

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Transição de Fase em Modelos de Percolação via
Funções Booleanas

André Victor Ribeiro Amaral

Orientador: Roger William Câmara Silva.

Belo Horizonte

2020

André Victor Ribeiro Amaral

Transição de Fase em Modelos de Percolação via
Funções Booleanas

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Roger William Câmara Silva.

Belo Horizonte

2020

© 2020, André Victor Ribeiro Amaral.
Todos os direitos reservados.

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende
Costa CRB 6ª Região nº 1510

Amaral, André Victor Ribeiro.

A485t Transição de fase em modelos de percolação via
funções booleanas / André Victor Ribeiro Amaral — Belo
Horizonte, 2020.
v, 50 f. il.; 29 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Minas Gerais – Departamento de Estatística.
Orientador: Roger William Câmara Silva.

1. Estatística - Teses. 2. Física estatística. 3.
Percolação. 4. Transição de fase. 5. Análise de funções
booleanas. I. Orientador. II. Título.

CDU 519.2 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

UFMG

FOLHA DE APROVAÇÃO

Transição de fase em modelos de percolação via funções booleanas.

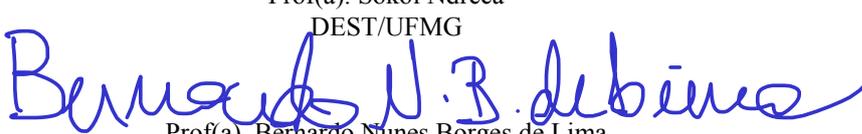
ANDRÉ VICTOR RIBEIRO AMARAL

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ESTATÍSTICA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em ESTATÍSTICA, área de concentração ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE.

Aprovada em 10 de agosto de 2020, pela banca constituída pelos membros:


Prof(a). Roger William Câmara Silva - Orientador
DEST/UFMG


Prof(a). Sokol Ndreca
DEST/UFMG


Prof(a). Bernardo Nunes Borges de Lima
MAT/UFMG

Belo Horizonte, 10 de agosto de 2020.

Agradecimentos

À minha *mãe* (Alexandra) e *irmã* (Melissa), o meu agradecimento mais do que especial. O suporte de vocês sempre será de fundamental importância.

Ao Professor Roger William Câmara Silva, obrigado pela orientação, pela paciência, e por contribuir de maneira tão positiva na minha (ainda em construção) formação acadêmica.

Aos colegas que fiz na UFMG, em especial aos companheiros de estudo Otávio e (por um período mais curto de tempo) Matheus, o meu “muito obrigado”.

Finalmente, um agradecimento à CAPES pelo suporte financeiro oferecido para o desenvolvimento deste trabalho.

Esta página foi *intencionalmente* deixada em branco.

Resumo

O conceito de *transição de fase*, inerente a diferentes tipos de modelos puramente determinísticos, pode, também, ser verificado em sistemas com componentes estocásticas. Nesse sentido, é importante o estudo de ferramentas que nos permitem provar que determinados sistemas aleatórios apresentam esse tipo de característica.

Assim, dado um espaço de probabilidade apropriado, resultados associados à análise de funções Booleanas desempenham papel importante no estudo dessa classe de modelos. Este texto preocupa-se em, ao longo da Seção 2, apresentar e demonstrar tais resultados.

Tratando-se de modelos aleatórios independentes e que vêm da Física Estatística, o de Percolação Bernoulli é, talvez, o mais conhecido. Por isso, na Seção 3, nos concentramos em reproduzir alguns resultados “clássicos” desse modelo; utilizando, porém, as ferramentas desenvolvidas na Seção 2. Aqui, é importante ressaltar o ganho que existe em utilizar esse tipo de abordagem. Alguns dos resultados demonstrados poderão ser estendidos, utilizando-se de estratégias similares, para modelos construídos sobre espaços mais gerais – incluindo modelos com dependência, como os que foram discutidos na Seção 4.

Por fim, deixo o registro de que os resultados apresentados ao longo desse texto **não** são originais. O trabalho foi construído a partir de, principalmente, [8] – em adição aos outros artigos e recursos que foram apropriadamente referenciados.

Palavras-chave: transição de fase; *sharp threshold*; análise de funções Booleanas; percolação.

Abstract

The *phase transition* concept, intrinsic to some purely deterministic models, may also be seen in systems with some stochastic component. Therefore, it is important to study results that allow us to prove that some arbitrary random systems present such a characteristic.

In this regard, given an appropriate probability space, results associated with Boolean function analysis play an important role in the study of this class of models. As a consequence of it, this text focuses on, throughout Section 2, introduce and prove such results.

With respect to independent random models from Statistical Physics, the Bernoulli Percolation Model may be considered the most popular one. Thus, in Section 3, we focused on replicating some “classical” results concerned with it. In order to achieve this, we used the tools developed in Section 2. At this point, it is important to stress the benefits of adopting such an approach. Some of the proofs may be extended, through similar strategies, to models defined over more general spaces – which also includes models with a structure of dependence, as discussed in Section 4.

Finally, I would like to clarify that the results presented throughout this text are **not** original. This work was developed mainly based on [8] – in addition to other resources and academic articles, which were properly cited.

Keywords: phase transition; sharp threshold; Boolean functions analysis; percolation.

Sumário

Agradecimentos	I
Resumo	III
Abstract	IV
1 Introdução	1
2 Como provar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por <i>sharp threshold</i>?	4
2.1 Fórmula de Russo-Margulis	4
2.2 Inequação de <i>sharp threshold</i>	7
2.3 Desigualdade de O'Donnell-Saks-Schramm-Servedio	13
3 Aplicações em percolação de Bernoulli no grafo \mathbb{L}^d	16
3.1 Ponto crítico para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^2	17
3.2 <i>Sharpness</i> da transição de fase para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d	26
4 Modelos de percolação com dependência	32
4.1 Percolação $2k$ Dependente	32
4.2 Percolação FK (ou <i>Random Cluster Model</i>)	35
Referências	43
Apêndice A – Outras demonstrações	46

1 Introdução

Na física, *transição de fase* pode ser caracterizada como a mudança descontínua do estado físico de um sistema à medida que algum de seus parâmetros varia continuamente. O exemplo mais simples vem, talvez, da mudança do estado físico da matéria: sólido, líquido ou gasoso – dependendo de parâmetros como temperatura e pressão.

Tratando-se, porém, de modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório finito passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda rapidamente como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura. O modelo de percolação Bernoulli, que será formalmente enunciado na Seção 3, é um dos principais exemplos que vamos estudar ao longo deste texto.

O modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito pelo espaço de probabilidade $(\Omega_n, \mathcal{A}, \mathbb{Q}_p)$, tal que $\Omega_n = \{0, 1\}^n$ com $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ e $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega_n)$, onde $\mathcal{P}(\cdot)$ é o conjunto das partes, e $\mathbb{Q}_p(\omega) = \prod_{i:\omega_i=1} p \prod_{i:\omega_i=0} (1-p)$ é a medida produto Bernoulli com parâmetro p . A fim de simplificar notação, denote o conjunto $\{1, \dots, n\}$ por $[n]$.

Dentro do espaço de probabilidade apresentado, este texto se concentrará em estudar funções do tipo $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, chamadas de *funções Booleanas*. Assim, defina $F(p) := \mathbb{E}_p(f(\omega))$, onde $\mathbb{E}_p(\cdot)$ é *valor esperado* com respeito à medida \mathbb{Q}_p . Da mesma forma, defina $F_n(p) := \mathbb{E}_p(f_n(\omega))$ para uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por fim, note que, como \mathbb{Q}_p é medida produto Bernoulli,

$$F_n(p) = \sum_{\omega \in \Omega_n} f_n(\omega) p^{\sum_{i \in [n]} \omega_i} (1-p)^{\sum_{i \in [n]} 1 - \omega_i}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Em adição, dadas duas configurações $\omega, \omega' \in \Omega_n$, dizemos que $\omega \leq \omega'$ se $\omega_i \leq \omega'_i$, $\forall i \in [n]$ – nesse caso, foi determinada uma ordem parcial para os elementos do espaço amostral Ω_n . Assim, $f(\omega)$ é dita *crescente* se $f(\omega) \leq f(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$. Estabelecidas as quantidades de interesse, a definição a seguir irá formalizar a ideia de *sharp threshold*.

Definição 1.1. Uma sequência de funções Booleanas crescentes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se existe $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $\delta_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$, tal que $F_n(p_n - \delta_n) \rightarrow 0$ e $F_n(p_n + \delta_n) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$.

e \mathbb{M}_p é a medida produto Bernoulli com parâmetro p . Sobre esse espaço, construa o grafo aleatório $\mathbb{G}(n, p) = (V, E)$ com conjuntos de vértices $V = [n]$ e conjunto de elos $E = \{i \in I : \omega_i = 1\}$. Nesse modelo, Erdős e Rényi estavam inicialmente interessados em estudar propriedades de \mathbb{G} que dependem apenas da classe de isomorfismo¹ do grafo, como a propriedade abaixo.

Exemplo 1.2 (Conectividade do grafo [13]). Seja $A_n = \{\mathbb{G}(n, p) \text{ é conexo}\}$, onde “ser conexo” significa dizer que para quaisquer dois pontos $w, z \in V$, existe um caminho de elos que conecta w a z . Nesse caso, $(\mathbb{I}_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $p_n = \frac{\log n}{n}$.

Uma observação que podemos fazer é a de que, propriedades – como as apresentadas nos exemplos acima – que não passam por *sharp threshold* devem, essencialmente, depender de uma quantidade uniformemente limitada de estados de bits que compõem uma configuração do espaço amostral (vide Exemplo 1.1). Esse tipo de afirmação é intuitiva à medida que, sob as condições descritas, $F_n(p)$ não atingirá propriedades do tipo $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(p_n - \delta_n) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(p_n + \delta_n) = 1$ para sequências $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\delta_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Esta dissertação está organizada como é descrito a seguir. A Seção 2 mostrará alguns importantes resultados relacionados ao estudo de funções Booleanas no espaço produto. A Seção 3 se concentrará em aplicações que apresentam *transição de fase*; considerando, principalmente, o Modelo de Percolação Bernoulli com conjunto de vértices em \mathbb{Z}^d . E a Seção 4 irá generalizar alguns dos resultados discutidos em seções anteriores, considerando, nesses casos, medidas definidas sobre espaços com algum tipo de dependência.

¹Considere dois grafos $\mathbb{G} = (V, E)$ e $\mathbb{G}' = (V', E')$, tal que V e V' são conjuntos de vértices e E e E' são conjuntos de elos. Um mapeamento $f : V \rightarrow V'$ é um isomorfismo entre \mathbb{G} e \mathbb{G}' se é bijeção e se $(v_1, v_2) \in E$ se e somente se $(f(v_1), f(v_2)) \in E'$. A coleção de grafos isomórficos a \mathbb{G} é chamada de *classe de isomorfismo* de \mathbb{G} .

2 Como provar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*?

Considerando funções Booleanas do tipo $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, é fundamental que sejamos capazes de estudar o comportamento de $\mathbb{E}_p(f(\omega))$ para, de acordo com a definição de *sharp threshold* apresentada na Seção 1, entender a transição de fase pela qual o sistema modelado passa. Dessa forma, ao longo dessa seção vamos estabelecer cotas para quantidades de interesse que envolvem $\frac{d}{dp} \mathbb{E}_p(f(\omega))$.

2.1 Fórmula de Russo-Margulis

Seja $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ como na Seção 1. Começaremos a estudar as propriedades de $F(p)$; em particular, iremos estudar como se comporta a derivada $F'(p) = \frac{d}{dp} \mathbb{E}_p(f(\omega))$. Nesse sentido, introduza a seguinte notação: $\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\text{Flip}_i(\omega))$, onde $\text{Flip}_i(\omega)$ é a configuração $\omega \in \Omega_n$ obtida quando se troca o valor do i -ésimo bit da sequência que compõe ω ; ou seja, a função $\text{Flip}_i(\omega)$ pode ser definida como

$$\text{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1 - \omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina *influência* do bit i (notação: $\text{Inf}_i(f(\omega))$) como sendo a probabilidade de $f(\omega)$ ser diferente de $f(\text{Flip}_i(\omega))$; i.e., a probabilidade de, mudando o estado de ω_i , o valor que a função f assume também ser modificado. Formalmente, dizemos que

$$\text{Inf}_i(f(\omega)) := \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é igual a $\mathbb{Q}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega)))$. Note, por fim, que, apesar de não estar explicitado na notação, $\text{Inf}_i(f(\omega))$ também depende do parâmetro p .

Agora, um resultado importante sobre como a derivada $\frac{d}{dp} \mathbb{E}_p(f(\omega))$ se relaciona à soma das *influência* dos bits i para uma função $f(\omega)$, atribuído a [22] e [26], será apresentado.

Teorema 2.1. (Fórmula de Margulis-Russo) Para $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ crescente, temos que

$$F'(p) = \sum_{i=1}^n \text{Inf}_i(f(\omega)).$$

Demonstração:

Seja $|\omega| = \sum_{i \in [n]} \omega_i$. Tomando a derivada, com respeito ao parâmetro p , da Expressão (1), é possível observar que

$$\begin{aligned}
 F'(p) &= \left(\sum_{\omega \in \Omega_n} f(\omega) p^{|\omega|} (1-p)^{n-|\omega|} \right)' \\
 &= \sum_{\omega \in \Omega_n} (f(\omega) |\omega| p^{|\omega|-1} (1-p)^{n-|\omega|} - f(\omega) (n-|\omega|) p^{|\omega|} (1-p)^{n-|\omega|-1}) \\
 &= \frac{1}{p} \mathbb{E}_p(f(\omega) |\omega|) - \frac{1}{1-p} \mathbb{E}_p(f(\omega) n - f(\omega) |\omega|) \\
 &= \mathbb{E}_p(f(\omega) |\omega|) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) - \frac{1}{1-p} \mathbb{E}_p(f(\omega) n) \\
 &= \frac{1}{p(1-p)} (\mathbb{E}_p(f(\omega) |\omega|) - p \mathbb{E}_p(f(\omega) n)) \\
 &= \frac{1}{p(1-p)} \mathbb{E}_p \left(f(\omega) \sum_{i \in [n]} \omega_i - p f(\omega) n \right) \\
 &= \frac{1}{p(1-p)} \mathbb{E}_p \left(f(\omega) \sum_{i \in [n]} (\omega_i - p) \right) \\
 &= \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p)). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Agora perceba que, se $A_i := \{\omega \in \Omega_n : \nabla_i f(\omega) \neq 0\}$ e olhando para a Expressão (2), é possível escrever $\mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p))$ como $\mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega)) + \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i^c}(\omega))$. Nesse caso, veja que, para $\omega \in A_i^c$, $f(\omega)$ é independente de ω_i ; além disso, $\mathbb{E}_p(\omega_i - p) = p - p = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p)) &= \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega)) \\
 &= \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega) | \mathbb{I}_{\{\omega_i=1\}}) \cdot \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{\{\omega_i=1\}}) + \\
 &\quad + \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega) | \mathbb{I}_{\{\omega_i=0\}}) \cdot \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{\{\omega_i=0\}}).
 \end{aligned}$$

Finalmente, como f é crescente e $\omega \in A_i$, temos que $f(\omega) = 0$ se $\omega_i = 0$; da mesma forma, $f(\omega) = 1$ se $\omega_i = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p)) &= \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega) | \mathbb{I}_{\{\omega_i=1\}}) \cdot \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{\{\omega_i=1\}}) + 0 \\
 &= (1-p) \mathbb{Q}_p(A_i | \{\omega_i = 1\}) \cdot \mathbb{Q}_p(\{\omega_i = 1\}) \\
 &= p(1-p) \mathbb{Q}_p(A_i) \\
 &= p(1-p) \text{Inf}_i(f(\omega)). \tag{3}
 \end{aligned}$$

Assim, conectando a Expressão (3) na Expressão (2), concluímos que

$$F'(p) = \sum_{i=1}^n \text{Inf}_i(f(\omega)),$$

como queríamos demonstrar. \square

Uma consequência imediata do Teorema 2.1 é que $F(p)$ é não-decrescente e diferenciável. Dito isso, suponha, por um instante, que seja possível provar cotas do tipo

$$F'(p) = \sum_{i=1}^n \text{Inf}_i(f(\omega)) \geq C \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (4)$$

onde $\mathbb{V}_p(\cdot)$ é *variância* com respeito à medida \mathbb{Q}_p e C é alguma constante “grande”. Aqui, note que, como f assume valores em $\{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_p(f(\omega)) &= \mathbb{E}_p(f^2(\omega)) - \mathbb{E}_p^2(f(\omega)) \\ &= \mathbb{E}_p(f(\omega)) - \mathbb{E}_p^2(f(\omega)) = F(p) (1 - F(p)). \end{aligned} \quad (5)$$

Dessa forma, empregando a Expressão (5) na Expressão (4), é possível dizer que

$$\begin{aligned} F'(p) &\geq C F(p) (1 - F(p)) \\ \implies \left(\frac{F'(p)}{F(p) (1 - F(p))} \right) &= \left(\ln \frac{F(p)}{1 - F(p)} \right)' \geq C \end{aligned} \quad (6)$$

Agora, tome p tal que $F(p) = \frac{1}{2}$; então, para $\delta > 0$, integrando a Expressão (6) entre $(p - \delta)$ e p , obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\ln \frac{F(p)}{1 - F(p)} \right) - \left(\ln \frac{F(p - \delta)}{1 - F(p - \delta)} \right) &\geq C p - C (p - \delta) \\ \implies 0 - \left(\ln \frac{F(p - \delta)}{1 - F(p - \delta)} \right) &\geq \delta C \implies \frac{F(p - \delta)}{1 - F(p - \delta)} \leq e^{-\delta C} \\ &\implies F(p - \delta) \leq e^{-\delta C}. \end{aligned} \quad (7)$$

Analogamente, integrando a Expressão (6) entre p e $(p + \delta)$, obtemos:

$$F(p + \delta) \geq 1 - e^{-\delta C}. \quad (8)$$

Isto significa que, se cotas como a apresentada na Expressão (4) forem obtidas, pela Expressão (7), $F(p - \delta)$ ficará “próximo” de 0. Da mesma forma, pela Expressão (8), $F(p + \delta)$ ficará “próximo” de 1. Ou seja, sob a hipótese de que é possível construir cotas como a que foi descrita, a janela de valores de p para os quais $F(p)$ fica “longe” de 0 e 1 é necessariamente pequena. As próximas subseções serão concentradas em argumentos que nos levarão a resultados da forma da Expressão (4).

