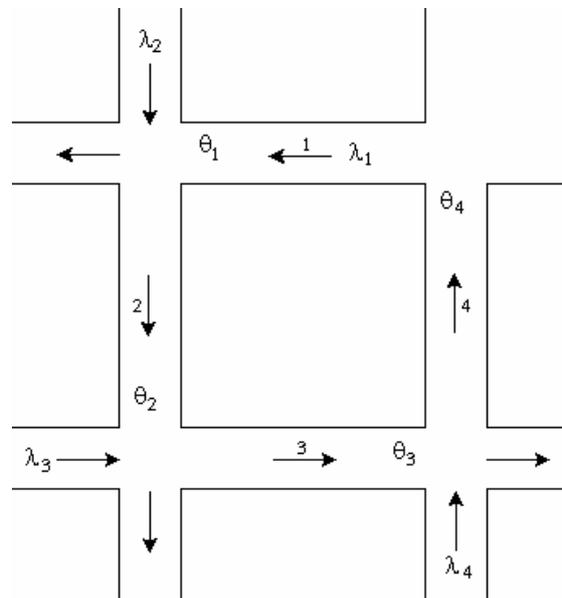


Figura 9: Modelo estudado.

Ao realizarmos a primeira análise deparamos com um problema no método analítico e a partir desse ponto, passamos a estudar as causas do problema e maneiras de contorná-lo para auxiliar estudos posteriores a encontrar o erro no algoritmo. O modelo construído inicialmente reproduzia o sistema de maneira mais simples possível, Figura 10.

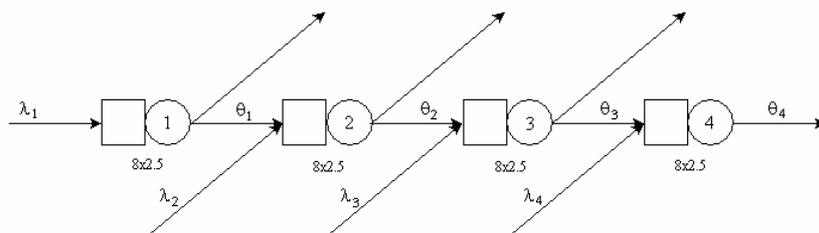


Figura 10: Modelo mais simples analisado.

Tabela 5: Taxas de atendimento.

$\theta$	Método	
	Simulado	Analítico
$\theta_1$	0,500158	*
$\theta_2$	0,750945	*
$\theta_3$	0,874748	*
$\theta_4$	0,936118	*

Podemos observar pela Tabela 5 que o método de simulação discreta obtém os resultados que esperávamos, mas o método analítico parece ter entrado em *loop*. *Loop* é quando um programa entra em um laço de repetições que não possui fim, ou seja, repete-se o mesmo procedimento infinitas vezes.

Acreditamos que o problema pode ser ocasionado pelo cruzamento, onde os indivíduos possuem as possibilidades de continuar ou não no sistema. Para sanar este problema alocamos todos os indivíduos que saíam do sistema em uma outra fila que chamamos de saída, Figura 11.

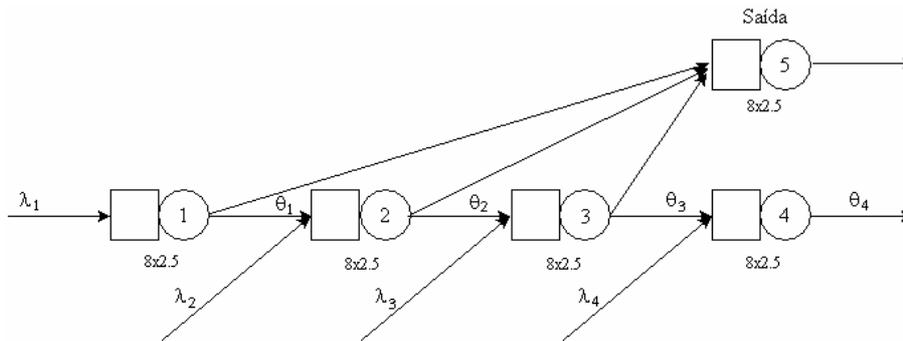


Figura 11: Modelo com a saída em uma fila.

