

# Aproximações à probabilidade de ruína

Aniura Milanés e Adrian Hinojosa

# Sumário

<b>1</b>	<b>Aproximação numérica à probabilidade de ruína</b>	<b>3</b>
1.1	O processo de risco . . . . .	3
1.2	A distribuição da cauda integrada . . . . .	4
1.3	A probabilidade de ruína . . . . .	4
1.3.1	Probabilidade de ruína: expressões exatas . . . . .	5
1.3.2	Aproximação para a probabilidade de ruína (caudas leves) . . . . .	5
1.3.3	Aproximação para a probabilidade de ruína (caudas pesadas) . . . . .	6
1.4	Comparação das aproximações . . . . .	9
1.4.1	Exemplos e erro relativo . . . . .	9
1.4.2	Exemplo: mistura de exponenciais . . . . .	9
1.4.3	Exemplo: Lognormal . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Simulação da probabilidade de ruína (caudas leves)</b>	<b>11</b>
2.1	Simulação Monte Carlo: Monte Carlo direto . . . . .	11
2.1.1	Simulação de eventos raros: ruína como evento raro . . . . .	13
2.2	Simulação via mudança de medida exponencial: caudas leves, propriedades . . . . .	14
2.2.1	Indenizações individuais de cauda leve . . . . .	14
2.3	Valor das indenizações individuais com distribuição exponencial . . . . .	16
2.3.1	Indenizações individuais com distribuição exponencial: exemplo com $\lambda = 1, c = 1, \beta = 5, N = 100$ . . . . .	17
2.3.2	Indenizações individuais com distribuição exponencial: exemplo com $\lambda = 1, c = 1, \beta = 5, N = 1000$ . . . . .	18
2.4	Mistura de exponenciais como valor das indenizações individuais . . . . .	19
2.4.1	Mistura de exponenciais como valor das indenizações individuais: exemplo com $N = 100$ . . . . .	20
2.4.2	Mistura de exponenciais como valor das indenizações individuais: exemplo com $N = 1000$ . . . . .	21
2.5	Valor das indenizações individuais com distribuição Gamma . . . . .	22
2.5.1	Valor das indenizações individuais com distribuição Gamma: exemplo com $\lambda = 1, c = 2$ e $N = 100$ . . . . .	23

2.5.2	Indenizações individuais com distribuição Gamma: exemplo com $\lambda = 1$ , $c = 2$ e $N = 1000$ . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Simulação da probabilidade de ruína (caudas pesadas)</b>	<b>25</b>
3.1	Exemplos . . . . .	25
3.2	Distribuições subexponenciais . . . . .	26
3.2.1	Definição . . . . .	26
3.2.2	Algumas propriedades . . . . .	26
3.2.3	Uma classificação . . . . .	26
3.2.4	Resultado limite na cauda: . . . . .	27
3.2.5	Caracterização do instante da ruína . . . . .	27
3.2.6	Taxa de falha . . . . .	27
3.3	Algoritmos Monte Carlo Condicionais para estimar $\psi(u)$ , na classe $\mathcal{S}$ . . . . .	28
3.3.1	Monte Carlo condicional I . . . . .	28
3.3.2	Monte Carlo condicional II: Asmussen e Binswander(1997)	28
3.3.3	Monte Carlo Condicional III: Asmussen e Kroese (2004)	29
3.4	Algoritmos Monte Carlo com amostragem por importância para estimar $\psi(u)$ , na classe $\mathcal{S}$ . . . . .	30
3.4.1	Função de importância . . . . .	30
3.4.2	Amostragem por importância I . . . . .	30
3.4.3	Amostragem por importância II: Perturbação da taxa de falha . . . . .	31
3.5	Implementação de Monte Carlo condicional . . . . .	32
3.5.1	Erros relativos dos estimadores: $X \sim Pareto, a = 3/2, N = 10000, \rho = 0.25$ . . . . .	32
3.5.2	Erros relativos dos estimadores: $X \sim Pareto, a = 3/2, N = 10000, \rho = 0.5$ . . . . .	32
3.5.3	Erros relativos dos estimadores: $X \sim Pareto, a = 3/2, N = 10000, \rho = 0.75$ . . . . .	32
3.5.4	Erros relativos dos estimadores: $X \sim Pareto, a = 5/2, N = 10000, \rho = 0.25$ . . . . .	33
3.5.5	Erros relativos dos estimadores: $X \sim Pareto, a = 5/2, N = 10000, \rho = 0.5$ . . . . .	33
3.5.6	Erros relativos dos estimadores: $X \sim Pareto, a = 5/2, N = 10000, \rho = 0.75$ . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Referências</b>	<b>34</b>

# Capítulo 1

## Aproximação numérica à probabilidade de ruína

Uma das principais ferramentas na avaliação das carteiras de seguros é a probabilidade de ruína da carteira.

Pela ausência ou a complexidade de expressões exatas para a probabilidade de ruína, na maior parte dos casos, deve recorrer-se à fórmulas aproximadas ou a simulação.

Neste trabalho discutiremos alguns dos principais métodos para aproximar, numericamente ou via simulação Monte Carlo, a probabilidade de ruína

### 1.1 O processo de risco

O objeto de estudo da teoria da ruína é o processo do risco  $R(t)$ , ele quantifica as reservas até o instante do tempo  $t \geq 0$ ,

$$R(t) = u + ct - S(t).$$

Onde:

- $S(t)$ : processo das perdas agregadas, é a soma aleatória de  $N(t)$  indenizações ou perdas  $X_i \geq 0$ ,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

- $N(t)$  é a frequência das perdas, é um processo de contagem (Poisson homogêneo com taxa  $\alpha$  p.ex.) que é independente das indenizações  $X_i$ .
- $u \geq 0$ : valor da reserva inicial,

- $c$ : taxa dos prêmios.

Para não ter ruína certa temos que impor certas condições no valor de  $c$ , para isso vamos definir o que se conhece como fator de recarga. Seja  $\mu_k = \mathbb{E}X_i^k$ .

Os ganhos esperados do processo de risco  $R(t)$  no intervalo  $(0, t]$  são:

$$\mathbb{E}[R(t) - u] = ct - \mathbb{E}S(t) = (c - \alpha\mu_1)t$$

Definimos o fator de recarga como:

$$\rho = \frac{c - \alpha\mu_1}{\alpha\mu_1}$$

Assim:

$$c = (1 + \rho)\alpha\mu_1$$

O *prêmio puro* no processo  $R(t)$  é definido pelo valor de  $\mathbb{E}S(t) = \mu_1\alpha t$ . Os prêmios têm que ser maiores que esta quantia para não ter ruína, segundo o princípio do valor esperado. Assim precisamos  $\rho > 0$ .

## 1.2 A distribuição da cauda integrada

Seja  $F$  a função de distribuição de  $X_i$ . Se  $X_i$  tem esperança  $\mu_1$  finita, definimos a distribuição da cauda integrada como:

$$F_I(z) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^z \bar{F}(x) dx$$

onde  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  é a cauda da distribuição  $F$ .

Sejam  $\tau_k = \mathbb{E}T^k$ , com  $T \sim F_I$ , então vale que:

$$\tau_k = \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)\mu_1}$$

## 1.3 A probabilidade de ruína

Considere o instante da ruína definido por:

$$\tau = \inf \{t : t \geq 0 \text{ e } R(t) < 0\}$$

Usando esta variável aleatória podemos definir a ruína eventual como o evento  $\tau < \infty$ . Logo a probabilidade da ruína eventual é:

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau < \infty),$$

Também podemos definir a probabilidade da ruína em tempo finito como:

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(\tau < T).$$

Observe que a função  $\psi(u)$  é decrescente,  $\psi(0) \leq 1$  e  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ .

