

**Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas - ICEX
Departamento de Estatística**

**TEMPO DE VIDA DE PRATELEIRA DE
PRODUTOS ALIMENTÍCIOS LEVANDO EM
CONTA ERROS DE AVALIAÇÃO**

Fernando Ferreira Kelles

BELO HORIZONTE – MINAS GERAIS

Julho/2007



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação
Caixa Postal 702
31270-901 Belo Horizonte- MG – Brasil

Telefone (31) 3499-5923
Fax (31) 3499-5924
E-mail: pgest@ufmg.br
WEB: <http://www.est.ufmg.br/posgrad/>

A presente dissertação, intitulada **“Tempo de Vida de Prateleira de Produtos Alimentícios levando em Conta Erros de Avaliação”** de autoria de **Fernando Ferreira Kelles** submetida à Comissão Examinadora abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM ESTATÍSTICA** em 08 de agosto de 2007.

Belo Horizonte, 08 de agosto de 2007.


Prof. Marta Afonso Freitas
Orientadora – Departamento de Engenharia de Produção -UFMG


Prof. Leonardo Pereira Santiago
Departamento de Engenharia de Produção– UFMG


Prof. Roberto da Costa Quinino
Departamento de Estatística – UFMG

**Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas - ICEX
Departamento de Estatística**

MESTRADO EM ESTATÍSTICA

**Tempo de vida de prateleira de produtos alimentícios
levando em conta erros de avaliação.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Profa. Marta Afonso Freitas

BELO HORIZONTE – MINAS GERAIS

Julho/2007

Versão final, após defesa aprovada por unanimidade pela banca examinadora em 08/08/2007, incluindo sugestões feitas pela banca e revisão final da orientadora Marta Freitas.

CITAÇÃO

“Toda investigação consciente requer consagração, dedicação e um entusiasmo firme e inalterável”.

RAUMSOL

Dedico esse trabalho a minha esposa e filha às quais me une o afeto que suavizou as dificuldades e me deu estímulos fundamentais para sua conclusão.

Agradecimentos

- ❖ A todos que de uma e outra maneira colaboraram para que esse trabalho se tornasse possível;
- ❖ À minha esposa que foi a primeira a me estimular no caminho da Estatística;
- ❖ Ao corpo docente do Departamento de Estatística do ICEX / UFMG, cujo empenho e elevado nível foi todo um estímulo na realização dessa empreitada;
- ❖ Aos colegas de mestrado que me auxiliaram em muitas situações ao longo do curso e cujos conselhos oportunos foram fundamentais em muitas etapas do mesmo;
- ❖ A minha orientadora, cuja paciência, compreensão e precisos conselhos e correções tornaram possível culminar este trabalho;
- ❖ A meus pais cujo exemplo de esforço e dedicação ao longo da vida, ofereceram fundamentais incentivos para ser conseqüente com meus empenhos em busca de novas alternativas para a mesma;
- ❖ Finalmente, porém não por último, a Deus, que me ofereceu a vida e me permitiu ter forças e energias ao longo dessa jornada e a Raumsol que ao me abrir as portas da evolução consciente me ensinou que “a luta é lei da vida” donde infiro que, portanto, devo lutar para alcançar maiores realizações em todos os campos da mesma.

Sumário

Citação	iii
Agradecimentos	v
Sumário	vii
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
Resumo	xvii
Abstract	xix
1. Introdução	3
1.1 Enfoques anteriores	4
1.2 Objetivo do trabalho	6
2. Situação Motivadora	9
3. Modelagem utilizada em Freitas-Borges e Ho (2003) revisitada – Clássica sem erros de classificação	11
4. Abordagem Bayesiana sem erros de classificação e tempo	

SUMÁRIO

de falha exponencial	17
4.1 Considerações iniciais	
4.2 Estratégia de abordagem do problema sob o enfoque Bayesiano	19 20
4.3 Dados gerados para aplicação dos procedimentos	21
4.4 Obtenção da distribuição “a posteriori” de α utilizando uma distribuição “a priori” $Gama(\kappa, \lambda)$	25
4.5 Função de Verossimilhança para valores de α amostrados de uma distribuição $Gama(16;800)$	26
4.6 Obtenção da distribuição “a posteriori” de α , com base na distribuição “a priori” $Gama(16;800)$	32
4.7 Percentis de falha “a posteriori” das amostras avaliadas, com base no tempo de falha exponencial e distribuição “a priori” $Gama(16;800)$	
4.8 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α	33
4.9 Obtenção da distribuição “a posteriori” de α , com base na distribuição “a priori” de Jeffreys.	36
4.10 Percentis de falha das amostra avaliadas, com base em tempo de falha exponencial e na distribuição “a priori” de Jeffreys.	38
5. Abordagem Bayesiana sem erros de classificação e tempo de falha exponencial	41 43
5.1 Utilizando a distribuição Exponencial como modeladora do tempo de falha.	44
5.2 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando uma $Gama(16;800)$ e erros uniformes	
5.2.1 Obtenção da distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é $Gama(16;800)$ e a dos erros é $U(0,001;0,01)$)	51
5.3 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α e erros uniformes limitados a 1%.	
5.3.1 Obtenção da distribuição marginal “a posteriori” de α , com base na distribuição de Jeffreys e erros uniformes.	61
5.3.2 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a de Jeffreys e a dos erros é $U(0,001;0,01)$).	63
5.4 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando uma $Gama(16;800)$ e erros uniformes limitados a 5%.	65

SUMÁRIO

6. Utilização dos dados reais obtidos no experimento base feito por Freitas, Borges e Ho	69
6.1 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando uma Gama(16;800) e erros uniformes para o atributo ODOR.	71
6.2 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Gama(16;800) e a dos erros é U(0,001;0,01) para o atributo ODOR	72
6.3 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α e erros uniformes limitados a 1%. Atributo ODOR.	73
6.4 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Jeffreys e a dos erros é U(0,001;0,01) para o atributo ODOR.	75
6.5 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando uma Gama(16;800) e erros uniformes para o atributo SABOR.	77
6.6 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Gama(16;800) e a dos erros é U(0,001;0,01) para o atributo SABOR.	78
6.7 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α e erros uniformes limitados a 1%. Atributo SABOR	79
6.8 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Jeffreys e a dos erros é U(0,001;0,01) para o atributo SABOR	82
6.9 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando uma Gama(16;800) e erros uniformes para o atributo ASPECTO	83
6.10 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Gama(16;800) e a dos erros é U(0,001;0,01) para o atributo ASPECTO	84
6.11 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α e erros uniformes limitados a 1%. Atributo ASPECTO	85
6.12 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Jeffreys e	87

SUMÁRIO

a dos erros é $U(0,001;0,01)$ para o atributo ASPECTO	
7. Conclusões	91
Anexo A	93
Anexo B	97
Anexo C	119
Anexo D	131
Anexo E	147
Anexo F	165
Anexo G	195
Anexo H	207
Anexo I	229
Anexo J	241
Anexo K	261
Anexo L	273
Referências Bibliográficas	293

Lista de Figuras

Fig. 3.1 - Desenho Esquemático da Coleta das Informações no Estudo Sensorial	11
Fig. 4.2 - Distribuições Gama possíveis de serem usadas como distribuições “a priori”	24
Fig. 4.3 - Distribuições Gama possíveis de serem usadas como distribuições “a priori”	24
Fig. 4.4 - Distribuição Gama(16;800) escolhida como distribuição “a priori” de α .	25
Fig. 4.5 - Função de Verossimilhança	26
Fig. 4.6 - Histograma de uma amostra de 5000 valores da distribuição “a posteriori” de α .	29
Fig. 4.7 - Comparação de valores “a priori” e “a posteriori”	30
Fig. 4.8 - Funções “a priori”, “a posteriori” e de Verossimilhança	31
Fig. 4.9 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (priori Gama(16;800))	32
Fig. 4.10 - Função de Verossimilhança com base em valores de α amostrados de uma $U(0,001;0,5)$	34
Fig. 4.11 - Função de Verossimilhança para os primeiros 5000 valores amostrado de α .	35
Fig. 4.12 - Distribuição de Jeffreys	35
Fig. 4.13 - Histograma dos Valores “a posteriori” de α , com base na distribuição “a priori” de Jeffreys	37
Fig. 4.14 - Comparação entre as funções “a priori” de Jeffreys e a distribuição “a posteriori” do parâmetro α .	38
Fig. 4.15 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori de Jeffreys)	39
Fig. 5.1 - Histograma da Distribuição Marginal de α “a posteriori”	48
Fig. 5.2 - Histograma dos erros tipo 1 “a posteriori”	48
Fig. 5.3 - Histograma dos erros tipo 2 “a posteriori”	49
Fig. 5.4 a) - Verossimilhança de α “a priori” utilizando distribuição “a priori” Gama(16;800) com incorporação de erros uniformes até 1%.	50
Fig. 5.4 b) - Verossimilhança de α “a posteriori” utilizando distribuição “a priori” Gama(16;800) com incorporação de erros uniformes até 1%.	50
Fig. 5.5 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 1%)	52
Fig. 5.6 - Distribuição “a priori” de Jeffreys em função de α com erros de classificação até 1%	60
Fig. 5.7 - Valores de Verossimilhança em Função de α , extraídos de uma $U(0,001;0,5)$	60
Fig. 5.8 - Verossimilhança para os primeiros 10000 valores de α	61
Fig. 5.9 - Histograma da distribuição marginal “a posteriori” de α com base na distribuição de Jeffreys e erros uniformes	61
Fig. 5.10 - Verossimilhança marginal “a posteriori” em relação a α utilizando a distribuição “a priori” de Jeffreys e erros uniformes limitados a 1%	62
Fig. 5.11 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” de Jeffreys, e incorporação de erros uniformes	63

LISTA DE FIGURAS

limitados a 1%)	65
Fig. 5.12 - Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 5%	65
Fig. 5.13 - Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros uniformes até 5% e distribuição “a priori” Gama(16;800)	66
Fig. 5.14 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 5%)	67
Fig. 6.1 - Número de amostras avaliado a cada semana em função da semana de avaliação	70
Fig. 6.2 - Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1% - Experimento Real do Trabalho de Referência – Atributo ODOR	71
Fig. 6.3 - Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Atributo ODOR	72
Fig. 6.4 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Atributo ODOR	73
Fig. 6.5 - Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1% - Experimento Real do Trabalho de Referência – Prióri Jeffreys - Atributo ODOR	74
Fig. 6.6 - Distribuição “a priori” de Jeffreys em função de α com erros de classificação até 1% para o experimento base – Atributo ODOR	74
Fig. 6.7 - Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Prióri Jeffreys - Atributo ODOR	75
Fig. 6.8 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” de Jeffreys, e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Atributo ODOR	76
Fig. 6.9 - Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1% - Experimento Real do Trabalho de Referência – Prióri Gama(16;800) -Atributo SABOR	77
Fig. 6.10 - Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Prióri Gama(16;800) - Atributo SABOR	78
Fig. 6.11 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Prióri Gama(16;800) - Atributo SABOR	79
Fig. 6.12 - Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1% - Experimento Real do Trabalho de Referência – Prióri Jeffreys – Atributo SABOR	80
Fig. 6.13 - Distribuição “a priori” de Jeffreys em função de α com erros de classificação até 1% para o experimento base – Atributo SABOR	81
Fig. 6.14 - Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” de Jeffreys – Atributo SABOR	81
Fig. 6.15 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” de Jeffreys, e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Atributo SABOR	82
Fig. 6.16 - Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1% - Experimento Real do Trabalho de Referência – Prióri	83

LISTA DE FIGURAS

Gama(16;800) -Atributo ASPECTO	
Fig. 6.17 - Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Priori Gama(16;800) - Atributo ASPECTO	84
Fig. 6.18 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Priori Gama(16;800) - Atributo ASPECTO	85
Fig. 6.19 - Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1% - Experimento Real do Trabalho de Referência – Priori Jeffreys – Atributo ASPECTO	86
Fig. 6.20 - Distribuição “a priori” de Jeffreys em função de α com erros de classificação até 1% para o experimento base – Atributo ASPECTO	87
Fig. 6.21 - Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Atributo ASPECTO	87
Fig. 6.22 - Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” de Jeffreys, e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Atributo ASPECTO	88

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 - Parâmetros possíveis para a distribuição Gama, “a priori”, em função de κ .	23
Tabela 4.2 - Valores mínimo, médio e máximo das diversas distribuições “a priori” possíveis, no intervalo onde se concentram os dados do experimento base.	23
Tabela 4.3 – Comparação entre os valores de α “a priori” e “a posteriori”	30
Tabela 4.4 - Estatísticas descritivas para a distribuição “a posteriori” de percentis 100p%, para vários valores de p com distribuição “a priori” de α , Gama(16;800)	33
Tabela 4.5 - Estatísticas descritivas para a distribuição “a posteriori” de percentis 100p%, para vários valores de p com distribuição “a priori” de α , de Jeffreys	40
Tabela 4.6 - Comparação entre os valores de percentis de falha com a utilização das distribuições “a priori” Gama(16;800) e Jeffreys	40
Tabela 5.1 - Definição dos erros tipo 1 e tipo 2	41
Tabela 5.2 - Estatísticas da Distribuição Marginal dos Erros	49
Tabela 5.3 - Comparação dos valores de α “a priori” e “a posteriori”, com e sem incorporação de erros uniformes limitados a 1% e utilização da distribuição “a priori” Gama(16;800)	51
Tabela 5.4 - Estatísticas descritivas para a distribuição “a posteriori” de percentis 100p%, para vários valores de p com distribuição “a priori” de α , Gama(16;800) e incorporação de erros uniformes limitados a 1%	53
Tabela 5.5 - Comparação entre os tempos dos percentis de amostras sem e com incorporação de erros e utilização da distribuição “a priori” Gama(16;800)	53
Tabela 5.6 - Comparação dos valores de α “a priori” e “a posteriori”, com e sem incorporação de erros uniformes limitados a 1% e utilização da distribuição “a priori” de Jeffreys	62
Tabela 5.7 - Estatísticas descritivas para a distribuição “a posteriori” de percentis 100p%, para vários valores de p com distribuição “a priori” de α de Jeffreys e incorporação de erros uniformes limitados a 1%	64
Tabela 5.8 - Comparação entre os tempos dos percentis de amostras sem e com incorporação de erros uniformes até 1% com utilização da distribuição “a priori” de Jeffreys	64
Tabela 6.1 - ATRIBUTO: ODOR - Comparação entre os tempos dos percentis de amostras que falharam utilizando a distribuição “a priori” Gama(16;800 e a distribuição “a priori” de Jeffreys	77
Tabela 6.2 – ATRIBUTO SABOR - Comparação entre os tempos dos percentis de amostras que falharam utilizando a distribuição “a priori” Gama(16;800) e a distribuição “a priori” de Jeffreys	83
Tabela 6.3 - ATRIBUTO: ASPECTO - Comparação entre os tempos dos percentis de amostras que falharam utilizando a distribuição “a priori” Gama(16;800 e a distribuição “a priori” de Jeffreys	89

Resumo

Esta dissertação é uma continuação do trabalho feito por Freitas, M. A.; Borges, W.; Ho, L. L. (2003) onde se propôs o modelo Weibull como subjacente para modelagem do tempo de vida de prateleira de produtos alimentícios com base em avaliações sensoriais. Nesta abordagem o modelo incorpora erros de classificação que possam ser cometidos ao se utilizar os métodos de avaliação sensoriais para determinação da vida de prateleira (shelf life). O estudo utilizou técnicas Bayesianas Foi utilizada a distribuição exponencial para a modelagem do tempo de falha (ou tempo de vida de prateleira), como uma primeira abordagem desse problema O efeito de erro de classificação nos intervalos de credibilidade para percentis de interesse foram estudados através de simulações. Este efeito foi estudado com base em distribuições “a priori” informativas e não informativas (neste caso, distribuições de Jeffreys). Finalmente, a modelagem foi aplicada aos dados do experimento real realizado no trabalho dos autores anteriormente citados.

Palavras-chave: erros de classificação; vida de prateleira; priori de Jeffreys; inferência Bayesiana; SIR.

Abstract

This dissertation is a follow up of the work done by Freitas, M. A.; Borges, W.; Ho, L. L (2003) in which a Weibull model was proposed as the underlying distribution for the shelf-life of food products based on sensory evaluation data. In this approach the model incorporates misclassification errors that can occur when applying sensory evaluation methods for shelf-life determination. The study used Bayesian techniques. As a first approach to this problem, the exponential distribution was used to model the “failure times” (or shelf life times). A simulation study was implemented to evaluate the effect of misclassification errors on the credibility intervals for percentiles. This effect was studied using informative and non-informative (in this case Jeffreys’ distributions) priori distributions. Finally, the approach was applied to the real data set presented in the work of the authors mentioned above.

Key-words: misclassification errors; shelf life; Jeffreys’ priori; Bayesian inference; SIR

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho é mais um enfoque sobre o tema do tempo de vida de prateleira de produtos alimentícios, conhecido na literatura em inglês como *shelf life*. Esse termo é utilizado para designar a duração de tempo correspondente a uma perda tolerável de qualidade de um alimento processado e também de outros itens perecíveis. R. P. Singh, (2000), sistematiza uma série de fatores que levam à perda de qualidade dos alimentos com a ocorrência de numerosas mudanças durante o processamento e armazenamento dos mesmos. Um produto é dito ser impróprio para consumo humano quando ocorrem alterações em suas características químicas, microbiológicas e/ou sensoriais (odor, sabor e aparência, por exemplo). As condições de processamento e armazenagem podem influenciar a qualidade dos atributos dos alimentos levando a que os produtos apresentem, após um certo tempo, uma condição insatisfatória para o consumo. Nesse momento considera-se que o produto atingiu o fim de seu *shelf-life*. Um alimento que tenha passado algum tempo em disponibilidade para o público, pode estar seguro para o consumo porém, suas qualidades ótimas não estarem mais garantidas. Também pode ocorrer que um alimento esteja sensorialmente adequado para o consumo, mas suas qualidades microbiológicas estarem inadequadas, o que leva também a se considerar vencido o seu *shelf-life*.

Estudos químicos e microbiológicos são realizados inicialmente para estimar o tempo de vida do produto, impedindo, dessa forma, que produtos sejam consumidos indevidamente. Contudo, quando o consumidor adquire um produto alimentício, ele avalia o mesmo através de seus atributos sensoriais, tais como odor, sabor, aparência, textura, etc. Caso alguns destes aspectos não agradem ao consumidor, ele poderá ser levado a optar por uma outra marca em sua próxima compra do mesmo produto.

Desta forma, além de estudos químicos e microbiológicos, as empresas também conduzem estudos baseados em avaliações sensoriais a fim de estimar o tempo de vida de prateleira (*shelf-life*) dos produtos alimentícios.

Em um estudo típico, várias unidades do produto são armazenadas sob determinadas condições ambientais e, em tempos pré-estabelecidos, uma amostra das unidades é retirada do local de armazenagem e levada a julgamento de avaliadores treinados (painelistas).

Cada avaliador julga separadamente cada atributo do produto (tais como odor, sabor, aparência, etc.) em uma escala de 7 pontos, por exemplo, variando de 0 a 6. Quanto mais próxima de zero for a pontuação atribuída ao produto, mais inadequado para consumo humano o mesmo se encontra em relação ao atributo considerado. Usualmente, as empresas definem um ponto de corte “c” na escala adotada que indica a “falha” do produto. Em outras palavras uma unidade experimental do produto que receba uma avaliação em pontos (*escore*) menor ou igual a “c” no atributo “sabor”, por exemplo, é considerada inadequada para consumo em relação àquele atributo especificamente. Ressalte-se que como os *escores* são atribuídos separadamente à cada atributo, é possível que para uma mesma unidade avaliada em um determinado tempo, alguns atributos ainda estejam adequados ($escore > c$) enquanto que outros não estejam ($escore \leq c$).

INTRODUÇÃO

Considerando a natureza destrutiva do teste, a unidade do produto, após ser avaliada, não pode ser novamente armazenada e, por isso, é descartada. Ou seja, não se tem um acompanhamento da mesma unidade até o final do período de ensaios.

Este trabalho tomou por base um estudo realizado por Freitas, Borges e Ho ([12], 2003) motivado por uma situação real envolvendo avaliações sensoriais em um produto alimentício industrializado. Essa situação é descrita em detalhes na Seção 2.

Na literatura são apresentadas algumas abordagens básicas para modelagem de dados oriundos de avaliações sensoriais visando à determinação da vida de prateleira, as quais serão apresentadas a seguir.

1.1 Enfoques anteriores

Gacula (1975) abordou essa questão utilizando um modelo de Regressão Linear Simples, onde a variável preditora (X) é o tempo de avaliação (por exemplo, em semanas, meses) e a variável resposta (Y) é a pontuação recebida pela unidade/atributo do produto em um dado tempo (pré-estabelecido) de avaliação. Assim:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_{ij}$$
$$i = 1, \dots, k \quad j = 1, \dots, n_i$$

onde:

y_{ij} : pontuação (score) da j –ésima unidade avaliada na i –ésima data de avaliação;

X_i : variável independente representando os tempos pré-fixados de avaliação

n_i : número de unidades avaliadas na data X_i .