2.2 Inequação de *sharp threshold*

Do ponto de vista histórico, o estudo do fenômeno de *sharp threshold* para medida produto em espaço discreto iniciou-se através de Russo, em [27], e Kahn, Kalai e Linial, em [19] – que utilizaram-se da desigualdade de Bonami-Beckner ([2] e [5]) para provar, no caso em que $p = \frac{1}{2}$, inequações que relacionam a variância de uma função Booleana com a influência total para uma função desse tipo (como o Teorema 2.2). Bourgain, Kahn, Kalai, Katznelson e Linial (BKKKL), em [6], estenderam esses resultados para o espaço produto $[0, 1]^n$, com medida uniforme nesse intervalo; assim, por um processo de discretização dessa última prova, foi possível obter inequações de *sharp threshold* para seqüências do tipo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definidas em $\{0, 1\}^n$ e com medida produto Bernoulli, com $p \in [0, 1]$ arbitrário, associada. Por fim, um resultado equivalente ao de BKKKL foi provado por Talagrand, em [29], e será enunciado a seguir.

Teorema 2.2. Existe uma constante $c > 0$ tal que, para qualquer $p \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq c \ln \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}}. \quad (9)$$

Antes, porém, da demonstração, são necessárias algumas observações sobre esse resultado. Primeiro, note que deve existir algum i com

$$\frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}} \geq \frac{c_p}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (10)$$

onde $c_p = \left(c \ln \frac{1}{p(1-p)} \right)^{-1}$. Basta supor que, $\forall i \in [n]$,

$$\begin{aligned} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}} &< \frac{c_p}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)) \\ \implies \sum_{i \in [n]} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}} &< n \frac{c_p}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)) = c_p \mathbb{V}_p(f(\omega)), \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pelo enunciado do próprio Teorema 2.2. E, como resultado da Expressão (10), existe um i , tal que

$$\text{Inf}_i(f(\omega)) > c_p \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (11)$$

com c_p possivelmente modificado por um fator multiplicador. De fato, note que, ou ^(a) $\exists i$ t.q. $\text{Inf}_i(f(\omega)) > c_p \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega))$, ou ^(b) $\text{Inf}_i(f(\omega)) \leq c_p \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega))$, $\forall i \in [n]$. Se “(b)”,

teríamos que, pela Expressão (10), existe algum i com $\text{Inf}_i(f(\omega)) > \frac{c_p}{n} \ln \frac{n}{\ln n} \mathbb{V}_p(f(\omega))$ – que é o mesmo que dizer que, cotando $\ln \frac{n}{\ln n}$ por $\frac{\ln n}{2}$, $\exists i \in [n]$ t.q. $\text{Inf}_i(f(\omega)) > \frac{c_p}{2} \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)) = (c_p^*) \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega))$, onde $c_p^* = \frac{c_p}{2}$; se esse for o caso, perceba o absurdo. Dessa maneira, vale a Expressão (11).

Para a demonstração do Teorema 2.2, vamos precisar de alguns resultados adicionais que se baseiam, principalmente, na expansão de Fourier (ou de Fourier-Walsh) de $f(\omega)$. Estudaremos, portanto, essa ferramenta.

A fim de estudar funções Booleanas do tipo $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, com Ω_n munido de medida uniforme, considere o espaço $\mathcal{L}^2(\Omega_n)$, 2^n -dimensional, das funções que mapeiam Ω_n em \mathbb{R} , com produto interno definido por $\langle f, g \rangle = \sum_{\omega \in \Omega} 2^{-n} f(\omega) g(\omega) = \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f(\omega) g(\omega))$. Considere, então, para cada $S \subset [n]$, a função $\chi_S : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\chi_S(\omega) = (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i}$. Nesse caso, é possível verificar que a família de funções χ_S forma uma base ortonormal para $\mathcal{L}^2(\Omega_n)$. De fato, para $S, T \subset [n]$, note que $\langle \chi_S, \chi_T \rangle = \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_{S \Delta T})$, onde Δ é *diferença simétrica*; nesse caso, $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_{S \Delta T})$ é igual 0 se $S \neq T$, e igual a 1 se $S = T$ (logo, $\{\chi_S : S \subset [n]\}$ é conjunto ortonormal). Além disso, como $\{\chi_S : S \subset [n]\}$ tem 2^n elementos, a família de funções χ_S é base ortonormal para $\mathcal{L}^2(\Omega_n)$. Assim, qualquer função f avaliada em Ω_n pode ser decomposta em $f(\omega) = \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}(S) \chi_S$, tal que $\widehat{f}(S) = \langle f, \chi_S \rangle$.

Definição 2.1. Para uma função do tipo $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, com medida uniforme em Ω_n , a expansão de Fourier de f é dada por

$$f(\omega) = \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}(S) \chi_S,$$

onde $\chi_S = (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i}$ e $\widehat{f}(S) = 2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega_n} f(\omega) \chi_S(\omega)$.

Exemplo 2.1. Seja $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ com medida uniforme. Defina $f_n(\omega) = \max\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Se $n = 2$, então $f_2(\omega) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$; nesse caso, determine a expansão de Fourier de f_2 .

Calculando χ_S , obtemos $\chi_\emptyset = 1$ (por definição), $\chi_{\{1\}} = (-1)^{\omega_1}$, $\chi_{\{2\}} = (-1)^{\omega_2}$ e $\chi_{\{1,2\}} = (-1)^{\omega_1 + \omega_2}$. Agora, em relação aos coeficientes $\widehat{f}(S)$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}_2(\emptyset) &= \frac{1}{4} (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{3}{4} \\ \widehat{f}_2(\{1\}) &= \frac{1}{4} (0(-1)^0 + 1(-1)^1 + 1(-1)^0 + 1(-1)^1) = -\frac{1}{4} \\ \widehat{f}_2(\{2\}) &= \frac{1}{4} (0(-1)^0 + 1(-1)^0 + 1(-1)^1 + 1(-1)^1) = -\frac{1}{4} \\ \widehat{f}_2(\{1, 2\}) &= \frac{1}{4} (0(-1)^0 + 1(-1)^1 + 1(-1)^1 + 1(-1)^2) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, f_2 pode ser expressa como $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}(-1)^{\omega_1} - \frac{1}{4}(-1)^{\omega_2} - \frac{1}{4}(-1)^{\omega_1 + \omega_2}$.

Além disso, precisaremos de mais duas ferramentas para a prova do Teorema 2.2.

Lema 2.1 (Teorema de Parseval). Seja $f : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$, então vale que

$$\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f^2(\omega)) = \sum_{S \subset [n]} (\widehat{f}(S))^2.$$

A demonstração do Lema 2.1 será feita no Apêndice A.

Lema 2.2 (Desigualdade de Bonami-Beckner). Seja $f : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$. Defina, para $0 \leq t \leq 1$, o “operador de ruído” (em inglês, “*noise operator*”) $T_t(\cdot)$ de tal forma que $T_t(f(\omega)) = \sum_{S \subset [n]} t^{|S|} \widehat{f}(S) \chi_S$. Se $1 \leq q \leq r < +\infty$ e vale que $t \leq \left(\frac{q-1}{r-1}\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\|T_t(f(\omega))\|_r \leq \|f(\omega)\|_q,$$

onde $\|f(\omega)\|_p = \left(2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega_n} |f(\omega)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{p}}(|f(\omega)|^p)$ é norma- p .

A demonstração do Lema 2.2 não será feita; entretanto, é possível encontrá-la, com detalhes, em [24] (além de nos artigos originais, em [2] e [5]).

Demonstração (Teorema 2.2):

Pela possibilidade de uso do Lema 2.2 durante a demonstração, apenas o caso onde $p = \frac{1}{2}$ será contemplado. Dessa forma, considerando a expansão de Fourier estabelecida na Definição 2.1, perceba que:

$$\widehat{\nabla_i f}(S) = \begin{cases} 2\widehat{f}(S) & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (12)$$

já que $\widehat{\nabla_i f}(S) = \widehat{f}(S) - 2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega_n} f(\text{Flip}_i(\omega)) (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i}$. Nesse caso, note que, para $i \notin S$, temos $2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega_n} f(\text{Flip}_i(\omega)) (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i} = \widehat{f}(S)$; ou seja, $\widehat{\nabla_i f}(S) = \widehat{f}(S) - \widehat{f}(S) = 0$. Porém, para $i \in S$, é possível escrever $2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega_n} f(\text{Flip}_i(\omega)) (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i}$ como $(-\widehat{f}(S))$, e, portanto, $\widehat{\nabla_i f}(S) = \widehat{f}(S) - (-\widehat{f}(S)) = 2\widehat{f}(S)$.

Agora, como $\widehat{f}(\emptyset) = 2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega_n} f(\omega) = F\left(\frac{1}{2}\right)$ e, pelo Lema 2.1, $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f^2(\omega)) = \sum_{S \subset [n]} (\widehat{f}(S))^2$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) &= \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f^2(\omega)) - \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}^2(f(\omega)) \\ &= \sum_{S \subset [n]} (\widehat{f}(S))^2 - (\widehat{f}(\emptyset))^2 \\ &= \sum_{\substack{S \subset [n] \\ S \neq \emptyset}} (\widehat{f}(S))^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Considerando as Expressões (12) e (13), perceba que é possível dizer que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) &= \sum_{i \in [n]} \sum_{S \ni i} \frac{(\widehat{f}(S))^2}{|S|} \\
 &= \sum_{i \in [n]} \sum_{S \ni i} \frac{(\widehat{\nabla}_i f(S))^2}{4|S|} \\
 &\leq \sum_{i \in [n]} \sum_{\substack{S \subset [n] \\ S \neq \emptyset}} \frac{(\widehat{\nabla}_i f(S))^2}{4|S|} \\
 &\leq \sum_{i \in [n]} \sum_{\substack{S \subset [n] \\ S \neq \emptyset}} \frac{(\widehat{\nabla}_i f(S))^2}{2|S| + 1},
 \end{aligned}$$

com $|S|$ representando a cardinalidade de S . Escrevendo, então, $\frac{1}{2|S|+1}$ como $\int_0^1 t^{2|S|} dt$, e introduzindo, para cada $t \in [0, 1]$, o “operador de ruído” (ou “*noise operator*”) $\mathbb{T}_t(\cdot)$, vale

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) &\leq \sum_{i \in [n]} \sum_{\substack{S \subset [n] \\ S \neq \emptyset}} \int_0^1 t^{2|S|} (\widehat{\nabla}_i f(S))^2 dt \\
 &= \sum_{i \in [n]} \sum_{S \subset [n]} \left[\int_0^1 t^{2|S|} (\widehat{\nabla}_i f(S))^2 dt \right] - \int_0^1 t^{2|\emptyset|} (\widehat{\nabla}_i f(\emptyset))^2 dt \\
 &= \sum_{i \in [n]} \sum_{S \subset [n]} \left[\int_0^1 t^{2|S|} (\widehat{\nabla}_i f(S))^2 dt \right] \\
 &= \sum_{i \in [n]} \int_0^1 \left[\sum_{S \subset [n]} t^{2|S|} (\widehat{\nabla}_i f(S))^2 \right] dt \\
 &= \sum_{i \in [n]} \int_0^1 \|\mathbb{T}_t(\nabla_i f(\omega))\|_2^2 dt, \tag{14}
 \end{aligned}$$

tal que na terceira linha usamos o fato de que $i \notin \emptyset$; logo, pela Expressão (12), $\widehat{\nabla}_i f(\emptyset) = 0$.

Dessa forma, utilizando o Lema 2.2, podemos dizer que

$$\|\mathbb{T}_t(\nabla_i f(\omega))\|_2 \leq \|(\nabla_i f(\omega))\|_{1+t^2}, \tag{15}$$

já que $t \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, para $0 \leq t \leq 1$. Além disso, como $|\nabla_i f(\omega)|$ assume valores no conjunto $\{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}
 \|(\nabla_i f(\omega))\|_{1+t^2} &= \left(\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(|\nabla_i f(\omega)|^{1+t^2}) \right)^{\frac{1}{1+t^2}} \\
 &= (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{\frac{1}{1+t^2}}, \tag{16}
 \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade apenas utiliza a definição de $\text{Inf}_i(f(\omega))$.

Dessa maneira, juntando a Expressão (14) com as Expressões (15) e (16), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) &\leq \sum_{i \in [n]} \int_0^1 (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{\frac{2}{1+t^2}} dt \\ &= \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)) \int_0^1 (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Agora, fazendo mudança de variável tal que $s = 1 - t$; o que implica que $ds = -dt$, é possível escrever que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt &\leq \int_0^1 (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{(1-t)} dt \\ &= \int_1^0 -\text{Inf}_i(f(\omega))^s ds \\ &= \int_0^1 \text{Inf}_i(f(\omega))^s ds \\ &= \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln(\text{Inf}_i(f(\omega)))} - \frac{1}{\ln(\text{Inf}_i(f(\omega)))} \leq \left(\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

tal que a primeira desigualdade é válida pois $\frac{1-t^2}{1+t^2} \geq (1-t)$, para $t \in [0, 1]$, e $\text{Inf}_i(f(\omega)) \leq 1$, $\forall i \in [n]$. Assim, aplicando a Expressão (18) na Expressão (17), obtemos

$$\mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) \leq \sum_{i \in [n]} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}},$$

o que conclui a demonstração para $p = \frac{1}{2}$. \square

Perceba, finalmente, que o resultado que acabamos de mostrar nos diz que $F'(p) = \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)) \geq c_p \ln \frac{1}{\max_i(\text{Inf}_i(f(\omega)))} \mathbb{V}_p(f(\omega))$; ou seja, tomando como referência a Expressão (4), para provar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*, é necessário mostrar que $c_p \ln \frac{1}{\max_i(\text{Inf}_i(f(\omega)))}$ é “grande” – o que é o mesmo que dizer que $\max_i(\text{Inf}_i(f(\omega)))$ é “pequeno” (i.e., $\forall i \in [n]$, $\text{Inf}_i(f(\omega))$ é “pequeno”). Porém, provar que todas as *influências* são pequenas pode não ser tarefa fácil. Nesse sentido, o Teorema 2.3 nos permitirá, sob condições específicas, utilizar o Teorema 2.2 de forma prática. Mas antes disso, precisaremos de mais uma definição.

Definição 2.2. Dado um conjunto arbitrário Λ , (Σ, ψ) é dito grupo simétrico \mathcal{G} se $\Sigma = \{\sigma; \sigma : \Lambda \rightarrow \Lambda \text{ é bijeção}\}$ e $\psi : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Sigma$, com $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 \circ \sigma_2$; nesse caso, uma função f com domínio em Λ é dita *simétrica sob* \mathcal{G} , se $f \circ \sigma = f$, $\forall \sigma \in \mathcal{G}$. Além disso, \mathcal{G} age transitivamente sobre Λ se, para todo par λ_1 e λ_2 em Λ , existe $\sigma \in \mathcal{G}$, tal que $\sigma(\lambda_1) = \lambda_2$.