### 1.3.1 Probabilidade de ruína: expressões exatas

Lundberg (1926) mostrou que:

- $\psi(0) = \frac{\alpha\mu_1}{c}$ , se  $\rho > 0$ ,
- Reclamos exponenciais:

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} e^{-\frac{\rho u}{\mu_1(1+\rho)}},$$

Outras fórmulas exatas existem para distribuições cuja função geradora de momentos é uma função racional. Não tem formulas explicitas para  $\psi(u)$  no caso geral.

### 1.3.2 Aproximação para a probabilidade de ruína (caudas leves)

#### Aproximação clássica: Cramér-Lundberg(1930)

Seja  $R$  a solução positiva de:

$$h(r) = \int_0^\infty (e^{rz} - 1)dF(z) = \frac{cr}{\alpha}.$$

Então:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \psi(u) = \frac{\mu_1 \rho}{h'(R) - c/\alpha},$$

e

$$\psi(u) \sim \psi_{CL}(u) := \frac{\mu_1 \rho}{h'(R) - c/\alpha} e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty.$$

#### Aproximação difusiva, Hadwinger(1940)

Suponha que  $u$  é grande,  $\rho$  pequeno tal que  $u \sim \rho^{-1}$ , quando  $u \rightarrow \infty$ . Então o processo do risco se aproxima do processo de Wiener.

Igualando os dois primeiros momentos dos dois processos obtemos:

$$\psi(u) \approx \psi_D(u) := e^{-2\mu_1 \rho u / \mu_2}.$$

#### Aproximação exponencial, De Vylder(1978)

Substituímos o processo do risco  $R(t)$  por um processo do risco  $\tilde{R}(t)$  que tem os reclamos com distribuição exponencial.

Fazemos  $\mathbb{E}R^k(t) = \mathbb{E}\tilde{R}^k(t)$  para  $k = 1, 2, 3$ :

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_3}{3\mu_2}, \quad \tilde{\rho} = \frac{2\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}\rho, \quad \tilde{\alpha} = \frac{9\mu_2^3}{2\mu_3^2}\alpha.$$

Obtemos a aproximação:

$$\psi(u) \approx \psi_{DV}(u) := \frac{1}{1 + \tilde{\rho}} e^{-\frac{\tilde{\rho}u}{\tilde{\mu}_1(1+\tilde{\rho})}}.$$

### Aproximação de Beekman-Bowers(1969)

Considere o processo do risco  $X(t) = R(t) - u$  (i.e.  $u = 0$ ), observe que:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P(\inf_{t \geq 0} X(t) < -u | \inf_{t \geq 0} X(t) < 0)\psi(0) \\ &= [1 - H(u)] \frac{1}{1 + \rho}\end{aligned}$$

Onde  $H(u) := P(-\inf_{t \geq 0} X(t) \leq u | -\inf_{t \geq 0} X(t) > 0)$ . Observe que  $H(u)$  é uma distribuição. Sejam  $\mu_H$  e  $\sigma_H^2$  a esperança e a variância de  $H$ :

$$\mu_H = \frac{\mu_2(1 + \rho)}{2\mu_1\rho} \quad \text{e} \quad \sigma_H^2 = \frac{\mu_2(1 + \rho)}{2\mu_1\rho} \left( \frac{2\mu_3}{\mu_2} + \frac{\mu_2(1 - \rho)}{2\mu_1\rho} \right)$$

Substituimos  $H(u)$  com  $G(u)$ , uma distribuição Gamma com os dois primeiros momentos iguais, e obtemos:

$$\psi_{BB}(u) : \frac{1}{1 + \rho} \int_u^\infty \frac{\beta^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\beta x} dx,$$

$$\text{Onde: } \beta = \frac{2\mu_1\rho}{\mu_2 + ((4\mu_1\mu_3/3\mu_2) - \mu_2)\rho} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1 + \rho}{1 + ((4\mu_1\mu_3/3\mu_2) - 1)\rho}$$

### 1.3.3 Aproximação para a probabilidade de ruína (caudas pesadas)

#### Fórmula de Pollaczec-Khinchine

A fórmula de Pollaczec-Khinchine é um resultado que permite representar a probabilidade da ruína pela expressão:

$$\psi(u) = P\left(\sum_{i=1}^M T_i > u\right)$$

Onde  $T_1, T_2, \dots$  i.i.d. com distribuição  $F_I$  e  $M \sim \text{Geométrica}(1/1 + \rho)$ .

Então:

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \rho}\right)^n \bar{F}_I^{n*}(u)$$

#### Aproximação de Embrechts e Veraverbeke(1982)

A probabilidade da ruína pode ser aproximada por:

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho} \bar{F}_I(u), u \rightarrow \infty.$$

Observe que se  $F_I$  tem distribuição subexponencial (ver mais adiante para uma definição de distribuição subexponencial), então vale que:

$$\bar{F}_I^{2*}(z) \sim 2\bar{F}_I(z), \quad z \rightarrow \infty$$

e a aproximação é exata.

A convergência desta aproximação é muito lenta como função de  $u$ .

### Processo de Poisson misto

Veremos aproximações para  $\psi(u)$  quando  $\rho \rightarrow 0$ . Fazendo  $t = \frac{1}{\rho}$  e usando a fórmula de Pollaczec-Khinchine temos que:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+t} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{1+t} \right)^n \bar{F}_I^{n*}(u)$$

Sejam  $\Lambda \sim \exp(1)$  e  $\nu(t)$  um processo de Poisson misto com intensidade  $\Lambda$ , isto é:

$$P(\nu(t) = k) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda} d\lambda$$

então vale que:

$$P(\nu(t) = k) = \left( \frac{1}{1+t} \right) \left( \frac{t}{1+t} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Usando este resultado podemos representar  $\psi(u)$  usando o processo  $\{S_{\nu(t)}, t \geq 0\}$ :

$$S_{\nu(t)} = \sum_{j=0}^{\nu(t)} T_j, \quad \text{com } T_j \text{ i.i.d. com distribuição } F_I$$

$S_{\nu(t)}$  é um processo de Poisson misto composto e vale que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_{\nu(t)}/t = \tau_1 \mathbb{E}\Lambda.$$

### Probabilidade da ruína e o processo de Poisson misto

Considere para cada  $t \geq 0$  a distribuição de  $S_{\nu(t)}$ :  $V_t(x) = P(S_{\nu(t)} \leq x)$ . Então vale que  $\psi(u) = \bar{V}_{1/\rho}(u)$ , logo:

$$P(S_{\nu(t)}/t \leq x) = \bar{V}_t(xt) \rightarrow e^{-x/\tau_1}, \quad t \rightarrow \infty$$

Assim:

$$\psi(x/\rho) \rightarrow e^{-x/\tau_1} = e^{-2\mu_1 x/\mu_2} \quad \rho \rightarrow 0$$

que é a aproximação difusiva.