Após a estimação dos parâmetros do modelo, a informação de interesse – o tempo no qual a unidade do produto/atributo recebe o escore “ c ” (ponto de corte) -, é obtida através da substituição deste valor na equação da reta estimada (fazendo $y = c$) e resolvendo-se a equação em função de X .

Essa abordagem, em grande parte das aplicações práticas, tem-se mostrado inadequada, pois os dados oriundos deste tipo de estudo violam suposições básicas para a utilização da Análise de Regressão (por exemplo, normalidade e homocedasticidade). Embora seja possível construir intervalos de confiança para a quantidade estimada, a maior desvantagem desse enfoque é a dificuldade de estimar características importantes da distribuição do tempo de vida de prateleira tais como percentis e fração de itens “não conformes”. Tais informações são bastante relevantes para serem ignoradas, pois são poderosos instrumentos para tomadas de decisão como a estimação do tempo de vida de prateleira (*shelf-life*) do produto e a data de validade. Além disso, torna-se difícil incorporar covariáveis¹ no modelo e construir intervalos de confiança para as quantidades mencionadas.

¹ Variáveis secundárias que levam em conta vários fatores que podem incidir em um experimento controlado como condições físico-químicas da matéria prima utilizada, etc.

INTRODUÇÃO

Gacula e Kubala (1975) utilizaram distribuições comumente empregadas para modelar “tempos até a falha” ou “tempos de vida” (Weibull, Lognormal e Valor Extremo, por exemplo) na modelagem de dados oriundos das avaliações sensoriais. Para isso, definiram como “tempo de falha” o tempo (data) de avaliação no qual a unidade/atributo do produto recebeu nota menor ou igual ao ponto de corte “c”. Assim, devido à natureza destrutiva do ensaio, as unidades avaliadas com notas maiores do que “c” em um dado tempo de avaliação, são registradas como tendo “tempos de falha” censurados à direita (Kalbfleisch e Prentice, 2002).

Os autores utilizaram os tempos de falha censurados à direita e não-censurados para avaliar a adequação dos diferentes modelos estatísticos. Uma vez escolhida a distribuição que melhor descreve o comportamento do fenômeno, tal abordagem permite que se estime, por exemplo, percentis e frações de falha da distribuição do tempo de vida de prateleira.

Todavia, para as unidades que receberam nota igual ou menor que o ponto de corte o que se pode afirmar é que na verdade o produto/atributo se deteriorou (“falhou”) em algum momento desde o início do período de armazenamento até o momento de sua avaliação. Isso caracteriza uma “censura à esquerda”. Portanto, dados oriundos de avaliações sensoriais, quando vistos desta forma são censurados à direita ou à esquerda, ou seja, casos especiais de censura intervalar (Kalbfleisch e Prentice, 2002).

Utilizar o tempo de avaliação como sendo o “tempo de falha” pode levar a conclusões e estimativas equivocadas.

Freitas, Borges e Ho (2003) trataram o problema em questão através da dicotomização dos resultados. Foi definida uma nova variável Y_{ij} ($i=1,2,\dots,k; j=1,2,\dots,n_i$) que no tempo de avaliação fixo τ_i ($i=1,2,\dots,K$) assume valor “zero” se para a unidade j avaliada o tempo de vida é censurado à direita (a unidade ainda “não falhou”) ou 1 no caso de censura à esquerda (a unidade “falhou” entre o tempo 0 e a data τ_i de avaliação). Portanto, em cada tempo τ_i de avaliação tem-se uma amostra aleatória de tamanho n_i de uma variável aleatória Y_{ij} , distribuída segundo uma Bernoulli com probabilidade p_{ij} “de falha”, dada por:

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1) = P(0 < T_{ij} \leq \tau_i);$$

onde T_{ij} é a variável aleatória que representa o tempo de falha (ou tempo de vida de prateleira) da j -ésima unidade do produto na amostra de tamanho n_i , avaliada em τ_i . Esse “tempo de falha” foi modelado pelos autores segundo uma distribuição de Weibull, $W(\alpha_j; \delta)$, na qual o parâmetro de escala α_j foi escrito em função de variáveis explicativas (covariáveis ou fatores de um experimento planejado). Lembrando que com esta suposição, a probabilidade p_{ij} , de falha é $p_{ij} = 1 - R_j(\tau_i) = 1 - \exp\left[-(\alpha_j \tau_i)^\delta\right]$, onde $R_j(\tau_i)$ é a função de sobrevivência expressa através dos tempo de avaliação τ_i . A função de verossimilhança foi

INTRODUÇÃO

então escrita para a amostra de variáveis aleatórias Bernoulli (independentes) e os parâmetros do modelo estimados pelo método de máxima verossimilhança. Percentis e frações e itens não “conformes” em vários pontos no tempo foram estimados utilizando a propriedade de invariância dos estimadores de máxima verossimilhança. Esta abordagem será apresentada com um pouco mais de detalhes na Seção 3.

Costa (2005), generalizou o modelo anterior, incorporando variáveis explicativas (covariáveis ou variáveis de um experimento planejado) à forma funcional do parâmetro de forma (δ) da distribuição de Weibull, tornando-o mais flexível para o tratamento de dados oriundos de experimentos planejados ou não.

Gomes (2005), considerando a possibilidade de a escolha de um modelo paramétrico inapropriado levar a resultados falhos de estimativa de tempo de vida de prateleira dos produtos, utilizou, para esse mesmo fim, um modelo de riscos proporcionais. Esse modelo permite a incorporação de covariáveis e não exige que o tempo de sobrevivência siga uma distribuição de probabilidade. Apresenta a vantagem de não exigir a pré-suposição de qualquer modelo paramétrico específico. Todavia os resultados mostram que o mesmo é menos preciso (apresenta maior variabilidade nos resultados) que o modelo baseado na distribuição de Weibull e requer um número de parâmetros bem maior.

Um ponto comum nas três últimas abordagens é a dicotomização dos resultados tendo como base o ponto de corte estabelecido no protocolo de testes. De qualquer forma, os três últimos trabalhos citados baseiam-se nos escores atribuídos pelos painelistas. Entretanto, mesmo que devidamente treinados para a tarefa, é razoável supor que estes julgadores possam cometer erros que podem levar à “classificação” equivocada de um atributo/produto como adequado ou inadequado. Dependendo da magnitude da probabilidade de se cometer tais erros, a estimativa do tempo de vida de prateleira pode ficar seriamente comprometida.

Seria interessante incorporar esse elemento à modelagem, à semelhança do que já foi feito em trabalhos referentes à classificação de itens extraídos da linha de produção (“conformes” e “não conformes”) com o objetivo de controle de qualidade (Gaba, 1993; Quinino, 2005). Desta forma seria possível acessar também a magnitude destes erros, bem como seu efeito nas estimativas de características de interesse da distribuição do tempo de vida de prateleira.

1.2 Objetivo do trabalho

O objetivo do trabalho é retomar a abordagem básica apresentada em Freitas, Borges e Ho (2003), que neste texto será referenciado como FBH (2003) incorporando agora erros de classificação ao modelo. Ao contrário da utilização da inferência clássica e estimação por máxima verossimilhança, pretende-se olhar o problema sob o ponto de vista da inferência Bayesiana. Isso se deve, em parte para contornar dificuldades analíticas do desenvolvimento clássico e em parte porque estaremos partindo de um trabalho já realizado o que de “per si”, caracteriza informações “a priori”, típicas da análise Bayesiana. Pretende-se assim, a partir de tais informações, obter tanto as distribuições a posteriori de quantidades de interesse tais

INTRODUÇÃO

como os percentis da distribuição do tempo de vida de prateleira bem como das probabilidades dos erros de classificação.

Com relação às dificuldades analíticas mencionadas para o desenvolvimento clássico, mostramos no ANEXO A, o desenvolvimento da função de verossimilhança, quando erros de classificação são incorporados, utilizando como distribuição para a modelagem do tempo de vida a distribuição exponencial.

Ao longo das discussões em torno do tema, entendeu-se que seria interessante realizar o trabalho em duas etapas:

- i) utilizar a mesma modelagem de FBH (2003), **sem a incorporação de erros de classificação** mas agora sob a luz da inferência Bayesiana;
- ii) **incorporar erros de classificação** ao modelo e fazer as estimativas via inferência Bayesiana.

Ressaltamos, entretanto, que o objetivo central continua sendo o mesmo, ou seja, obter informações sobre a distribuição subjacente do tempo de vida de prateleira, em particular, através da estimação de percentis.

Com a utilização do enfoque Bayesiano, em que os parâmetros da distribuição postulada para o tempo de vida de prateleira são de fato considerados uma variável aleatória, estaremos buscando a distribuição “a posteriori” de alguns percentis selecionados.

Portanto, seja com a incorporação de erros de classificação ou não, as etapas que serão seguidas, serão basicamente:

- 1) Postular uma distribuição subjacente para o tempo de vida de prateleira;
- 2) Escrever a função de verossimilhança incorporando esta distribuição postulada em 1);
- 3) Postular uma distribuição “a priori” para os parâmetros da distribuição do tempo de vida de prateleira;
- 4) Encontrar a distribuição “a posteriori” para os parâmetros da distribuição do tempo de vida de prateleira utilizando 2) e 3);
- 5) Encontrar a distribuição “a posteriori” para alguns percentis selecionados.

No caso em que se incorporam os erros de classificação, os passos básicos a serem seguidos são:

- 1) Postular uma distribuição subjacente para o tempo de vida de prateleira;
- 2) Escrever a função de verossimilhança, incorporando esta distribuição postulada em 1) e também as probabilidades dos erros de classificação;
- 3) Postular uma distribuição “a priori” para os parâmetros da distribuição do tempo de vida de prateleira, postulada no passo 1) e para as probabilidades de erros de classificação;
- 4) Encontrar a distribuição “a posteriori” para os parâmetros da distribuição do tempo de vida de prateleira utilizando 2) e 3);

INTRODUÇÃO

- 5) Encontrar a distribuição “a posteriori” para cada probabilidade de erro de classificação de alguns percentis selecionados.

Este texto está assim organizado. Na Seção 2 é apresentada a situação prática motivadora deste e dos trabalhos anteriores. Na Seção 3, a modelagem básica apresentada em FBH (2003) é apresentada. Ela servirá de base para o desenvolvimento dos modelos propostos neste trabalho. Na Seção 4, será apresentada a mesma modelagem, agora sob o enfoque Bayesiano, ainda **sem a incorporação de erros de classificação** ao modelo. Iniciou-se a discussão desta abordagem utilizando como distribuição subjacente para o tempo de vida de prateleira a distribuição exponencial

Na Seção 5, o modelo, já com os erros de classificação incorporados, é apresentado. Aqui também, o problema foi tratado com a utilização da distribuição exponencial como subjacente.

* * *

2. SITUAÇÃO MOTIVADORA

O presente trabalho e outros que o precederam, referenciados na Seção 1, tem como motivação a situação prática que será descrita a seguir. O modelo que será desenvolvido nesta dissertação será aplicado a este banco de dados.

Uma indústria de alimentos implementou testes sensoriais com o intuito de determinar o tempo de vida de prateleira de um determinado produto manufaturado (desidratado) levando em conta a degradação de atributos sensoriais. Três atributos foram avaliados por julgadores treinados: odor, sabor e aparência.

Um lote de unidades do produto foi amostrado da linha de produção e tais unidades foram aleatoriamente alocadas a cada uma das seguintes condições de armazenagem:

- Refrigeração: Essas unidades foram mantidas sob refrigeração a 4° C (aproximadamente). Os níveis de temperatura e umidade não foram controlados, mas eram registrados diariamente e os valores médios semanais foram relatados. Essas unidades foram usadas como referência (controle) durante os testes.
- Temperatura e umidade ambientes: Os níveis de temperatura e umidade foram monitorados e registrados continuamente por um equipamento e os valores médios semanais foram reportados.
- Câmara climática: Os níveis de temperatura e umidade foram controlados (fixados) a 30° C e 80% respectivamente.
- Estufa: A temperatura foi controlada a 37° C. O equipamento não permitia o controle dos níveis de umidade. Os valores eram registrados diariamente, entretanto somente valores médios semanais foram reportados.

As duas últimas condições foram usadas a fim de simular um ambiente de armazenagem agressivo. Os pesquisadores esperavam observar uma degradação mais rápida dos atributos associados a produtos armazenados nestas condições quando comparado com a armazenagem em temperatura e umidade ambiente.

Quarenta e cinco pessoas foram treinadas para a avaliação das características sensoriais dos produtos. As avaliações foram feitas semanalmente, em datas pré-especificadas e no início do estudo. A cada semana, oito pessoas eram selecionadas aleatoriamente para compor o painel. Em algumas das semanas os pesquisadores não puderam contar com as oito pessoas selecionadas. Por isso, o número real de julgadores variou entre cinco e oito.

As avaliações foram conduzidas da seguinte forma. Semanalmente uma unidade era selecionada aleatoriamente de cada uma das quatro condições de estocagem mencionadas. A cada painelista era oferecido um conjunto de três unidades: uma etiquetada como de referência (controle) e as outras duas etiquetadas com um número de três dígitos. Uma dessas

SITUAÇÃO MOTIVADORA

duas unidades de teste era sempre uma referência “cega”². Assim, em uma dada semana, cada painalista recebia em ordem aleatória, três conjuntos de unidades a serem avaliadas, a saber: [RE; REC; A]; [RE; REC; C] e [RE, REC; E], onde RE; REC; A; C e E significam respectivamente: “referência”; “referência cega”; “temperatura e umidade ambientes”, “câmara” e “estufa”. Dentro de um dado grupo a unidade de referência (RE) era avaliada primeiro. Para as duas restantes a ordem era aleatória. Todas as unidades foram descartadas após a avaliação.

Pediu-se aos painelistas que comparassem cada unidade (incluindo a “referência cega”) com a unidade de referência e atribuir uma pontuação de uma escala de sete pontos (0 a 6), individualmente a cada atributo. Nessa escala os pontos significavam:

- 6 = nenhuma diferença;
- 5 = diferença muito pequena;
- 4 = leve diferença;
- 3 = diferente;
- 2 = grande diferença;
- 1 = diferença muito grande;
- 0 = diferença total.

Para cada atributo a pontuação igual a 3 foi considerada o ponto de corte, sendo as unidades avaliadas com notas iguais ou inferiores a 3 consideradas inadequadas para o consumo humano em relação ao atributo avaliado.

As unidades armazenadas em temperatura ambiente, câmara e estufa foram acompanhadas por 51, 36 e 18 semanas respectivamente, fazendo-se avaliações a cada semana.

A condição de armazenagem etiquetada como “referência” foi usada também como “referência cega” a fim de avaliar a consistência do julgamento dos painelistas, ou seja, esperava-se que os painelistas fizessem avaliações similares para as unidades de “referência cega” e de “referência”. Quando as avaliações para essas duas unidades de referência estavam em grande divergência então tais avaliações não eram incluídas no estudo. Todavia não foram encontradas inconsistências neste conjunto de dados.

É importante ressaltar mais uma vez que as unidades avaliadas em uma dada semana são descartadas e, portanto, não se tem um *follow-up* da mesma unidade até o final dos ensaios.

A seguir, a modelagem básica utilizada em Freitas, Borges e Ho(2003) será re-apresentada para maior entendimento dos próximos passos.

* * *

² A primeira amostra de cada um dos conjuntos era sempre a amostra de referência, estocada sob refrigeração. A referência cega impede que o painalista saiba qual das duas outras amostras do conjunto é a que foi estocada em temperatura ambiente ou câmara climática.

3. MODELAGEM UTILIZADA EM FREITAS – BORGES E H0 (2003) REVISITADA - CLÁSSICA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO

Na proposta de FBH, os autores consideram a situação em que uma amostra de $N = \sum_{i=1}^k n_i$ unidades de produtos tirados de uma linha de produção são armazenados em uma mesma condição. As unidades são, então, avaliadas em relação a um determinado atributo (cor, sabor ou aparência) em k tempos pré-fixados ($\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$) onde, em cada tempo τ_i , n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) unidades do produto selecionadas aleatoriamente dentre as N são avaliadas. A Figura 3.1 mostra o desenho esquemático da coleta das informações no estudo sensorial.

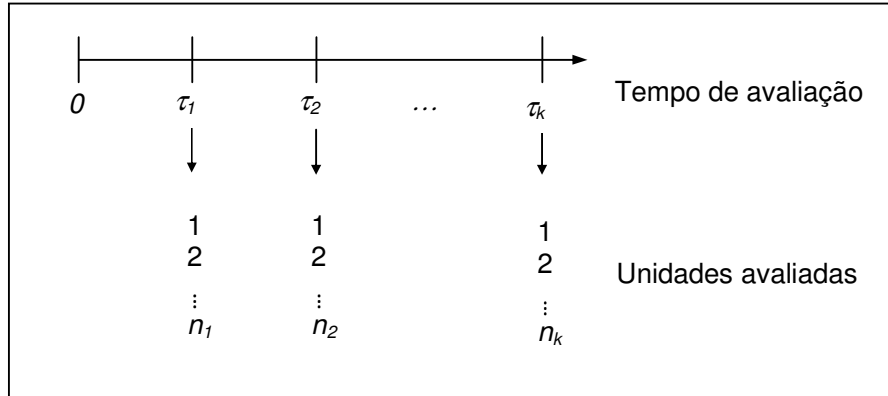


Figura 3.1: Desenho Esquemático da Coleta das Informações no Estudo Sensorial

Em cada tempo τ_i , n_i unidades do produto são avaliadas em uma escala de 7 pontos que varia de 0 a 6, onde 0 representa uma total diferença em relação a um padrão de referência, e 6 representa total similaridade em relação ao padrão de referência. Na situação real apresentada no artigo, a empresa do ramo de alimentos determinou que o escore 3 seria o ponto de corte no qual as unidades do produto seriam consideradas impróprias para consumo, indicando a “falha” do produto em relação ao atributo avaliado.

Seja Z_{ij} o escore associado à j -ésima unidade ($j = 1, 2, \dots, n_i$) avaliada no tempo τ_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Assim, a j -ésima unidade avaliada no tempo τ_i é considerada imprópria para consumo, em relação ao atributo avaliado, se $Z_{ij} = 0, 1, 2, 3$. Caso $Z_{ij} = 4, 5, 6$ então a “falha” irá ocorrer no tempo futuro.

A proposta dos autores foi definir uma nova variável Y_{ij} dada por:

**MODELAGEM UTILIZADA POR FREITAS – BORGES E HO REVISITADA
CLÁSSICA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO**

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } Z_{ij} \leq 3 \Rightarrow \text{produto considerado inadequado no tempo } \tau_i. \\ 0 & \text{se } Z_{ij} > 3 \Rightarrow \text{produto considerado adequado no tempo } \tau_i. \end{cases}$$

Desta forma, para cada tempo fixo τ_i , tem-se uma amostra aleatória de tamanho n_i de variáveis Y_{ij} , onde Y_{ij} são variáveis aleatórias Bernoulli independentes com probabilidade p_{ij} dada por:

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1) = P(0 < T_{ij} \leq \tau_i) \quad (3.1)$$

onde

T_{ij} é o tempo de “falha” da j -ésima unidade avaliada no tempo τ_i .

Ou equivalentemente:

$$P(Y_{ij} = y_{ij}) = \begin{cases} P(0 < T_{ij} \leq \tau_i) = 1 - R(\tau_i), & \text{se } y_{ij} = 1 \\ P(T_{ij} > \tau_i) = R(\tau_i), & \text{se } y_{ij} = 0 \end{cases}$$

onde

$R(t)$ é a função de confiabilidade.

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} (1 - p_{ij})^{1-y_{ij}} p_{ij}^{y_{ij}} \quad (3.2)$$

onde

$$\theta^i = (p_{11}, \dots, p_{kn_k}).$$

Os autores assumem que o tempo de “falha” T_{ij} da j -ésima unidade avaliada no tempo τ_i (fixado) tem distribuição Weibull com parâmetros α_j e $\delta \geq 1$, e os parâmetros α_j e δ são definidos por:

$$\alpha_j = \exp\{X_j \beta\} = \exp\{\beta_0 + X_{j1} \beta_1 + \dots + X_{jq} \beta_q\}$$

**MODELAGEM UTILIZADA POR FREITAS – BORGES E HO REVISITADA
CLÁSSICA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO**

$$\delta = \exp\{\gamma\}, \quad \gamma \geq 0$$

e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = (\alpha_j)^\delta \delta t^{\delta-1} \exp\{-(\alpha_j t)^\delta\}$$

onde

$X_j = (1, X_{j1}, \dots, X_{jq})$ é o vetor de variáveis explicativas (covariáveis) ou fatores de um experimento planejado de dimensão $1 \times (q+1)$ relacionadas à j -ésima unidade avaliada no tempo τ_j .