Tabela 6: Taxas de atendimento.

$\theta$	Método	
	Simulado	Analítico
$\theta_1$	0,500158	*
$\theta_2$	0,750325	*
$\theta_3$	0,874003	*
$\theta_4$	0,936217	*

Novamente por simulação obtemos os resultados esperados. As variações que existem nas taxas de atendimento da Tabela 6 para a Tabela 5 são meramente por flutuações amostrais. Ao contrário do que esperávamos o GEM entrou em *loop*.

Já que criar uma saída para os indivíduos que abandonam o sistema não alterou o problema no método analítico, passamos a desconfiar das entradas que ocorriam em cada cruzamento. Retiramos as entradas diretas que existem no modelo e consideramos que todas elas são provenientes de filas e que a

probabilidade dos indivíduos que estão nestas filas entrarem no sistema é 1, Figura 12.

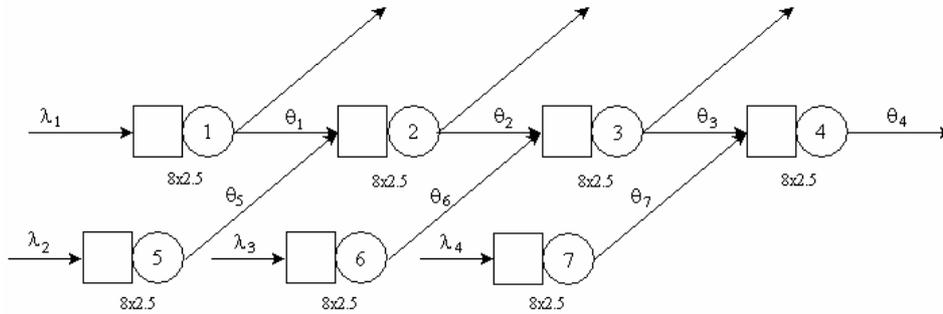


Figura 12: Modelo com entradas de filas.

Tabela 7: Taxas de atendimento.

$\theta$	Método	
	Simulado	Analítico
$\theta_1$	0,500158	0,117187
$\theta_2$	0,750612	0,234374
$\theta_3$	0,875012	0,468750
$\theta_4$	0,935527	0,937500

Note que as simulações nos trazem o resultado esperado. Novamente as variações observadas nas taxas de atendimento são meramente por flutuações amostrais. Desta vez o método analítico retornou um resultado, mas que não condiz com o que era esperado. O modelo construído não possui congestionamento, mas o método analítico retornou probabilidades de bloqueio.

Analisando um pouco mais, o método analítico pode não ter considerado a possibilidade da saída do indivíduo do sistema que existe nos cruzamentos e com isso houve congestionamento. Com base nessa suposição, surgiu a idéia de criar novamente a fila saída (ver Figura 13), para alocarmos todos os indivíduos que saíam do sistema e verificar se o problema é decorrente dos dois acontecimentos.