Vamos considerar agora uma generalização deste resultado. Sejam  $\alpha_t$  e  $\beta_t$  e considere:

$$\frac{S_{\nu(t)} - \alpha_t}{\beta_t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Suponha que  $\lim_{t \rightarrow \infty} t/\alpha_t = A > 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t/\beta_t = B$ , então:

$$\frac{S_{\nu(t)} - \alpha_t}{\beta_t} \rightarrow A\tau_1\mathbb{E}\Lambda - B$$

i.e.

$$\bar{V}_t(\alpha_t + \beta_t x) \rightarrow \exp\left(-\frac{x+B}{A\tau_1}\right) \quad t \rightarrow \infty, x \geq -B$$

logo:

$$\bar{V}_t(xt) \approx \exp\left(-\frac{xt - \alpha_t + B\beta_t}{A\tau_1\beta_t}\right)$$

### Aproximação exponencial, De Vylder e Grandell(1997)

Vamos usar o resultado anterior, para isso considere:

$$\alpha_t = \mathbb{E}[\nu(t)] = \tau_1 t \quad \beta_t^2 = \text{Var}[\nu(t)] = \tau_2 t + \tau_1^2 t^2,$$

logo:  $A = 1/\tau_1$  e  $B = 1$ .

$$\psi(u) = \bar{V}_{1/\rho}(u) \approx \exp\left(-\frac{u - \alpha_{1/\rho} + B\beta_{1/\rho}}{A\tau_1\beta_{1/\rho}}\right)$$

Logo:

$$\psi(u) \approx \psi_E(u) = \exp\left(-1 - \frac{\rho u - \tau_1}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2\rho}}\right)$$

### Outras aproximações exponenciais

Usando o resultado anterior podemos mostrar um resultado de Lundberg(1964):

$$\bar{V}_t(xt) \approx e^{-x/\tau_1} \exp\left(1 + (x - \tau_1)\frac{\tau_2}{2\tau_1^3 t}\right)$$

logo:

$$\psi(u) \approx \psi_L(u) = e^{-\rho u/\tau_1} \exp\left(1 + (\rho u - \tau_1)\frac{\rho\tau_2}{2\tau_1^3}\right)$$

Finalmente, usando as mesmas técnicas, Rényi(1956) mostrou que:

$$\psi(u) \approx \psi_R(u) = \frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{2\mu_1\rho u}{\mu_2(1+\rho)}\right).$$

## 1.4 Comparação das aproximações

### 1.4.1 Exemplos e erro relativo

Cosideramos dois exemplos nos quais temos o valor de  $\psi(u)$  exato (Grandell(2000)):

1. Caudas leves, reclamos são uma mistura de exponenciais:

$$F(z) = 1 - 0.0039793e^{-0.014631z} - 0.1078392e^{-0.190206z} - 0.8881815e^{-5.514588z}$$

2. Caudas pesadas, reclamos são lognormais:

$$X_i \sim e^Z, \quad Z \sim N(\mu_L, \sigma_L^2), \quad \mu_L = -\frac{1}{2}\sigma_L^2, \quad \sigma_L = 1.8$$

Na comparação usamos o erro relativo da aproximação:

$$\mathcal{E}_A = \frac{\psi_A(u) - \psi(u)}{\psi(u)},$$

onde  $\psi_A(u)$  é aproximação a probabilidade de ruína  $\psi(u)$ .

### 1.4.2 Exemplo: mistura de exponenciais

$u$	$\rho(10^{-2})$	$\psi(u)(10^{-2})$	$\mathcal{E}_{CL}(u)(\%)$	$\mathcal{E}_D(u)(\%)$	$\mathcal{E}_E(u)(\%)$	$\mathcal{E}_{BB}(u)(\%)$	$\mathcal{E}_{DV}(u)(\%)$
10	5	0.8897	-3.6	9.8	-1.8	3.3	-3.2
10	10	0.7993	-6.7	19.4	-1.0	4.8	-5.4
10	15	0.7243	-9.2	28.8	1.1	5.4	-7.0
10	20	0.6611	-11.4	37.9	4.0	5.6	-8.1
10	25	0.6073	-13.2	46.7	7.5	5.6	-9.0
10	30	0.5610	-14.8	55.1	11.2	5.5	-9.6
100	5	0.7144	-	11.1	1.7	2.3	0.4
100	10	0.5393	-	16.7	5.0	1.2	1.1
100	15	0.4247	-	17.6	8.6	-0.4	1.9
100	20	0.3455	-	14.7	12.1	-1.7	2.7
100	25	0.2886	-	8.9	15.1	-2.8	3.4
100	30	0.2461	-	1.3	17.7	-3.6	4.0

Tabela 1.1: Erros relativos, distribuição dos reclamos mistura de exponenciais

### 1.4.3 Exemplo: Lognormal

$u$	$\rho(10^{-2})$	$\psi(u)(10^{-2})$	$\mathcal{E}_D(u)(\%)$	$\mathcal{E}_R(u)(\%)$	$\mathcal{E}_L(u)(\%)$	$\mathcal{E}_E(u)(\%)$	$\mathcal{E}_{DV}(u)(\%)$
100	5	0.55074	22.7	19.1	-40.8	-3.3	-20.6
100	10	0.34395	32.8	29.7	-16.2	18.6	-19.5
100	15	0.23573	31.0	32.8	89.5	45.4	-14.2
100	20	0.17309	20.6	30.5	253.2	73.5	-8.1
100	25	0.13384	5.4	24.8	435.4	101.5	-2.1
100	30	0.10765	-11.4	17.2	599.4	128.4	3.5
1000	5	0.04199	-52.6	-45.6	65.1	48.6	55.1
1000	10	0.01099	-96.4	-93.3	-54.4	29.1	85.5
1000	15	0.00574	-99.9	-99.4	-96.1	-17.3	79.7
1000	20	0.00384	-100.0	-100.0	-99.8	-49.6	68.7
1000	25	0.00288	-100.0	-100.0	-100.0	-69.1	59.2
1000	30	0.00230	-100.0	-100.0	-100.0	-80.7	51.8

Tabela 1.2: Erros relativos, distribuição dos reclamos lognormal

## Capítulo 2

# Simulação da probabilidade de ruína (caudas leves)

### 2.1 Simulação Monte Carlo: Monte Carlo direto

A situação típica pode ser caracterizada assim:

- Queremos avaliar  $z = \mathbb{E}(Z)$ .
- Não existe expressão analítica para  $z$ .
- A variável aleatória  $Z$  pode ser simulada e é um estimador natural para  $z$ .

A metodologia geral, chamada de método de Monte Carlo, consiste em usar a lei dos grandes números para melhorar esta estimação:

- Simular  $N$  cópias i.i.d  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  do estimador  $Z$ .
- Estimar  $z$  por  $\bar{Z} = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N}{N}$ ,  $\bar{Z}$  é o estimador Monte Carlo de  $z$ .
- Estimar  $Var(Z)$  por  $S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i^2 - \bar{Z}^2$ .

O resultado e um intervalo de confiança aproximado (95%) para o valor de  $z$  dado por:

$$\bar{z} \pm \frac{1.96s}{\sqrt{N}}$$

#### Técnicas de redução da variância

Considere os estimadores  $Z$  e  $Z'$  de  $z$ ,  $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}Z' = z$ . Quando construímos os estimadores Monte Carlo correspondentes ( $\bar{Z}$  e  $\bar{Z}'$ ) precisamos comparar ambos.

Se  $VarZ' < VarZ$  então o estimador  $Z'$  é melhor. Tipicamente  $Z'$  é uma modificação do estimador  $Z$  que tem variância menor.