Teorema 2.3. Existe uma constante $c > 0$ tal que, para qualquer $p \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ que é *simétrica sob um grupo \mathcal{G} agindo transitivamente sobre $[n]$* , temos que

$$F'(p) \geq c \ln(n) \mathbb{V}_p(f(\omega)).$$

Demonstração:

Se f é simétrica sob um grupo \mathcal{G} agindo transitivamente sobre $[n]$, então $f \circ \sigma = f$, $\forall \sigma \in \mathcal{G}$ e, para todo par $i_1, i_2 \in [n]$, existe $\sigma \in \mathcal{G}$ tal que $\sigma(i_1) = i_2$. Em particular,

$$\text{Inf}_{i_1}(f) = \text{Inf}_{i_1}(f \circ \sigma) = \text{Inf}_{i_2}(f),$$

onde a primeira igualdade usa o fato de que $f = f \circ \sigma$, e a segunda igualdade vem da ideia de que, dada uma permutação $\sigma \in \mathcal{G}$ que satisfaz $\sigma(i_1) = i_2$, olhar para a influência de i_1 em $f \circ \sigma$, é o mesmo que “olhar” para a influência de i_2 em f . Dessa forma, *todas as influências são iguais*. Dito isso, existem duas possibilidades:

1. Se $\text{Inf}_i(f(\omega)) \geq \frac{\ln(n)}{n}$ para todo i , então

$$F'(p) = \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)) \geq \ln(n) \geq \ln(n) \mathbb{V}_p(f(\omega)),$$

já que $\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq 1$; ou

2. Se $\text{Inf}_i(f(\omega)) \leq \frac{\ln(n)}{n}$ para todo i , então $\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))} \geq \ln(n) - \ln(\ln(n))$, $\forall i \in [n]$; nesse caso, pelo Teorema 2.2 (com aplicação direta da Expressão (9)), temos que

$$F'(p) = \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)) \geq c_p (\ln(n) - \ln(\ln(n))) \mathbb{V}_p(f(\omega)),$$

onde, como já definido, $c_p = \left(c \ln \frac{1}{p(1-p)} \right)^{-1}$.

Finalmente, como $\ln(n) - \ln(\ln(n)) \geq \frac{\ln(n)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tomando $c = \frac{c_p}{2}$, concluimos a demonstração. \square

Perceba que o Teorema 2.3 implica que, cumprida determinadas hipóteses sobre $f(\omega)$, e levando em consideração a Expressão (4), tomar $C = c \ln(n)$ nos permite dizer que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Exemplo 2.2 (Propriedades monótonas em grafos [15]). Para Modelo de Erdős-Rényi descrito na Seção 1, seja A_n propriedade monótona crescente (propriedade que não é “destruída” pela adição de elos) que depende apenas da classe de isomorfismo de \mathbb{G} . Nesse caso, $(\mathbb{I}_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Para verificar que o Exemplo 2.2 é, de fato, válido, basta notar que, por hipótese, uma propriedade do tipo A_n depende somente da classe de isomorfismo de \mathbb{G} ; em particular, A_n é invariante por “renomeação dos vértices”. Então \mathbb{I}_{A_n} é simétrica sob um grupo \mathcal{G} agindo transitivamente sobre o conjunto dos vértices do grafo. Pelo Teorema 2.3, $(\mathbb{I}_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*. Veja, nesse caso, que o Exemplo 1.2 é um caso particular desse resultado mais geral.

2.3 Desigualdade de O’Donnell-Saks-Schramm-Servedio

Uma outra desigualdade, que nos permite conseguir cotas como a sugerida na Expressão (4), será introduzida nessa subseção. Esse resultado é baseado na ideia de *algoritmo de exploração*, inicialmente proposta em [30].

De maneira informal, um algoritmo associado a uma função Booleana $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ toma $\omega \in \Omega_n$ como entrada e revela, de maneira algorítmica, o valor de ω em diferentes coordenadas, um por um, até que o valor da função $f(\omega)$ possa ser completamente determinado. Em cada passo desse processo, a coordenada que será revelada imediatamente a seguir depende apenas do que foi revelado de ω até o momento. Nesse sentido, a exploração é interrompida quando o valor de $f(\omega)$ puder ser determinado independente das coordenadas não reveladas de ω . Assim, a pergunta de interesse passa a ser: Quantas coordenadas de ω devem ser reveladas antes que o algoritmo pare? Essa quantidade é comumente referenciada como *complexidade computacional* de uma função Booleana.

Definição 2.3. Dados uma n -upla $x = (x_1, \dots, x_n)$ e um $t \leq n$, com $t \in \mathbb{N}$, defina $x_{[t]} := (x_1, \dots, x_t)$ e $\omega_{x_{[t]}} := (\omega_{x_1}, \dots, \omega_{x_t})$. Um *algoritmo* \mathbf{T} é uma dupla (i_1, ψ_t) , com $2 \leq t \leq n$, que toma $\omega \in \Omega_n$ como entrada e devolve uma sequência ordenada $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ construída indutivamente da seguinte forma: para $2 \leq t \leq n$,

$$i_t = \psi_t(\mathbf{i}_{[t-1]}, \omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}) \in [n] \setminus \{i_1, \dots, i_{t-1}\};$$

onde ψ_t é interpretada como a regra de decisão no tempo t (ψ_t toma, como argumentos, a localização e o valor dos bits para os primeiros $(t - 1)$ passos do processo de indução, e, então, decide qual o próximo bit que será consultado). Aqui, note que a primeira coordenada i_1 é determinística. Por fim, para $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, defina:

$$\tau(\omega) = \tau_{f, \mathbf{T}}(\omega) := \min\{t \geq 1 : \forall x \in \Omega_n, x_{\mathbf{i}_{[t]}} = \omega_{\mathbf{i}_{[t]}} \implies f(x) = f(\omega)\}.$$

Perceba que, da Definição 2.3, $\tau(\omega)$ diz respeito à menor quantidade de bits de $\omega \in \Omega_n$ que precisa ser consultada para que $f(\omega)$ seja *completamente* determinada. Sendo assim, em Ciência da Computação, os algoritmos são, de maneira geral, definidos até $\tau(\omega)$.

O resultado abaixo, conhecido como “desigualdade de OSSS” e introduzido por O’Donnell, Saks, Schramm e Servedio em [25], relaciona a variância de $f(\omega)$ com a influência total e complexidade computacional de um algoritmo \mathbf{T} para a mesma função.

Teorema 2.4. Seja $p \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Fixe uma função Booleana crescente $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ e um algoritmo \mathbf{T} ; então vale que

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{i \in [n]} \delta_i(\mathbf{T}) \text{Inf}_i(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\mathbf{T}) = \delta_i(f, \mathbf{T}) := \mathbb{Q}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : i_t = i)$ é chamado de *revelação* de f para o algoritmo \mathbf{T} e o bit i .

Antes da demonstração, perceba que, mais uma vez considerando a Inequação 4, se todas as *revelações* $\delta_i(\mathbf{T})$ forem pequenas; i.e., se existe um algoritmo que determina completamente $f(\omega)$, mas *revela* “poucos” bits, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Demonstração (Teorema 2.4):

Comece considerando duas sequências independentes ω e $\tilde{\omega}$ de variáveis aleatórias Bernoulli com parâmetro p , independentes e igualmente distribuídas (*i.i.d.*). Construa uma sequência de índices \mathbf{i} tal que i_1 é determinístico e, para todo $t \geq 1$, $i_{t+1} = \psi_t(\mathbf{i}_{[t]}, \omega_{i_{[t]}})$. Aqui, vale a observação de que a construção de \mathbf{i} depende, somente, de ω ; i.e., \mathbf{i} não envolve $\tilde{\omega}$.

Dessa maneira, para $\tau(\omega) = \min\{t \geq 1 : \forall x \in \Omega, x_{i_{[t]}} = \omega_{i_{[t]}} \implies f(x) = f(\omega)\}$ e $0 \leq t \leq n$, definimos a sequência

$$\omega^t := (\tilde{\omega}_{i_1}, \dots, \tilde{\omega}_{i_t}, \omega_{i_{t+1}}, \dots, \omega_{i_{\tau-1}}, \omega_{i_\tau}, \tilde{\omega}_{i_{\tau+1}}, \dots, \tilde{\omega}_{i_n}),$$

onde $\omega^t = \tilde{\omega}$ se $t \geq \tau$.

Agora, observe que, como $f(\omega)$ assume valores no conjunto $\{0, 1\}$,

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) = F(p)(1-F(p)) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_p(|f(\omega) - F(p)|),$$

onde a última igualdade vem do fato de que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(|f(\omega) - F(p)|) &= (1-F(p)) \mathbb{Q}_p(f(\omega) = 1) + F(p) \mathbb{Q}_p(f(\omega) = 0) \\ &= (1-F(p)) F(p) + F(p) (1-F(p)) = 2 \mathbb{V}_p(f(\omega)). \end{aligned}$$

Veja também que, de acordo com como definimos a n -upla ω^t , ω^0 coincide com ω no conjunto de índices $\mathbf{i}_{[\tau]}$; logo, $f(\omega^0) = f(\omega)$. Da mesma forma, $\omega^n = \tilde{\omega}$, o que nos permite dizer que $f(\omega^n) = f(\tilde{\omega})$.

Sendo assim, utilizando a observação que acabamos de fazer, temos que

$$\begin{aligned} 2 \mathbb{V}_p(f(\omega)) &= \mathbb{E}_p(|f(\omega) - F(p)|) \\ &= \mathbb{E}_p(|\mathbb{E}_p(f(\omega^0) | \omega) - \mathbb{E}_p(f(\omega^n) | \omega)|) = \mathbb{E}_p(|\mathbb{E}_p(f(\omega^0) - f(\omega^n) | \omega)|) \\ &\leq \mathbb{E}_p(|f(\omega^0) - f(\omega^n)|) \leq \sum_{t=1}^n \mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})|), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade usa o fato de que ω e $\tilde{\omega}$ têm a mesma distribuição.

Além disso, como $\omega^t = \omega^{t-1}$, $\forall t > \tau$, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})|) &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n \mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})| \mathbb{I}_{\{t \leq \tau\} \cap \{i_t = i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n \mathbb{E}_p \left[\mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})| | \omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}) \mathbb{I}_{\{t \leq \tau\} \cap \{i_t = i\}} \right], \quad (19) \end{aligned}$$

já que $\{t \leq \tau\} \cap \{i_t = i\}$ é mensurável com respeito à sequência $\omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}$. Agora perceba que, condicionado em $\{t \leq \tau\} \cap \{i_t = i\}$, tanto ω^t quanto ω^{t-1} são independentes de $\omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}$ (já que as duas sequências ω^t e ω^{t-1} são definidas por bits que não dependem de $\omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}$). Além disso, note que ω^t e ω^{t-1} só se diferem (possivelmente) pelo do bit i , onde $\omega_i^t = \tilde{\omega}_i$ e $\omega_i^{t-1} = \omega_i$. No caso de $\omega_i^t = \omega_i^{t-1}$, temos que $|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})| = 0$; assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})| | \omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}) &= \mathbb{Q}_p(\{\omega_i^t \neq \omega_i^{t-1}\} \cap \{f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega))\}) \\ &= 2p(1-p) \cdot \mathbb{Q}_p(\{f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega))\}). \end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que $\mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})|) = 2p(1-p) \cdot \text{Inf}_i(f(\omega))$, o que, voltando na Expressão (19), implica que

$$2 \mathbb{V}(f(\omega)) \leq 2p(1-p) \sum_{i=1}^n \text{Inf}_i(f(\omega)) \sum_{t=1}^n \mathbb{Q}(\{t \leq \tau\} \cap \{i_t = i\}).$$

Finalmente, recordando que $\delta_i(\mathbf{T})$ pode ser escrito como $\sum_{t=1}^n \mathbb{Q}(\{t \leq \tau\} \cap \{i_t = i\})$, concluímos a demonstração. \square

3 Aplicações em percolação de Bernoulli no grafo \mathbb{L}^d

Para essa seção, vamos considerar o modelo de percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d (em particular, para $d = 2$). Nesse sentido, considere o reticulado d dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, tal que \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e \mathbb{E}^d é conjuntos de elos.

Primeiro, denote por $x \in \mathbb{Z}^d$ um elemento do conjunto de vértices, representado por $x = (x_1, \dots, x_d)$, com $x_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, d\}$. Defina $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$, tal que $x, y \in \mathbb{Z}^d$, como função distância. Então, dizemos que $\mathbb{E}^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$ é o conjunto de elos.

O espaço de probabilidade para esse modelo será dado por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$. Nesse caso, $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$, onde $\omega = (\omega_e : e \in \mathbb{E}^d)$ é configuração de Ω , tal que $\omega_e = 0$ representa elo e “fechado” e $\omega_e = 1$ representa elo e “aberto”, $\forall e \in \mathbb{E}^d$. Com o propósito de definir uma σ -álgebra apropriada, seja $C(f, a_0, \dots, a_n) = \{\omega \in \Omega : \omega_{e+f} = a_e, 0 \leq e \leq n, a_e \in \{0, 1\}\}$ conjunto cilíndrico finito-dimensional. Nesse caso, é possível mostrar que cilindros finito-dimensionais formam uma semi-álgebra, denotada por \mathcal{C} , de subconjuntos de Ω . Dessa forma, somos capazes de definir uma medida $\mathbf{P}_p : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$, tal que $\mathbf{P}_p(C(f, a_0, \dots, a_n)) = \prod_{e: a_e=1} p \prod_{e: a_e=0} (1-p)$. Aplicando o Teorema de Extensão de Kolmogorov, \mathbf{P}_p pode ser estendida, de maneira única, para uma medida \mathbb{P}_p , definida em $\sigma(\mathcal{C})$, tal que $\mathbb{P}_p(A) = \mathbf{P}_p(A), \forall A \in \mathcal{C}$. Sendo assim, para $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$, a medida de probabilidade de interesse $\mathbb{P}_p(\omega)$ pode ser expressa por $\prod_{e: \omega_e=1} p \prod_{e: \omega_e=0} (1-p)$.

Abaixo, são apresentadas outras importantes definições que nos serão úteis ao longo desta seção.

Definição 3.1. Um *caminho* γ em \mathbb{L}^d é definido pela sequência $\gamma = (x_i)_{i \in [n]}$ de vértices (distintos), tal que $(x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{E}^d, \forall i \in [n] \setminus n$. Além disso, dizemos que um caminho γ é *aberto* se, para todos os elos e que compõem γ , $\omega_e = 1$. Por fim, dizemos que “ x está conectado a y ” se existe $\gamma = (x, \dots, y)$ caminho aberto (notação: $x \leftrightarrow y$).

Definição 3.2. Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, o *aglomerado* de x em ω é definido por $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$.

Uma observação importante é a de que, ao evento $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$, damos o nome de *percolar*.

Definição 3.3. O ponto crítico no reticulado \mathbb{L}^d é definido por $p_c(\mathbb{L}^d) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}$, onde $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é função que mapeia $p \mapsto \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$.

Sobre as propriedades da função $\theta(p)$, temos os seguintes resultados:

Proposição 3.1. A função $\theta(p)$ é não-decrescente; i.e., se $p_1 < p_2$, então $\theta(p_1) \leq \theta(p_2)$, $\forall p_1, p_2 \in [0, 1]$.

A demonstração da Proposição 3.1 será feita no Apêndice A.

Proposição 3.2. Para $d \geq 2$, $\exists p_c(d) \in (0, 1)$ tal que

$$\theta(p) : \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c(d) \\ > 0 & \text{se } p > p_c(d). \end{cases}$$

A demonstração da Proposição 3.2 será feita no Apêndice A. O resultado será utilizado para a prova da Proposição 3.3, que nos dá informação sobre a probabilidade de existir aglomerado de tamanho infinito em \mathbb{L}^d para uma configuração $\omega \in \Omega$.

Proposição 3.3. Seja $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, com $p \mapsto \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : \exists \text{ aglomerado de tamanho infinito em } \mathbb{L}^d \text{ para } \omega\})$, então:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p < p_c(d) \\ 1 & \text{se } p > p_c(d). \end{cases}$$

A demonstração da Proposição 3.3 será feita no Apêndice A.

Por fim, defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$, ou seja, uma caixa d -dimensional de lado $2n$, e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$ (onde $\partial\Lambda_n$ representa a “fronteira” da caixa $[-n, n]^d$).

3.1 Ponto crítico para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^2

Ao longo dessa subseção, iremos nos concentrar na demonstração do seguinte teorema:

Teorema 3.1. Vale que $p_c(\mathbb{L}^2) = \frac{1}{2}$.