Note que, no caso de um experimento planejado, como é o caso da situação descrita no Cap. 2, as unidades experimentais armazenadas em uma mesma condição fixa (por exemplo, na câmara climática), têm os mesmos valores de τ_j e estes valores são os mesmos independentemente do tempo τ_i no qual cada unidade foi avaliada. Portanto, o subíndice "j" pode ser desprezado, visto que:

$$\tilde{X}_j = \tilde{X} = (X^{(0)}, \dots, X^{(q)})$$

para todas as $N = \sum_{i=1}^k n_i$ unidades armazenadas na mesma condição. Entretanto em situações mais gerais estes valores podem ser diferentes.

$\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q)'$ é o vetor $(q+1) \times 1$ dos parâmetros associados às covariáveis.

Portanto, utilizando os seguintes fatos:

1. para a distribuição Weibull com parâmetros α_j e δ , $R_j(\tau_i) = \exp\{-(\alpha_j \tau_i)^\delta\}$;
2. para cada avaliação no tempo τ_i , $Y_{ij} (j = 1, 2, \dots, n_i)$ são variáveis Bernoulli independentes com probabilidade p_q dada por (3.1);
3. para diferentes avaliações no tempo $\tau_i (i = 1, 2, \dots, k)$, Y_{ij} são independentes considerando a natureza destrutiva do experimento.

a função de verossimilhança é dada por:

**MODELAGEM UTILIZADA POR FREITAS – BORGES E HO REVISITADA
CLÁSSICA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO**

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ \left[\exp(-\tau_i \exp(X_j \beta))^{\exp(\gamma)} \right]^{1-y_{ij}} \left[1 - \exp(-\tau_i \exp(X_j \beta))^{\exp(\gamma)} \right]^{y_{ij}} \right\} \quad (3.3)$$

em que

$$\theta' = (\beta'; \delta)$$

As estimativas de máxima verossimilhança foram obtidas pela maximização direta do logaritmo da função de verossimilhança.

Considerando que $\hat{\theta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_q, \hat{\gamma})$ é o estimador de máxima verossimilhança de $\theta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q, \gamma)$ e utilizando a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança, tem-se que para um dado conjunto de covariáveis $X_j = (X_j^0, X_j^1, \dots, X_j^q)$, o estimador de máxima verossimilhança do percentil $(100 \times p)$ da distribuição do tempo de falha é dado por:

$$t_{p(j)} = \frac{1}{\hat{\alpha}_j} [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\delta}} \quad (3.4)$$

onde

$$\hat{\alpha}_j = \exp\{X_j \hat{\beta}\} \text{ e } \hat{\delta} = \exp\{\hat{\gamma}\}.$$

Fazendo uso da propriedade de normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança (Cox e Hinkley, 1974) e o método delta (Cox e Hinkley; 1974, pág. 260 e 302) foi obtida a expressão do intervalo (assintótico) de 95% de confiança (LI ; LS) para o percentil $(100 \times p)$:

$$\begin{aligned} LI &= \hat{t}_{p(j)} - (1,96) \left[\text{Var}(\hat{t}_{p(j)}) \right]^{1/2}, \\ LS &= \hat{t}_{p(j)} + (1,96) \left[\text{Var}(\hat{t}_{p(j)}) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{t}_{p(j)}) = Z' I^{-1}(\theta) Z \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

e Z é um vetor de dimensão $(q+2) \times 1$ dado por:

**MODELAGEM UTILIZADA POR FREITAS – BORGES E HO REVISITADA
CLÁSSICA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO**

$$Z = \left[\begin{array}{c} \left(\frac{-(-\ln(1-p))^{\exp(1/\gamma)}}{\exp(X_j \beta)} \right) X_j' \\ \hline - \frac{[-(-\ln(1-p))^{\exp(1/\gamma)}][\exp(-\gamma) \ln(-\ln(1-p))]}{\exp(X_j \beta)} \end{array} \right]$$

Equivalentemente, para um dado conjunto de covariáveis $X_j = (X_j^0, X_j^1, \dots, X_j^q)$, o estimador de máxima verossimilhança da fração de defeituosos $F_j(\tau_i)$ em um tempo de avaliação τ_i pré-especificado é:

$$\hat{F}_j(\tau_i) = 1 - \hat{R}_j(\tau_i) = 1 - \exp(-\tau_i \exp(\hat{\alpha}_j))^{\hat{\delta}}, \quad (3.6)$$

onde

$$\hat{\alpha}_j = \exp\{X_j \hat{\beta}\} \text{ e } \hat{\delta} = \exp\{\hat{\gamma}\}$$

Novamente, fazendo uso da propriedade de normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança e do método delta os autores obtiveram a expressão do intervalo (assintótico) de 95% de confiança para a fração de defeituosos $F_j(\tau_i)$:

$$\begin{aligned} LI &= 1 - \left[\hat{R}_j(\tau_i) \right]^{\exp\left(-1,96\sqrt{\text{Var}(\hat{\phi})}\right)} \\ LS &= 1 - \left[\hat{R}_j(\tau_i) \right]^{\exp\left(1,96\sqrt{\text{Var}(\hat{\phi})}\right)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \ln\left(-\ln \hat{R}_j(\tau_i)\right), \\ \hat{\text{Var}}(\hat{\phi}) &= Z' I^{-1}(\theta) Z \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \end{aligned}$$

no qual Z é um vetor de dimensão $(q+2) \times 1$ dado por

**MODELAGEM UTILIZADA POR FREITAS – BORGES E HO REVISITADA
CLÁSSICA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO**

$$Z = \left[\frac{\exp(\gamma) X_j^t}{\exp(\gamma) \ln(t_0 \exp(X_j \beta))} \right]$$

* * *

4. ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO E TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

4.1 Considerações iniciais

Na abordagem apresentada no Capítulo 4, em cada tempo fixo τ_i , tem-se uma amostra aleatória de tamanho n_i de variáveis Y_{ij} , onde Y_{ij} são variáveis aleatórias Bernoulli independentes, com probabilidade p_{ij} dada por:

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1) = P(0 < T_{ij} \leq \tau_i)$$

onde

T_{ij} é o tempo de “falha” da j -ésima unidade avaliada no tempo τ_i . Ou equivalentemente:

$$P(Y_{ij} = y_{ij}) = \begin{cases} P(0 < T_{ij} \leq \tau_i) = 1 - R(\tau_i), & \text{se } y_{ij} = 1 \\ P(T_{ij} > \tau_i) = R(\tau_i), & \text{se } y_{ij} = 0 \end{cases}$$

onde

$R(t)$ é a função de confiabilidade.

A função de verossimilhança (3.2) é reproduzida aqui e é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} (1 - p_{ij})^{1 - y_{ij}} p_{ij}^{y_{ij}}$$

onde

$$\theta' = (p_{11}, \dots, p_{kn_k}).$$

Na verdade,

$$p_{ij} = \Pr(Y_{ij} = 1) = 1 - R_j(\tau_i) = 1 - S(\tau_i) = p_i$$

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Assim, a verossimilhança (3.2) pode ser reescrita da seguinte forma, já utilizando também a notação bayesiana,

$$L(\theta | y) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} p_{ij}^{y_{ij}} (1 - p_{ij})^{1 - y_{ij}} = \prod_{i=1}^k p_i^{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}} (1 - p_i)^{n_i - \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}} = \prod_{i=1}^k p_i^{S_i} (1 - p_i)^{n_i - S_i} = L(\theta | \underline{n}, \underline{S}) \quad (4.1)$$

onde

$$\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = S_i, i = 1, 2, \dots, k; \theta = (p_1, \dots, p_k)^t; \underline{y} = (y_{11}, \dots, y_{kn_k})^T$$

$$\underline{S} = (S_1, S_2, \dots, S_{n_i})^T$$

$$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)^T$$

e S_i = número de unidades consideradas inadequadas para consumo, (considerado um dado atributo avaliado) no tempo τ_i . Note que, em experimentos planejados, $p_{ij} = p_i$ para todas as unidades $j = 1, 2, \dots, n_i$ avaliadas em uma mesma data τ_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Estamos supondo que:

$$T_{ij} \sim \text{Exp}(\alpha) \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad i = 1, 2, \dots, k$$

em que T_{ij} é o tempo de vida de prateleira da j -ésima unidade avaliada em τ_i , com função de densidade de probabilidade em função da variável tempo $t \geq 0$ dada por:

$$f(t) = \alpha \exp(-\alpha t) \quad (4.2)$$

Em um dado tempo de avaliação τ_i , a função de confiabilidade, é dada por:

$$R(\tau_i) = 1 - F(\tau_i) = \exp(-\alpha \tau_i) \quad (4.3)$$

Assim, utilizando o mesmo desenvolvimento apresentado no Capítulo 3, porém agora com a utilização da distribuição exponencial como subjacente, a função de verossimilhança (4.1) toma a forma:

$$L(\alpha | \underline{N}; \underline{S}) = \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i} [\exp(-\alpha \tau_i)]^{N_i - S_i} = \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_i - S_i)\right] \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i} \quad (4.4)$$

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

onde:

S_i = total de itens avaliados como inadequados em τ_i (dentre os n_i avaliados nesse tempo pré-fixado)

$n_i - S_i$ = total de itens avaliados como adequados em τ_i

k = número de tempos de avaliação

τ_i = tempo de avaliação pré-fixado $i = 1, 2, \dots, k$

α = parâmetro da distribuição exponencial

4.2 Estratégia de abordagem do problema sob o enfoque Bayesiano

O objetivo principal é obter estimativas dos percentis da distribuição do tempo de vida de prateleira com base nos dados oriundos das avaliações sensoriais. Como neste trabalho será utilizada a abordagem Bayesiana, isto significa que o parâmetro α aqui é considerado como uma quantidade aleatória que segue uma distribuição especificada. Consequentemente, os percentis da distribuição do tempo de vida de prateleira também são, dentro desta abordagem, variáveis aleatórias (e não quantidades fixas a serem estimadas, como na abordagem clássica). Portanto, o objetivo aqui é encontrar a **distribuição “a posteriori” de percentis** de interesse da distribuição do tempo de falha, bem como os intervalos de credibilidade para cada uma dessas quantidades.

Como estamos assumindo uma distribuição exponencial como subjacente, a expressão do percentil 100p% é dada por:

$$t_p = \frac{1}{\alpha} [-\log(1-p)] \quad (4.5)$$

Portanto, como o percentil é uma função do parâmetro α da distribuição, a estratégia será desenvolver o estudo em três etapas:

1. Encontrar a distribuição “a posteriori” para o parâmetro α , a partir de uma “distribuição “a priori” informativa e de uma não informativa (distribuição de Jeffreys). Nesta etapa, a distribuição “a posteriori” para cada uma das distribuições “a priori”, será obtida empiricamente através do procedimento de reamostragem ponderada, SIR (*Sampling Importance Resampling*), desenvolvido por Rubin (1988). Portanto, o resultado desta primeira etapa é uma amostra da distribuição “a posteriori” do parâmetro α a partir de uma distribuição “a priori” informativa e uma outra amostra a partir da distribuição “a priori” não informativa de Jeffreys.

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

2. Encontrar a distribuição “a posteriori” para os percentis de interesse com base em cada uma das distribuições “a priori” postuladas em 1. Nesta etapa, a exemplo da etapa 1, o que será obtido é uma amostra da distribuição “a posteriori” dos percentis de interesse a partir das amostras das distribuições “a posteriori” para α geradas em (1). Portanto, para cada uma das amostras das distribuições “a posteriori” geradas em (1), será aplicada a expressão (4.5), obtendo-se assim as distribuições “a posteriori” de interesse.
3. Comparar os resultados obtidos com base em cada uma das distribuições “a priori” postuladas. Para essa comparação, este procedimento será implementado em um conjunto de dados simulados de uma distribuição exponencial. Assim, conhecendo-se os valores verdadeiros será possível avaliar e comparar os resultados obtidos com cada uma das distribuições “a priori” postuladas.

Na Seção 4.1 são apresentados os critérios utilizados para a geração dos dados que serão utilizados ao longo deste capítulo na comparação dos resultados. Na Seção 4.2 são apresentados os passos a serem seguidos, na 4.3 os procedimentos para a escolha da distribuição “a priori” a ser utilizada, na 4.4 são avaliadas as diferentes famílias de distribuição Gama que poderiam ser utilizadas e escolhida a que será utilizada como distribuição “a priori”, na 4.5 é obtida a função de verossimilhança, na 4.6, a distribuição “a posteriori” de α , na 4.7 são determinados os percentis de falha de maior interesse, na 4.8 é determinada a distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α , na 4.9 é encontrada a respectiva distribuição “a posteriori” para essa distribuição e finalmente na 4.10 são determinados os percentis de falha tendo por base a distribuição de Jeffreys como distribuição “a priori”.

4.3 Dados gerados para aplicação dos procedimentos

Para a geração dos dados que serão utilizados tanto neste estudo quanto naqueles nos quais o erro de classificação foi incorporado, optamos por utilizar como base as estimativas obtidas na análise realizada por FBH (2003), em particular para os dados das unidades armazenadas em condições do ambiente, pois o processo de degradação mostrou-se mais lento. Os valores obtidos para os parâmetros da distribuição Weibull e alguns percentis do atributo “sabor” (aquele que apresentou menores valores), foram:

$$\hat{\alpha} = 0,018; \quad \hat{\delta} = 1,2; \quad \hat{t}_{0,01} = 1,2; \quad \hat{t}_{0,50} = 40,6$$

Assim, optamos por gerar dados de tempos de vida de prateleira oriundos de uma exponencial tal que $\alpha = 0,018 \approx 0,02$, ou seja, tal que

$$E(T) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{semanas} .$$

Na situação descrita no Capítulo 2, as unidades armazenadas em condição ambiente foram avaliadas à cada semana, por 51 semanas. Cerca de 5 a 8 julgadores foram recrutados por semana.

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

Portanto o procedimento para geração dos dados que serão utilizados neste estudo foi o seguinte:

1. Gerar uma amostra de tamanho $n=357$ de uma exponencial com parâmetro $\alpha = 0,02$. Esse tamanho de amostra foi obtido supondo 7 julgadores por semana ($n_i = 7, i = 1, 2, \dots, 51$), por 51 semanas.
2. Dicotomizar os resultados, comparando cada valor gerado da distribuição exponencial com os valores de uma coluna gerada como sendo as semanas de avaliação. Se $T \leq \text{semana}$ então $Y = 0$. Os dados estão no Apêndice B.

Assim os dados que serão utilizados são os dicotomizados, tal como será feito no Capítulo 6 na análise dos dados reais descritos no Capítulo 2.

4.4 Obtenção da distribuição “a posteriori” de α utilizando uma distribuição “a priori” Gama($\kappa; \lambda$)

Na análise Bayesiana, a distribuição “a priori” conjugada, para o parâmetro de uma distribuição exponencial é a distribuição Gama. Então, chamando, nessa distribuição, o parâmetro de forma de κ e o de escala de λ , teremos:

$$\alpha \sim \text{Gama}(\kappa; \lambda)$$

A distribuição de α , “a priori”, ou seja, antes de conhecermos qualquer amostra, será então:

$$\pi(\alpha) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \alpha^{\kappa-1} \exp(-\lambda\alpha), \text{ para } 0 \leq \alpha < \infty \text{ e } \kappa, \lambda > 0 \quad (4.5)$$

4.4.1 Seleção dos parâmetros da distribuição “a priori” de α .

Uma questão importante é a escolha dos parâmetros para a distribuição “a priori” postulada para o parâmetro α . Uma fonte de informação pode ser a opinião de um especialista, a partir do conhecimento de análises similares. Em FBH (2003), os dados experimentais foram analisados utilizando a dicotomização e a distribuição de Weibull como subjacente. O modelo (3.3) (sem covariáveis) foi ajustado para cada uma das três condições de armazenamento, e o valor mínimo de $\hat{\alpha}$ obtido (por máxima verossimilhança) foi 0,0175 e o maior valor foi 0,0225. Assim, assumimos que um valor razoável para a média da distribuição a priori de α seria 0,02 e utilizamos a amplitude dos valores obtidos ($R=0,0225-0,0175=0,005$) como uma aproximação do desvio padrão da distribuição. Estes valores foram utilizados nas equações da média e variância da distribuição Gama, ou seja:

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

$$E(\alpha) = \frac{\kappa}{\lambda} = 0,02 \quad e \quad (4.6)$$

$$\sigma^2 = \frac{\kappa}{\lambda^2} = 0,000025$$

Resolvendo as duas equações, obtivemos os valores $\kappa = 16$ e $\lambda = 800$.

Para efeitos de visualização, a Tabela 4.1 apresenta outras opções de valores para os parâmetros da supracitada distribuição, mantendo-se a seguinte relação entre κ e λ :

$$E(\alpha) = \frac{\kappa}{\lambda} = 0,02 \Rightarrow \lambda = \frac{\kappa}{0,02} \Rightarrow \lambda = 50\kappa \quad (4.7)$$

Como a variância da distribuição gama é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\kappa}{\lambda^2}$$

então de (4.7)

$$\lambda = 50\kappa$$

ou seja:

$$\sigma^2 = \frac{\kappa}{(50\kappa)^2} = \frac{\kappa}{2500\kappa^2} = \frac{1}{2500\kappa}$$

Logo, $\sigma = \frac{1}{50\sqrt{\kappa}}$ (4.8)

Conforme a definição da distribuição Gama, os valores de κ e λ são diferentes de zero e positivos. Tais valores podem ser menores ou maiores que 1 (um). Para o valor igual a 1, tem-se a distribuição Gama assumindo a forma de uma distribuição Exponencial. Em função de diversos valores de κ , teremos:

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Tabela 4.1
Parâmetros possíveis para a distribuição Gama, “a priori”, em função de κ .

κ	λ	σ	σ^2	$\pi(\alpha)$
0,001	0,05	0,6325	0,4000	$\frac{0,05^{0,001}}{\Gamma(0,001)} \alpha^{0,001-1} \exp(-0,05\alpha)$
0,01	0,50	0,2000	0,0400	$\frac{0,50^{0,01}}{\Gamma(0,01)} \alpha^{0,01-1} \exp(-0,50\alpha)$
0,1	5	0,0632	0,0040	$\frac{5^{0,1}}{\Gamma(0,1)} \alpha^{0,1-1} \exp(-5\alpha)$
1	50	0,0200	0,0004	$\frac{50^1}{\Gamma(1)} \alpha^{1-1} \exp(-50\alpha)$
1,5	75	0,0163	0,0003	$\frac{75^{1,5}}{\Gamma(1,5)} \alpha^{1,5-1} \exp(-75\alpha)$
8	400	0,00707	0,000050	$\frac{400^8}{\Gamma(8)} \alpha^{8-1} \exp(-400\alpha)$
16	800	0,00500	0,000025	$\frac{800^{16}}{\Gamma(16)} \alpha^{16-1} \exp(-800\alpha)$
20	1000	0,00063	0,00000040	$\frac{800^{20}}{\Gamma(20)} \alpha^{20-1} \exp(-1000\alpha)$

Para as diversas funções Gama obtidas, calculemos os valores de $\pi(\alpha)$ para os valores extremos do intervalo e para o valor da média $E(\alpha) = 0,02$:

Tabela 4.2
Valores mínimo, médio e máximo das diversas distribuições “a priori” possíveis, no intervalo onde se concentram os dados do experimento base.

$Gama(\kappa, \lambda)$	$\pi(\alpha)$		
	$\alpha = 0,0175$	$\alpha = 0,0200$	$\alpha = 0,0225$
$Gama(0,001;0,05)$	0,05672497	0,04963477	0,04411948
$Gama(0,01;0,5)$	0,5433669	0,4754423	0,4225854
$Gama(0,1;5)$	4,313466	3,777460	3,3553204
$Gama(1;50)$	20,84310	18,39397	16,23262
$Gama(1,5;75)$	26,09483	23,12705	20,33603
$Gama(8;400)$	59,6011116	55,8346128	46,8360386
$Gama(16;800)$	79,13866	79,3740	62,86042
$Gama(20;1000)$	85,60022	88,83532	68,5139

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

Seguem abaixo os gráficos dessas funções. A linha mais grossa em azul, diz respeito à função gama $Gama(20;1000)$, a segunda, em vermelho, a $Gama(16;800)$, e a seguir as $Gama(8;400)$ em verde e $Gama(1,5;75)$ em cinza.

No segundo gráfico temos a distribuição $Gama(1;50)$ em preto sendo essa última uma $Exp(50)$. As demais em magenta, marron e laranja, são respectivamente $Gama(0,1;5)$; $Gama(0,01;0,5)$ e $Gama(0,001;0,05)$.