## Principais técnicas de redução da variância

- *Redução Analítica:*

$$z = \int_{D_1} f(x)dx + \int_{D_2} f(x)dx = \theta_1 + \theta_2$$

Se  $\theta_1$  é conhecido, fazemos Monte Carlo do  $\theta_2$ .

- *Amostragem Estratificada:*

Usamos  $Z_1 = ZI_{D_1}$  e  $Z_2 = ZI_{D_2}$ .

- *Covariáveis:*

Suponha que  $X$  é fácil de simular. Considere  $Z' = Z - b(X - \mathbb{E}X)$ , com  $b = \text{Cov}(Z, X) / \text{Var}(X)$ .

- *Monte Carlo Condicional:* Suponha que simulamos  $N$  cópias de  $X$  e avaliamos  $Z' = \mathbb{E}[Z|X]$ .

Observe que  $\mathbb{E}[Z'] = z$  e

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}[\mathbb{E}[Z|X]] + \mathbb{E}[\text{Var}[\mathbb{E}[Z|X]]],$$

logo:

$$\text{Var}[Z'] < \text{Var}[Z].$$

O Monte Carlo condicional sempre reduz a variância.

- *Amostragem por importância:*

Suponha que existe uma medida de probabilidade  $\tilde{P}$  e que existe uma variável aleatória  $L$  tais que:

$$z = \mathbb{E}Z = \tilde{\mathbb{E}}ZL.$$

considere  $Z' = ZL$  na probabilidade  $\tilde{P}$ .

Definimos a variável  $L$  como:  $L = \frac{d\tilde{P}}{dP}$ .

A redução da variância depende da escolha de  $\tilde{P}$ .

Escolha ótima de  $\tilde{P}$ : seja  $\tilde{P}$  tal que  $d\tilde{P}/dP = Z/z$ , e  $L = z/Z$  então:

$$\tilde{\text{Var}}(LZ) = \tilde{\mathbb{E}}(LZ)^2 - [\tilde{\mathbb{E}}(LZ)]^2 = \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{z^2}{Z^2}Z^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{z}{Z}Z\right]^2 = z^2 - z^2 = 0.$$

para este candidato para  $\tilde{P}$  precisamos o valor de  $z$ .

### 2.1.1 Simulação de eventos raros: ruína como evento raro

O evento  $A$  é chamado *evento raro* se  $P(A)$  é pequeno. Consideramos eventos do tipo:

$$A(u) = \{\tau < \infty, R(0) = u\}.$$

Queremos estimar  $z(u) = P(A(u))$ , e queremos valores de  $z(u) \rightarrow 0$  quando  $u \rightarrow \infty$ .

O problema com os anteriores métodos é o seguinte.

Seja  $z(u) = P(A(u))$ , onde  $P(A(u))$  é pequeno ( $\approx 10^{-3}$ ). Considere o estimador  $Z(u) = I_{A(u)}$ , ele tem variância:

$$\sigma_Z^2 = z(1-z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0.$$

Observe que a *precisão relativa* do estimador  $Z = Z(u)$  definida por:

$$\frac{\sigma_Z}{z} = \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z} \sim \frac{1}{\sqrt{z(u)}} \rightarrow \infty.$$

Logo se o intervalo de confiança é da ordem  $10^{-4}$  e o valor pontual do estimador Monte Carlo é  $\bar{Z}(u) \sim 10^{-5}$  então o valor real de  $z(u)$  pode ser muito menor.

Considere um nível de significância do 10%, então  $1,96\sigma_Z/(z\sqrt{N}) = 0.1$ , logo:  $N \sim 100(1.96)^2/z \rightarrow \infty$  se  $z \rightarrow 0$

#### Eficiência dos estimadores

Vamos definir alguns conceitos relativos à eficiência dos estimadores que serão de utilidade na avaliação dos estimadores.

- *Erro Absoluto*:  $|\bar{Z}(u) - z(u)|$ .

- *Erro Relativo*:

$$\left| \frac{\bar{Z}(u) - z(u)}{z(u)} \right| = \left| \frac{\bar{Z}(u)}{z(u)} - 1 \right|$$

- $\bar{Z}(u)$  é um estimador de  $z(u)$  com *precisão* (relativa)  $(\epsilon, \delta)$  se:

$$P\left(\left|\frac{\bar{Z}(u) - z(u)}{z(u)}\right| < \epsilon\right) > 1 - \delta.$$

- Usando o Teorema Central do Limite:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{\bar{Z}(u) - z(u)}{z(u)}\right| < \epsilon\right) &= P\left(\left|\frac{\bar{Z}(u) - z(u)}{\sqrt{\text{Var}(\bar{Z}(u))}}\right| < \frac{\epsilon z(u)}{\sqrt{\text{Var}(\bar{Z}(u))}}\right) \\ &\approx 2\Phi\left(\frac{\epsilon z(u)\sqrt{N}}{\sqrt{\text{Var}(\bar{Z}(u))}}\right) - 1 \end{aligned}$$

- O coeficiente de variação quadrático de  $Z(u)$  é:

$$\kappa(u) = \frac{\text{Var}(Z(u))}{[\mathbb{E}Z(u)]^2}.$$

- Se  $\kappa(u) \rightarrow c$ ,  $u \rightarrow \infty$ , então:

$$\begin{aligned} 2\Phi\left(\frac{\epsilon z(u)\sqrt{N}}{\sqrt{\text{Var}(z(u))}}\right) - 1 &= 2\Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{N}}{\sqrt{c}}\right) - 1 \\ &= 2\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(1-\delta/2)\sqrt{N}}{\sqrt{c}}\right) - 1 \geq 1 - \delta \end{aligned}$$

Onde  $\gamma = \left(\frac{\Phi^{-1}(1-\delta/2)}{\epsilon}\right)^2$  e  $\frac{N}{c\gamma} > 1$ , logo  $\bar{Z}(u)$  é um estimador com precisão  $(\epsilon, \delta)$ .

- O Eficiência logarítmica

– Para que seja  $Z(u)$  seja eficiente basta que:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(Z(u))}{[\mathbb{E}Z(u)]^{2-\epsilon}} < \infty.$$

– Na prática somente é exigido que seja *logaritmicamente eficiente*:

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{|\log \text{Var}(Z(u))|}{|\log[\mathbb{E}Z(u)]|} \geq 2.$$

– No caso  $Z(u) = I_{A(u)}$  temos que a precisão relativa é da ordem  $\frac{1}{\sqrt{z(u)}} \rightarrow \infty$ , logo não é eficiente.

## 2.2 Simulação via mudança de medida exponencial: caudas leves, propriedades

### 2.2.1 Indenizações individuais de cauda leve

#### Processo clássico do risco

Considere o processo clássico do risco :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

- $u \geq 0$ : valor da reserva inicial,

- $c$ : taxa dos prêmios
- $N$ : processo de Poisson homogêneo ( $\lambda$ )
- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ : valores das indenizações individuais (sequência i.i.d.)
- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  e  $N$  independentes

### Estimador eficiente para o processo clássico de risco

Seja  $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$  o processo das perdas agregadas, e o evento ruína  $[R(t) < 0] = [S(t) > u]$ . Definimos o *coeficiente de Lundberg* da seguinte maneira. Seja  $X \sim X_1$  ( $X \sim F_X$ ). Se existir solução  $r = R > 0$  de

$$\lambda(M_X(r) - 1) = cr,$$

(coeficiente de ajuste ou expoente de Lundberg), então existe  $\tilde{\mathbb{P}}$  sob a qual

- $R(t)$  é um processo clássico de risco tal que:
  - $N$ : processo de Poisson homogêneo ( $\lambda_L = \lambda M_X(R)$ ),
  - $X \sim X^{(L)}$  com  $f_{X^{(L)}}(x) = \frac{e^{Rx}}{M_X(R)} f_X(x)$ ,
- $\tilde{\mathbb{P}}(\tau(u) < \infty) = 1$ ,
- Então  $Z_L(u) = \exp(-RS_{\tau(u)})$  é um estimador para a probabilidade de ruína com erro relativo limitado.