A primeira demonstração do Teorema 3.1 é atribuída Harris em [18], que mostrou que $\theta(\frac{1}{2}) = 0$ (em particular, $p_c \geq \frac{1}{2}$), e a Kesten em [20], que finalizou a prova. Aqui, entretanto, a demonstração apresentada é resultado dos esforços, em um primeiro momento, de Russo em [27], e, mais tarde, de Bollobás e Riordan em [4]. A prova baseia-se

no fato de que funções indicadoras de eventos de cruzamento de caixas passam por *sharp threshold*.

Porém, antes da demonstração em si, são necessárias algumas definições e resultados parciais. Primeiro, defina, para quaisquer dois inteiros positivos n e m , o retângulo $R(n, m) := [0, n] \times [0, m]$. Além disso, $\mathcal{H}(n, m) = \{\exists \text{ cruzamento horizontal esquerda-direita em } R(n, m)\}$ e $\mathcal{V}(n, m) = \{\exists \text{ cruzamento vertical cima-baixo em } R(n, m)\}$. Agora, observe a proposição a seguir.

Proposição 3.4. Temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$.

Demonstração:

Para essa prova, defina um *reticulado dual* $(\mathbb{L}^2)^* = ((\mathbb{Z}^2)^*, (\mathbb{E}^2)^*)$, tal que $(\mathbb{Z}^2)^* := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2$ e $(\mathbb{E}^2)^* = \{(x^*, y^*) \in (\mathbb{Z}^2)^* \times (\mathbb{Z}^2)^* : \delta(x^*, y^*) = 1\}$, onde, para cada elo $e \in \mathbb{E}^2$, existe uma correspondência única com o elo e^* em $(\mathbb{E}^2)^*$ que o cruza – de tal forma que $\omega_{e^*}^* = 1 - \omega_e$. A Figura 2 ilustra esse novo reticulado.

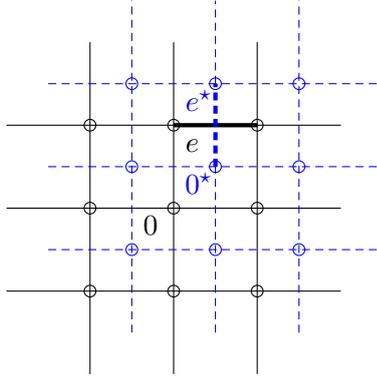


Figura 2: Reticulado original \mathbb{L}^2 (linha sólida) e *reticulado dual* $(\mathbb{L}^2)^*$ (linha tracejada).

Agora, perceba que, da maneira como definimos o reticulado $(\mathbb{L}^2)^*$, bem como os elos que o compõem, podemos dizer que, se $\omega \sim \mathbb{P}_p$, então $\omega^* \sim \mathbb{P}_{1-p}$; i.e., se a lei que determina o estado de uma configuração ω é o produto de variáveis Bernoulli independentes com parâmetro p , então a lei associada a ω^* é o produto de variáveis Bernoulli independentes com parâmetro $1 - p$. Em particular, se $p = \frac{1}{2}$, ω e ω^* têm a mesma distribuição. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{V}^*\left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]\right)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{V}^*([a, b] \times [c, d]) = \{\exists \text{ cruzamento vertical cima-baixo em } [a, b] \times [c, d] \text{ no reticulado dual}\}$ e a última igualdade usa, além de invariância por translação, o fato de que $p = \frac{1}{2}$. Logo, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. \square

Corolário 3.1. Temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \frac{1}{2}$.

Demonstração:

Note que $\mathcal{H}(n, n) \supset \mathcal{H}(n+1, n)$. Dessa forma, pela Proposição 3.4, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$. \square

O que a Proposição 3.4 nos diz é que, para retângulos do tipo $[n+1] \times [n]$, a probabilidade de cruzamento não tende para 0 ou para 1 quando n vai para infinito. O que vamos verificar agora é se, para retângulos “não degenerados” (no sentido de não terem altura e largura muito parecidas), a probabilidade de cruzamento ainda é uniformemente limitada. Nesse sentido, considere o teorema a seguir.

Teorema 3.2. Para qualquer $\rho > 0$, existe $c = c(\rho) > 0$ tal que, $\forall n \geq 1$,

$$c \leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n)) \leq 1 - c.$$

Porém, antes de qualquer discussão sobre o Teorema 3.2, é necessário enunciar uma ferramenta que será importante para algumas das demonstrações que vão ser apresentadas.

Lema 3.1 (Desigualdade de FKG). Sejam X, Y variáveis aleatórias crescentes e limitadas, então

$$\mathbb{E}_p(X \cdot Y) \geq \mathbb{E}_p(X) \cdot \mathbb{E}_p(Y).$$

A demonstração da Proposição 3.1 será feita no Apêndice A.

Corolário 3.2. Sejam A, B eventos crescentes, então

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \cdot \mathbb{P}_p(B).$$

Demonstração:

Defina $X(\omega) = \mathbb{I}_A(\omega)$ e $Y(\omega) = \mathbb{I}_B(\omega)$ e aplique o Lema 3.1. \square

Agora, perceba que, em relação ao Teorema 3.2, se formos capazes de determinar a cota inferior para a probabilidade desejada, a cota superior segue facilmente. Basta notar que, de maneira similar ao que foi feito na demonstração da Proposição 3.4, o

complementar do evento $\mathcal{H}(\rho n, n)$ pode ser escrito como $\mathcal{V}^* \left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right] \times \left[-\frac{1}{2}, \rho n - \frac{1}{2} \right] \right)$; assim, por invariância por translação e usando o fato de que $p = \frac{1}{2}$, chegamos a conclusão de que $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n)) \leq 1 - c$. Um argumento similar vale para justificar o fato de que só é necessário considerarmos os casos em que $\rho \geq 1$ (veja, entretanto, que pelo Corolário 3.1, o caso $\rho = 1$ já está pronto). Além disso, se formos capazes de encontrar uma cota inferior para $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n))$, com $\rho = 1 + \epsilon > 1$, então também temos o resultado para qualquer $\rho' > 1$.

Para verificar essa última afirmação, defina os retângulos $R_i := [i\epsilon n, (i\epsilon + \rho)n] \times [0, n]$ e os quadrados $S_i := R_i \cap R_{i+1}$; além disso, considere os eventos $\mathcal{H}(R_i) = \{\exists \text{ cruzamento horizontal em } R_i\}$ e $\mathcal{V}(S_i) = \{\exists \text{ cruzamento vertical em } S_i\}$ (a Figura 3 mostra um esboço desses elementos). Assim,

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho' n, n)) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}} \left[\bigcap_{i=0}^{\lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil - 1} (\mathcal{H}(R_i) \cap \mathcal{V}(S_i)) \right],$$

por inclusão de eventos. Além disso, perceba que $\rho' = [i\epsilon + \rho] \implies i = \frac{\rho' - 1}{\epsilon} - 1 \leq \lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil - 1$. Agora, sob a observação de que os eventos de interesse são eventos crescentes e aplicando o Corolário 3.2 (FKG) duas vezes, é possível escrever que

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}} \left[\bigcap_{i=0}^{\lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil - 1} (\mathcal{H}(R_i) \cap \mathcal{V}(S_i)) \right] \geq \left[\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(R_i) \cap \mathcal{V}(S_i)) \right]^{\lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil} \geq c(\rho)^2 \lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil,$$

com $c(\rho) > 0$, tal que $\rho = 1 + \epsilon > 1$.

Por fim, e de posse das conclusões que acabamos de obter, para demonstrar o Teorema 3.2, basta que sejamos capazes de encontrar uma cota inferior (uniforme em n) para a probabilidade de cruzamento horizontal de um retângulo arbitrário R_i com largura ρn , tal que $\rho = 1 + \epsilon > 1$.

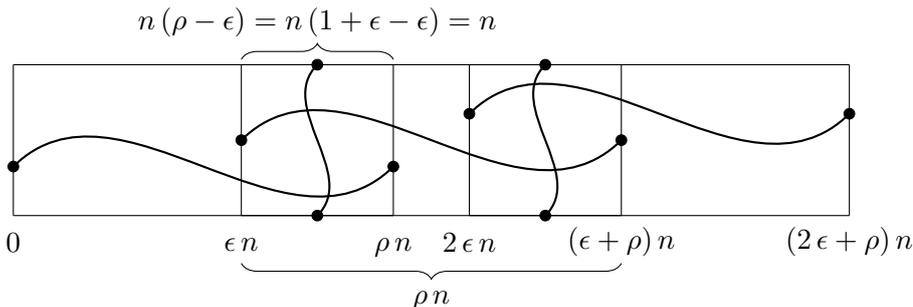


Figura 3: Esboço dos eventos $\mathcal{H}(R_i)$ e $\mathcal{V}(S_i)$ para R_i com $i = 0, 1$ e 2 e S_i com $i = 0$ e 1 .

Demonstração (Teorema 3.2):

Como acabamos de discutir, basta provar que a probabilidade de cruzamento – na direção mais difícil – de um retângulo com lado maior igual a ρ vezes o lado menor (para algum $\rho = 1 + \epsilon > 1$) é uniformemente maior do que uma constante $c(\rho) > 0$. Nesse caso, usaremos $\rho = \frac{3}{2}$; ou seja, mostraremos que

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{V}(2n, 3n)) \geq \frac{1}{128}.$$

Para essa demonstração, definiremos o retângulo $R := [-n, n] \times [-n, 2n]$, tal que $\mathcal{V}(2n, 3n) = \{\exists \text{ cruzamento vertical em } R\}$. Além disso, defina $S := [0, n] \times [0, n]$, $S' := [-n, n] \times [-n, n]$ e $l := [-n, n] \times \{-n\}$; i.e., l corresponde à parte de baixo do retângulo R (ou do quadrado S').

Além disso, sejam $A = \{\exists \text{ cruzamento vertical cima-baixo em } S\}$, $A' = \{\exists \text{ cruzamento horizontal esquerda-direita em } S\}$ e $B = \{\exists \text{ cruzamento horizontal esquerda-direita em } S \text{ que está conectado a } l \text{ em } S'\}$. Agora, para um caminho arbitrário γ que vai do lado esquerdo ao lado direito de S , denote por $\sigma(\gamma)$ a reflexão de γ com respeito a $\{0\} \times \mathbb{Z}$. Por fim, defina $V(\gamma)$ como o conjunto de vértices em S' que estão abaixo de $\gamma \cup \sigma(\gamma)$. A Figura 4 ilustra o que acabamos de descrever.

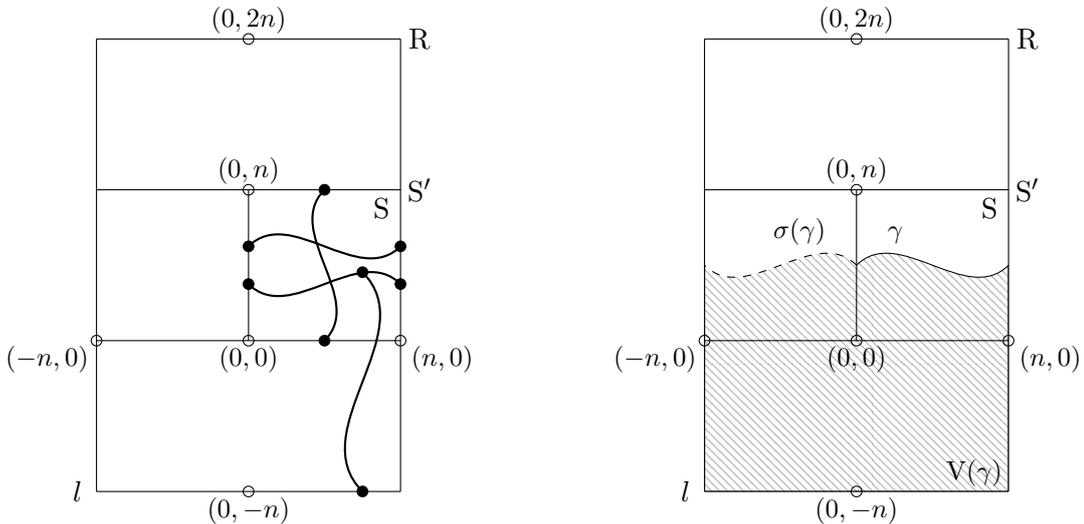


Figura 4: Caixas R , S e S' com representação dos eventos de interesse (esquerda) e conjunto de vértices $V(\gamma)$ (direita).

Assim, se Γ é o cruzamento esquerda-direita em S *mais alto*, temos que

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) = \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B | A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}), \text{ já que } B \subset A'$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma) \mid A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) \\
 &= \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) \\
 &\geq \frac{1}{4} \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) = \frac{1}{4} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A') \stackrel{\text{Cor. 3.1}}{\geq} \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Para justificar a primeira desigualdade da quarta linha, note que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \stackrel{\text{Cor. 3.1}}{\leq} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\exists \text{ cruzamento cima-baixo em } S'\}) &\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)\} \cup \{\sigma(\gamma) \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)\}) \\
 &\leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)),
 \end{aligned}$$

por simetria. O que implica em $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)) \geq \frac{1}{4}$.

Finalmente, note que para que o evento $\{\exists \text{ cruzamento vertical cima-baixo em } R\}$ aconteça, é suficiente que os eventos A , B e B' ocorram; onde $B' = \{\exists \text{ cruzamento horizontal esquerda-direita em } S \text{ que está conectado a } [-n, n] \times \{2n\} \text{ em } [-n, n] \times [0, 2n]\}$. Aqui, por simetria, temos que $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B') = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) \geq \frac{1}{8}$.

Dessa forma,

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{V}(2n, 3n)) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A \cap B \cap B') \stackrel{\text{FKG}}{\geq} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B') \geq \frac{1}{128},$$

como gostaríamos de, inicialmente, demonstrar. \square

Do Teorema 3.2, perceba que conseguimos derivar o seguinte corolário:

Corolário 3.3. Existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq n^{-\alpha}$. Em particular $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Demonstração:

Comece denotando por A_k o evento $\{\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k}\}$. Para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, defina $B_i = \{\exists \text{ cruzamento no sentido mais fácil do retângulo } R_i\}$; onde $R_1 = [-2k, 2k] \times [k, 2k]$, $R_2 = [k, 2k] \times [-2k, 2k]$, $R_3 = [-2k, 2k] \times [-2k, -k]$ e $R_4 = [-2k, k] \times [-2k, 2k]$. Veja a Figura 5.

Perceba que, nesse caso, $A_k \subset \bigcup_{i=1}^4 B_i$; logo,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_k) &\leq 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\bigcap_{i=1}^4 B_i^c\right) \\
 &\stackrel{\text{FKG}}{\leq} 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B_1^c)^4 \leq 1 - c^4 =: c_1 < 1,
 \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do Teorema 3.2.

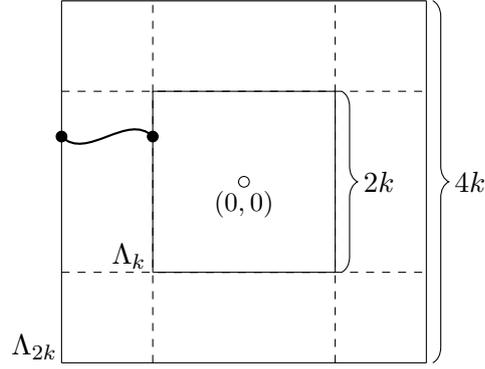


Figura 5: Caixas Λ_k e Λ_{2k} (linha sólida) com ocorrência do evento A_k e caixas R_i , com $i \in \{1, \dots, 4\}$ (linha tracejada).

Agora, seja A a intersecção dos eventos A_k , tal que k é da forma 2^m , com $m \in \mathbb{N}$, e $k \leq n$. Assim, $\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\} \subset A$; dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) &\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}} \left[\bigcap_k (\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k}) \right] \\ &= \prod_k \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k}) \\ &\leq c_1^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \leq n^{-\alpha}, \end{aligned}$$

com α pequeno o suficiente e $n \geq 1$.

Por fim, para mostrar que $p_c \geq \frac{1}{2}$, perceba que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}) = 0$. Dessa maneira, para $p = \frac{1}{2}$, a probabilidade de existir aglomerado de tamanho infinito na origem é igual a zero. Logo, $p_c \geq \frac{1}{2}$. \square

Agora que já vimos que a probabilidade de cruzamento, para $p = \frac{1}{2}$, é uniformemente limitada por c e $1 - c$, com $c > 0$, podemos analisar o que acontece quando $p \neq \frac{1}{2}$; em particular, para $p > \frac{1}{2}$. A proposição abaixo nos dá um resultado desse tipo.