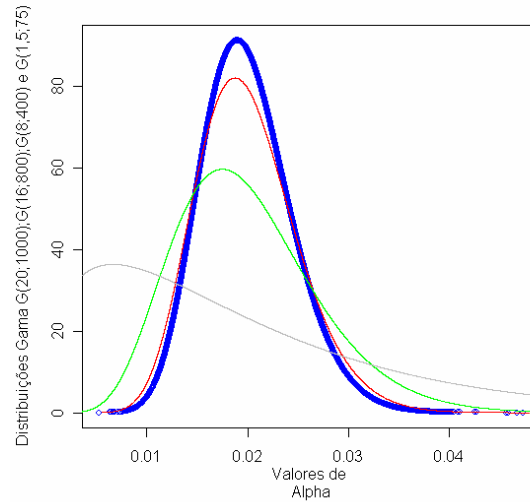


Figura 4.2

Distribuições Gama possíveis de serem usadas como distribuições “a priori”

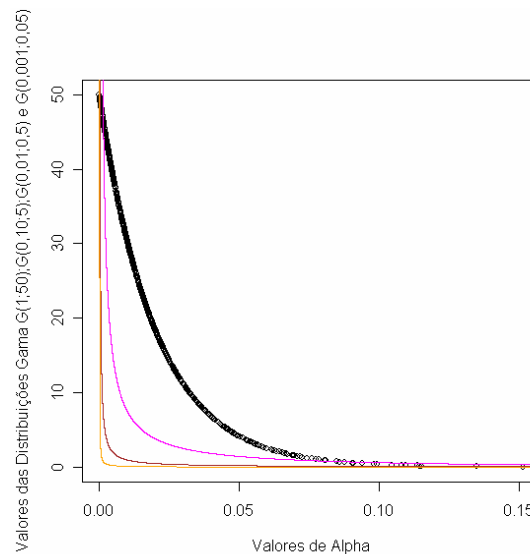


Figura 4.3

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

Distribuições Gama possíveis de serem usadas como distribuições “a priori”

Observamos que o ponto de máximo das funções $Gama(\kappa, \lambda)$ aproxima-se cada vez mais do valor da média ou seja o valor de α do ponto máximo da distribuição aproxima-se de $\alpha = 0,02$ e a distribuição torna-se mais simétrica em torno deste valor na medida que os valores de κ e λ crescem, diminuindo sua calda à esquerda, ao mesmo tempo que seu máximo se eleva, como pode ser observado nos gráficos acima.

Iremos trabalhar com a função $Gama(16;800)$ como a distribuição “a priori” de α , ou seja:

$$\pi(\alpha) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \alpha^{\kappa-1} \exp(-\lambda\alpha) = \frac{800^{16}}{\Gamma(16)} \alpha^{16-1} \exp(-800\alpha) = \frac{8^{16} \times 10^{32}}{\Gamma(16)} \alpha^{15} \exp(-800\alpha)$$

O gráfico dessa função é:

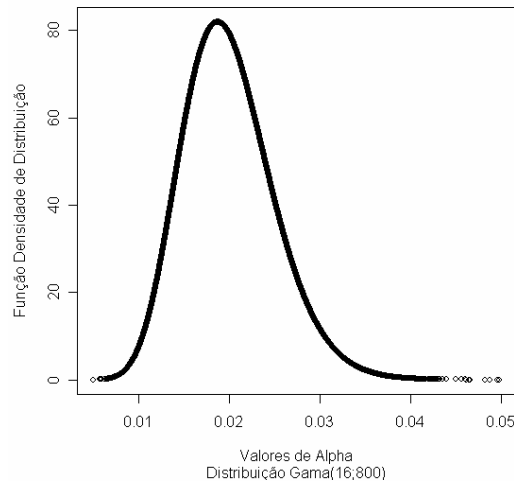


Figura 4.4

Distribuição Gama(16;800) escolhida como distribuição “a priori” de α .

4.5 Função de Verossimilhança para valores de α amostrados de uma distribuição Gama(16;800)

Para uma amostra aleatória de tamanho 5000 da distribuição $Gama(16;800)$, a função verossimilhança cuja expressão é dada por (4.4), calculada com base nos dados gerados (Seção 4.2.1) tem a forma apresentada na Fig. 4.5.

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

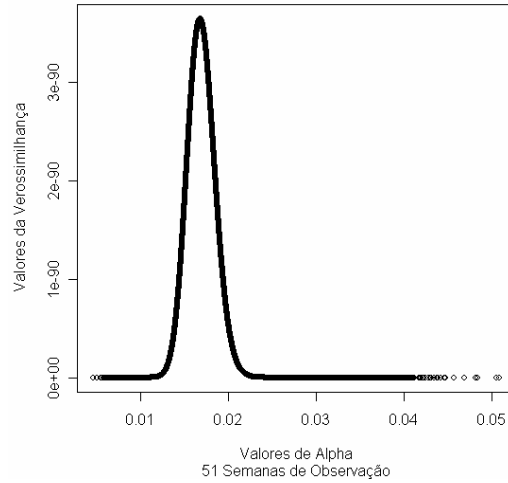


Fig. 4.5

Função de Verossimilhança

4.6 Obtenção da distribuição “a posteriori” de α , com base na distribuição “a priori” Gama(16;800)

Assim, para cada valor de α , dentro da faixa considerada, teremos uma distribuição, que será diferente da “a priori”, pois agora teremos valores de N_i e S_i que a alterarão, conforme a Regra de Bayes.

Aplicando-se a Regra de Bayes, a distribuição “a posteriori” será:

$$\pi(\alpha | N_{\sim i}, S_{\sim i}) = \frac{\exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i})\right] \left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_{\sim i}} \right\} \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \alpha^{\kappa-1} \exp(-\lambda \alpha)}{\int_0^\infty \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i})\right] \left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_{\sim i}} \right\} \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \alpha^{\kappa-1} \exp(-\lambda \alpha) d\alpha}$$

Então,

$$\pi(\alpha | N_{\sim i}, S_{\sim i}) = \frac{\frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i})\right] \left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_{\sim i}} \right\} \alpha^{\kappa-1} \exp(-\lambda \alpha)}{\frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \int_0^\infty \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i})\right] \left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_{\sim i}} \right\} \alpha^{\kappa-1} \exp(-\lambda \alpha) d\alpha}$$

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Logo,

$$\pi(\alpha | N_{\sim i}, S_{\sim i}) = \frac{\left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i} \right\} \alpha^{\kappa-1} \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) + \lambda\right] \exp(-\lambda \alpha)}{\int_0^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i} \right\} \alpha^{\kappa-1} \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) + \lambda\right] \exp(-\lambda \alpha) d\alpha} \quad (4.7)$$

Nessa equação, N_i é igual ao número de itens avaliados em cada semana; τ_i é o tempo de observação na semana i considerada e S_i é o número de itens avaliados como ruins a cada semana i . κ e λ são os parâmetros da distribuição Gama(κ, λ) “a priori”.

A expressão (4.7) apresenta um numerador que chamaremos de $h(\alpha)$ igual a:

$$h(\alpha) = \left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i} \right\} \alpha^{\kappa-1} \exp\left\{-\alpha \left[\sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) \right] + \lambda\right\}$$

O primeiro fator é um produtório que leva em conta os tempos de observação das k semanas que durou o experimento, sendo que cada fator desse produtório diz respeito a cada um dos tempos de observação τ_i de cada semana $i=1, \dots, k$ até à semana de ordem k em questão. No segundo fator, temos uma exponencial que leva em conta o somatório dos tempos de observação multiplicados pelo saldo de itens avaliados como bons ($N_i - S_i$) em cada semana.

A equação (4.7), pode, então, ser escrita como:

$$\pi(\alpha | N_{\sim i}, S_{\sim i}) = \frac{h(\alpha)}{\int_0^{\infty} h(\alpha) d\alpha} \quad (4.8)$$

Para encontrarmos a distribuição “a posteriori” definida por (4.7) e cuja forma resumida é dada por (4.8), utilizaremos o algoritmo da Reamostragem Ponderada ou Bootstrap Bayesiano proposto por Rubin (1988). Para tal, tomando a expressão (4.8) como ponto de partida, usaremos o seguinte algoritmo:

Queremos encontrar uma amostra de $\pi(\alpha | N_{\sim i}, S_{\sim i}) = \frac{h(\alpha)}{\int_0^{\infty} h(\alpha) d\alpha}$ sem termos de resolver a

integral no denominador da última expressão. Para isso devemos encontrar uma função de referência $g(\alpha)$.

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

1) Gera-se uma amostra $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $g(\alpha)$, função convenientemente escolhida de forma a facilmente podermos fazer uma amostragem dela de uma grande quantidade de valores de alpha.

2) Para cada $i = 1, \dots, n$, calcula-se:

$$w_i = \frac{h(\alpha_i)}{g(\alpha_i)} = \frac{L(\alpha_i | N, S) \pi(\alpha_i)}{g(\alpha_i)}$$

$$q_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

3) Seleciona-se uma amostra $\alpha_1^*, \dots, \alpha_r^*$ da amostra original $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ assumindo que:

$$\Pr(\alpha = \alpha_i) = q_i$$

4) Gera-se $u \in U(0;1)$.

-Se $u \in (0, q_1) \rightarrow$ *escolhe-se* α_1 .

-Se $u \in (q_1, q_1 + q_2) \rightarrow$ *escolhe-se* α_2 .

-Se $u \in (q_1 + q_2, q_1 + q_2 + q_3) \rightarrow$ *escolhe-se* α_3 .

Obs.:

1) A amostra pode ser selecionada com e sem reposição.

2) $r = \frac{n}{20}$

- Escolheremos $g(\alpha)$, de forma que tenhamos $g(\alpha) = \pi(\alpha)$;

- $w_i = \frac{f(x | \alpha_i) \pi(\alpha_i)}{\pi(\alpha_i)} = f(x | \alpha_i)$

- $q_i = \frac{f(x | \alpha_i)}{\sum_{i=1}^n f(x | \alpha_i)}$

No caso, utilizando o índice i para denotar os vários valores que α pode assumir dentro de sua distribuição, teremos:

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

$$w_i = \frac{h(\alpha_i)}{g(\alpha_i)} = L(\alpha_i | N_i, S_i) = \exp\left[-\alpha_i \sum_{k=1}^k \tau_k \binom{N_i - S_i}{k}\right] \left\{ \prod_{k=1}^k [1 - \exp(-\alpha_i \tau_k)]^{S_i} \right\}$$

No Apêndice B, fazemos uma simulação considerando 100.000 valores de α , amostrados de uma distribuição “a priori” de α , Gama(16;800) e a seguir aplicamos as técnicas de reamostragem por importância (SIR).

Obtivemos o seguinte histograma de α “a posteriori” :

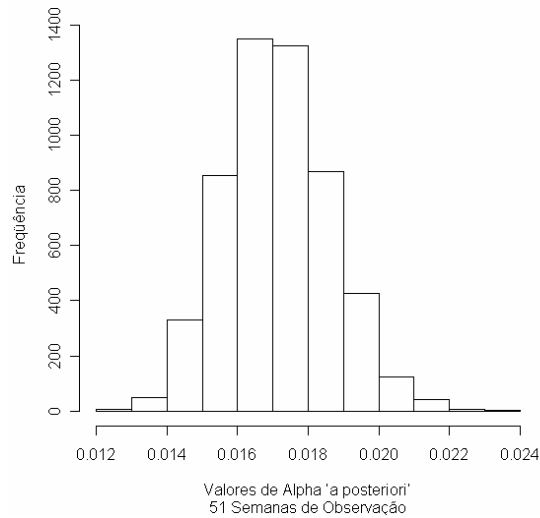


Fig. 4.6

Histograma de uma amostra de 5000 valores da distribuição “a posteriori” de α .

Na Fig. 4.7 temos a comparação das funções “a priori” e “a posteriori”. A fim de que as duas curvas tenham valores de ordenadas similares, que nos permitam sua adequada visualização, multiplicamos as ordenadas da distribuição “a posteriori” por 10 elevado à potência de 91,3.

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

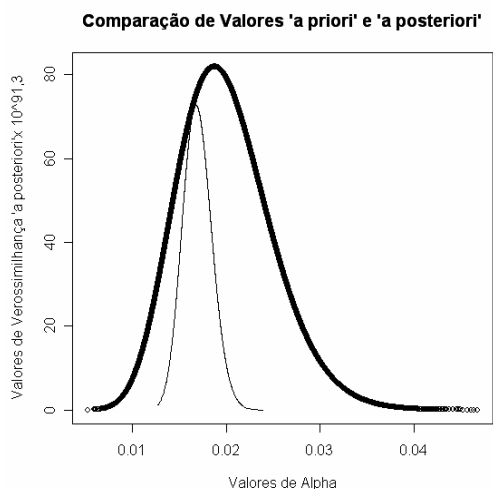


Fig. 4.7

Comparação de valores “a priori” e “a posteriori”

Tabela 4.3
COMPARAÇÃO ENTRE OS VALORES DE ALPHA “A PRIORI” E “A POSTERIORI”

PONTOS DE INTERESSE	ALPHA “A PRIORI”	ALPHA “A POSTERIORI”
MÍNIMO	0,004636	0,01268
1°. QUARTIL	0,016455	0,01609
MEDIANA	0,019598	0,01708
MÉDIA	0,020010	0,01713
3°. QUARTIL	0,023095	0,01811
MÁXIMO	0,050801	0,02386
DESVIO PADRÃO	0,004999	0,00150

Observe-se que os dados de verossimilhança diminuíram o valor da média “a posteriori” de 0,02 para 0,017.

A Fig. 4.8 apresenta as curvas suavizadas das distribuições “a priori”, “a posteriori” e da função de verossimilhança.

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

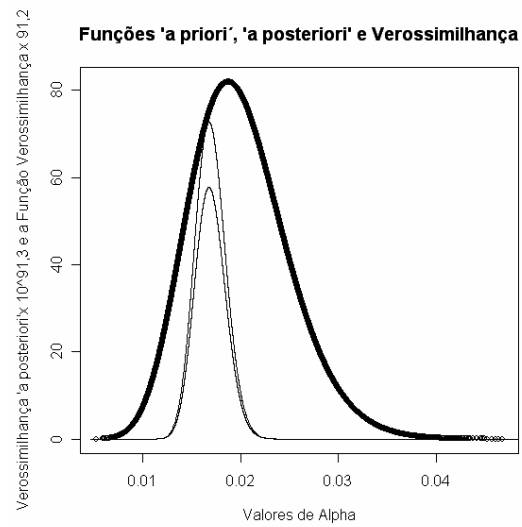


Fig. 4.8

Funções “a priori”, “a posteriori” e de Verossimilhança

A Fig. 4.8 permite observar que a distribuição “a posteriori” segue é muito semelhante à curva da verossimilhança tendo seus máximos coincidentes para valores similares de α .

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

4.7 Percentis de falha “a posteriori” das amostras avaliadas, com base no tempo de falha exponencial e distribuição “a priori” Gama(16;800)

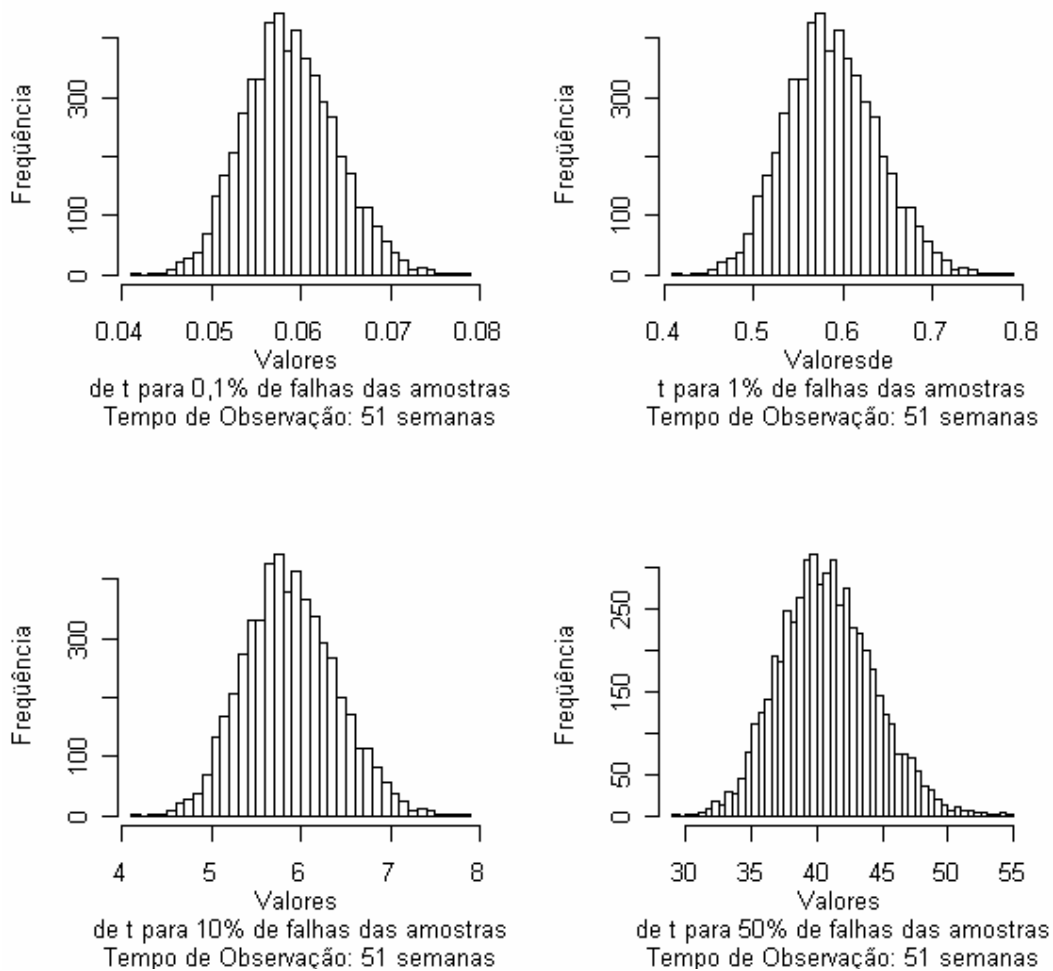


Fig. 4.9

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (priori Gama(16;800))

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Tabela 4.4

Estatísticas descritivas para a distribuição “a posteriori” de percentis 100p%, para vários valores de p com distribuição “a priori” de α , Gama(16;800)

Percentil de Falhas	Valor Exato	Mínimo	Quantil 2,5%	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Quantil 97,5%	Máximo
$t_{0,001}$	0,05003	0,04191	0,04947	0,05522	0,05854	0,05881	0,06216	0,06935	0,07884
$t_{0,01}$	0,5025	0,4191	0,49466	0,5522	0,5854	0,5881	0,6216	0,69352	0,7884
$t_{0,10}$	5,268	4,191	4,9465	5,522	5,854	5,881	6,216	6,9352	7,884
$t_{0,50}$	34,66	29,05	34,29	38,27	40,58	40,76	43,08	48,07	54,65

Obs.: Tempo em semanas. Os valores exatos são fornecidos pela expressão (4.5) para $\alpha = 0,02$.

4.8 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α

A utilização da distribuição de Jeffreys como distribuição “a priori” é uma alternativa à não disponibilidade de uma distribuição informativa sobre o parâmetro alpha. Essa distribuição que é não-informativa possui a propriedade de invariância sob transformações.

Distribuição de Jeffreys:

Devido à propriedade de invariância, Jeffreys (1939, 1948, 1961) sugeriu que a densidade:

$$\pi(\alpha | x) \propto \sqrt{I(\alpha | x)} \tag{4.9}$$

em que $I(\alpha | x)$ é a matriz esperada de informação de Fisher, fornecia um valor adequado para a distribuição “a priori”. A utilização dessa distribuição é algumas vezes chamada de *Regra de Jeffreys* (Lee, Petes M. – 1989). O valor de $I(\alpha | x)$, definido por Fisher (1925) é dado por:

$$I(\alpha | X) = -E_x \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \log \{ f(X | \alpha) | \alpha \} \right]$$

No caso:

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

$$f(x | \alpha) = L(\alpha | N, S) = \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_i - S_i)\right] \left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i} \right\}$$

$$\log[f(x | \alpha)] = -\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_i - S_i) + \sum_{i=1}^k S_i \log[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]$$

Calculando-se as derivadas e o valor esperado, a distribuição “a priori” de Jeffreys será, então:

$$\pi(\alpha) \propto \sqrt{I(\alpha)} = \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i \tau_i^2 \frac{\exp(-\alpha \tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]}} = \left\{ \sum_{i=1}^k n_i \tau_i^2 \frac{\exp(-\alpha \tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]} \right\}^{1/2}$$

Como foram feitas observações por 51 semanas, e $n_i = 7$, teremos:

$$J(\alpha) \propto \sqrt{7} \left(\frac{\exp(-\alpha)}{[1 - \exp(-\alpha)]} + 2^2 \frac{\exp(-2\alpha)}{[1 - \exp(-2\alpha)]} + \dots + 51^2 \frac{\exp(-51\alpha)}{[1 - \exp(-51\alpha)]} \right)^{1/2}$$

No Anexo C detalhamos a implementação no R, dessa distribuição. Utilizamos uma distribuição $U(0,001;0,5)$ para gerarmos uma amostra de 100.000 valores de α .