### Algoritmo para a mudança de medida exponencial

- Calcular  $R$ . Calcular  $M_X(R)$ ,  $\lambda_L$ .
- Fazer  $S = 0$
- Repetir
  - Gerar  $X \sim f_{X^{(L)}}$ ,  $T \sim \exp(\lambda_L)$
  - $S = S + X - cT$ .

Até  $S > u$ .

- Retornar  $z = e^{Rs}$ .



## 2.3 Valor das indenizações individuais com distribuição exponencial

**Modelo inicial:**

- Indenizações individuais:  $X \sim \exp(\beta)$
- $N$ : processo de Poisson( $\lambda$ )
- Expoente de Lundberg:  $R = \beta - \frac{\lambda}{c}$

**Modelo transformado:**

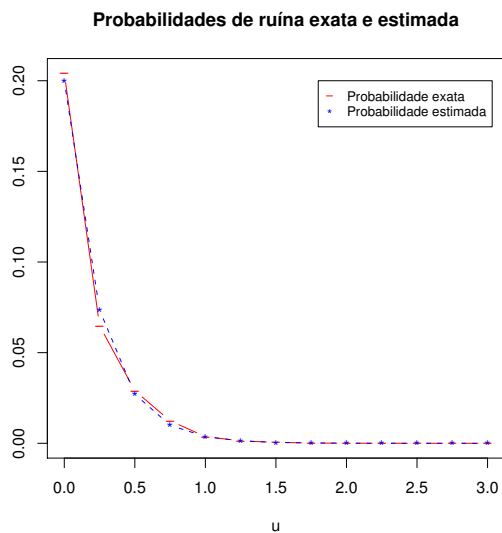
- $N$ : processo de Poisson( $\lambda_L$ ),  $\lambda_L = \beta c$
- Indenizações individuais:  $X^{(L)} \sim \exp(\frac{\lambda}{c})$

**Probabilidade exata da ruína:**

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\beta c} e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u}$$

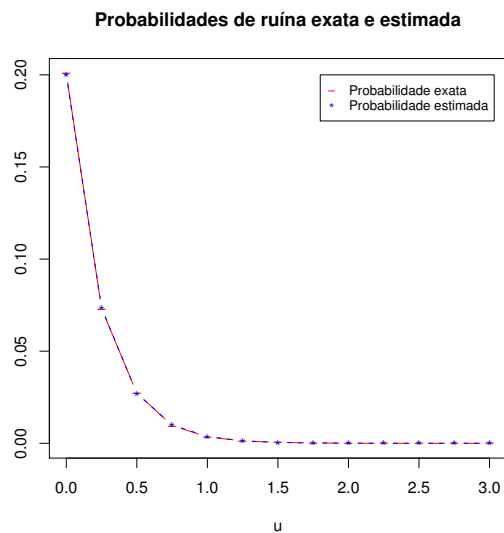
**2.3.1 Indenizações individuais com distribuição exponencial:  
exemplo com  $\lambda = 1, c = 1, \beta = 5, N = 100$**

$u$	$\psi_a(u)$	$\psi(u)$	$\mathcal{E}_{abs}$	$\mathcal{E}_{rel}$ (%)
0	1.919380e-01	2.000000e-01	8.061975e-03	4
5	4.313748e-10	4.122307e-10	1.914406e-11	4.6
10	8.205074e-19	8.496709e-19	2.916349e-20	3.4
15	1.758248e-27	1.751302e-27	6.945544e-30	0.4
20	3.104129e-36	3.609703e-36	5.055740e-37	14
25	6.931708e-45	7.440152e-45	5.084443e-46	6.8
30	1.495027e-53	1.533530e-53	3.850222e-55	2.5



### 2.3.2 Indenizações individuais com distribuição exponencial: exemplo com $\lambda = 1, c = 1, \beta = 5, N = 1000$

$u$	$\psi_a(u)$	$\psi(u)$	$\mathcal{E}_{abs}$	$\mathcal{E}_{rel}$ (%)
0	2.037498e-01	2.000000e-01	3.749819e-03	1.9
5	4.223998e-10	4.122307e-10	1.016912e-11	2.5
10	8.696367e-19	8.496709e-19	1.996586e-20	2.3
15	1.757999e-27	1.751302e-27	6.697147e-30	0.38
20	3.477161e-36	3.609703e-36	1.325418e-37	3.7
25	7.715778e-45	7.440152e-45	2.756257e-46	3.7
30	1.496908e-53	1.533530e-53	3.662112e-55	2.4



## 2.4 Mistura de exponenciais como valor das indenizações individuais

**Modelo inicial:**

- $f_X(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}, x > 0$
- $\lambda = 3, c = 1$
- $R = 1$

**Modelo transformado:**

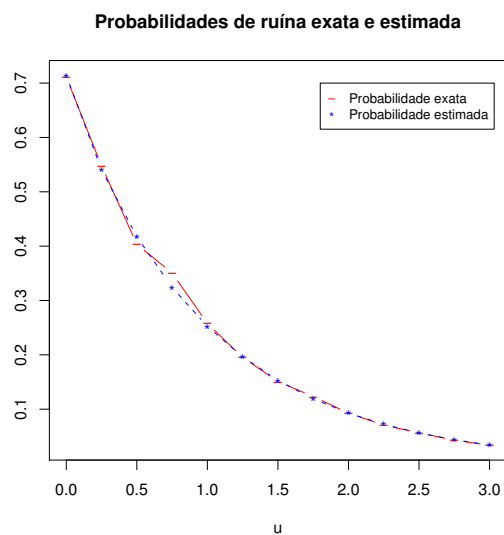
- $\lambda_L = 4$
- $f_X^{(L)}(x) = \frac{9}{16}2e^{-2x} + \frac{7}{16}6e^{-6x}, x > 0$

**Probabilidade exata da ruína:**

$$\Psi(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u}$$

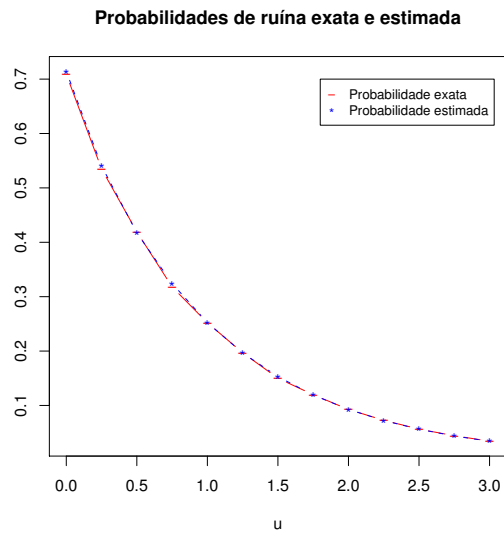
### 2.4.1 Mistura de exponenciais como valor das indenizações individuais: exemplo com $N = 100$