Proposição 3.5. Para qualquer $p > \frac{1}{2}$, existe $\beta = \beta(p) > 0$, tal que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2n, n)) \geq 1 - \frac{1}{\beta} n^{-\beta}.$$

Demonstração:

Comece por definir a função Booleana $f_n(\omega) := \mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n, n)}(\omega)$. Agora, fixe um elo e em $R(2n, n)$ e veja que se $\nabla_e f_n(\omega) \neq 0$; i.e., se mudar o estado do elo e implica em mudar o valor da função f_n , então existe um caminho aberto na rede dual que conecta a parte de cima (de baixo, respec.) de uma caixa do tipo $R^* = [\frac{1}{2}, 2n - \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ à extremidade superior (inferior, respec) do elo e^* ; nesse caso, pelo menos um dos dois

“braços” de elos abertos na rede dual que se originam em e^* tem tamanho maior ou igual a $\frac{n}{2}$. A Figura 6 ilustra essa afirmação.

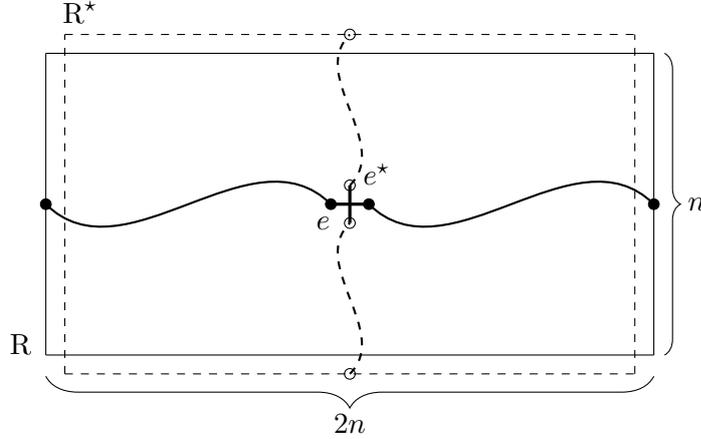


Figura 6: Caixas $R = R(2n, n)$ e R^* para um elo fixado e , tal que $\nabla_e f_n(\omega) \neq 0$.

Como os estados dos elos de ω^* são determinados, de maneira independente, seguindo uma distribuição Bernoulli de parâmetro $1 - p$, o Corolário 3.3 nos dá, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\text{Inf}_e(f_n(\omega)) = \mathbb{P}_p(f_n(\omega) \neq f_n(\text{Flip}_e(\omega))) \leq 2 \mathbb{P}_{1-p}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}) \leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}) \leq \frac{1}{N},$$

onde $N = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha$.

O que acabamos de ver é que, para todo $e \in R(2n, n)$, $\text{Inf}_e(f_n(\omega)) \leq \frac{1}{N}$; o que, pelo Teorema 2.2, implica em dizer que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$F_n'(p) \geq c \ln(N) \mathbb{V}_p(f(\omega)). \quad (20)$$

Integrando a Expressão (20) entre $\frac{1}{2}$ e p , temos

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^p \ln \left(\frac{F_n(p)}{1 - F_n(p)} \right)' dp \geq \int_{\frac{1}{2}}^p c \ln(N) dp \\ \implies & \ln \left(\frac{F_n(p)}{1 - F_n(p)} \right) - \ln \left(\frac{F_n(\frac{1}{2})}{1 - F_n(\frac{1}{2})} \right) \geq c \ln(N) \left(p - \frac{1}{2} \right) \\ \implies & \frac{F_n(p)}{1 - F_n(p)} \cdot \frac{1 - F_n(\frac{1}{2})}{F_n(\frac{1}{2})} \geq N^{c(p - \frac{1}{2})} \\ \implies & F_n(p) \cdot \frac{1 - F_n(\frac{1}{2})}{F_n(\frac{1}{2})} \cdot N^{-c(p - \frac{1}{2})} \geq 1 - F_n(p) \\ \implies & F_n(p) \geq 1 - \frac{1}{F_n(\frac{1}{2})} N^{-c(p - \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Relembrando que $F_n(p) := \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n, n)}(\omega))$ e tomando β pequeno o suficiente, concluimos a prova. \square

Por fim, de posse dos resultados que acabamos de obter, somos capazes de demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração (Teorema 3.1):

Para provar que, em $d = 2$, p_c é igual a $\frac{1}{2}$, basta mostrar que $p_c \leq \frac{1}{2}$; já que, pelo Corolário 3.3, temos que $p_c \geq \frac{1}{2}$. A estratégia utilizada será, baseada na Proposição 3.3, mostrar que, para $p > \frac{1}{2}$, existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito em ω ; o que implica que $p_c \leq \frac{1}{2}$.

Comece por definir os eventos $A_n := \mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $B_n := \mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$. A Figura 7 apresenta um esboço da ocorrência desses eventos.

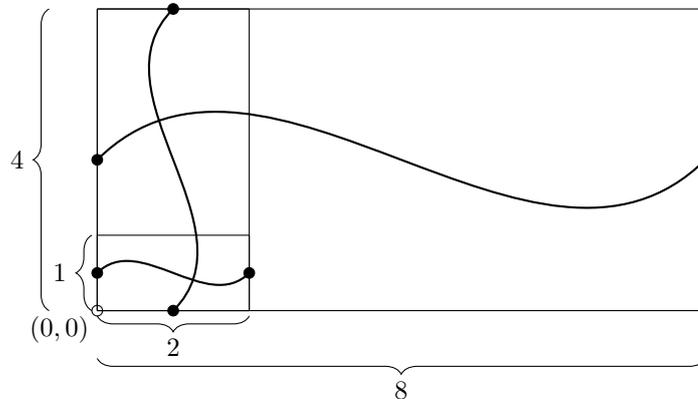


Figura 7: Ocorrência (alternada) dos eventos $\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $\mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$ para $n \in \{0, 1, 2\}$.

Agora, note que se A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$, com exceção de uma quantidade finita de vezes, então existe aglomerado de tamanho infinito em ω . Assim, pela Proposição 3.5 temos que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p(A_n^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}. \quad (21)$$

Da Expressão (21), percebe-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}$ converge; logo, por Borel-Cantelli², $\mathbb{P}(A_n^c \text{ infinitas vezes}) = 0$. O que significa que, com probabilidade 1, A_n não ocorre, no máximo, uma quantidade finita de vezes. Usando invariância por translação, $\mathbb{P}_p(B_n^c \text{ infinitas vezes}) = 0$. Dessa forma, como A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$, exceto por uma quantidade finita de termos dessas sequências, então existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito em ω – o que conclui a demonstração. \square

²O Lema de Borel-Cantelli diz que, para um sequência de eventos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, então a probabilidade de que A_n ocorra para todo $n \in \mathbb{N}$ – exceto por uma quantidade finita desses valores –, é zero; i.e., $\mathbb{P}(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$.

3.2 *Sharpness* da transição de fase para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d

Em dimensões maiores que $d = 2$, calcular o valor exato de p_c é tarefa difícil; de fato, não se espera que o ponto crítico, nesses casos, seja, ao menos, um número racional (ou mesmo algébrico). Entretanto, é possível mostrar que o modelo definido, para dimensões mais altas, também tem transição de fase “afiada” – o que significa dizer que a probabilidade de, por exemplo, a origem estar conectada à fronteira de uma caixa de lado $2n$ decai “muito” rápido (em particular, exponencialmente rápido) quando $p < p_c$. O teorema abaixo nos dá um resultado desse tipo.

Teorema 3.3. Em um modelo de percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d , vale que

1. Para $p < p_c$, existe um $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. Para $p > p_c$, existe um $c > 0$ tal que $\mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| = +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Sobre o resultado que acabamos de enunciar, primeiro perceba que nada foi dito quando $p = p_c$; para $3 \leq d \leq 10$, esse é um problema em aberto. O Teorema 3.3 foi provado primeiro por Menshikov em [23] e por Aizenman e Barsky em [1]. Uma prova mais recente (e mais simples, se comparada àquela que será apresentada aqui) pode ser vista em [12]; porém, a estratégia de demonstração utilizada por Duminil-Copin e Tassion nesse texto depende fortemente da estrutura associada ao modelo de Percolação considerado. Para esta dissertação, será apresentada uma demonstração introduzida em [10], e que utiliza a ideia de algoritmo discutida na Subseção 2.3. O benefício dessa abordagem está na sua possibilidade de extensão para modelos definidos sobre espaços mais gerais.

Porém, antes da demonstração do teorema, um lema (de Análise) será necessário.

Lema 3.2. Considere uma sequência convergente de funções $f_n : [0, \bar{x}] \rightarrow [0, M]$ diferenciáveis e crescentes em x tal que, para todo $n \geq 1$,

$$f_n' \geq \frac{n}{\Sigma_n} f_n, \quad (22)$$

onde $\Sigma_n = \sum_{s=0}^{n-1} f_s$. Então, existe $\tilde{x} \in [0, \bar{x}]$ tal que

- a. Para qualquer $x < \tilde{x}$, existe $c_x > 0$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, $f_n(x) \leq e^{-c_x n}$.
- b. Para qualquer $x > \tilde{x}$, $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ satisfaz $f(x) \geq x - \tilde{x}$.

Demonstração:

Comece definindo

$$\tilde{x} := \inf \left\{ x : \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Sigma_n(x)}{\ln(n)} \geq 1 \right\}.$$

Para mostrar “a.”, assumamos $x < \tilde{x}$; nesse caso, fixe um $\delta > 0$ e defina $x' := x - \delta$ e $x'' := x - 2\delta$. Iremos mostrar que existe decaimento exponencial para $f_n(x)$ em x'' em dois passos. Primeiro, note que, pela definição de \tilde{x} , existe um inteiro N e um $\alpha > 0$ tal que $\Sigma_n(x) \leq n^{1-\alpha}$, $\forall n \geq N$. Em adição, veja que, da Expressão (22) e da cota que acabamos de estabelecer para Σ_n , temos que

$$f_n' \geq \frac{n}{\Sigma_n} f_n \geq \frac{n}{n^{1-\alpha}} f_n \geq n^\alpha f_n. \quad (23)$$

Integrando a Expressão (23) entre x' e x , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{x'}^x (\ln f_n(x))' dx &\geq n^\alpha \int_{x'}^x dx \\ \implies \ln \left(\frac{f_n(x)}{f_n(x')} \right) &\geq n^\alpha \delta \\ \implies f_n(x') e^{n^\alpha \delta} &\leq M, \text{ já que } f_n(x) \leq M \\ \implies f_n(x') &\leq M e^{-\delta n^\alpha}, \forall n \geq N. \end{aligned} \quad (24)$$

Em segundo lugar, da Expressão (24), perceba que existe $\Sigma < +\infty$ tal que $\Sigma_n(x') \leq \Sigma$, $\forall n \geq 1$. Além disso e de maneira similar ao que foi feito na Expressão (23), vale que

$$f_n' \geq \frac{n}{\Sigma} f_n. \quad (25)$$

Integrando a Expressão (25) entre x'' e x' , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{x''}^{x'} (\ln f_n(x))' dx &\geq \frac{n}{\Sigma} \int_{x''}^{x'} dx \\ \implies f_n(x'') &\leq M e^{-\frac{\delta}{\Sigma} n}, \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Para mostrar “b.”, assumamos $x > \tilde{x}$. Aqui, para $n \geq 1$, defina $T_n := \frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{f(i)}{i}$.

Agora, note que

$$\begin{aligned} T_n' &= \frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{f_i'}{i} \\ &\stackrel{(22)}{\geq} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{i}{\Sigma_i} f_i \frac{1}{i} = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\Sigma_i} \geq \frac{\ln \Sigma_{n+1} - \ln \Sigma_1}{\ln(n)}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato de que, para todo $i \geq 1$,

$$\frac{f_i}{\Sigma_i} \geq \int_{\Sigma_i}^{\Sigma_{i+1}} \frac{1}{t} dt = \ln \Sigma_{i+1} - \ln \Sigma_i.$$

Para $x' \in (\tilde{x}, x)$, e integrando $T_n' \geq \frac{\ln \Sigma_{n+1} - \ln \Sigma_1}{\ln(n)}$ entre x' e x , obtemos

$$\begin{aligned} T_n(x) - T_n(x') &\geq \frac{1}{\ln(n)} \left(\int_{x'}^x \ln \Sigma_{n+1}(x) - \ln(f_0(x)) dx \right) \\ &\geq \frac{(x - x')}{\ln(n)} (\ln \Sigma_n(x') - \ln(M)), \end{aligned}$$

já que Σ_n é não-decrescente.

Assim, como $T_n(x)$ converge para $f(x)$ quando $n \rightarrow +\infty$ (recorde que, para uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, então $\frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$), temos que

$$f(x) - f(x') \geq (x - x') \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Sigma_n(x')}{\ln(n)} \right) \geq (x - x'),$$

pela definição de \tilde{x} .

Por fim, quando x' tende para \tilde{x} por cima, temos que $f(x) \geq x - \tilde{x}$. \square

Agora, defina $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n)$ e $S_n := \sum_{s=0}^{n-1} \theta_s(p)$. Feito isso, vamos estudar o resultado abaixo, que nos dá a última ferramenta necessária para provar o Teorema 3.3.

Lema 3.3. Para qualquer $n \geq 1$, temos que

$$\sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)),$$

onde E_n é o conjunto de elos tal que as duas extremidades de e estão em Λ_n .

A demonstração do Lema 3.3 é baseada no Teorema 2.4 e na escolha de um algoritmo \mathbf{T} conveniente para determinar $f_n(\omega) := \mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$. Nesse sentido, uma escolha trivial de algoritmo seria o de revelar todos os elos de Λ_n (seguindo alguma ordenação); porém, note que, aqui, $\delta_e(\mathbf{T}) = 1$ para os primeiros elos $e \in E_n$ – o que não funciona. Como alternativa à essa primeira sugestão de algoritmo, podemos utilizar a estratégia de começar a verificar os elos que compõem o aglomerado da origem a partir do centro da caixa Λ_n . Sendo assim, os elos que não estão próximos da origem seriam verificados se e somente se tivessem uma de suas extremidades conectadas a $C_0(\omega)$. Essa abordagem nos dá uma boa cota para as *revelações* dos elos longe da origem; em contrapartida, note que os elos próximos do centro da caixa ainda seriam revelados com alta probabilidade.

Para mitigar esse último problema apontado, vamos, na verdade, escolher uma família de algoritmos que consulta os estados dos elos que pertencem ao aglomerado de $\partial\Lambda_s$, para $1 \leq s \leq n$.

Demonstração (Lema 3.3):

Para $1 \leq s \leq n$, queremos um algoritmo \mathbf{T} para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$ tal que, para todo elo $e = (x, y)$ em E_n ,

$$\delta_e(\mathbf{T}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s). \quad (26)$$

Veja que se tivermos uma cota como a apresentada na Expressão (26), temos o resultado desejado. Para verificar isso, note que, para $x \in \Lambda_n$,

$$\sum_{s=1}^n \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) \leq \sum_{s=1}^n \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_{|s-d(0,x)|}(x)) \leq 2 \sum_{s=0}^{n-1} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_s) = 2 S_n, \quad (27)$$

onde $d(0, x) = \max(|x_1|, |x_2|)$.

Da mesma forma,

$$\sum_{s=1}^n \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s) \leq 2 S_n. \quad (28)$$

Agora, aplicando o Teorema 2.4 e utilizando a cota estabelecida pela Expressão (26), temos

$$\mathbb{V}_p(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{e \in E_n} (\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s)) \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)),$$

o que implica, somando sobre todos os valores de s , que

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)) &\leq p(1-p) \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \sum_{s=1}^n (\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s)) \\ \implies n \cdot \frac{\theta_n(p) (1 - \theta_n(p))}{p(1-p)} &\leq 4 S_n \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \\ \implies \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) &\geq \frac{n}{p(1-p) 4 S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)), \end{aligned}$$

tal que a segunda linha utiliza as cotas representadas através das Expressões (27) e (28).

De fato, basta mostrar que vale a Expressão (26). Para isso, vamos empregar um algoritmo \mathbf{T} que explora, primeiro, os estados dos elos construídos a partir do conjunto de vértices que compõe o aglomerado de Λ_n intersecção com $\partial\Lambda_s$ e que não revela o estado de nenhum elo e tal que as duas extremidades de e estejam fora dessa componente conexa.

De maneira formal, defina o conjunto de índices \mathbf{e} (antes, denotado por \mathbf{i}) utilizando duas sequências $\partial\Lambda_s = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$ e $\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n$. Aqui, V_t representa o conjunto de vértices que o algoritmo verificou estar conectado a $\partial\Lambda_s$ e E_t representa o conjunto de elos explorados pelo algoritmo até o instante t .