A função de verossimilhança, anteriormente obtida, em função dessa nova distribuição de α , nos fornece o gráfico da Fig. 10.

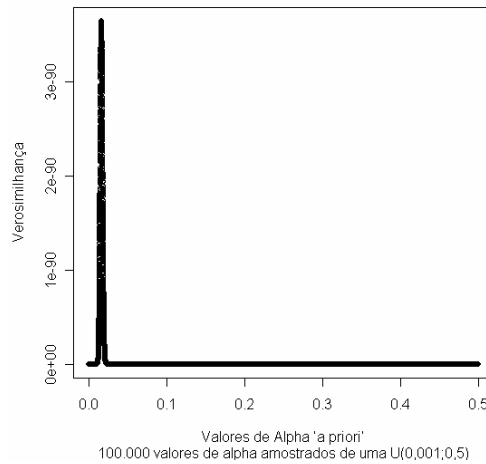


Fig. 4.10

Função de Verossimilhança com base em valores de α amostrados de uma $U(0,001;0,5)$

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

Examinando melhor esse gráfico na região onde estão concentrados os maiores valores de verossimilhança, temos:

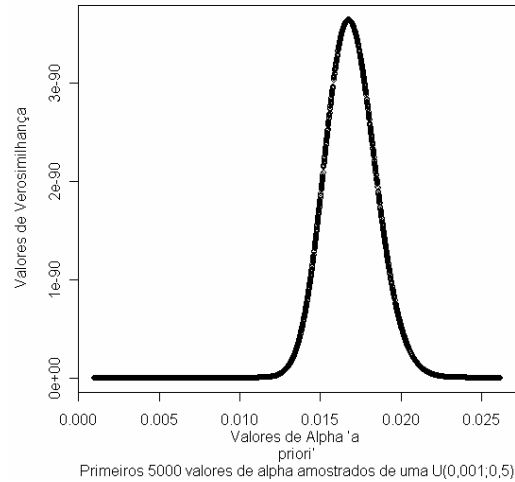


Fig. 4.11

Função de Verossimilhança para os primeiros 5000 valores amostrados de α .

A distribuição de Jeffreys assume a forma ilustrada na Fig. 4.12.

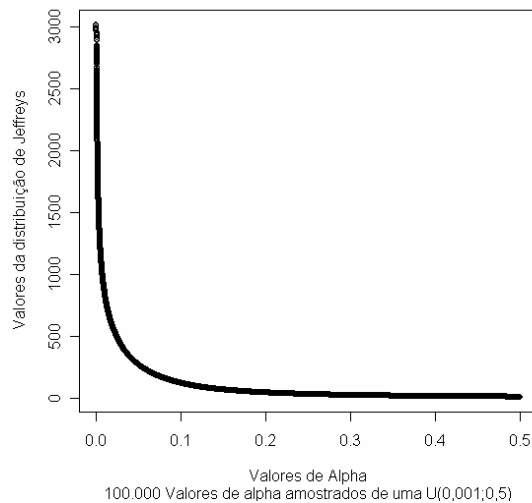


Fig. 4.12

Distribuição de Jeffreys

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

4.9 Obtenção da distribuição “a posteriori” de α , com base na distribuição “a priori” de Jeffreys

Como a distribuição de Jeffreys obtida não tem uma forma conhecida, da qual possamos obter uma amostra, utilizaremos uma função $g(\alpha)$, de estrutura conhecida. Conforme já mencionado na seção anterior, estaremos utilizando $g(\alpha) \sim U(0,001;0,5)$. A partir daí, para obtermos a distribuição “a posteriori” utilizando o método de amostragem ponderada, visto anteriormente, teremos neste caso:

1) Para cada $i = 1, \dots, n$, calcula-se:

$$w_i = \frac{h(\alpha_i)}{g(\alpha_i)} = \frac{L(\alpha_i | N_k, S_k) \pi(\alpha_i)}{g(\alpha_i)}$$

$$q_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Observe-se que no caso anterior onde utilizamos para função de referência $g(\alpha)$ a mesma função de distribuição “a priori”, os valores de w_i passam a ser a própria função de verossimilhança $L(\alpha_i | N_k, S_k)$. No caso da utilização da distribuição de Jeffreys isso não ocorre porque não podemos utilizá-la para obter amostra dos valores de α , sendo necessário utilizarmos uma distribuição conhecida o que não permite a simplificação anterior em w_i .

A Fig. 4.13 apresenta o histograma com base na amostra da distribuição “a posteriori” obtida através do algoritmo SIR. Neste caso, utilizamos para reamostragem um tamanho de amostra $r = 5000$.

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

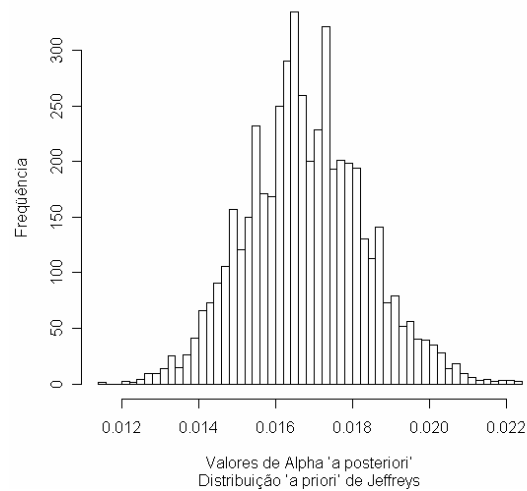


Fig. 4.13

**Histograma dos Valores “a posteriori” de α ,
com base na distribuição “a priori” de Jeffreys**

Os valores da média e do desvio padrão amostrais, dessa distribuição, são, respectivamente, 0,01678 e 0,001540801.

Analogamente, ao estudo feito na seção 4.6, utilizando-se a distribuição “a priori” Gama(16;800), quando utilizamos a distribuição de Jeffreys, obtemos as curvas da Fig. 4.14, onde multiplicamos as ordenadas da distribuição “a posteriori” por 90,4, para adequá-los a um único gráfico. Nessa mesma figura está inserido o gráfico da função de verossimilhança.

ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

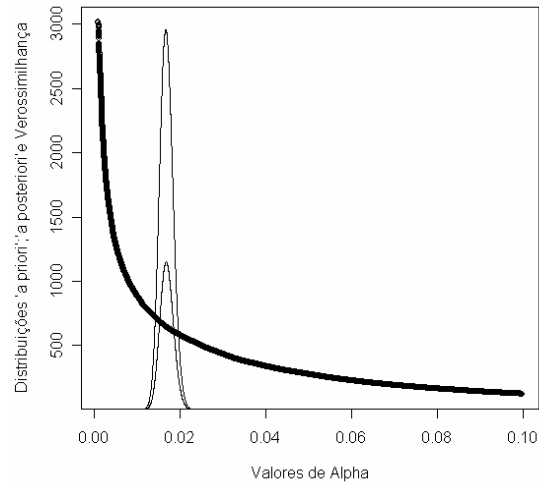


Fig. 4.14

Comparação entre as funções “a priori” de Jeffreys e a distribuição “a posteriori” do parâmetro α .

4.10 Percentis de falha das amostras avaliadas, com base em tempo de falha exponencial e na distribuição “a priori” de Jeffreys

Neste caso, obtemos, seguindo o mesmo procedimento explicitado na Seção 4.7 os histogramas das distribuições “a posteriori” para os percentis $p = 0,001; 0,01; 0,10$ e $0,50$. Entretanto, o maior interesse está em percentis menores ($p = 0,001$ e $0,01$) (Fig. 4.15).

A Tabela 4.5 resume as estatísticas para os percentis mencionados acima.

A Tabela 4.6 apresenta uma comparação de algumas estatísticas resumo das distribuições “a posteriori” obtidas para cada percentil de interesse, com base nas duas distribuições “a priori” utilizadas. Os valores reais de tais percentis também estão na referida tabela.

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

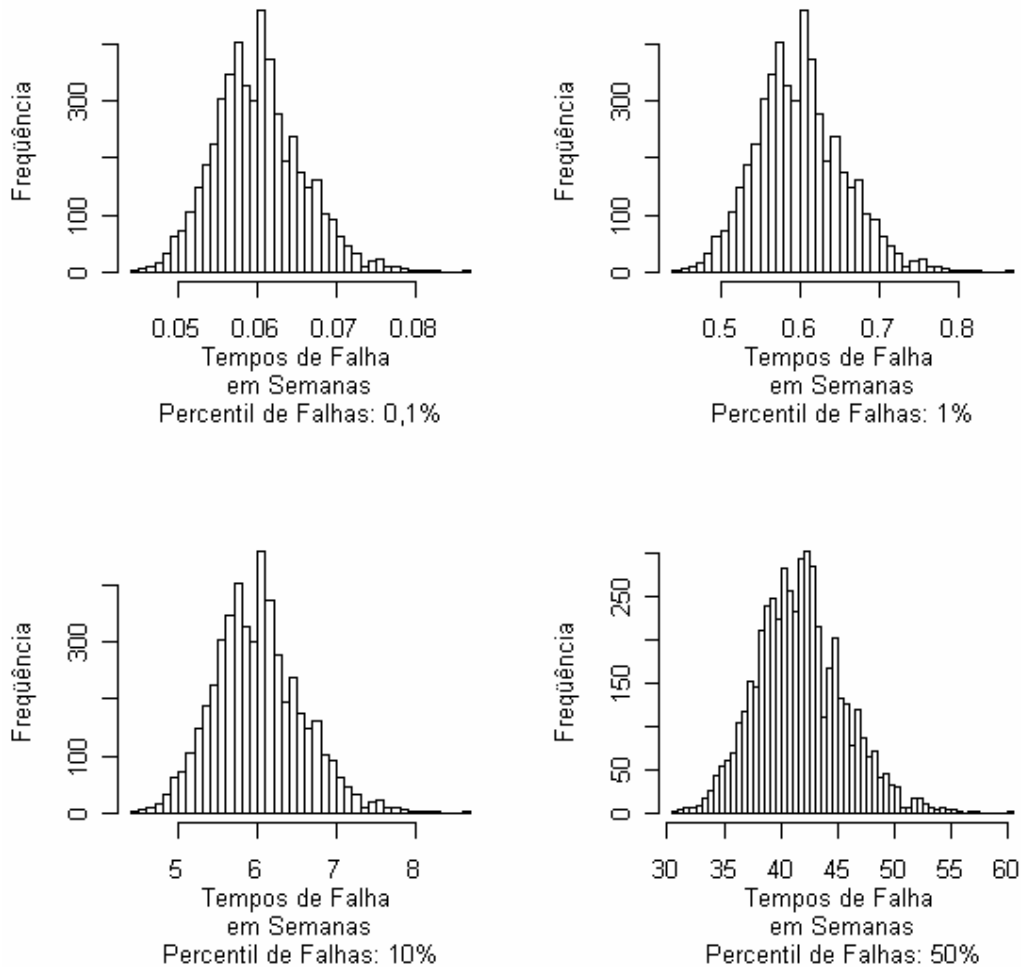


Fig. 4.15

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori de Jeffreys)

**ABORDAGEM BAYESIANA SEM ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Tabela 4.5
Estatísticas descritivas para a distribuição “a posteriori” de percentis 100p%, para vários valores de p com distribuição “a priori” de α , de Jeffreys

Percentil de Falhas	Valor Exato	Mínimo	Quantil 2,5%	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Quantil 97,5%	Máximo
$t_{0,001}$	0,05003	0,04469	0,04999	0,05625	0,05987	0,06009	0,06366	0,071868	0,0868
$t_{0,01}$	0,5025	0,4469	0,4999	0,5625	0,5987	0,6009	0,6366	0,7187	0,8680
$t_{0,10}$	5,268	4,469	4,999	5,625	5,987	6,009	6,366	7,1868	8,680
$t_{0,50}$	34,66	30,98	34,65	38,99	41,50	41,65	44,12	49,82	60,17

Tabela 4.6
Comparação entre os valores de percentis de falha com a utilização das distribuições “a priori” Gama(16;800) e Jeffreys

DISTRIBUIÇÃO “A PRIORI” GAMA(16;800)									
Percentil de Falhas	Valor Exato	Mínimo	Quantil 2,5%	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Quantil 97,5%	Máximo
$t_{0,001}$	0,05003	0,04191	0,04947	0,05522	0,05854	0,05881	0,06216	0,06935	0,07884
$t_{0,01}$	0,5025	0,4191	0,49466	0,5522	0,5854	0,5881	0,6216	0,69352	0,7884
$t_{0,10}$	5,268	4,191	4,9465	5,522	5,854	5,881	6,216	6,9352	7,884
$t_{0,50}$	34,66	29,05	34,29	38,27	40,58	40,76	43,08	48,07	54,65
DISTRIBUIÇÃO “A PRIORI” DE JEFFREYS									
Percentil de Falhas	Valor Exato	Mínimo	Quantil 2,5%	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Quantil 97,5%	Máximo
$t_{0,001}$	0,05003	0,04469	0,04999	0,05625	0,05987	0,06009	0,06366	0,07187	0,0868
$t_{0,01}$	0,5025	0,4469	0,4999	0,5625	0,5987	0,6009	0,6366	0,7187	0,8680
$t_{0,10}$	5,268	4,469	4,999	5,625	5,987	6,009	6,366	7,1868	8,680
$t_{0,50}$	34,66	30,98	34,65	38,99	41,50	41,65	44,12	49,82	60,17

Obs.: Tempo em semanas.

Observamos que não há grandes diferenças quando se utiliza a distribuição “a priori” Gama(16;800) e a distribuição “a priori” de Jeffreys. De modo geral os tempos de falha, para os mesmos percentis, são ligeiramente menores quando se usa a distribuição Gama(16;800).

* * *

5. ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO COM TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

Suponhamos agora que existam erros de classificação, ou seja, em um determinado tempo de avaliação τ_i , uma unidade pode erroneamente receber um escore $Z_{ij} \leq c$ e ser considerada inadequada quando na verdade era adequada (ou seja, $\tau_{ij} > \tau_i$) ou receber um escore $Z_{ij} > c$ e ser considerada adequada, quando na verdade não o é (ou seja, na verdade, $\tau_{ij} \leq \tau_i$).

Então, definimos as seguintes possibilidades de cometer os dois tipos de erro de classificação:

$$e_{1i} = P \left(\begin{array}{l} \text{unidade do item ser classificado como inadequado em } \tau_i \\ \text{quando na verdade não o é, ou seja, } \tau_{ij} > \tau_i. \end{array} \right)$$

$$e_{2i} = P \left(\begin{array}{l} \text{unidade do item ser classificado como adequado em } \tau_i \\ \text{quando na verdade, não o é, ou seja, } \tau_{ij} \leq \tau_i \end{array} \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

Vamos supor que estas probabilidades (riscos) de cometer tais erros não se alteram ao longo do tempo, ou seja, para todo τ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, as probabilidades de se cometer os erros de classificação permanecem as mesmas. Embora, em uma situação como esta, seja razoável pensar que tais probabilidades dependam de τ_i .

Assim, podemos eliminar o sub-índice "i" e trabalhar apenas com e_1 e e_2 .

O que temos então é a seguinte situação: em cada tempo de avaliação τ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) e para cada um dos N_i itens avaliados nesse tempo:

Tabela 5.1
Definição dos erros tipo 1 e tipo 2

Condição Real	Classificação	
	Adequado	Inadequado
Adequado	$1 - e_1$	e_1
Inadequado	e_2	$1 - e_2$

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Assim, temos em cada tempo de avaliação τ_i (fixo) que a probabilidade de errarmos a classificação do produto é dada pela soma das probabilidades p_i e $(1 - p_i)$ abaixo:

$$\begin{aligned}
 p_i &= P[Y_{ij} = 1] = P[\text{produto ser classificado como não adequado}] \\
 p_i &= P[Y_{ij} = 1] = P[\text{produto está adequado e foi classificado como não adequado}] \oplus \\
 &\oplus P[\text{produto não está adequado e foi classificado como não adequado}] = \\
 &= P[\text{ser classificado como não adequado} \mid \text{está adequado}] P[\text{está adequado}] \oplus \\
 &\oplus P[\text{ser classificado como não adequado} \mid \text{não está adequado}] P[\text{não está adequado}]
 \end{aligned}$$

$$p_i = P[Y_{ij} = 1] = e_1 \overbrace{P[T_{ij} > \tau_i]}^{\text{prob. de estar adeq. em } \tau_i} + (1 - e_2) P[T_{ij} \leq \tau_i] \quad (5.1)$$

e

$$\begin{aligned}
 1 - p_i &= P[Y_{ij} = 0] = P[\text{Produto ser classificado como adequado}] \\
 1 - p_i &= P[Y_{ij} = 0] = P[\text{ser classificado como adequado e ser inadequado}] \oplus \\
 &\oplus P[\text{ser classificado como adequado e ser adequado}] = \\
 &= P[\text{ser classificado como adequado} \mid \text{é indadequado}] P[\text{ser inadequado}] \oplus \\
 &\oplus P[\text{ser classificado como adequado} \mid \text{é adequado}] P[\text{ser adequado}]
 \end{aligned}$$

Logo,

$$1 - p_i = P[Y_{ij} = 0] = e_2 P[T_{ij} \leq \tau_i] + (1 - e_1) P[T_{ij} > \tau_i] \quad (5.2)$$

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

Portanto, incorporando as probabilidades de erros de classificação, a função de verossimilhança toma a forma (5.3) com as probabilidades p_i e $(1-p_i)$ dadas por (5.1) e (5.2).

$$L(\theta | y) = \prod_{i=1}^k p_i^{S_i} (1-p_i)^{N_i-S_i} \quad (5.3)$$

5.1 Utilizando a distribuição Exponencial como modeladora do tempo de falha.

Para tempos de falha com distribuição exponencial teremos:

$$p_i = e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] \quad (5.4)$$

e

$$1-p_i = e_2(1-e^{-\alpha\tau_i}) + (1-e_1)e^{-\alpha\tau_i} \quad (5.5)$$

Portanto:

$$L(\underline{p} | \underline{y}) = \prod_{i=1}^k \{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]\}^{S_i} \{e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i)\}^{N_i-S_i} \quad (5.6)$$

Na abordagem “clássica” o caminho natural seria tentar obter a estimativa dos parâmetros via método de máxima verossimilhança. Utilizando binômios de Newton, a forma funcional da verossimilhança pode ser reescrita e é apresentada abaixo (ver desenvolvimento no Anexo A):

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

$$\begin{aligned}
 L\left(\begin{matrix} p \\ y \end{matrix}\right) &= \sum_{r_1=1}^{S_1} \dots \sum_{r_k=1}^{S_k} \sum_{l_1=1}^{N_1-S_1} \dots \sum_{l_k=1}^{N_k-S_k} \binom{S_1}{r_1} \binom{S_2}{r_2} \dots \binom{S_k}{r_k} \binom{N_1-S_1}{l_1} \dots \binom{N_k-S_k}{l_k} \times \\
 &\times e_1^{\sum_{i=1}^k r_i} (1-e_1)^{\sum_{i=1}^k l_i} e_2^{\left(\sum_{i=1}^k (N_i-S_i) - \sum_{i=1}^k l_i\right)} (1-e_2)^{\sum_{i=1}^k S_i - \sum_{i=1}^k r_i} \times \\
 &\times \left\{ \sum_{m_1=1}^{N_1-r_1-l_1} \binom{N_1-r_1-l_1}{m_1} (-1)^{(N_1-r_1-l_1-m_1)} \exp[-\alpha\tau_1(N_1-r_1-l_1-m_1)] \right\} \times \\
 &\times \left\{ \sum_{m_2=1}^{N_2-r_2-l_2} \binom{N_2-r_2-l_2}{m_2} (-1)^{(N_2-r_2-l_2-m_2)} \exp[-\alpha\tau_2(N_2-r_2-l_2-m_2)] \right\} \times \dots \times \\
 &\times \left\{ \sum_{m_k=1}^{N_k-r_k-l_k} \binom{N_k-r_k-l_k}{m_k} (-1)^{(N_k-r_k-l_k-m_k)} \exp[-\alpha\tau_k(N_k-r_k-l_k-m_k)] \right\}
 \end{aligned}$$

onde na classificação feita em τ_i , temos:

r_i = itens classificados como impróprios para o consumo sendo em realidade apropriados.

l_i = itens classificados como apropriados para o consumo sendo em realidade impróprios.

S_i = total de itens avaliados como ruins.

$N_i - S_i$ = total de itens avaliados como bons.

Portanto, conforme se pode observar, a forma final da verossimilhança fica dependente de quantidades que não são conhecidas em uma situação prática (r_i e l_i). Portanto, a opção neste caso pela abordagem Bayesiana justifica-se também, além do interesse teórico, por dificuldades operacionais.

Neste caso é preciso especificar distribuições “a priori” para cada probabilidade de erros (e_1 e e_2) além da distribuição “a posteriori” para α .

Em geral, costuma-se postular uma distribuição Beta ou o caso particular, uma Uniforme para essas probabilidades de erro.