$u$	$\psi_a(u)$	$\psi(u)$	$\mathcal{E}_{abs}$	$\mathcal{E}_{rel}$ (%)
0	7.290401e-01	7.142857e-01	1.475435e-02	2.1
5	4.365054e-03	4.620307e-03	2.552524e-04	5.5
10	3.001582e-05	3.113138e-05	1.115560e-06	3.6
15	2.127186e-07	2.097616e-07	2.957034e-09	1.4
20	1.454649e-09	1.413362e-09	4.128628e-11	2.9
25	9.999794e-12	9.523162e-12	4.766321e-13	5
30	6.132431e-14	6.416656e-14	2.842243e-15	4.4



## 2.4.2 Mistura de exponenciais como valor das indenizações individuais: exemplo com $N = 1000$

$u$	$\psi_a(u)$	$\psi(u)$	$\mathcal{E}_{abs}$	$\mathcal{E}_{rel}$ (%)
0	7.231280e-01	7.142857e-01	8.842272e-03	1.2
5	4.675697e-03	4.620307e-03	5.539053e-05	1.2
10	3.104114e-05	3.113138e-05	9.024227e-08	0.29
15	2.102562e-07	2.097616e-07	4.946155e-10	0.24
20	1.387603e-09	1.413362e-09	2.575964e-11	1.8
25	9.584429e-12	9.523162e-12	6.126732e-14	0.64
30	6.366750e-14	6.416656e-14	4.990534e-16	0.78



## 2.5 Valor das indenizações individuais com distribuição Gamma

**Modelo inicial:**

- $X \sim \text{Gamma}(1/2, 1/2)$
- $R = \frac{\rho - 3 + \sqrt{(1+\rho)(9+\rho)}}{4(1+\rho)}$ ,  $\rho = \frac{c}{\lambda} - 1$

**Modelo transformado:**

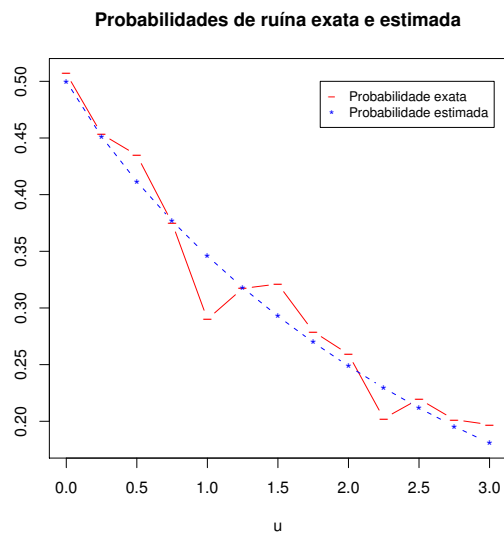
- $\lambda_L = \lambda(1 + \rho R)$
- $X^{(L)} \sim \text{Gamma}(1/2, 1/2 - R)$

**Probabilidade exata da ruína:**

$$\Psi(u) = \frac{\rho(1-2R)e^{-Ru}}{1+(1+\rho)(3R-1)} + \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2} e^{-(x+1)u/2}}{\{x^{1/2}[1+(1+\rho)(x+1)/2]\}^2+1} dx$$

**2.5.1 Valor das indenizações individuais com distribuição Gamma: exemplo com  $\lambda = 1$ ,  $c = 2$  e  $N = 100$**

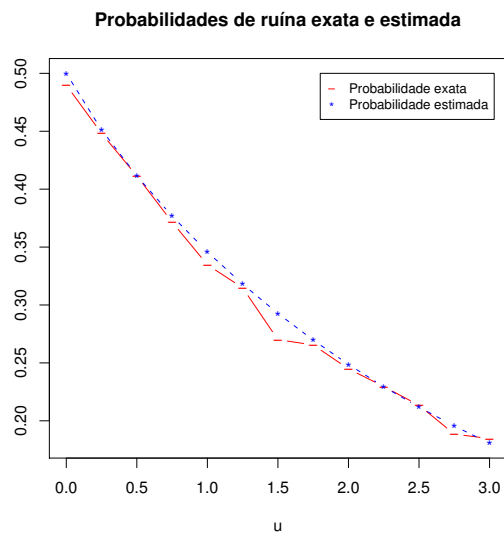
$u$	$\psi_a(u)$	$\psi(u)$	$\mathcal{E}_{abs}$	$\mathcal{E}_{rel} (\%)$
0	4.994922e-01	5.000000e-01	5.078360e-04	0.1
5	9.880379e-02	9.630627e-02	2.497518e-03	2.6
10	2.013311e-02	2.038620e-02	2.530906e-04	1.2
15	4.116900e-03	4.341783e-03	2.248829e-04	5.2
20	8.138207e-04	9.257388e-04	1.119181e-04	12
25	1.850911e-04	1.974348e-04	1.234367e-05	6.3
30	4.196055e-05	4.211039e-05	1.498417e-07	0.36





## 2.5.2 Indenizações individuais com distribuição Gamma: exemplo com $\lambda = 1$ , $c = 2$ e $N = 1000$

$u$	$\psi_a(u)$	$\psi(u)$	$\mathcal{E}_{abs}$	$\mathcal{E}_{rel}$ (%)
0	4.560040e-01	5.000000e-01	4.399600e-02	8.8
5	9.612702e-02	9.630627e-02	1.792577e-04	0.19
10	1.995076e-02	2.038620e-02	4.354396e-04	2.1
15	4.214910e-03	4.341783e-03	1.268723e-04	2.9
20	9.556930e-04	9.257388e-04	2.995424e-05	3.2
25	1.967673e-04	1.974348e-04	6.674376e-07	0.34
30	4.001175e-05	4.211039e-05	2.098646e-06	5



## Capítulo 3

# Simulação da probabilidade de ruína (caudas pesadas)

Neste capítulo consideraremos estimadores Monte Carlo para distribuições com cauda pesada.

### 3.1 Exemplos

Alguns exemplos de distribuições com cauda pesada:

1. *Lognormal*:  $e^{\mu+\sigma Z}$ ,  $Z \sim N(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln x - \mu)^2 / (2\sigma^2)}$$

2. *Weibull*:

$$\bar{F}(x) = e^{-x^\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

O tipo de distribuições com cauda pesada que iremos considerar são as chamadas de *variação regular* (com índice  $-\alpha$ ) se:

$$\bar{F}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha},$$

onde  $L$  tem *variação lenta* se:

$$\frac{L(xt)}{x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Por exemplo são de variação regular:

- Pareto,
- Distribuições estáveis,
- Loggama.

## 3.2 Distribuições subexponenciais

Uma classe de distribuições de variação regular é formada pelas distribuições subexponenciais que definiremos a seguir.

### 3.2.1 Definição

Seja  $F$  uma distribuição no  $[0, \infty)$  e sejam  $X_1, X_2, \dots$  i.i.d. com distribuição  $F$ .  $F \in \mathcal{S}$ , a classe das distribuições subexponenciais se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(X_1 > x)} = n$$

(É suficiente  $n = 2$ .)

$$P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > x) \sim nP(X_1 > x).$$

Isto significa que o único modo de que a soma seja grande é que algum dos somandos seja grande.