Fixando uma ordem para os elos de E_n , defina $V_0 = \partial\Lambda_s$ e $E_0 = \emptyset$. Assuma, então, que os conjuntos $V_t \subset V_n$ e $E_t \subset E_n$ foram construídos de tal forma que, em t , uma das duas situações a seguir se aplica:

- a. Se existe elo $e = (x, y)$ em $E_n \setminus E_t$ tal que $x \in V_t$ e $y \notin V_t$ (se existir mais de um, escolha o menor deles – de acordo com a ordem estabelecida), então defina $\mathbf{e}_{t+1} := e$, $E_{t+1} := E_t \cup \{e\}$ e

$$V_{t+1} := \begin{cases} V_t \cup \{y\} & \text{se } \omega_e = 1 \\ V_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- b. Se e não existe, então defina \mathbf{e}_{t+1} como o menor elo em $E_n \setminus E_t$ (de acordo com a ordem estabelecida), $E_{t+1} := E_t \cup \{e\}$ e $V_{t+1} := V_t$.

Perceba que, enquanto estivermos na situação “a.”, ainda estamos descobrindo elos que fazem parte da componente conectada a $\partial\Lambda_s$; ao passo que, assim que mudamos para a situação “b.”, nós permanecemos nela. Nesse caso, $\tau(\omega)$ não é maior que o último t para o qual ainda estamos na situação “a.”.

Relembrando que $\delta_e(\mathbf{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e) &\leq \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_s\} \cup \{y \leftrightarrow \partial\Lambda_s\}) \\ &\leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s), \end{aligned}$$

o que prova a Expressão (26) e, portanto, finaliza a demonstração. \square

Finalmente, somos capazes de provar o teorema principal dessa subseção.

Demonstração (Teorema 3.3):

Seja $F_n(p) = \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega))$. Assim, utilizando os resultados do Teorema 2.1 e do Lema 3.3, temos que

$$F_n'(p) = \theta_n'(p) = \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)). \quad (29)$$

Fixando $\bar{p} \in (p_c, 1)$, veja que, para $p \leq \bar{p}$, $1 - \theta_n(p) \geq 1 - \theta_1(\bar{p}) > 0$; dessa forma, considerando a Expressão (29), somos capazes de dizer que

$$\left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right)' \geq \frac{n}{(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} S_n} \cdot \left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right).$$

Assim, aplicando o Lema 3.2 para $f_n(p) = (1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p)$, existe $\tilde{p}_c \in [0, \bar{p}]$ tal que

- a. Para qualquer $p < \tilde{p}_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, $(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p) \leq e^{-c_p n} \implies \theta_n(p) \leq e^{-c_p n}$.
- b. Existe $c > 0$ tal que, para qualquer $p > \tilde{p}_c$, $\theta(p) \geq c(p - \tilde{p}_c)$.

Finalmente, já que \bar{p} foi escolhido maior do que p_c , então \tilde{p}_c deve ser, necessariamente, igual a p_c . □

4 Modelos de percolação com dependência

Apesar de o Modelo de Percolação Bernoulli, como discutido na Seção 3 ser, talvez, o mais comum, ele não é, de forma alguma, o único. A independência que existe para determinação dos estados dos elos (ou vértices) nesse tipo de modelo pode não existir. Nesse sentido, modelos com dependência serão apresentados. Além disso, na Subseção 4.2, estudaremos como resultados semelhantes aos introduzidos nas Seções 2 e 3 podem ser estendidos para espaços mais gerais com medida monótona associada. Entretanto, antes de iniciar uma discussão desse tipo, vale a observação de que os resultados apresentados nessa seção extrapolam o escopo do trabalho e, portanto, não serão demonstrados em sua totalidade. Ao invés disso, algumas provas serão esboçadas e outras referenciadas.

4.1 Percolação $2k$ Dependente

O primeiro modelo com dependência que vamos discutir é chamado de “Percolação $2k$ Dependente”. Este é um modelo de percolação (dependente) de elos induzido por um modelo de percolação (independente) de vértices. Para defini-lo, comece, como feito na Seção 3, com um grafo d dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, com \mathbb{Z}^d conjunto de vértices e \mathbb{E}^d conjunto de elos tal que $\mathbb{E}^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$.

Para o modelo de elos, defina um primeiro espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_p)$ onde $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$, com $w = (\omega_e : e \in \mathbb{E}^d) \in \Omega$, tal que $\omega_e = 0$ para e “fechado” e $\omega_e = 1$ para e “aberto”, $\mathcal{F} = \sigma(\text{cilindros finito-dimensionais})$ e $\mu_p : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ medida de probabilidade. De maneira similar, para o modelo de vértices, defina um segundo espaço de probabilidade $(\Xi, \mathcal{G}, \mathbb{P}_p)$ onde $\Xi = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \{0, 1\}$, com $\xi = (\xi_x : x \in \mathbb{Z}^d)$, $\mathcal{G} = \sigma(\text{cilindros finito-dimensionais})$ e $\mathbb{P}_p(\xi) = \prod_{x: \xi_x=1} p \prod_{x: \xi_x=0} (1-p)$. Finalmente, como forma de, indiretamente, determinar a medida μ_p , diga que, para $k \in \mathbb{N}$ fixo, $\omega_e = 1$ se existe $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\xi_x = 1$ e $e \in \Lambda_k(x)$; ou seja, um elo e está aberto se pertence a alguma caixa Λ_k centrada em x tal que $\xi_x = 1$. Formalmente, se $f : \Xi \rightarrow \Omega$ é tal que $f^{-1}(A) = \{\xi \in \Xi : f(\xi) \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{F}$, então $\mu_p(A) = (f_*(\mathbb{P}_p))(A) = \mathbb{P}_p(f^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathcal{F}$. A Figura 8 mostra o recorte de uma possível configuração desse modelo em \mathbb{L}^2 .

Para “Percolação $2k$ ” como acabamos de definir, note que existe dependência para os estados dos elos; já que o conhecimento sobre o estado de um elo arbitrário e nos dá

alguma informação sobre os estados de seus vizinhos. Porém, veja que, para dois elos $e = (x, y)$, $f = (w, z) \in E^d$, se $w, z \notin \Lambda_k(x) \cup \Lambda_k(y)$, então $\text{COV}_p(\omega_e, \omega_f) = 0$, onde $\text{COV}_p(\cdot, \cdot)$ é *covariância* com respeito à medida μ_p . Por causa dessa característica, esse modelo é conhecido como “modelo dependente de curto alcance”.

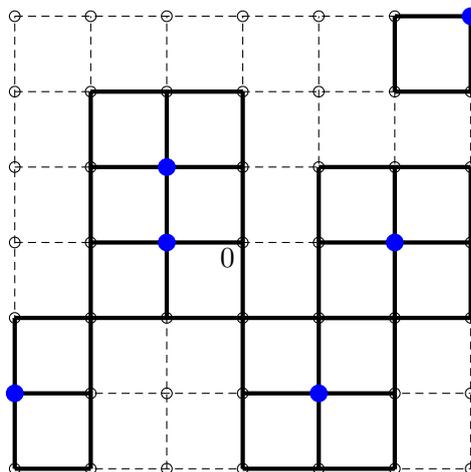


Figura 8: Configuração possível para o modelo de Percolação $2k$ Dependente com $k = 1$ em recorte de \mathbb{L}^2 .

Utilizando o resultado de Liggett, Schonmann e Stacey em [21], temos que, para um modelo de percolação com dependência finita em \mathbb{L}^d com $d \geq 2$, existe $p_c = p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\} < 1$ (isto é, existe transição de fase para o modelo de Percolação $2k$ Dependente), onde, de novo, $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é função que mapeia $p \mapsto \mu_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$. Nesse sentido, como fizemos na Subseção 3.2, nos interessa estudar o comportamento da função $\theta(p)$ para $p < p_c$ e $p > p_c$. O teorema abaixo, similar ao Teorema 3.3, nos dá um resultado desse tipo.

Teorema 4.1. No modelo de Percolação $2k$ Dependente em \mathbb{L}^d , existe $p_c = p_c(d, k)$ tal que vale

1. Para $p < p_c$, existe um $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\mu_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. Para $p > p_c$, existe um $c > 0$ tal que $\mu_p(|C_0(\omega)| = +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Demonstração:

A estratégia adotada será muito parecida com a demonstração feita para o Teorema 3.3; de fato, considere uma família de algoritmos \mathbf{T} similar àquela definida para o Lema 3.3. O algoritmo \mathbf{T} para $f_n(\xi) := \mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\xi)$ irá revelar, através de um processo de

exploração de vértices, o aglomerado de $\partial\Lambda_s$, com $1 \leq s \leq n$. Nesse caso, perceba que \mathbf{T} deve explorar, primeiro, todos os vértices $x \in \Lambda_n$ tal que $\partial\Lambda_k(x)$ está conectada, através de um caminho aberto no processo de percolação de elos, a $\partial\Lambda_s$ (notação: $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$). A Figura 9 apresenta um esboço do algoritmo de exploração \mathbf{T} que acabamos de descrever.

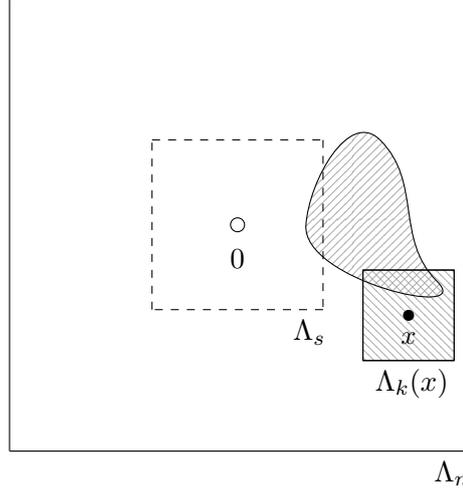


Figura 9: Algoritmo de exploração \mathbf{T} para $\mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\xi)$.

Assim, para um conjunto de índices \mathbf{v} com duas sequências $\partial\Lambda_s = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n$ e $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_n$, com A_t representando o conjunto de vértices x tal que $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$ e B_t o conjunto de vértices explorados até o instante t , temos, estabelecendo uma ordem para os vértices considerados, uma construção (em t) do seguinte tipo:

- a. Ou existe um vértice x em $\Lambda_n \setminus B_t$ tal que $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} A_t$ (se existir mais de um, escolha o menor). Nesse caso, defina $\mathbf{v}_{t+1} := x$, $B_{t+1} = B_t \cup \{x\}$,

$$A_{t+1} := \begin{cases} A_t \cup \{x\} & \text{se } \xi_x = 1 \\ A_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- b. Ou não existe x com tais características. Nesse caso, defina \mathbf{v}_{t+1} como o menor vértice em $\Lambda_n \setminus B_t$, $B_{t+1} := B_t \cup \{x\}$ e, por fim, $A_{t+1} := A_t$.

De novo, perceba que, em “a.”, ainda estamos descobrindo vértices x tais que $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$; porém, se mudamos para “b.”, permanecemos nessa opção até o final da exploração. Em resumo, temos que $\tau(\xi) = \min\{t \geq 1 : \forall z \in \Xi, z_{i_{[t]}} = \xi_{i_{[t]}} \implies \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(z) = \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\xi)\}$ não é maior que o último t para o qual a opção “a.” ainda é válida. Dessa maneira, a partir da definição de $\delta_x(\mathbf{T})$,

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\xi) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (30)$$

A fim de fixar notação, lembre-se que \mathbb{P}_p , nesse caso, é medida de probabilidade para um subconjunto mensurável de Ξ . Além disso, por inclusão de eventos e utilizando a Expressão (30), podemos escrever que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s\} \cap \{\Lambda_k(x) \text{ está aberta}\}) &\leq \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \\ \implies \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) &\leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s), \end{aligned} \quad (31)$$

com a constante $h = h(p) \geq 1$ “pagando o preço” para abrir $\Lambda_k(x)$. Assim, utilizando as Expressões (30) e (31), temos que, para todo $x \in \Lambda_n$,

$$\delta_x(\mathbf{T}) \leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \quad (32)$$

Agora, aplicando o Teorema 2.4 para $f_n(\xi) = \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\xi)$ e empregando a Expressão (32) com o resultado adicional de que $\sum_{s=1}^n \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \leq 2 S_n$, temos, seguindo exatamente os mesmos passos apresentados na primeira metade da prova do Lema 3.3, que

$$\sum_{x \in \Lambda_n} \text{Inf}_x(\mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\xi)) \geq \frac{n}{h S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)), \quad (33)$$

onde $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(\{\xi \in \Xi : 0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n\})$, $\theta_s(p) := \mathbb{P}_p(\{\xi \in \Xi : 0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s\})$ e, por último, $S_n := \sum_{s=0}^{n-1} \theta_s(p)$.

Finalmente, e como na demonstração do Teorema 3.3, utilizando o Teorema 2.1 com a Expressão (33) e aplicando, para $f_n(p) = h(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p)$, tal que $\bar{p} \in (p_c, 1)$, o Lema 3.2, obtemos o resultado procurado para a medida \mathbb{P}_p .

Agora, a fim de estender o resultado para a medida definida sobre o modelo de percolação de elos, note que $\mu_p(A)$ é, por construção, igual a $\mathbb{P}_p(f^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathcal{F}$, onde $f : \Xi \rightarrow \Omega$ é a regra que mapeia o modelo de vértices no modelo de elos. Sendo assim, $\mathbb{P}_p(\{\xi \in \Xi : 0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n\}) = \mu_p(\{\omega \in \Omega : 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\})$; da mesma forma, se $C_0(\xi) := \{y \in \mathbb{Z}^d : 0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} y\}$, então $\mathbb{P}_p(\{\xi \in \Xi : |C_0(\xi)| = +\infty\}) = \mu_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$, o que conclui a demonstração. \square

4.2 Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

O modelo que vamos discutir nessa subseção foi inicialmente introduzido por Fortuin e Kasteleyn em [14] e é conhecido como “Modelo de Percolação FK” (ou “*Random Cluster Model*”).

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado d dimensional, onde \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e E^d é conjunto de elos, tal que, para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1\}$. Defina o grafo *finito* $\mathbb{G} = (V, E)$, onde $V \subset \mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $E \subset E^d$ é conjunto de elos $e = (x, y)$, tal que $x, y \in V$.

Inicialmente, defina um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, onde $\Omega = \{0, 1\}^{|E|}$, com $\omega = (\omega_e : e \in E) \in \Omega$, tal que $\omega_e = 0$ para elo e “fechado” e $\omega_e = 1$ para elo e “aberto”, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e, para $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$,

$$\mu_{\mathbb{G}, p, q}(\omega) = \frac{p^{|\omega|} (1-p)^{|E|-|\omega|} q^{k(\omega)}}{Z_{\mathbb{G}, p, q}},$$

onde $|\omega| = \sum_{e \in E} \omega_e$, $k(\omega)$ é o número de componentes conexas em ω (incluindo vértices isolados) e

$$Z_{\mathbb{G}, p, q} = \sum_{\omega \in \Omega} p^{|\omega|} (1-p)^{|E|-|\omega|} q^{k(\omega)}$$

é constante normalizadora.

Note que, para $q = 1$, $\mu_{\mathbb{G}, p, q}(\omega)$ é medida produto Bernoulli e obtemos o modelo de percolação independente com parâmetro p .

Perceba, também, que a medida μ , como acabamos de descrever, é medida monótona. De maneira geral, temos a seguinte definição:

Definição 4.1. Uma medida μ em $\{0, 1\}^{|E|}$ é *monótona* se, para qualquer $e \in E$, qualquer $F \subset E$ e para qualquer $\xi, \zeta \in \{0, 1\}^{|F|}$ satisfazendo $\xi \leq \zeta$, $\mu(\omega_e = \xi_e, \forall e \in F) > 0$ e $\mu(\omega_e = \zeta_e, \forall e \in F) > 0$, temos que

$$\mu(\omega_e = 1 \mid \omega_e = \xi_e, \forall e \in F) \leq \mu(\omega_e = 1 \mid \omega_e = \zeta_e, \forall e \in F).$$

Medidas como as da Definição 4.1 gozarão de versões estendidas de alguns dos resultados das Seções 2 e 3, discutidas ao longo dessa subseção.

Agora, a fim de estender o modelo que acabamos de descrever para um conjunto com volume infinito, defina, para $\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$, com $\omega, \xi \in \Omega$ e $\mathcal{F} = \sigma(\text{cilindros finito-dimensionais})$,

$$\omega_{\mathbb{G}}^{\xi}(e) = \begin{cases} \omega_e & \text{se } e \in \mathbb{G} \\ \xi_e & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com ξ agindo como *boundary condition* (ou “condição de fronteira”). Assim, para $\Omega_{\mathbb{G}}^{\xi}$

subconjunto *finito* de Ω , tal que $\omega_e = \xi_e, \forall e \in E^d \setminus E$,

$$\mu_{\mathbb{G},p,q}^\xi(\omega) = \begin{cases} \frac{p^{|\omega|(1-p)^{|E|-|\omega|}} q^{k(\omega,\xi)}}{Z_{\mathbb{G},p,q}^\xi} & \text{se } \omega \in \Omega_{\mathbb{G}}^\xi \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $k(\omega, \xi)$ é o número de componentes conexas em ω que intersectam com \mathbb{G} e

$$Z_{\mathbb{G},p,q}^\xi = \sum_{\omega \in \Omega_{\mathbb{G}}^\xi} p^{|\omega|(1-p)^{|E|-|\omega|}} q^{k(\omega,\xi)}.$$

Em particular, estamos interessados nas medidas $\mu_{\mathbb{G},p,q}^0$ e $\mu_{\mathbb{G},p,q}^1$. A primeira delas implica que, a não ser pelas conexões dentro de \mathbb{G} , os vértices de ∂V não estão conectados; ao passo que, na segunda, todos os vértices $x \in \partial V$ estão conectados.