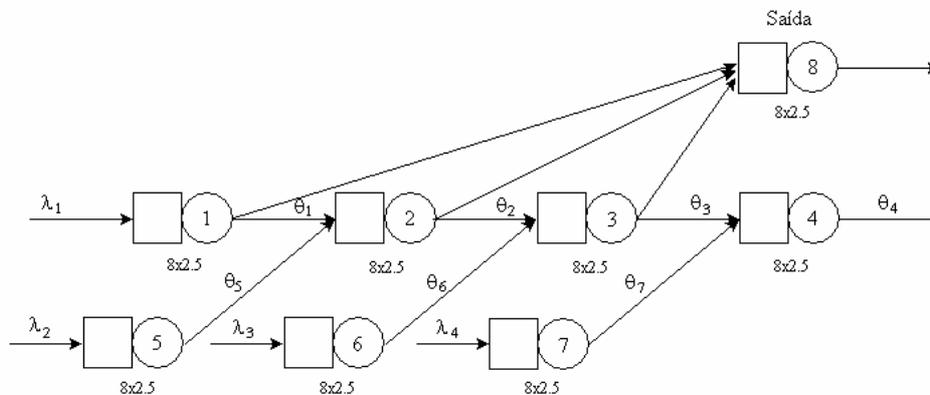


Figura 13: Modelo com entradas e saídas em filas.

Tabela 8: Taxas de atendimento.

$\theta$	Método	
	Simulado	Analítico
$\theta_1$	0,500158	*
$\theta_2$	0,750608	*
$\theta_3$	0,874757	*
$\theta_4$	0,935017	*

Ao contrário do que esperávamos o método analítico entrou em *loop* novamente. O modelo simulado traz novamente os resultados esperados, e com isso concluímos que este está pronto para qualquer variação na estrutura do modelo.

Pelo o que observamos o problema é ocasionado pela possibilidade do indivíduo não permanecer no sistema a cada cruzamento. Com base nesta informação verificamos um modelo em que não há essa possibilidade, ou seja, o indivíduo permanece no sistema até percorrê-lo totalmente, Figura 14. Chamamos à atenção que esta nova configuração é uma situação diferente da inicial.

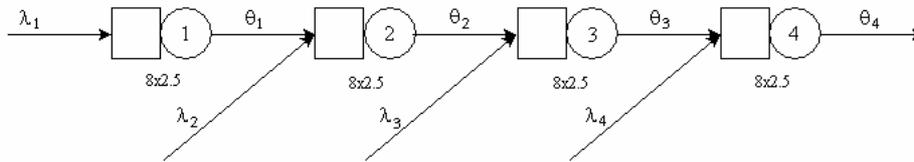


Figura 14: Modelo sem saídas a cada cruzamento.

Tabela 9: Taxas de atendimento.

$\theta$	Método	
	Simulado	Analítico
$\theta_1$	0,500158	*
$\theta_2$	1,000420	*
$\theta_3$	1,499530	*
$\theta_4$	1,998288	*

Note que o método simulado obteve novos valores. Isto é devido à mudança realizada no modelo, em que todos os indivíduos ficam no sistema até o final e as taxas de chegadas vão se somando a cada nova entrada. Portanto, o resultado simulado obtido é o previsto, mas novamente o método analítico entrou em *loop*.

Vemos com isso que o problema pode ser ocasionado pelas entradas de novos indivíduos a cada cruzamento, além da possibilidade do indivíduo não permanecer no sistema. Para verificarmos isto retiramos todas as entradas diretas e colocamos as entradas como provenientes de filas (ver Figura 15).

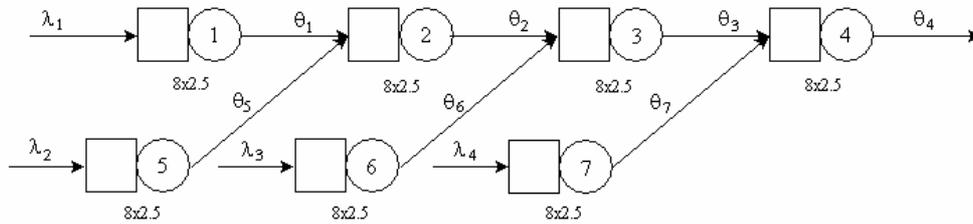


Figura 15: Modelo entradas de filas sem saídas a cada cruzamento.

Tabela 10: Taxas de atendimento.