5.2 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando uma Gama(16;800) e erros uniformes.

Como os erros não devem ser muito grandes, assumiremos que os mesmos poderão variar entre 0 e 1%. Tendo isso em conta iremos considerar que a função de distribuição dos erros “a priori”, tanto para o tipo 1 como para o tipo 2, é uma distribuição uniforme variando entre 0 e 0,01.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Temos agora três parâmetros desconhecidos, o parâmetro α da distribuição exponencial que modela o tempo de falha das amostras, que possui uma distribuição “a priori” determinada e os erros tipo 1 e 2, ambos com distribuição $U(0;0,01)$, conforme considerações acima.

Inicialmente iremos determinar a distribuição “a priori” conjunta dos três parâmetros considerando que são independentes, ou seja a distribuição de qualquer desses parâmetros não depende da dos demais, pois não há qualquer motivo para considerarmos o contrário. Com isso a distribuição conjunta de α , e_1 e e_2 é obtida pela multiplicação das três. Para distribuição “a priori” de α , utilizaremos, como na etapa anterior, quando ainda não havíamos incorporado erros de classificação, a distribuição $Gama(16;800)$. Dessa forma, a distribuição “a priori”, conjunta ficará:

$$\pi(\alpha; e_1; e_2) = \pi(\alpha) \times \pi(e_1) \times \pi(e_2) = Gama(16;800) \times U(0;0,1) \times U(0;0,1) \quad (5.7)$$

$$\pi(\alpha; e_1; e_2) = \frac{2^{69} \times 5^{29}}{3^6 \times 7^2 \times 11 \times 13} \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) \quad (5.8)$$

A distribuição “a posteriori” conjunta, será:

$$\pi(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = \frac{h(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i)}{\int_0^{0,50,10,1} \int_0^1 \int_0^1 h(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) d\alpha de_1 de_2} \quad (5.9)$$

Mas,

$$h(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \times \pi(\alpha; e_1; e_2)$$

Então:

$$h(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \times \frac{2^{69} \times 5^{29}}{3^6 \times 7^2 \times 11 \times 13} \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha)$$

Obtemos então a seguinte expressão para a distribuição “a posteriori” conjunta (V. desenvolvimento detalhado no Anexo D):

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

$$\pi(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = \frac{L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha)}{\int_0^{0,5} \int_0^{0,01} \int_0^{0,01} L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) d\alpha de_1 de_2} \quad (5.10)$$

É uma constante K que só depende de N_i e S_i .

Então:

$$\pi(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = \frac{1}{K} \underbrace{\times L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i)}_{\text{Verossimilhança conjunta}} \underbrace{\times \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha)}_{\text{"a priori" conjunta}} \quad (5.11)$$

Para obtermos a distribuição marginal de α fazemos os erros variarem em todo o espaço paramétrico para cada valor que α possa assumir.

Teremos então, que a marginal de α “a posteriori” será:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha | N_i, S_i) &= \frac{\int_{e_1=0}^{0,01} \int_{e_2=0}^{0,01} L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) de_2}{K} = \\ &= \frac{1}{K} \int_{e_1=0}^{0,01} \int_{e_2=0}^{0,01} L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) de_2 de_1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Mas a função de verossimilhança, conforme (5.6) é:

$$L(\tilde{p} | \tilde{y}) = \prod_{i=1}^k \{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha\tau_i)]\}^{S_i} \{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i)\}^{N_i-S_i}$$

Então, a marginal de α dada por (5.12), toma a forma:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha | N_i, S_i) &= \frac{1}{K} \int_{e_1=0}^{0,01} \int_{e_2=0}^{0,01} L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) de_2 de_1 = \\ &= \frac{1}{K} \int_{e_1=0}^{0,01} \int_{e_2=0}^{0,01} \left\{ \prod_{i=1}^k \{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha\tau_i)]\}^{S_i} \{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i)\}^{N_i-S_i} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) de_2 de_1 \right\} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Fizemos uma simulação desses resultados considerando 100.000 valores aleatórios de α , amostrados de uma distribuição *Gama*(16;800) utilizada como distribuição “a priori” e

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

consideramos também amostras de 100.000 valores dos erros tipo 1 e tipo 2, amostrados segundo a distribuição $U(0;0,01)$.

Após a obtenção de 100.000 pontos da função de verossimilhança, em função dos valores de α , e_1 e e_2 obtidos, podemos determinar para os mesmos, a distribuição “a priori” correspondente.

Para a determinação da distribuição marginal “a posteriori”, utilizamos a técnica SIR, já utilizada anteriormente antes da incorporação de erros. Considerou-se como função de referência a mesma distribuição “a priori” conjunta dos parâmetros α , e_1 e e_2 dada por (5.8). Dessa forma, a distribuição conjunta de α , passa a ser proporcional à verossimilhança, dada por (5.6), no algoritmo que permite determinar a distribuição “a posteriori” de α .

Observe-se que a função verossimilhança é função dos parâmetros α , e_1 e e_2 tendo por variáveis os valores de S_i (que são determinados pelo tempo de falha exponencial; já os valores de N_i são definidos previamente e não dependem do tempo de falha exponencial). Assim, para cada valor de α teremos um valor de e_1 e de e_2 que determinarão o valor da verossimilhança conforme (5.6). Como a amostragem dos valores de α foi feita com reposição, para valores idênticos de α repetidos, podemos ter valores diferentes da verossimilhança pois os erros para esses valores não são obrigatoriamente iguais. Então, para obtermos a verossimilhança em função de α “a posteriori”, devemos somar todos os valores de verossimilhança para cada valor idêntico de α .

O algoritmo SIR que utilizamos fornece-nos os valores da verossimilhança “a posteriori”. Extraindo as linhas para esses valores da matriz de parâmetros (valores de α , e_1 e e_2) “a priori” onde se incluiu uma quarta coluna com os correspondentes valores de verossimilhança “a priori”, teremos os valores dos parâmetros “a posteriori” para os valores coincidentes com a verossimilhança “a posteriori”. Observe-se que nesse caso podemos ter valores de α iguais, pois os mesmos foram gerados com reposição e estamos obtendo os valores de α e dos erros em função da verossimilhança “a posteriori”.

No Anexo D, apresentamos os códigos da implementação desses conceitos para o programa “R”.

Aplicando-se o método de Amostragem Ponderada (SIR), (cuja implementação detalhada está no Anexo D), obtivemos o histograma de alpha “a posteriori” conforme a Fig. 5.1.

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

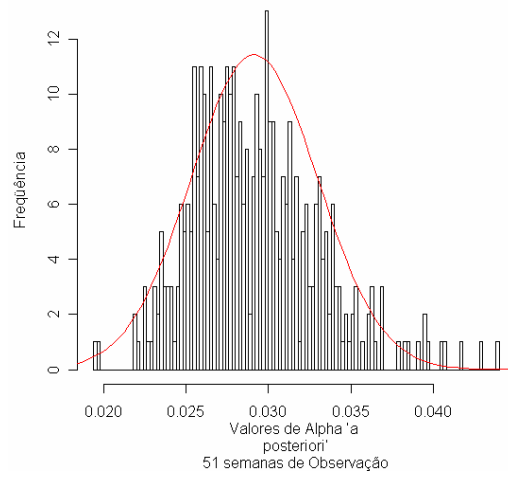


Fig. 5.1

Histograma da Distribuição Marginal de α “a posteriori”

Os histogramas dos valores de e_1 e e_2 “a posteriori” estão nas Fig. 5.2 e 5.3.

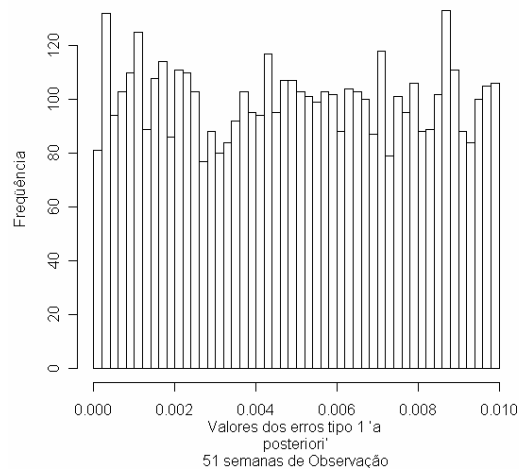


Fig. 5.2

Histograma dos erros tipo 1 “a posteriori”

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

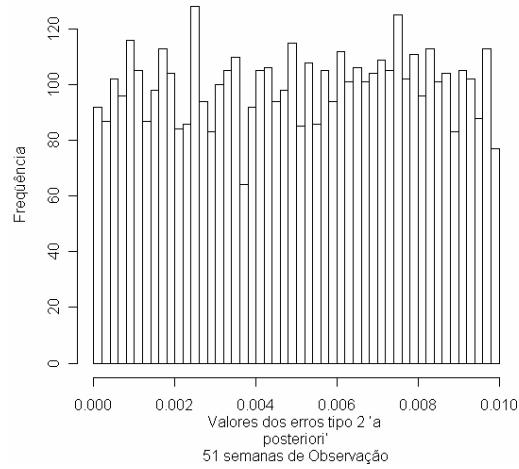


Fig. 5.3

Histograma dos erros tipo 2 “a posteriori”

A Tabela 5.2, apresenta as estatísticas descritivas da distribuição marginal dos erros.

Tabela 5.2
Estatísticas da Distribuição Marginal dos Erros

Tipo de Erros	Mínimo	1°. Quartil	Mediana	Média	3°. Quartil	Máximo
e_1	0,000000	0,002360	0,004992	0,004983	0,007519	0,009999
Tipo de Erros	Mínimo	1°. Quartil	Mediana	Média	3°. Quartil	Máximo
e_2	0,000000	0,002528	0,004992	0,005034	0,007519	0,009995

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

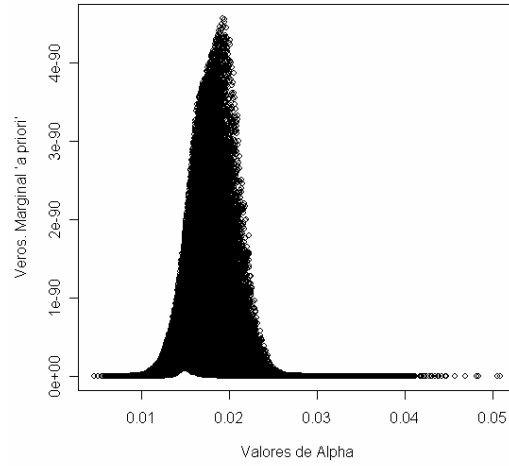


Fig. 5.4 a)

Verossimilhança de α “a priori” utilizando distribuição “a priori” Gama(16;800) com incorporação de erros uniformes até 1%.

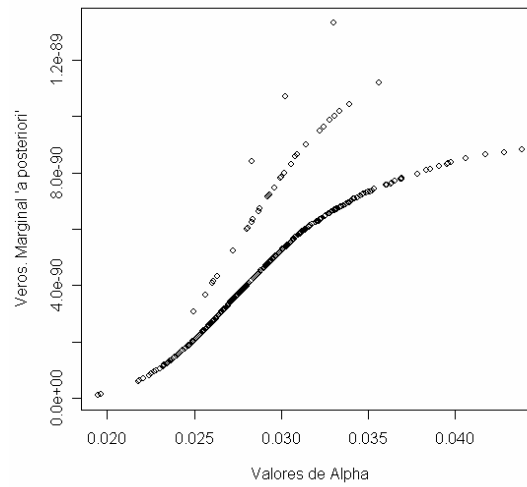


Fig. 5.4 b)

Verossimilhança de α “a posteriori” utilizando distribuição “a priori” Gama(16;800) com incorporação de erros uniformes até 1%.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Resumo estatístico comparado entre os valores de alpha “a priori” e “a posteriori”:

Tabela 5.3
Comparação dos valores de α “a priori” e “a posteriori”, com e sem incorporação de erros uniformes limitados a 1% e utilização da distribuição “a priori” Gama(16;800)

PONTOS DE INTERESSE	Distribuição de Alpha “a priori”, Gama(16;800)	Distribuição de Alpha “a posteriori” sem incorporação de erros	Distribuição marginal de Alpha “a posteriori” com incorporação de erros
MÍNIMO	0,004636	0,01268	0,00000
1°. QUARTIL	0,016455	0,01609	0,02437
MEDIANA	0,019598	0,01708	0,02688
MÉDIA	0,020010	0,01713	0,02726
3°. QUARTIL	0,023095	0,01811	0,02980
MÁXIMO	0,050801	0,02386	0,05049

Observa-se que com a incorporação de erros os valores “a posteriori” de α deslocam-se para a direita.

5.2.1 Obtenção da distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é Gama(16;800) e a dos erros é U(0,001;0,01))

Iremos considerar as frações de falhas nas amostras utilizadas de forma análoga ao que foi feito antes de incorporarmos os erros. Usaremos as frações de falha: 0,1%, 1%, 10%, e 50% do total das amostras para determinar em quantas semanas, tal fração de falhas ocorre.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

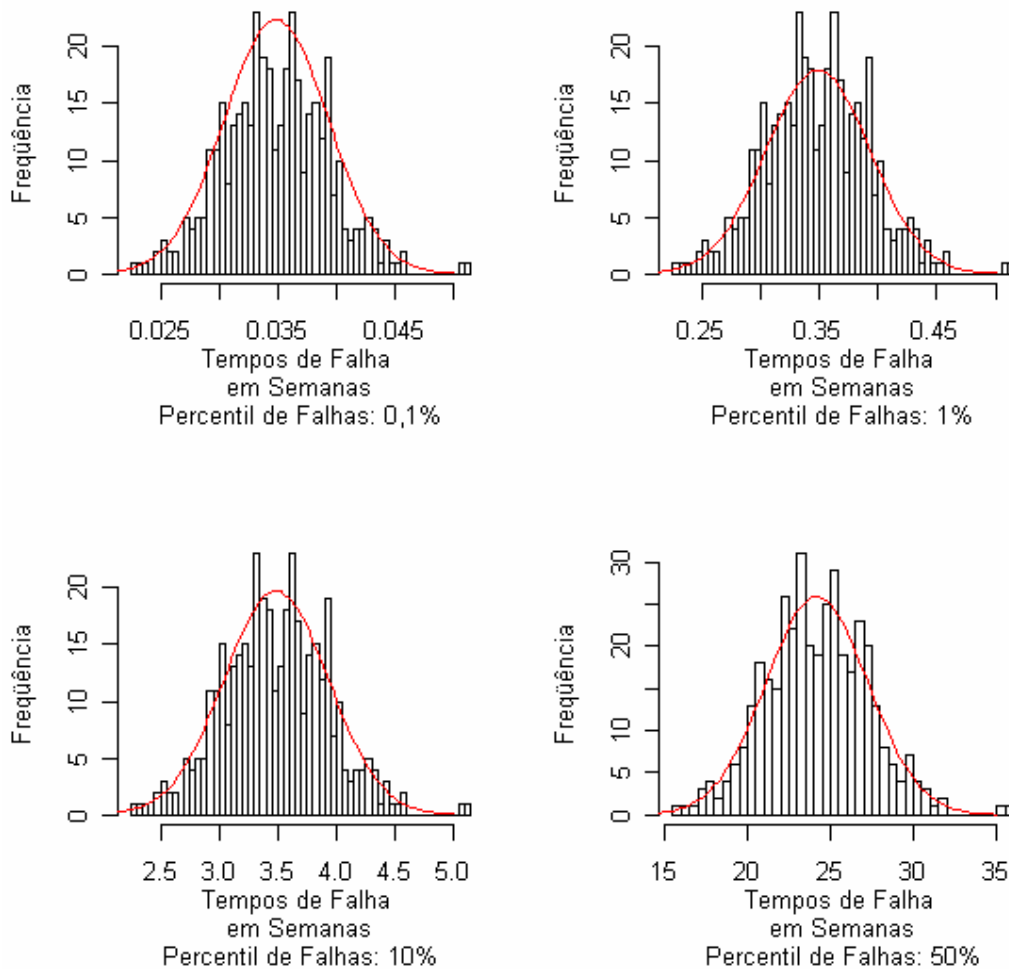


Fig. 5.5

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 1%)

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Tabela 5.4

Estatísticas descritivas para a distribuição “a posteriori” de percentis 100p%, para vários valores de p com distribuição “a priori” de α , Gama(16;800) e incorporação de erros uniformes limitados a 1%

Percentil de Falhas	Valor Exato	Mínimo	Quantil 2,5%	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Quantil 97,5%	Máximo
$t_{0,001}$	0,05003	0,02282	0,02606	0,03190	0,03484	0,03489	0,03797	0,04352	0,05129
$t_{0,01}$	0,5025	0,2282	0,2606	0,3190	0,3484	0,3489	0,3797	0,4352	0,5129
$t_{0,10}$	5,268	2,282	2,6058	3,190	3,484	3,489	3,797	4,352	5,129
$t_{0,50}$	34,66	15,82	18,06	22,11	24,15	24,18	26,32	30,17	35,55

A Tabela 5.4 apresenta os resumos comparativos dos resultados obtidos sem a incorporação de erros e com a incorporação dos mesmos, no caso da utilização da distribuição “a priori” Gama(16;800) e erros segundo uma $U(0,001;0,01)$.

Tabela 5.5

Comparação entre os tempos dos percentis de amostras sem e com incorporação de erros e utilização da distribuição “a priori” Gama(16;800)

PERCENTIL DE FALHAS (%)	VALORES REAIS	Distribuição “a priori” Gama(16;800) SEM INCORPORAÇÃO DE ERROS			Distribuição “a priori” Gama(16;800) COM INCORPORAÇÃO DE ERROS UNIFORMES ATÉ 1%		
		MÉDIA	MEDIANA	IC _[2,5%;97,5%]	MÉDIA	MEDIANA	IC _[2,5%;97,5%]
$t_{0,001}$	0,05003	0,05881	0,05854	[0,04947;0,06935]	0,03489	0,03484	[0,02606;0,04352]
$t_{0,01}$	0,5025	0,5881	0,5854	[0,4947;0,6935]	0,3489	0,3484	[0,2606;0,4352]
$t_{0,10}$	5,268	5,881	5,854	[4,947;6,935]	3,489	3,484	[2,6058;4,352]
$t_{0,50}$	34,66	40,76	40,58	[34,29;48,07]	24,18	24,15	[18,06;30,17]

Obs.: Valores de tempo em semanas.

Pode-se observar que com a incorporação de erros de classificação, os tempos de falha ficaram menores, ou seja, os erros de classificação têm o efeito de diminuir a previsão do *shelf life* dos produtos.

5.3 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α e erros uniformes limitados a 1%.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Distribuição de Jeffreys:

Tanto Berger (1985) como Box & Tiao (1973), nos informam que para o caso de múltiplos parâmetros a distribuição “a priori” de Jeffreys, já utilizada na situação monoparamétrica, em que ainda não incorporáramos os erros de classificação, é proporcional à raiz quadrada do determinante da matriz esperada de informação de Fisher, a qual designaremos por $I(\theta)$, sendo θ o vetor de parâmetros considerado.

Então:

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{[\det I(\theta)]} \quad (5.14)$$

em que

$$I(\theta) = -E_x [H(\log f)]$$

Sendo $H(\log f)$ a matriz hessiana da logverossimilhança conjunta.