### 3.2.2 Algumas propriedades

Uma propriedade útil das distribuições subexponenciais é que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1, \text{ uniformemente sobre } y < y_0.$$

No contexto da probabilidade da ruína:

$$\psi(u) = P(\tau_u < \infty) \sim \frac{1}{\mu} \int_x^\infty \bar{F}(y) dy$$

sempre que  $\int_x^\infty \bar{F}(y) dy$  tem cauda subexponencial. Isto equivale (em geral) a que  $F \in \mathcal{S}$

### 3.2.3 Uma classificação

A classe  $\mathcal{S}$  pode ser dividida entre as distribuições de variação regular (VR) e o resto ( $\mathcal{S}_E$ ).

No contexto de Valores Extremos,  $F \in \text{MDA}(H)$  (*Maximo Dominio de Atração de H*) se existem constantes  $a_n, b_n$  tais que:

$$a_n(\max(X_1, \dots, X_n) - b_n) \xrightarrow{d} H$$

Observe que se  $F \in \mathcal{S}$  então tem suporte não limitado, logo  $H \sim \Lambda$  (Gumbell) ou  $H \sim \Phi_\alpha$  (Frechet)

Assim temos dois casos:

1. Se  $H \sim \Phi_\alpha$  então tem variação regular (com índice  $\alpha$ ).
2. Se  $F \in \mathcal{S}_E$  então  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$

No que segue vamos considerar somente o primeiro caso

### 3.2.4 Resultado limite na cauda:

Seja  $Y$  com distribuição  $F \in \mathcal{S}$  e seja  $\gamma(x) = \mathbb{E}[Y - x | Y > x]$  o tempo de vida residual.

Vale que:

$$P\left(\frac{Y - x}{\gamma(x)} > y | Y > x\right) = \frac{\bar{F}(x + y\gamma(x))}{\bar{F}(x)} \rightarrow P(V_\alpha > y),$$

- $V_\alpha$  é Pareto se  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ .
- $V_\alpha$  é Exponencial se  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ .

### 3.2.5 Caracterização do instante da ruína

Considere  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $X_i \in \mathcal{S}$ . O evento  $\{S_n > x\}$ , com  $x$  grande, acontece como consequência de um grande salto.

Qual é a distribuição condicional de  $S_n$  condicionada a  $S_n > x$ :  $P^x(\in \cdot) = P(S_n \in \cdot | S_n > x)$ ?

Se  $F \in \text{MDA}(H)$ , então a  $P^x$ -distribuição de  $\tau(x)/\gamma(x)$  converge em distribuição a  $V_\alpha/\mu$ . Onde  $\tau(x) = \inf \{n > 0 : S_n > x\}$ . (Asmussen e Klüppelberg(1996))

### 3.2.6 Taxa de falha

Considere  $\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$  a taxa de falha e  $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(y)dy$  a função da taxa de falha.

$$f(x) = \lambda(x)e^{-\Lambda(x)}$$

Se  $X$  tem uma taxa de falha decrescente, então uma condição necessária e suficiente para que  $X \in \mathcal{S}$  é que:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \lambda(x)e^{x\lambda(u) - \Lambda(x)} dx = 1$$

(Pitman(1980)).

### 3.3 Algoritmos Monte Carlo Condicionais para estimar $\psi(u)$ , na classe $\mathcal{S}$

#### 3.3.1 Monte Carlo condicional I

Vamos considerar os seguintes estimadores Monte Carlo:

1. Monte Carlo direto:

$$Z_{MCD}(u) = I_{\{S_n > u\}}$$

2. Monte Carlo condicional (I), condicionando em relação a  $X_1, \dots, X_{n-1}$ :

$$Z_{MCC}(u) = P(S_n > u | X_1, \dots, X_{n-1}) = \bar{F}(u - S_{n-1})$$

Observe que  $Z_{MCC}(u)$  tem menor variância que  $Z_{MCD}(u)$ . Mas  $Z_{MCC}(u)$  tem a sua variância da mesma ordem do que  $Z_{MCD}(u)$  pois:

$$\mathbb{E}Z_{MCC}(u)^2 \geq \mathbb{E}[\bar{F}u(x - S_{n-1})^2; X_1 > u] = P(X_1 > u) = \bar{F}(u)$$

E se  $X_1 > u$  então  $S_{n-1} > u$ .

#### 3.3.2 Monte Carlo condicional II: Asmussen e Binswander(1997)

Condicionando em relação a  $X_{(1)}, \dots, X_{(n-1)}$  temos que :

$$\begin{aligned} Z_{MCEO}(u) &= P(S_n > u | X_{(1)}, \dots, X_{(n-1)}) \\ &= \frac{\bar{F}((u - S_{n-1}^*) \vee X_{(n-1)})}{\bar{F}(X_{(n-1)})} \end{aligned}$$

Onde  $S_{n-1}^* = X_{(1)} + \dots + X_{(n-1)} = S_n - X_{(n)}$

Para ver isso observe que:

$$P(X_{(n)} > u | X_{(1)}, \dots, X_{(n-1)}) = \frac{\bar{F}(X_{(n-1)} \vee u)}{\bar{F}(X_{(n-1)})}$$

Logo:

$$\begin{aligned} &P(S_n > u | X_{(1)}, \dots, X_{(n-1)}) \\ &= P(S_{n-1}^* + X_{(n)} > u | X_{(1)}, \dots, X_{(n-1)}) \\ &= P(X_{(n)} > u - S_{n-1}^* | X_{(1)}, \dots, X_{(n-1)}) \\ &= \frac{\bar{F}((u - S_{n-1}^*) \vee X_{(n-1)})}{\bar{F}(X_{(n-1)})} \end{aligned}$$

**Teorema (Asmussen e Binswander(1997)):**

*Suponha que  $\bar{F}(x) = L(x)/x^\alpha$ , ( $\alpha > 1$ ), com  $L(x)$  de variação regular. Então  $Z_{MCEO}(u)$  é logaritmicamente eficiente.*

### 3.3.3 Monte Carlo Condicional III: Asmussen e Kroese (2004)

Se  $M_k = \max(X_1, \dots, X_k)$  então:

$$P(S_n > u) = nP(S_n > u, M_n = X_n)$$

Podemos considerar o seguinte estimador:

$$\begin{aligned} Z_{MCCP}(u) &= nP(S_n > u, M_n = X_n | X_1, \dots, X_{n-1}) \\ &= n\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1})) \end{aligned}$$

Sob certas condições para  $N$  e para  $L$  (no caso de variação regular),

$$Z_{MCCP}(u) = N\bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})),$$

tem erro relativo limitado.

### 3.4 Algoritmos Monte Carlo com amostragem por importância para estimar $\psi(u)$ , na classe $\mathcal{S}$

#### 3.4.1 Função de importância

Suponha que  $f$  é a densidade de  $F$ . Queremos construir uma densidade com a cauda muito pesada, e suponha, também, que  $\bar{F}(x) \sim c/\log x$  Agora defina:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\eta}{x(\log x)^2}, & x > a \\ \gamma g(x), & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

onde  $a \geq e$ ,  $\eta \geq 0$ ,  $g$  é uma densidade e:

$$\int_0^\infty h(x)dx = \eta \int_a^\infty x^{-1}(\log x)^{-2}dx + \gamma = \frac{\eta}{\log a} + \gamma = 1$$

Com a condição: a distribuição  $K$  com densidade  $k(x) = f^2(x)/ch(x)$  com  $c = \int_0^\infty f^2/h$  é subexponencial e  $\bar{K} \leq \log \bar{F}^2$ .