Por fim, a ferramenta que vamos utilizar para argumentar em favor da extensão que gostaríamos de propor para definir uma medida $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^\xi$ é chamada de *Thermodynamic limit*, e é apresentada a seguir. Para isso, defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$, com $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2 (*Thermodynamic limit*). Seja $p \in [0, 1]$, $q \in [1, +\infty)$ e $\Lambda = (\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de caixas tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$, quando $n \rightarrow +\infty$. Então, para $\xi = 0, 1$,

a. O limite

$$\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\Lambda_n,p,q}^\xi$$

existe e independe da escolha de Λ .

b. Vale que $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^0 \leq \mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^1$, no sentido de que $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^0(A) \leq \mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^1(A)$, para todo $A \in \mathcal{F}$ evento crescente (chamado de “ordem estocástica de medidas”).

A demonstração do Teorema 4.2 não será feita, porém, é possível encontrá-la em [17] (Thm. 4.19, “a” e “c”).

Agora, de maneira similar ao que fizemos na Seção 3, podemos definir o ponto crítico como $p_c^\xi(q) = \sup\{p : \theta^\xi(p, q) = 0\}$ com $\xi \in \{0, 1\}$, tal que $\theta^\xi : [0, 1] \times [1, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ é função que mapeia $(p, q) \mapsto \mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^\xi(|C_0(\omega)| = +\infty)$. Além disso, como $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^0 = \mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^1$ para quase todo $p \in [0, 1]$ (em [17], Sec. 5.1), $\theta^0(p, q) = \theta^1(p, q)$ para quase todo $p \in [0, 1]$ – já que $\theta^\xi(p, q)$ é não-decrescente em p (também em [17], Sec. 5.1). Dessa forma, denotamos $p_c(q) = p_c^0(q) = p_c^1(q)$.

O teorema apresentado a seguir, que determina o ponto crítico para o modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^2 foi inicialmente provado em [3] (com demonstrações alternativas

em [9] e [11]). Esse é um teorema “novo”, no sentido de que ele generaliza o resultado para $q \geq 1$; ao passo que, antes, apenas os casos onde $q = 1$, $q = 2$ ou q “muito grande” haviam sido demonstrados.

Teorema 4.3 (Beffara, Duminil-Copin). Para o modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^2 com $q \in [1, +\infty)$,

$$p_c(q) = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}.$$

Porém, antes da demonstração (parcial – já que ela depende fortemente dos que foi desenvolvido em [10]) do Teorema 4.3, são necessários alguns resultados intermediários.

Lema 4.1 (Desigualdade de FKG). Sejam X, Y variáveis aleatórias crescentes e limitadas e μ medida monótona, então

$$\mathbb{E}_\mu(X \cdot Y) \geq \mathbb{E}_\mu(X) \cdot \mathbb{E}_\mu(Y).$$

Note que o Lema 4.1 é uma generalização do já apresentado (e demonstrado) Lema 3.1. A demonstração dessa versão mais geral, que não será feita aqui, pode ser encontrada em [17] (Thm. 2.16). Dois corolários imediatos, apresentados a seguir, serão úteis mais tarde.

Corolário 4.1. Sejam A, B eventos crescentes, então

$$\mu(A \cap B) \geq \mu(A) \cdot \mu(B).$$

A demonstração do Corolário 4.1 é idêntica à que foi feita para o Corolário 3.2.

Corolário 4.2. (Truque da raiz quadrada) Sejam A_1, \dots, A_n eventos crescentes e com mesma probabilidade. Defina $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Então

$$\mu(A_1) \geq 1 - (1 - \mu(A))^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração:

Veja que

$$\begin{aligned} 1 - \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \mu\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) \stackrel{\text{FKG}}{\geq} \prod_{i=1}^n \mu(A_i^c) \\ &= (1 - \mu(A_1))^n \end{aligned}$$

já que, por hipótese, $\mu(A_i) = \mu(A_j)$, $\forall i \neq j$; sendo assim, $\mu(A_1) \geq 1 - (1 - \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i))^{\frac{1}{n}}$. \square

Proposição 4.1. No modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^2 , para todo $p \in (p_c, 1]$, $q \in [1, +\infty)$ e $\xi \in \{0, 1\}$, vale que $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^\xi(\{\omega \in \Omega : N(\omega) = 1\}) = 1$, onde $N(\omega)$ conta o número de aglomerados abertos de tamanho infinito em ω .

O que a Proposição 4.1 nos diz é que, se $\theta^\xi(p, q) > 0$, existe, quase certamente, aglomerado único de elos abertos. Esse resultado também não será provado aqui; entretanto, é possível encontrar sua demonstração em [17] (Thm. 5.99).

Proposição 4.2. Se $\omega \sim \mu_{\mathbb{G}, p, q}^0$, então $\omega^* \sim \mu_{\mathbb{G}^*, p^*, q^*}^1$, onde ω^* é uma configuração no reticulado dual com $\mathbb{G}^* = (V^*, E^*)$, tal que $q^* = q$ e p^* respeita

$$p^* = \frac{(1-p)q}{(1-p)q+p}, \text{ ou, de maneira equivalente } \frac{p^*p}{(1-p^*)(1-p)} = q. \quad (34)$$

Demonstração:

Seja $\mathbb{G} = (V, E)$ grafo finito. Nesse caso, por definição,

$$\mu_{\mathbb{G}, p, q}^0 \propto \left(\frac{p}{1-p} \right)^{|\omega|} q^{k(\omega, 0)}. \quad (35)$$

Porém, note que $|\omega| = |E| - |\omega^*|$ e $k(\omega, 0) = h(\omega^*)$, onde $h(\cdot)$ é a função que conta as faces de um grafo planar conectado. A Figura 10 nos ajuda a ter uma ideia de o porquê a última afirmação é verdadeira.

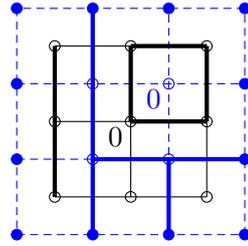


Figura 10: Configuração ω definida em \mathbb{G} (linha sólida) e configuração correspondente ω^* definida em \mathbb{G}^* (linha tracejada).

Além disso, pela Fórmula de Euler³, temos que $h(\omega^*) = |\omega^*| + k(\omega^*, 1) + 1 - |V^*|$. Assim, da Expressão (35), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{G}, p, q}^0 &\propto \left(\frac{p}{1-p} \right)^{|E| - |\omega^*|} q^{|\omega^*| + k(\omega^*, 1) + 1 - |V^*|} \\ &\propto \left(q \cdot \frac{1-p}{p} \right)^{|\omega^*|} q^{k(\omega^*, 1)} \end{aligned}$$

³Para qualquer grafo planar (conectado) com $|V|$ vértices, $|E|$ elos e $|H|$ faces, vale que $|V| - |E| + |H| = 2$.

$$= \left(\frac{p^*}{1-p^*} \right)^{|\omega^*|} q^{k(\omega^*,1)} \propto \mu_{\mathbb{G}^*, p^*, q^*}^1,$$

o que conclui a prova. \square

Proposição 4.3. No modelo de Percolação FK, para todo $p \in (p_c, 1]$ e $q \in [1, +\infty)$, vale que $\mu_{G,p,q}^0(\mathcal{H}(n+1, n)) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Demonstração:

Nessa prova, a fim de não sobrecarregar a notação, defina $R(n, m) := [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}] \times [-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]$; e, por consequência, $\mathcal{H}(n, m) = \{\exists \text{ cruzamento horizontal em } R(n, m)\}$ (determine $\mathcal{V}(n, m)$ de forma análoga). Assim, para $k < \frac{n}{2}$ e usando o Corolário 4.2, temos

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \leftrightarrow \text{lado A de } \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}) &\geq 1 - (1 - \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}))^{\frac{1}{4}} \\ &= 1 - \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \not\leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{4}} \\ &\geq 1 - \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \not\leftrightarrow +\infty)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Agora, para $R := R(n+1, n)$, note que

$$\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0 \left(\left\{ \partial\Lambda_k \left(-\frac{k}{2}, 0 \right) \leftrightarrow \text{lado A de } \partial R \right\} \cap \left\{ \partial\Lambda_{k'} \left(\frac{k}{2}, 0 \right) \leftrightarrow \text{lado B de } \partial R \right\} \right) \geq 1 - 2 \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \not\leftrightarrow +\infty)^{\frac{1}{4}}, \quad (36)$$

onde $\Lambda_{k'}$ é uma caixa deslocada de k unidades para o lado em relação à caixa Λ_k (veja a Figura 11). Perceba que, para a desigualdade acima, utilizamos o fato de que $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\bigcap_{i=1}^n A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(A_i^c)$, para qualquer sequência finita de eventos $\{A_i\}_{i=1}^n$.

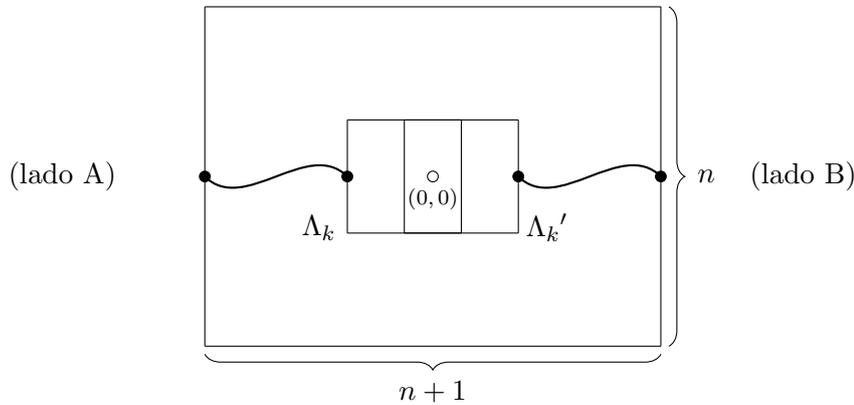


Figura 11: Esboço da ocorrência do evento $\{\partial\Lambda_k(-\frac{k}{2}, 0) \leftrightarrow \text{lado A de } \partial R\} \cap \{\partial\Lambda_{k'}(\frac{k}{2}, 0) \leftrightarrow \text{lado B de } \partial R\}$.

Pela Proposição 4.1; i.e., usando o fato de que na região supercrítica o aglomerado aberto com tamanho infinito existe e é único (quase certamente), e empregando a cota determinada através da Expressão (36),

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\mathcal{H}(n+1, n)) \geq 1 - 2 \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \not\leftrightarrow +\infty)^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1,$$

para todo $p > p_c$; o que conclui a demonstração. \square

Além disso, e como mencionado em parágrafos anteriores, alguns dos resultados já discutidos em outras seções podem ser estendidos para medidas monótonas; em particular, para $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^\xi$. Nesse sentido, vale uma extensão do Teorema 2.4, enunciada a seguir.

Teorema 4.4. Seja $n \in \mathbb{N}$ e μ medida monótona em $[n]$. Fixe uma função Booleana crescente $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ e um algoritmo \mathbf{T} ; então vale que

$$\mathbb{V}_\mu(f(\omega)) \leq \sum_{i \in [n]} \delta_i(\mathbf{T}) \text{Inf}_i^\mu(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\mathbf{T})$ é definido da mesma forma que foi feito para o Teorema 2.4.

A demonstração do Teorema 4.4, que se não será feita aqui, pode ser encontrada em [10].

Como aplicação do Teorema 4.4 temos que, como no Teorema 3.3, a probabilidade da origem estar conectada à borda de uma caixa de lado $2n$ decai, na região subcrítica do modelo considerado, exponencialmente rápido com n . O teorema abaixo nos dá um resultado desse tipo.

Teorema 4.5. No modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^d , com $q \geq 1$, vale que

1. Para $p < p_c$, existe $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\mu_{\Lambda_n, p, q}^1(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. Para $p > p_c$, existe $c > 0$ tal que $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^1(|C_0(\omega)| = +\infty) \geq c(p - p_c)$.

A demonstração do Teorema 4.5, similar ao Teorema 3.3, pode ser encontrada em [10].

Finalmente, e de posse de todas essas ferramentas, podemos nos concentrar na demonstração do principal resultado dessa subseção, o Teorema 4.3.

Demonstração (Teorema 4.3):

Para a prova desse resultado, vamos dividir os casos em que $p_c(q) \geq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$ e $p_c(q) \leq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$; o que concluiria a demonstração.

Primeiro, note que, para p tal que $p = p^*$ (chamado de ponto *self-dual*, ou p_{sd}), vale que $p_{sd}(q) = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. De fato, usando a Expressão (34) para $p = p^*$,

$$q = \frac{p^2}{(1-p)^2} \implies \frac{1}{\sqrt{q}} = \frac{1-p}{p} \implies \frac{1+\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = \frac{1}{p} \implies \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}} = p =: p_{sd}(q).$$

Nesse caso, para $p = p_{sd}$,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{G},p,q}^0(\mathcal{H}(n+1,n)) &\stackrel{\text{Prop. 4.2}}{=} 1 - \mu_{\mathbb{G}^*,p^*,q^*}^1 \left(\mathcal{V}^* \left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right] \right) \right) \\ &\stackrel{\text{Teor. 4.2}}{\leq} 1 - \mu_{\mathbb{G}^*,p^*,q^*}^0 \left(\mathcal{V}^* \left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right] \right) \right), \end{aligned}$$

o que implica em, por invariância por translação e usando o fato de que $p = p^*$,

$$\mu_{\mathbb{G},p,q}^1(\mathcal{H}(n+1,n)) \stackrel{\text{Similarmente}}{\geq} \frac{1}{2} \geq \mu_{\mathbb{G},p,q}^0(\mathcal{H}(n+1,n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

Agora, sob o resultado da Proposição 4.3, que diz que $\forall p > p_c$, $\mu_{\mathbb{G},p,q}^0(\mathcal{H}(n+1,n)) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$, temos que, pelo lado direito da Expressão (37), $p_c \geq p = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$.

Para mostrar que $p_c \leq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$ e finalizar a prova, utilizaremos o item “a.” do Teorema 4.5. Para isso, assumamos $p_c > p = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. Nesse caso,

$$\mu_{\mathbb{G},p,q}^1(\mathcal{H}(n+1,n)) \leq n \mu_{\mathbb{G},p,q}^1(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

pelo Teorema 4.5; o que é um absurdo, já que $\mu_{\mathbb{G},p,q}^1(\mathcal{H}(n+1,n)) \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ – pelo lado esquerdo da Expressão (37). Logo, $p \leq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. \square

Referências

- [1] Aizenman, M. and Barsky, D. J. (1987). Sharpness of the phase transition in percolation models. *Communications in Mathematical Physics*, 108(3):489–526.
- [2] Beckner, W. (1975). Inequalities in Fourier Analysis. *Annals of Mathematics*, 102(1):159–182.
- [3] Beffara, V. and Duminil-Copin, H. (2012). The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$. *Probability Theory and Related Fields*, 153(3-4):511–542.
- [4] Bollobás, B. and Riordan, O. (2006). A short proof of the Harris–Kesten theorem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 38(3):470–484.
- [5] Bonami, A. (1970). Étude des coefficients de fourier des fonctions de $L^p(G)$. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 20, pages 335–402.
- [6] Bourgain, J., Kahn, J., Kalai, G., Katznelson, Y., and Linial, N. (1992). The influence of variables in product spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 77(1-2):55–64.
- [7] de Lima, B. N. B. (2010). V Simpósio Nacional — Jornadas de Iniciação Científica. Introdução à Percolação. https://www.youtube.com/playlist?list=PLo4jXE-LdDTSG0AA88TVAqiLJoeNG_YSs. [Acesso em 15-Maio-2020].
- [8] Duminil-Copin, H. (2019). Sharp threshold phenomena in statistical physics. *Japanese Journal of Mathematics*, 14(1):1–25.
- [9] Duminil-Copin, H. and Manolescu, I. (2016). The phase transitions of the planar random-cluster and potts models with $q \geq 1$ are sharp. *Probability Theory and Related Fields*, 164(3-4):865–892.
- [10] Duminil-Copin, H., Raoufi, A., and Tassion, V. (2019). Sharp phase transition for the random-cluster and Potts models via decision trees. *Annals of Mathematics*, 189(1):75–99.
- [11] Duminil-Copin, H., Raoufi, A., Tassion, V., et al. (2018). A new computation of the critical point for the planar random-cluster model with $q \geq 1$. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 54(1):422–436.