Mas, no nosso caso temos os parâmetros α, e_1 e e_2 e a função $f(X | \alpha, e_1, e_2)$ é a logverossimilhança conjunta para os três parâmetros. A variável X é a quantidade de itens inadequados ao consumo, avaliados a cada semana i , ou seja S_i :

$$I(\theta) = -E_{S_i} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial e_1 \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial e_2 \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial \alpha \partial e_1} & \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial e_1^2} & \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial e_2 \partial e_1} \\ \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial \alpha \partial e_2} & \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial \alpha \partial e_1} & \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial e_2^2} \end{bmatrix}$$

Outra forma de obtermos a distribuição “a priori” conjunta (5.14) quando há independência entre os valores de α, e_1 e e_2 (Berger, 1985 e Box & Tiao, 1973) é:

$$\pi(\alpha, e_1, e_2) \propto \sqrt{I(\alpha)I(e_1)I(e_2)} \quad (5.15)$$

em que $I(\alpha), I(e_1)$ e $I(e_2)$ são as matrizes de informação esperada de Fisher, respectivamente em relação a cada um dos três parâmetros α, e_1 e e_2 , como segue::

$$I(\alpha) = -E_x \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha^2} \log(f(X | \alpha, e_1, e_2) | \alpha, e_1, e_2) \right] \quad (5.16)$$

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

$$I(e_1) = -E_X \left[\frac{\partial^2 e_1}{\partial e_1^2} \log(f(X | \alpha, e_1, e_2) | \alpha, e_1, e_2) \right] \quad (5.17)$$

$$I(e_2) = -E_X \left[\frac{\partial^2 e_2}{\partial e_2^2} \log(f(X | \alpha, e_1, e_2) | \alpha, e_1, e_2) \right] \quad (5.18)$$

Calculemos, primeiramente, as derivadas segundas de α , e_1 e e_2 relativas à logverossimilhança, como indicado acima:

Conforme visto em (5.6):

$$\begin{aligned} f(x | \alpha, e_1, e_2) &= L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = \\ &= \prod_{i=1}^k \{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]\}^{S_i} \{e_2 [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha\tau_i)\}^{N_i - S_i} \end{aligned}$$

Então a logverossimilhança será:

$$\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)] = \sum_{i=1}^k S_i \log\{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]\} + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \log\{e_2 [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha\tau_i)\} \quad (5.19)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) &= \sum_{i=1}^k S_i \frac{\tau_i (1 - e_2) [\exp(-\alpha\tau_i)] - \tau_i e_1 \exp(-\alpha\tau_i)}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2) [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]} + \\ &+ \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{e_2 [\exp(-\alpha\tau_i) (\tau_i)] - \tau_i (1 - e_1) \exp(-\alpha\tau_i)}{e_2 [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial e_1} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = \sum_{i=1}^k \frac{S_i \exp(-\alpha\tau_i)}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2) [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]} - \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - S_i) \exp(-\alpha\tau_i)}{e_2 [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial e_2} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = \sum_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] \left\{ \frac{(N_i - S_i)}{e_2 [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} - \frac{S_i}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2) [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]} \right\} \quad (5.22)$$

Derivando mais uma vez as expressões (5.20), (5.21) e (5.22) em relação a cada um dos parâmetros α , e_1 e e_2 , teremos as seguintes derivadas segundas, que compõem a matriz de informação de Fisher:

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \\
 & = \sum_{i=1}^k S_i \frac{[e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1-e_2)][1 - \exp(-\alpha \tau_i)] [\tau_i (1-e_2) \exp(-\alpha \tau_i)(-\tau_i) - \tau_i e_1 \exp(-\alpha \tau_i)(-\tau_i)]}{(e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1-e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)])^2} - \\
 & - \frac{[\tau_i (1-e_2) \exp(-\alpha \tau_i) - \tau_i e_1 \exp(-\alpha \tau_i)] [e_1 \exp(-\alpha \tau_i)(-\tau_i) + (1-e_2)[- \exp(-\alpha \tau_i)(-\tau_i)]]}{(e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1-e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)])^2} + \\
 & + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \left[\frac{[e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i)] [-\tau_i^2 e_2 \exp(-\alpha \tau_i) + \tau_i^2 (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i)]}{(e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i))^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{\tau_i [e_2 \exp(-\alpha \tau_i) - (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i)] [\tau_i e_2 \exp(-\alpha \tau_i) - (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i)(\tau_i)]}{(e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i))^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

Observemos que a equação acima, a fim de facilitar seu entendimento, pode ser escrita de uma forma mais simples, desde que façamos:

$$a = \exp(-\alpha \tau_i)$$

Então (5.23), toma a forma:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \\
 & = \sum_{i=1}^k S_i \frac{[e_1 a + (1-e_2)][1-a] [\tau_i (1-e_2) a(-\tau_i) - \tau_i e_1 a(-\tau_i)]}{(e_1 a + (1-e_2)[1-a])^2} - \\
 & - \frac{[\tau_i (1-e_2) a - \tau_i e_1 a] [e_1 a(-\tau_i) + (1-e_2)[-a(-\tau_i)]]}{(e_1 a + (1-e_2)[1-a])^2} + \\
 & + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \left[\frac{[e_2 [1-a] + (1-e_1) a] [-\tau_i^2 e_2 a + \tau_i^2 (1-e_1) a]}{(e_2 [1-a] + (1-e_1) a)^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{\tau_i [e_2 a - (1-e_1) a] [\tau_i e_2 a - (1-e_1) a \tau_i]}{(e_2 [1-a] + (1-e_1) a)^2} \right]
 \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas:

Fazendo:

$$b = 1 - e_1$$

$$c = 1 - e_2$$

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Agrupando e simplificando:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = \\ & = \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ S_i \frac{-(c-e_1)[a[e_1 a + c[1-a]] + a^2[c-e_1]]}{(e_1 a + c[1-a])^2} + (N_i - S_i) \frac{(b-e_2)[a[e_2(1-a) + ba] - a^2(b-e_2)]}{(e_2[1-a] + ba)^2} \right\} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Analogamente:

$$\frac{\partial^2}{\partial e_1^2} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-S_i a^2}{[e_1 a + c[1-a]]^2} - \frac{(N_i - S_i) a^2}{[e_2[1-a] + ba]^2} \right\} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial e_2^2} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = -\sum_{i=1}^k [1-a]^2 \left\{ \frac{(N_i - S_i)}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{S_i}{[e_1 a + c[1-a]]^2} \right\} \quad (5.26)$$

Levando agora (5.24), (5.25) e (5.26), respectivamente em (5.16), (5.17) e (5.18), teremos os seguintes valores para as matrizes esperadas de informação de Fisher, com respeito a cada um dos parâmetros. Devemos calcular as esperanças em relação à variável X , que no caso é o número de amostras inadequadas para o consumo em cada semana, ou seja, S_i .

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -\sum_{i=1}^k \tau_i^2 E_{S_i} \left\{ S_i \frac{-(c-e_1)[a[e_1 a + c[1-a]] + a^2[c-e_1]]}{(e_1 a + c[1-a])^2} + (N_i - S_i) \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a] + ba] - a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a] + ba)^2} \right\} = \\ &= -\sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{-(c-e_1)[a[e_1 a + c[1-a]] + a^2[c-e_1]]}{(e_1 a + c[1-a])^2} E_{S_i}(S_i) + \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a] + ba] - a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a] + ba)^2} E_{S_i}(N_i - S_i) \right\} \end{aligned}$$

Mas, conforme visto no Capítulo 3, o valor esperado para S_i é o valor esperado da variável dicotômica Y_{ij} quando o produto está inadequado do tempo τ_i , ou seja na semana i . Nesse caso a variável Y_{ij} assume o valor 1.

$$E_{S_i} \{S_i\} = \sum_{j=1}^{N_i} E(Y_{ij}) = \sum_{j=1}^{N_i} (1 \times \Pr[Y_{ij} = 1]) = N_i [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] = N_i (1 - a)$$

e

$$E_{S_i} \{N_i - S_i\} = E_{S_i} \{N_i\} - E_{S_i} \{S_i\} = N_i - N_i (1 - a) = N_i (1 - 1 + a) = N_i a$$

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Então,

$$I(\alpha) = - \sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{-(c-e_1)[a[e_1 a + c[1-a]] + a^2[c-e_1]]}{(e_1 a + c[1-a])^2} (1-a) + \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a] + ba] - a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a] + ba)^2} a \right\} \quad (5.27)$$

Analogamente,

$$I(e_1) = \sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1 a + c[1-a]]^2} + \frac{a}{[e_2[1-a] + ba]^2} \right\} \quad (5.28)$$

De (5.26):

$$I(e_2) = \sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1 a + c[1-a]]^2} + \frac{a}{[e_2[1-a] + ba]^2} \right\} \quad (5.29)$$

Assim, levando esses resultados em (5.15):

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, e_1, e_2) &\propto \left\{ - \sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{(e_1 - c)ac(1+2a)(1-a)}{(e_1 a + c - ac)^2} + \frac{(b-e_2)a^2 e_2}{(e_2 - e_2 a + ba)^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{(c-e_1)ac(1+2a)(1-a)}{(e_1 a + c - ac)^2} + \frac{(e_2 - b)a^2 e_2}{(e_2 - e_2 a + ba)^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\left\{ \sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right\} \right\} \times \left\{ \sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right\} \right\} \end{aligned}$$

No nosso caso como $N_i = cte = 7$, podemos finalmente fazer:

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha, e_1, e_2) &\propto \\
 &\propto \left\{ 7 \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{(c - e_1)ac(1 + 2a)(1 - a)}{(e_1a + c - ac)^2} + \frac{(e_2 - b)a^2e_2}{(e_2 - e_2a + ba)^2} \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times 7 \sum_{i=1}^k a^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2a + ba]^2} \right\} \times 7 \sum_{i=1}^k (1 - a)^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2a + ba]^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
 &= 7\sqrt{7} \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{(c - e_1)ac(1 + 2a)(1 - a)}{(e_1a + c - ac)^2} + \frac{(e_2 - b)a^2e_2}{(e_2 - e_2a + ba)^2} \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{i=1}^k a^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2a + ba]^2} \right\} \times \sum_{i=1}^k (1 - a)^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2a + ba]^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 (5.30)
 \end{aligned}$$

No Anexo F, fazemos o desenvolvimento detalhado das expressões acima e a implementação, no software R, desta distribuição de Jeffreys multiparamétrica para o tipo de simulação que temos estudado (100.000 amostras de α , onde aleatoriamente, para cada valor de α foi escolhido um valor de erro tipo I (e_1) e de erro tipo II (e_2)).

Apresentamos aqui as principais informações e resultados:

Utilizamos como função de referência para gerarmos os diferentes parâmetros, as seguintes distribuições:

$$\alpha \sim U(0,001;0,5)$$

$$e_1 \sim U(0;0,01)$$

$$e_2 \sim U(0;0,01)$$

iênticas às que foram usas quando trabalhamos com a distribuição “a priori” Gama(16;800).

A probabilidade de cada um dos tipos de erros foi limitada a 1%.

Para a distribuição de Jeffreys, conforme obtivemos em (5.30), o resultado da marginal da distribuição, em relação a α , foi:

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

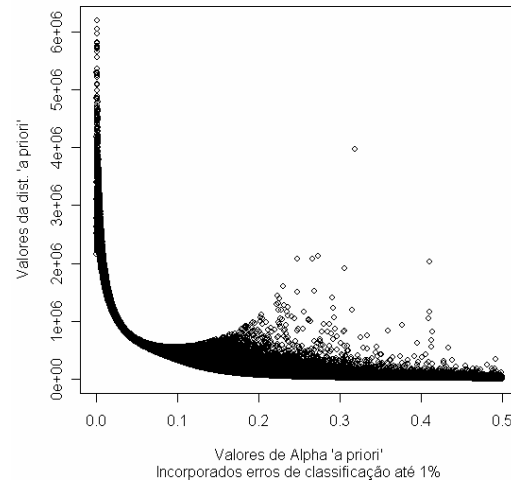


Fig. 5.6

Distribuição “a priori” de Jeffreys em função de α com erros de classificação até 1%

Os valores de verossimilhança para valores de α extraídos da função de referência $\alpha \sim U(0,001;0,5)$, são:

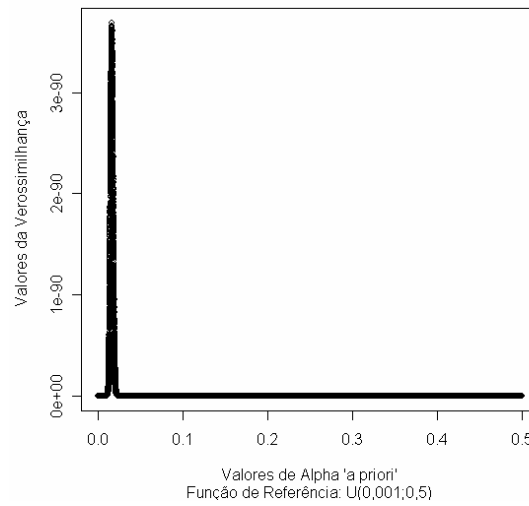


Fig. 5.7

Valores de Verossimilhança em Função de α , extraídos de uma U(0,001;0,5)

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

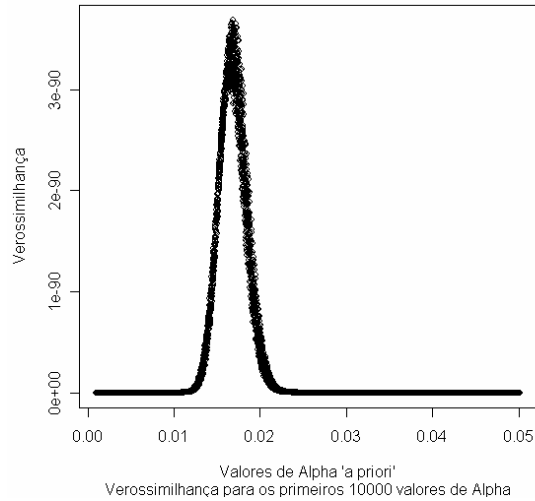


Fig. 5.8

Verossimilhança para os primeiros 10000 valores de α

5.3.1 Obtenção da distribuição marginal “a posteriori” de α , com base na distribuição de Jeffreys e erros uniformes.

Aplicando o método SIR, obtemos os seguintes valores “a posteriori” para α

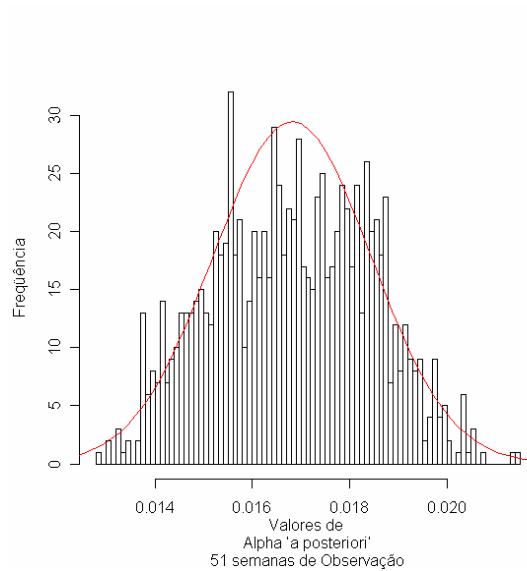


Fig. 5.9

Histograma da distribuição marginal “a posteriori” de α com base na distribuição de Jeffreys e erros uniformes

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

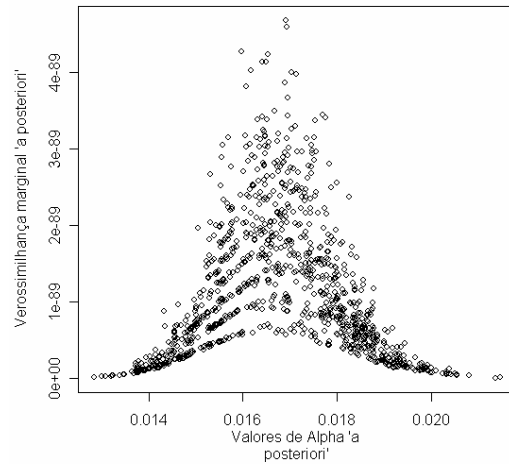


Fig. 5.10
Verossimilhança marginal “a posteriori” em relação a α utilizando a distribuição “a priori” de Jeffreys e erros uniformes limitados a 1%

Tabela 5.6
Comparação dos valores de α “a priori” e “a posteriori”, com e sem incorporação de erros uniformes limitados a 1% e utilização da distribuição “a priori” de Jeffreys

PONTOS DE INTERESSE	Distribuição de Alpha “a priori” conforme distribuição de referência U(0,001,0,5)	Distribuição de Alpha “a posteriori” sem incorporação de erros (Cap. 4)	Distribuição marginal de Alpha “a posteriori” com incorporação de erros
MÍNIMO	0,001003	0,01152	0,01286
1°. QUARTIL	0,124928	0,01571	0,01554
MEDIANA	0,250567	0,01670	0,01683
MÉDIA	0,250141	0,01678	0,01682
3°. QUARTIL	0,374994	0,01778	0,01807
MÁXIMO	0,499999	0,02238	0,02144

5.3.2 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a de Jeffreys e a dos erros é U(0,001;0,01))

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

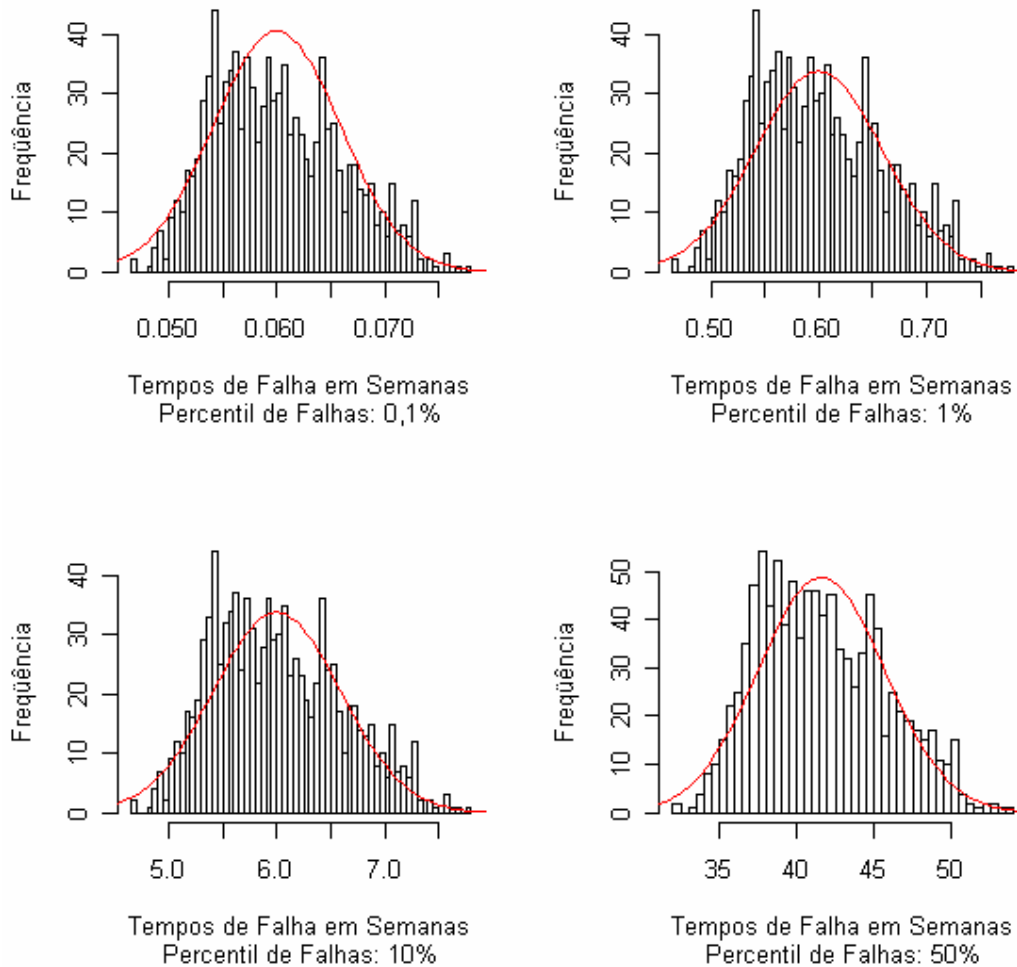


Fig. 5.11

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” de Jeffreys, e incorporação de erros uniformes limitados a 1%)

Com base nos resultados precedentes e os constantes dos Anexos E e F, podemos montar as seguintes tabelas:

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

Tabela 5.7

Estatísticas descritivas para a distribuição “a posteriori” de percentis 100p%, para vários valores de p com distribuição “a priori” de α de Jeffreys e incorporação de erros uniformes limitados a 1%

Percentil de Falhas	Valor Exato	Mínimo	Quantil 2,5%	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Quantil 97,5%	Máximo
$t_{0,001}$	0,0500	0,0466	0,0505	0,0553	0,0594	0,0600	0,0643	0,0723	0,0778
$t_{0,01}$	0,5025	0,4663	0,5054	0,5533	0,5940	0,6002	0,6434	0,7234	0,7778
$t_{0,10}$	5,268	4,663	5,0541	5,533	5,940	6,002	6,434	7,2339	7,778
$t_{0,50}$	34,66	32,32	35,033	38,35	41,17	41,60	44,60	50,142	53,91

Tabela 5.8

Comparação entre os tempos dos percentis de amostras sem e com incorporação de erros uniformes até 1% com utilização da distribuição “a priori” de Jeffreys

PERCENTIL DE FALHAS (%)	VALORES REAIS	Distribuição “a priori” Gama(16;800) SEM INCORPORAÇÃO DE ERROS			Distribuição “a priori” Gama(16;800) COM INCORPORAÇÃO DE ERROS UNIFORMES ATÉ 1%		
		MÉDIA	MEDIANA	IC _[2,5%;97,5%]	MÉDIA	MEDIANA	IC _[2,5%;97,5%]
$t_{0,001}$	0,0500	0,05881	0,05854	[0,04947;0,06935]	0,0600	0,0594	[0,0505;0,0723]
$t_{0,01}$	0,5025	0,5881	0,5854	[0,4947;0,6935]	0,6002	0,5940	[0,5054;0,7234]
$t_{0,10}$	5,268	5,881	5,854	[4,947;6,935]	6,002	5,940	[5,0541;7,2339]
$t_{0,50}$	34,66	40,76	40,58	[34,29;48,07]	41,60	41,17	[35,033;50,14]

Obs.: Valores de tempo em semanas.