No caso Weibull basta  $h(x) = (\alpha - 1)(1 + x)^\alpha$  com  $\alpha \in (1, \infty)$

#### 3.4.2 Amostragem por importância I

**Dois estimadores. Asmussen, Binswander, Hojgaard(2000)**

É possível definir dois estimadores usando as técnicas de amostragem por importância:

1. Seja:

$$Z_1(u) = \frac{f(X_1)}{h(X_1)} I_{\{S_n > u\}}$$

com  $X_1 \sim h$  e  $X_2, \dots, X_n \sim F$ .

Mas:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}Z_1^2(u)}{z(u)} > c$$

logo não é assintoticamente eficiente.

2. Considere agora:

$$Z_2(u) = \frac{f(X_1)}{h(X_1)} \cdots \frac{f(X_n)}{h(X_n)} I_{\{S_n > u\}}$$

$Z_2(u)$  é logaritmicamente eficiente.

### 3.4.3 Amostragem por importancia II: Perturbação da taxa de falha

#### Densidade perturbada, Juneja e Shahabuddin(2002)

Usando o teorema de Pitman, perturbamos a taxa de falha:

$$\lambda(x) \Rightarrow \lambda(x)(1 - \theta), \quad 0 \leq \theta < 1$$

E obtemos a seguinte densidade perturbada:

$$f(x) = \lambda(x)e^{-\int_0^x \lambda(y)dy} \Rightarrow f_\theta(x) = \lambda(x)(1 - \theta)e^{-\int_0^x (1-\theta)\lambda(y)dy}$$

No caso Pareto:

$$f(x) = \frac{(\alpha - 1)}{x^\alpha}, (\alpha > 1) \Rightarrow f_\theta(x) = \frac{(\alpha - 1)(1 - \theta)}{x^{1+(\alpha-1)(1-\theta)}}$$

Considere:

$$Z_1(u) = \frac{f(X_1)}{f_\theta(X_1)} \cdots \frac{f(X_n)}{f_\theta(X_n)} I_{\{S_n > u\}}$$

Temos que  $Z_1(u)$  é logaritmicamente eficiente para estimar  $P(S_n > u)$  mas  $Z_1(u)$  não é logaritmicamente eficiente para estimar  $P(S_N > u)$ .

Deslocando a densidade perturbada temos que:

$$f_{\theta, x^*(u)}(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq x^*(u) \\ \frac{\bar{F}(x^*(u))}{\bar{F}_\theta(x^*(u))} f_\theta(x), & x > x^*(u). \end{cases}$$

No caso Pareto:

$$x^*(u) = \left( \frac{(\alpha - 1)^2 \log^2 u}{ab^2} \right)^{1/(1-\alpha)}, \quad a > 0, b > 0 \text{ constantes.}$$

Considere:

$$Z_2(u) = \frac{f(X_1)}{f_{\theta, x^*(u)}(X_1)} \cdots \frac{f(X_N)}{f_{\theta, x^*(u)}(X_N)} I_{\{S_N > u\}}$$

Temos que  $Z_2(u)$  é logaritmicamente eficiente para estimar  $P(S_N > u)$ .



### 3.5 Implementação de Monte Carlo condicional

**3.5.1 Erros relativos dos estimadores:**  $X \sim \text{Pareto}$ ,  $a = 3/2$ ,  $N = 10000$ ,  $\rho = 0.25$

u	$MCD(u)$	$MCC(u)$	$MCEO(u)$	$MCCP(u)$
0	0	0	0	0.6
5	2	0.79	0.76	0.95
10	2.5	1.1	0.96	1
50	4.1	1.9	1.5	1.1
100	5	2.4	1.7	1.1
500	7.8	3.8	2.1	1
1000	9.6	4.6	2.1	1

**3.5.2 Erros relativos dos estimadores:**  $X \sim \text{Pareto}$ ,  $a = 3/2$ ,  $N = 10000$ ,  $\rho = 0.5$

u	$MCD(u)$	$MCC(u)$	$MCEO(u)$	$MCCP(u)$
0	0	0	0	0.94
5	1.6	0.86	0.82	1.3
10	2	1.2	1.1	1.4
50	3.3	2.2	1.7	1.5
100	4.1	2.7	2	1.5
500	6.2	4.3	2.6	1.5
1000	7.6	5.3	2.7	1.5

**3.5.3 Erros relativos dos estimadores:**  $X \sim \text{Pareto}$ ,  $a = 3/2$ ,  $N = 10000$ ,  $\rho = 0.75$

u	$MCD(u)$	$MCC(u)$	$MCEO(u)$	$MCCP(u)$
0	0	0	0	1.3
5	1.1	0.7	0.68	1.6
10	1.3	0.97	0.9	1.7
50	2.2	1.8	1.5	1.9
100	2.8	2.2	1.8	1.9
500	4.2	3.6	2.5	1.9
1000	5.3	4.5	2.8	1.8

**3.5.4 Erros relativos dos estimadores:  $X \sim \text{Pareto}$ ,  $a = 5/2$ ,  $N = 10000$ ,  $\rho = 0.25$**

u	$MCD(u)$	$MCC(u)$	$MCEO(u)$	$MCCP(u)$
0	0	0	0	0.61
5	5.9	3	2.5	1.7
10	9.4	4.8	3.5	1.6
50	33	16	5.8	1.1
100	43	28	2.3	1.1
500	139	103	2.1	0.99
1000	196	0.038	2.6	0.98

**3.5.5 Erros relativos dos estimadores:  $X \sim \text{Pareto}$ ,  $a = 5/2$ ,  $N = 10000$ ,  $\rho = 0.5$**

u	$MCD(u)$	$MCC(u)$	$MCEO(u)$	$MCCP(u)$
0	0	0	0	0.94
5	4.2	3	2.6	2.3
10	7.1	5	3.8	2.5
50	23	18	5.2	1.9
100	51	30	9.5	1.6
500	196	96	3.2	1.4
1000	196	0.69	3.4	1.4

**3.5.6 Erros relativos dos estimadores:  $X \sim \text{Pareto}$ ,  $a = 5/2$ ,  $N = 10000$ ,  $\rho = 0.75$**

u	$MCD(u)$	$MCC(u)$	$MCEO(u)$	$MCCP(u)$
0	0	0	0	1.3
5	2.5	2.1	2	2.4
10	4	3.4	3	3
50	15	13	6.9	3.1
100	27	25	8.8	2.4
500	139	86	4.2	1.8
1000		149	5.8	1.7

## Capítulo 4

### Referências

1. Asmussen, S. Ruin Probabilities, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, World Scientific, 2001.
2. Asmussen, F., Avram, F. and Pistorius M.R., Russian and american put options under exponential phase type Levy models, Stochastic Processes and their Applications, 109, 79-112, 2004.
3. Cai, J. Ruin Probabilities and penalty functions with stochastic rates of interest, Stochastic Processes and their Applications, 112, 53-78, 2004.
4. Grandell, J. Aspects of Risk Theory, Springer series in Statistics, Springer-Verlag, 1991.
5. Jacobsen, M. Martingales and the distribution of the time to ruin, Stochastic Processes and their Applications, 107, 29-53, 2003.