- [12] Duminil-Copin, H. and Tassion, V. (2016). A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation on \mathbb{Z}^d . *L'Enseignement Mathématique*, 62:199–206.
- [13] Erdős, P. and Rényi, A. (1959). On random graphs I. *Publicationes Mathematicae*, 6:290–297.
- [14] Fortuin, C. M. and Kasteleyn, P. W. (1972). On the random-cluster model: I. Introduction and relation to other models. *Physica*, 57(4):536–564.
- [15] Friedgut, E. and Kalai, G. (1996). Every monotone graph property has a sharp threshold. *Proceedings of the American mathematical Society*, 124(10):2993–3002.
- [16] Grimmett, G. (1999). *Percolation*. Springer.
- [17] Grimmett, G. (2004). *The random-cluster model*. Springer.
- [18] Harris, T. E. (1960). A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 56, pages 13–20. Cambridge University Press.
- [19] Kahn, J., Kalai, G., and Linial, N. (1988). The influence of variables on Boolean functions. In *29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 68–80. IEEE.
- [20] Kesten, H. (1980). The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$. *Communications in mathematical physics*, 74(1):41–59.
- [21] Liggett, T. M., Schonmann, R. H., Stacey, A. M., et al. (1997). Domination by product measures. *The Annals of Probability*, 25(1):71–95.
- [22] Margulis, G. A. (1974). Probabilistic characteristics of graphs with large connectivity. *Problemy peredachi informatsii*, 10(2):101–108.
- [23] Menshikov, M. V. (1986). Coincidence of critical points in percolation problems. In *Soviet Mathematics Doklady*, volume 33, pages 856–859.
- [24] O’Donnell, R. (2007). Lecture 16 of “Analysis of Boolean functions”. <http://www.cs.cmu.edu/~odonnell/boolean-analysis/>. [Acesso em 12-Novembro-2019].

- [25] O’Donnell, R., Saks, M., Schramm, O., and Servedio, R. A. (2005). Every decision tree has an influential variable. In *46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS’05)*, pages 31–39. IEEE.
- [26] Russo, L. (1981). On the critical percolation probabilities. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 56(2):229–237.
- [27] Russo, L. (1982). An approximate zero-one law. *Probability Theory and Related Fields*, 61(1):129–139.
- [28] Spiro, S. (2016). REU 2016. Fourier Analysis of Boolean Functions. <http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Spiro.pdf>. [Acesso em 12-Novembro-2019].
- [29] Talagrand, M. et al. (1994). On Russo’s approximate zero-one law. *The Annals of Probability*, 22(3):1576–1587.
- [30] Yao, A. C. C. (1977). Probabilistic computations: Toward a unified measure of complexity. In *18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1977)*, pages 222–227. IEEE.

Apêndice A – Outras demonstrações

A seguir, serão apresentadas as demonstrações de alguns dos resultados que foram utilizados ao longo do texto e que não tinham relação direta com o assunto que estava sendo discutido; e, portanto, não foram provados. Para ler o enunciado do Lema ou Proposição de interesse, volte à subseção apropriada.

Demonstração do Lema 2.1 (baseado em [28]):

Seja $f(\omega) = \sum_{S \in [n]} \hat{f}(S) \chi_S$ e $g(\omega) = \sum_{T \in [n]} \hat{g}(T) \chi_T$, então:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f(\omega) \cdot g(\omega)) &= \mathbb{E}_{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S) \chi_S \right) \cdot \left(\sum_{T \subset [n]} \hat{g}(T) \chi_T \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\frac{1}{2}} \left(\sum_{S \subset [n]} \sum_{T \subset [n]} \hat{f}(S) \hat{g}(T) \cdot \chi_S \chi_T \right). \end{aligned}$$

Agora, note que:

$$\begin{aligned} \chi_S \chi_T &= (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i} (-1)^{\sum_{j \in T} \omega_j} \\ &= (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i + \sum_{j \in T} \omega_j} \\ &= (-1)^{\sum_{i \in S \Delta T} \omega_i + \sum_{j \in S \cap T} 2\omega_j}, \text{ onde } S \Delta T \text{ é a diferença simétrica entre } S \text{ e } T \\ &= (-1)^{\sum_{i \in S \Delta T} \omega_i} ((-1)^2)^{\sum_{j \in S \cap T} \omega_j} = (-1)^{\sum_{i \in S \Delta T} \omega_i} = \chi_{S \Delta T}. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f(\omega) \cdot g(\omega)) &= \mathbb{E}_{\frac{1}{2}} \left(\sum_{S \subset [n]} \sum_{T \subset [n]} \hat{f}(S) \hat{g}(T) \cdot \chi_{S \Delta T} \right) \\ &= \sum_{S \subset [n]} \sum_{T \subset [n]} \hat{f}(S) \hat{g}(T) \cdot \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_{S \Delta T}), \end{aligned}$$

onde $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_{S \Delta T})$ é igual a 0, se $S \neq T$ (note que, se $A \neq \emptyset$, então $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_A) = \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}((-1)^{\sum_{i \in A} \omega_i})$; que é o mesmo que dizer que $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_A) = \prod_{i \in A} \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}((-1)^{\omega_i}) = 0$, visto que $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}((-1)^{\omega_i}) = 0$, $\forall i \in A$), ou $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_{S \Delta T})$ é igual a 1, se $S = T$ (já que $\chi_{\emptyset} = 1$). Dessa forma,

$$\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f(\omega) \cdot g(\omega)) = \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S) \hat{g}(S).$$

Por fim, tomando $f(\omega) = g(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, segue que $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f^2(\omega)) = \sum_{S \subset [n]} (\hat{f}(S))^2$, como queríamos demonstrar. \square

Demonstração da Proposição 3.1 (baseado em [7]):

Para mostrar que $\theta(p)$ é não-decrescente, usaremos a ideia de acoplamento. Assim, seja $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatórias independente e igualmente distribuídas tal que $\zeta_i \sim U[0, 1], \forall i \in \mathbb{N}$. Além disso, defina um espaço de probabilidade “maior”, tal que $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} [0, 1]$ e \mathbb{P}_p é medida produto.

Nesse caso, dizemos que um elo é p -aberto se $\zeta(e) \leq p$. Agora, note que, se $p_1 < p_2$, então um elo p_1 -aberto é, também, p_2 -aberto. Portanto,

$$\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega, p_1)| = +\infty\} \subset \{\omega \in \Omega : |C_0(\omega, p_2)| = +\infty\};$$

o que implica em

$$\mathbb{P}_{p_1}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}) \leq \mathbb{P}_{p_2}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}),$$

que é o mesmo que dizer que $\theta(p_1) \leq \theta(p_2)$. □

Demonstração da Proposição 3.2 (baseado em [7]):

Utilizando a Proposição 3.1, é suficiente provar que valem as seguintes afirmações.

1. $\exists \hat{p} > 0$, tal que, $\forall p < \hat{p}$, $\theta(p) = 0$; e
2. $\exists \tilde{p} < 1$, tal que, $\forall p > \tilde{p}$, $\theta(p) > 0$.

Afirmação 1:

Primeiro, note que $\mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) = \sum_{n \in \mathbb{N}} [n \cdot \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| = n)] + (+\infty \cdot \theta(p))$; onde $|C_0(\omega)|$ pode ser escrita como $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{I}_{(0 \leftrightarrow x)}(\omega)$. Aqui, para mostrar que $\theta(p) = 0$, basta verificar que $\mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) < +\infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) &= \mathbb{E}_p \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{I}_{(0 \leftrightarrow x)}(\omega) \right) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{\gamma=(0, \dots, x)} \gamma \text{ é aberto} \right) \\ &\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma=(0, \dots, x)} \mathbb{P}(\gamma \text{ é aberto}). \end{aligned}$$

Nesse caso, note que $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma=(0, \dots, x)} (\cdot)$ corresponde à soma de todos os caminhos finitos que começam na origem e terminam em algum vértice $x \in \mathbb{Z}^d$. Dessa forma, é possível escrever que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma=(0, \dots, x)} \mathbb{P}(\gamma \text{ é aberto}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{\gamma=(0, \dots, x_n) \\ |\gamma|=n}} \mathbb{P}(\gamma \text{ é aberto}) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n \cdot \sigma(n),$$

onde $\sigma(n)$ representa o número de caminhos que partem da origem e tem tamanho n .

Agora, note que $\sigma(n) \leq 2d \cdot (2d - 1)^{(n-1)}$. Sendo assim,

$$\mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) \leq 2dp \sum_{n=1}^{+\infty} (p(2d - 1))^{n-1} < +\infty, \text{ se } |p(2d - 1)| < 1;$$

ou seja, $\mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) < +\infty$ se $p < \frac{1}{2d-1}$. Aqui, $\hat{p} = \frac{1}{2d-1}$.

Afirmção 2:

Para verificar a segunda parte, basta considerar o caso $d = 2$; já que, se $(0 \leftrightarrow +\infty)$ ocorre com probabilidade estritamente positiva em \mathbb{L}^2 , o mesmo evento acontece em \mathbb{L}^d , para $d > 2$.

Para mostrar que, para algum $p \in (0, 1)$, vale $\theta(p) > 0$, basta mostrar que $\mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| < +\infty) < 1$. Nesse caso, comece considerando o reticulado dual $(\mathbb{L}^2)^*$ introduzido na demonstração da Proposição 3.4. Agora, perceba que o aglomerado da origem tem tamanho finito se existe pelo menos um circuito $\gamma^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_1^*)$ aberto em $(\mathbb{L}^2)^*$ que envolve $C_0(\omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| < +\infty) &= \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{\gamma^* \text{ que envolve } 0} \gamma^* \text{ é aberto}\right) \leq \sum_{\gamma^* \text{ que envolve } 0} \mathbb{P}_p(\gamma^* \text{ é aberto}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{\gamma^* \text{ que envolve } 0 \\ |\gamma^*|=n}} \mathbb{P}_p(\gamma^* \text{ é aberto}). \end{aligned}$$

De maneira similar ao que fizemos na prova da **Afirmção 1**, defina $\lambda(n)$ como sendo o número de circuitos abertos em $(\mathbb{L}^2)^*$ que envolvem $C_0(\omega)$. Nesse caso, perceba que $\lambda(n) \leq n \cdot 3^{(n-1)}$. Dessa forma,

$$\mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| < +\infty) \leq (1 - p) \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot [3(1 - p)]^{n-1} < +\infty, \text{ se } |3(1 - p)| < 1;$$

ou seja, $\phi(p) := \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| < +\infty) < +\infty$ se $p > \frac{2}{3}$. Além disso, note que, se a condição sobre p for satisfeita, então $\phi(p) = \frac{1-p}{(2-3p)^2}$, tal que $\phi(p)$ é contínua e decrescente em $p \in (\frac{2}{3}, 1]$ e $\phi(1) = 0$. Sendo assim, $\exists \tilde{p} \in (\frac{2}{3}, 1)$, tal que, $\forall p > \tilde{p}$, $\phi(p) < 1$. \square

Demonstração da Proposição 3.3 (baseado em [16]):

Seja $A = \{\exists \text{ aglomerado de tamanho infinito em } \omega\}$. Agora, note que A não depende dos estados de uma quantidade finita de elos em E^d . Nesse caso, pela *lei zero-um de Kolmogorov*⁴, $\mathbb{P}_p(A) = 0$ ou $\mathbb{P}_p(A) = 1$.

⁴Sejam $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatórias independentes, $\mathcal{F}_n^{+\infty} = \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\mathcal{X} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n^{+\infty}$. Se $A \in \mathcal{X}$, então $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Defina $\psi(p) := \mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(\{\exists x \in \mathbb{Z}^d : |C_x(\omega)| = +\infty\})$; assim,

$$\psi(p) = \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = +\infty\} \right) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = +\infty\}).$$

Se $p < p_c$, por invariância por translação e utilizando a Proposição 3.2, temos que $\mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = +\infty\}) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}^d$; logo, $\psi(p) = 0$.

Por outro lado, se $p > p_c$, então

$$\begin{aligned} \psi(p) &\geq \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}), \text{ por inclusão de eventos} \\ &> 0, \text{ pelo Lema 3.2.} \end{aligned}$$

Aplicando a *lei zero-um*, $\psi(p) = 1$. □

Demonstração do Lema 3.1 (baseado em [16]):

Suponha, inicialmente, que X e Y sejam variáveis aleatórias que dependem dos estados de uma quantidade finita (e_1, e_2, \dots, e_n) de elos. Nesse caso, a prova será feita por indução em n .

$X(\omega(e_1))$ e $Y(\omega(e_1))$ são, por hipótese, funções crescentes. Assim, para $n = 1$, temos que

$$[X(\omega_1(e_1)) - X(\omega_2(e_1))] [Y(\omega_1(e_1)) - Y(\omega_2(e_1))] \geq 0,$$

para quaisquer duas possíveis configurações ω_1 e ω_2 independentes e definidas no mesmo espaço de probabilidade. Dessa forma,

$$\mathbb{E}_p[[X(\omega_1(e_1)) - X(\omega_2(e_1))] [Y(\omega_1(e_1)) - Y(\omega_2(e_1))]] \geq 0.$$

Aplicando a propriedade de linearidade da esperança, independência e usando o fato de que ω_1 e ω_2 estão definidas em um mesmo espaço, segue que

$$\mathbb{2} \mathbb{E}_p[X(\omega(e_1))Y(\omega(e_1))] \geq \mathbb{2} \mathbb{E}_p[X(\omega(e_1))] \mathbb{E}_p[Y(\omega(e_1))].$$

Agora, suponha válida a hipótese de indução; i.e., para $n = k$, vale que

$$\mathbb{E}_p[X(\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))Y(\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))] \geq \mathbb{E}_p[X(\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))] \mathbb{E}_p[Y(\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))].$$

Para $n = k+1$, considere $X = X(\omega(e_1), \dots, \omega(e_{k+1}))$ e $Y = Y(\omega(e_1), \dots, \omega(e_{k+1}))$.

Sendo assim, temos que

$$\mathbb{E}_p(XY) = \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[XY \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_k)]].$$

Como, para $\omega(e_1), \dots, \omega(e_k)$ fixados, X e Y dependem apenas do estado do $(k + 1)$ -ésimo elo, podemos dizer que

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[X | \omega(e_1), \dots, \omega(e_k)] \mathbb{E}_p[Y | \omega(e_1), \dots, \omega(e_k)]].$$

Aqui, como $\mathbb{E}_p[\cdot | \omega(e_1), \dots, \omega(e_k)]$ é função de $\omega(e_1), \dots, \omega(e_k)$, podemos aplicar a hipótese de indução e o resultado, para $n = k + 1$, é obtido.

Por fim, temos que retirar a hipótese adicional de que X e Y dependem dos estados de uma quantidade finita de elos para concluir a prova. Para isso, seja e_1, e_2, \dots uma ordenação dos elos de E^d ; então, defina $X_n = \mathbb{E}_p[X | \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)]$ e $Y_n = \mathbb{E}_p[Y | \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)]$. Assim, pelos argumentos apresentados acima,

$$\mathbb{E}_p[X_n Y_n] \geq \mathbb{E}_p[X_n] \mathbb{E}_p[Y_n]. \quad (38)$$

Como, por hipótese, X e Y são limitadas, pelo Teorema de Convergência de Martingais, quando $n \rightarrow +\infty$, $X_n \rightarrow X$ e $Y_n \rightarrow Y$ quase certamente; de modo que $\mathbb{E}_p[X_n] \rightarrow \mathbb{E}_p[X]$ e $\mathbb{E}_p[Y_n] \rightarrow \mathbb{E}_p[Y]$, quando $n \rightarrow +\infty$. Agora, em relação ao termo $\mathbb{E}_p[X_n Y_n]$, é possível afirmar, aplicando as desigualdades “triangular” e “de Cauchy-Schwarz” (respec.), que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[|X_n Y_n - X Y|] &= \mathbb{E}_p[|(X_n - X) Y_n + (Y_n - Y) X|] \\ &\leq \mathbb{E}_p[|(X_n - X) Y_n| + |(Y_n - Y) X|] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_p[(X_n - X)^2] \mathbb{E}_p[Y_n^2]} + \sqrt{\mathbb{E}_p[(Y_n - Y)^2] \mathbb{E}_p[X^2]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0; \end{aligned}$$

logo, $\mathbb{E}_p(X_n Y_n) \rightarrow \mathbb{E}_p(X Y)$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Tomando o limite, quando $n \rightarrow +\infty$, na Expressão (38), concluímos a prova. \square