$\theta$	Método	
	Simulado	Analítico
$\theta_1$	0,500158000000	0,500000000000
$\theta_2$	1,000435000000	1,000000000000
$\theta_3$	1,499487000000	1,500000000000
$\theta_4$	1,998335000000	1,999999999999

Podemos observar que os métodos simulado e analítico estimam o mesmo valor para os parâmetros e o resultado obtido é o previsto para o modelo. Portanto, notamos que o problema do método analítico é decorrente de saídas que possam existir no sistema ou por entradas que foram feitas de maneira direta. Portanto para que se utilize o algoritmo atual deve-se ter um sistema em que não há perdas ou saídas intermediárias e que as entradas diretas devem ser modeladas como filas.

## 5. Conclusões

Primeiramente, é de suma importância ressaltar o estudo bibliográfico que foi realizado sobre o método da expansão generalizado (GEM) e de como ele funciona. Após o término do levantamento bibliográfico, passou-se a avaliar uma implementação do algoritmo, com simulações e testes. Nota-se que, para uma fila com congestionamento, à medida que aumenta a taxa de chegada, a taxa de atendimento se torna igual em todas as filas que conduzem ao nó em que se tem a ocorrência do “gargalo”. Isto é importante para estudos de filas em que o congestionamento é comum. Outro ponto que foi explorado foi sobre o GEM, em que se viu claramente a existência de uma limitação na sua implementação. A implementação considerada somente retornará ao usuário os resultados corretos se ele tomar o cuidado ao construir o seu sistema de não permitir saídas intermediárias de usuários e de modelar todas as entradas diretas como filas. Trabalhos futuros devem incluir aperfeiçoamentos na implementação do GEM e execução de testes para outros casos de interesse.

## Agradecimentos

O autores gostariam de deixar expressos agradecimentos ao Prof. Marcos Antonio da Cunha Santos, do Departamento de Estatística da UFMG, pela cuidadosa leitura de uma versão anterior deste trabalho e pelos valiosos comentários. Frederico R. B. Cruz agradece ao CNPq (301809/96-8 e 201046/94-6) e à FAPEMIG (CEX-289/98 e CEX-855/98), pelo apoio financeiro à sua pesquisa.

## 6. Referências Bibliográficas

- [1] J. MacGregor Smith. Topological network design of state-dependent queueing networks. *Networks*, 28:55-68, 1996.
- [2] R. Jain e J. MacGregor Smith. Modeling vehicular traffic flow using  $M/G/c/c$  state dependent queueing models. *Transportation Research*, 31(4):324-336, 1997.
- [3] J. MacGregor Smith. Application of state-dependent queues to pedestrian/vehicular network design. *Operations Research*, 42:414-427, 1994.
- [4] J. MacGregor Smith e F.R.B. Cruz. The buffer allocation problem for general finite buffer queueing networks. Working paper, Dept. of Mechanical & Industrial Engineering, University of Massachusetts, Amherst, USA, 2000.
- [5] D.H. Mitchell e J. MacGregor Smith. Topological Network Design of Pedestrian Networks. *Transportation Research Part B*, 35:107-135, 2001.
- [6] P.R. Tregenza. *The Design of Interior Circulation*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, USA, 1976.
- [7] S.J. Yuhaski e J. MacGregor Smith. Modeling circulation systems in buildings using state dependent models. *Queueing Systems*, 4:319-338, 1989.
- [8] H.F. Araújo; M.L.G. Toledo; F.R.B.Cruz e J. Macgregor Smith. Generalized  $M/G/c/c$  state dependent queueing network analysis. In: *XV Congresso Brasileiro de Automática* (aceito), 2004.
- [9] J.J. Fruin. *Pedestrian Planning and Design*. Metropolitan Association of Urban Deseigners and Environmental Planners, Inc., New York, N.Y., 1971.
- [10] J. Cheah e J. MacGregor Smith. Generalized  $M/G/c/c$  state dependent queueing models and pedestrian traffic flows. *Queueing Systems and their Applications*, 15:365-386, 1994.
- [11] F.R.B Cruz; J. MacGregor Smith e R.O. Medeiros. An  $M/G/c/c$  state dependent network simulation model. *Computers & Operations Research* (em impressão), 2004.