Lembramos que os dados simulados por nós não têm erros de classificação. Cada amostra foi classificada como boa ou ruim (variável dicotômica $Y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ ou comparando-se o tempo decorrido com o fornecido pela curva de tempo dada por uma $Exp(50)$. Daí termos incluído a coluna de valores reais, onde temos a duração de tempo de validade precisa para cada percentual de amostras que falham.

Nessas tabelas observamos que quanto maior o percentual de erros, menores os prazos que se podem estipular para os tempos de vida dos produtos. Conclui-se então que o esforço em elaborar experimentos com pouca probabilidade de erro é compensado pelos maiores prazos de validade dos produtos armazenados em prateleira. Outro fato importante é que os tempos de validade obtidos sem a incorporação de erros são menores que quando há essa incorporação o que colabora no sentido da segurança alimentar.

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL

5.4 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando uma Gama(16;800) e erros uniformes limitados a 5%.

Nas simulações feita até aqui, limitamos os erros até 1%, ou seja estamos considerando que na avaliação dos conjuntos de amostras, pode-se cometer até 1% de erros de avaliação (conforme definidos no início deste capítulo), considerados distribuídos uniformemente. Faremos agora uma simulação com a distribuição “a priori” Gama(16;800) elevando o patamar de cada tipo de erro a 5% a fim de avaliarmos a influência da variação do nível dos erros.

Assim, utilizaremos a mesma amostra de valores de α anteriormente empregada na simulação com a distribuição “a priori” Gama(16;800). Os erros seguirão distribuições uniformes $U(0;0,05)$. Os resultados obtidos foram os seguintes:

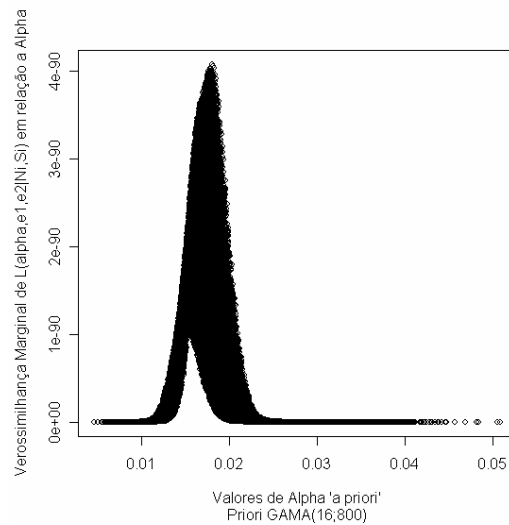


Fig. 5.12

Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 5%

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

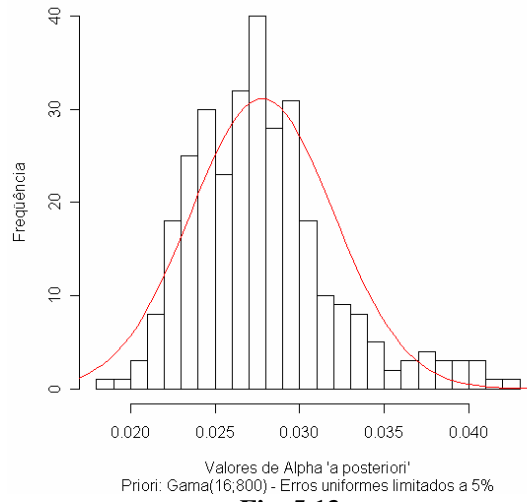


Fig. 5.13

Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros uniformes até 5% e distribuição “a priori” Gama(16;800)

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
TEMPO DE FALHA EXPONENCIAL**

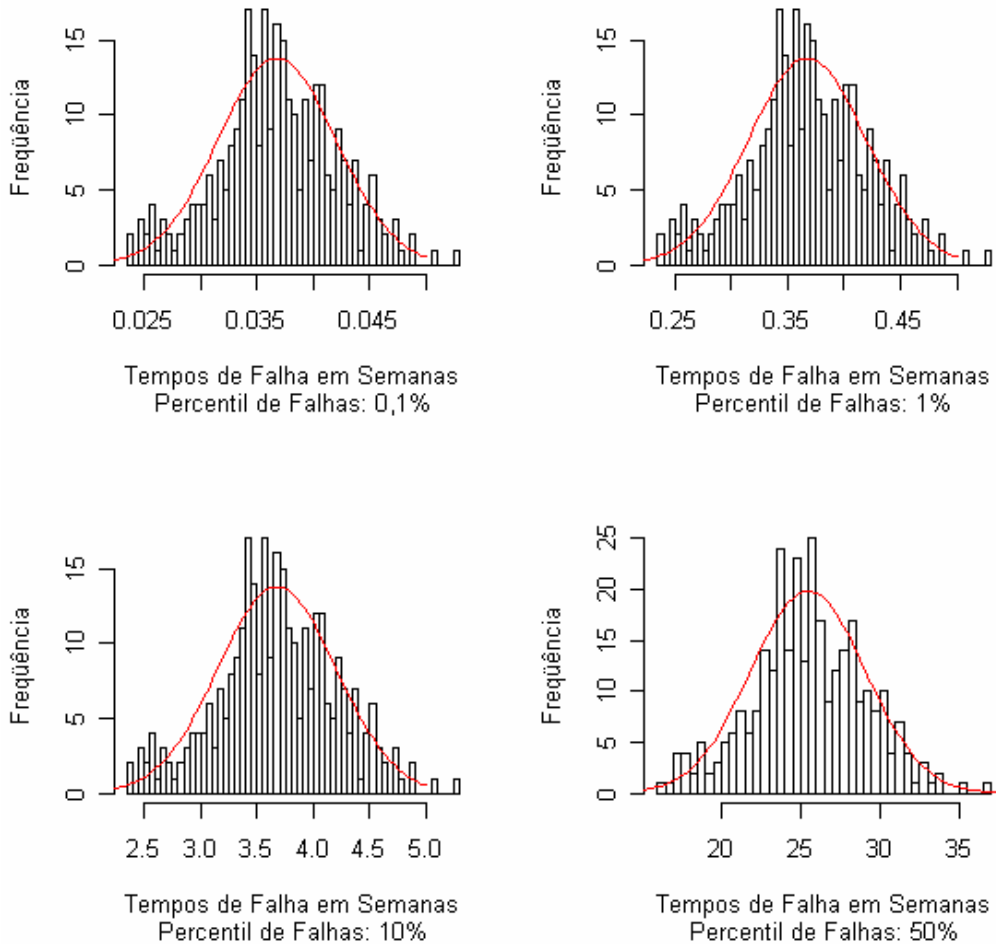


Fig. 5.14

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 5%)

* * *

6 UTILIZAÇÃO DOS DADOS REAIS OBTIDOS NO EXPERIMENTO BASE FEITO POR FREITAS, BORGES E HO.

Utilizaremos agora os mesmos procedimentos anteriormente empregados nas simulações com amostras de um produto perecível, cujo tempo de falha foi modelado por uma $Exp(50)$. Na modelagem do parâmetro α utilizaremos, da mesma forma que nas simulações precedentes, 100.000 valores do mesmo amostrados de uma distribuição “a priori” $Gama(16;800)$ e incorporamos os mesmos erros de classificação do tipo 1, anteriormente gerados. Adotamos a suposição de que tais erros não ocorrem em mais do que 1% das amostras avaliadas, tanto para os erros tipo 1 quanto para os erros tipo 2, ou seja, do total das amostras avaliadas como inadequadas, poderá estar sendo cometido um erro de avaliação em até 1% dos casos e também do total das amostras avaliadas como boas, até 1% poderão não estar corretamente classificadas. Consideramos que 1% de avaliações equivocadas é um limite superior para esse tipo de classificação. Considerou-se que as possibilidades de cometer erros se mantêm constantes durante as 51 semanas em que durou o experimento e que tais erros seguem uma distribuição $U(0;0,01)$, como o fizemos nas simulações focalizadas no Capítulo 5.

No experimento realizado, apresentado no trabalho de referência, de Freitas, Borges e Ho (2003), os produtos foram avaliados com relação aos atributos SABOR, ODOR E ASPECTO. Adotaremos a seguinte nomenclatura:

Ni: Quantidade de itens do produto em teste, avaliado a cada semana i.

Sio: Quantidade de itens avaliados quanto ao odor, como inadequados a cada semana i.

Sis: Quantidade de itens avaliados quanto ao sabor, como inadequados a cada semana i.

Sia: Quantidade de itens avaliados quanto ao aspecto, como inadequados a cada semana i.

Bonsio: Quantidade de itens avaliados quanto ao odor, como adequados a cada semana i.

Bonsis: Quantidade de itens avaliados quanto ao sabor, como adequados a cada semana i.

Bonsia: Quantidade de itens avaliados, quanto ao aspecto, como adequados, a cada semana i.

A quantidade de itens avaliados variou a cada semana, diferentemente das simulações anteriormente realizadas.

Neste caso, diversamente do que fizemos com um experimento simulado, focalizado em detalhe no Anexo F, onde $N_i = cte = 7$, N_i não é constante sendo uma matriz de dimensão 1×51 onde cada coluna apresenta a quantidade de itens avaliado durante as 51

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO DADOS DO EXPERIMENTO BASE

semanas que durou o experimento. O software R, ao ser um programa matricial, facilita muito o trabalho de programação que se tem que fazer. As grandezas que variaram durante cada uma das 51 semanas que durou o experimento são matrizes cujas colunas informam os valores a cada semana e cujas linhas informam a variação com cada um dos 100.000 valores considerados para o parâmetro α . A grandeza N_i , variou conforme gráfico abaixo:

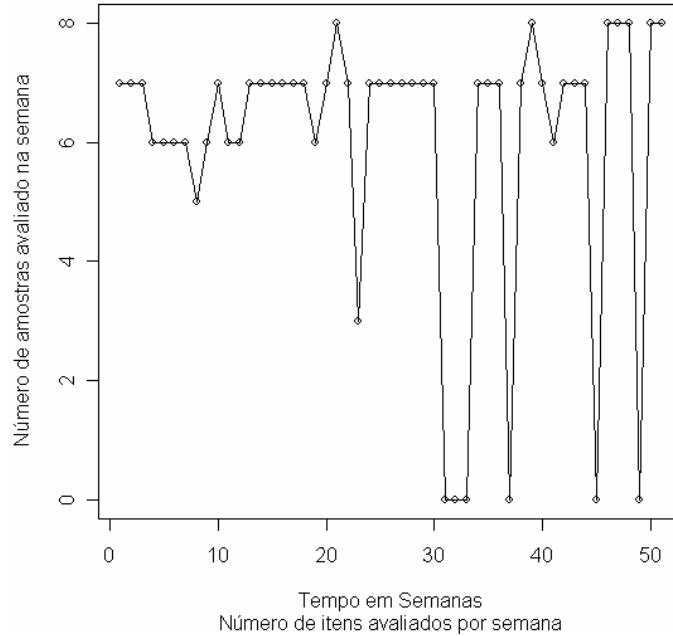


Fig. 6.1
Número de amostras avaliado a cada semana em função da semana de avaliação

No experimento simulado $N_i = cte = 7$, a distribuição de Jeffreys era a dada por (5.30):

$$\pi(\alpha, e_1, e_2) \propto 7\sqrt{7} \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{(c - e_1)ac(1 + 2a)(1 - a)}{(e_1a + c - ac)^2} + \frac{(e_2 - b)a^2e_2}{(e_2 - e_2a + ba)^2} \right\} \times \left[x \sum_{i=1}^k a^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2a + ba]^2} \right\} \times \sum_{i=1}^k (1 - a)^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2a + ba]^2} \right\} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

No experimento real a quantidade de itens variou a cada semana, havendo semanas onde nenhum item foi avaliado, a expressão da distribuição de Jeffreys deverá contemplar a

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

variação dos itens avaliados a cada semana e será utilizada em sua forma sem simplificações. A tabela com a quantidade de itens avaliados em cada uma das 51 semanas para os atributos, odor, sabor e aspecto, é dada no início do Anexo G.

$$\pi(\alpha, e_1, e_2) \propto \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{(c - e_1)ac(1 + 2a)(1 - a)}{(e_1 a + c - ac)^2} + \frac{(e_2 - b)a^2 e_2}{(e_2 - e_2 a + ba)^2} \right\} \times \sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right\} \times \sum_{i=1}^k N_i (1 - a)^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

No Anexo H fazemos a implementação detalhada desta expressão.

6.1 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando uma Gama(16;800) e erros uniformes para o atributo ODOR.

Nesse caso, utilizando-se as mesmas técnicas utilizadas nas simulações feitas no Capítulo 5, cujo desenvolvimento detalhado encontra-se no Anexo G, para a distribuição “a priori” Gama(16;800), obtivemos:

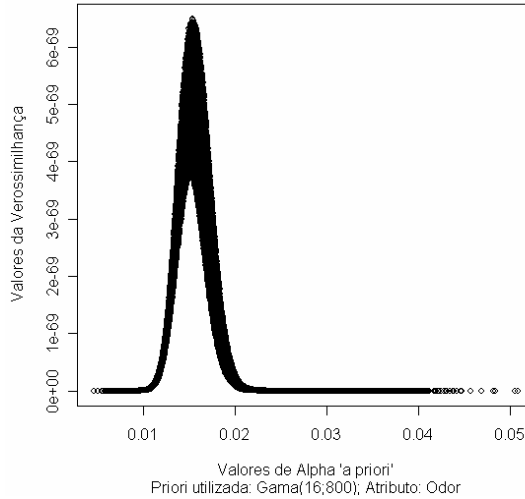


Fig. 6.2

**Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1%
Experimento Real do Trabalho de Referência – Atributo ODOR**

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

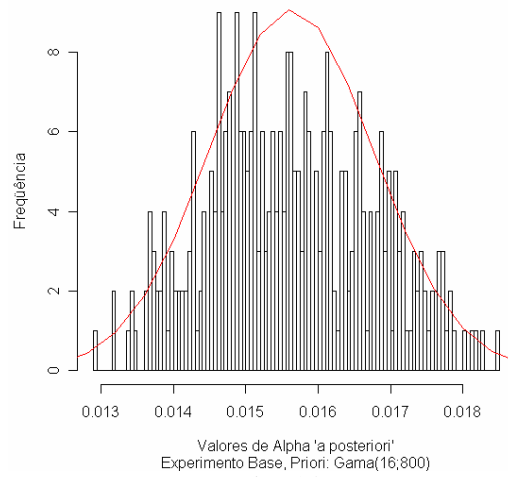


Fig. 6.3

Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Atributo ODOR

6.2 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Gama(16;800) e a dos erros é U(0,001;0,01) para o atributo ODOR.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

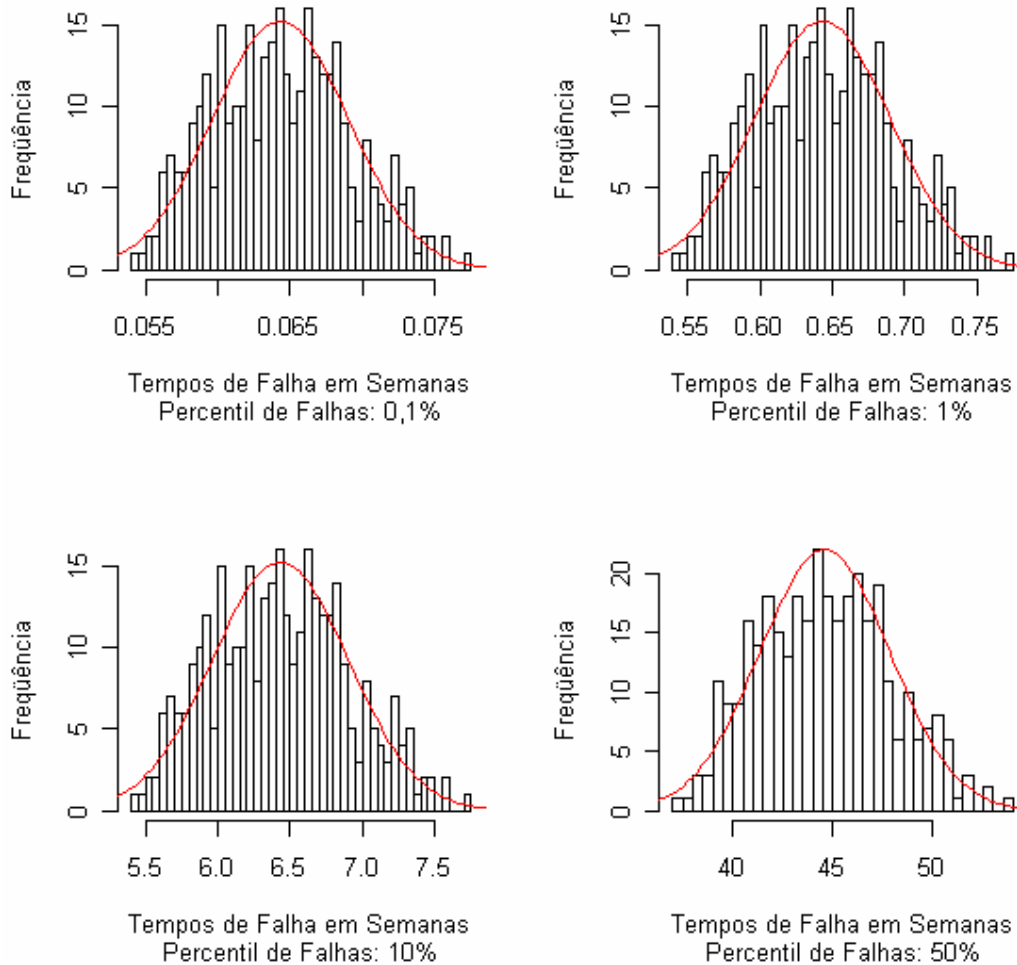


Fig. 6.4

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Atributo ODOR

6.3 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α e erros uniformes limitados a 1%. Atributo ODOR.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

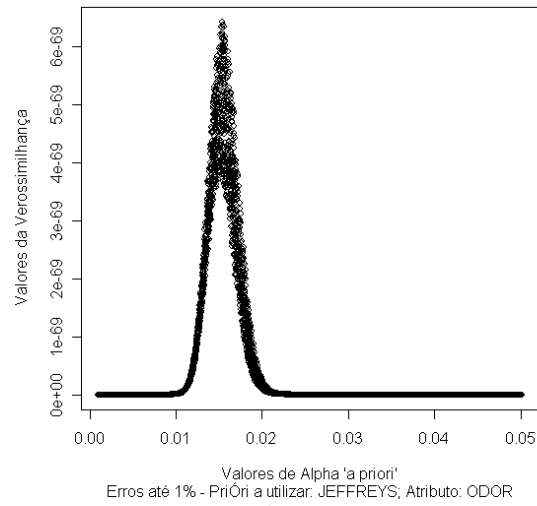


Fig. 6.5

**Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1%
Experimento Real do Trabalho de Referência – PriÓri Jeffreys -Atributo ODOR**

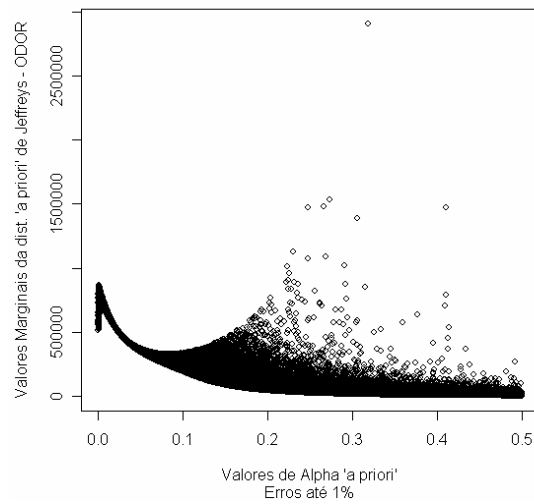


Fig. 6.6

**Distribuição “a priori” de Jeffreys em função de α com erros de classificação até 1% para o
experimento base – Atributo ODOR**

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

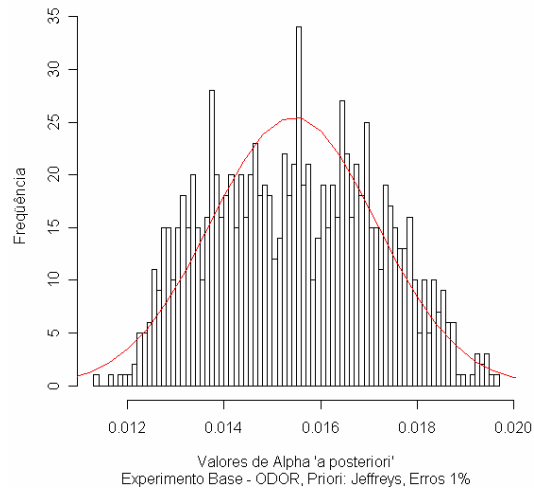


Fig. 6.7

Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Priori Jeffreys - Atributo ODOR

6.4 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Jeffreys e a dos erros é $U(0,001;0,01)$ para o atributo ODOR.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

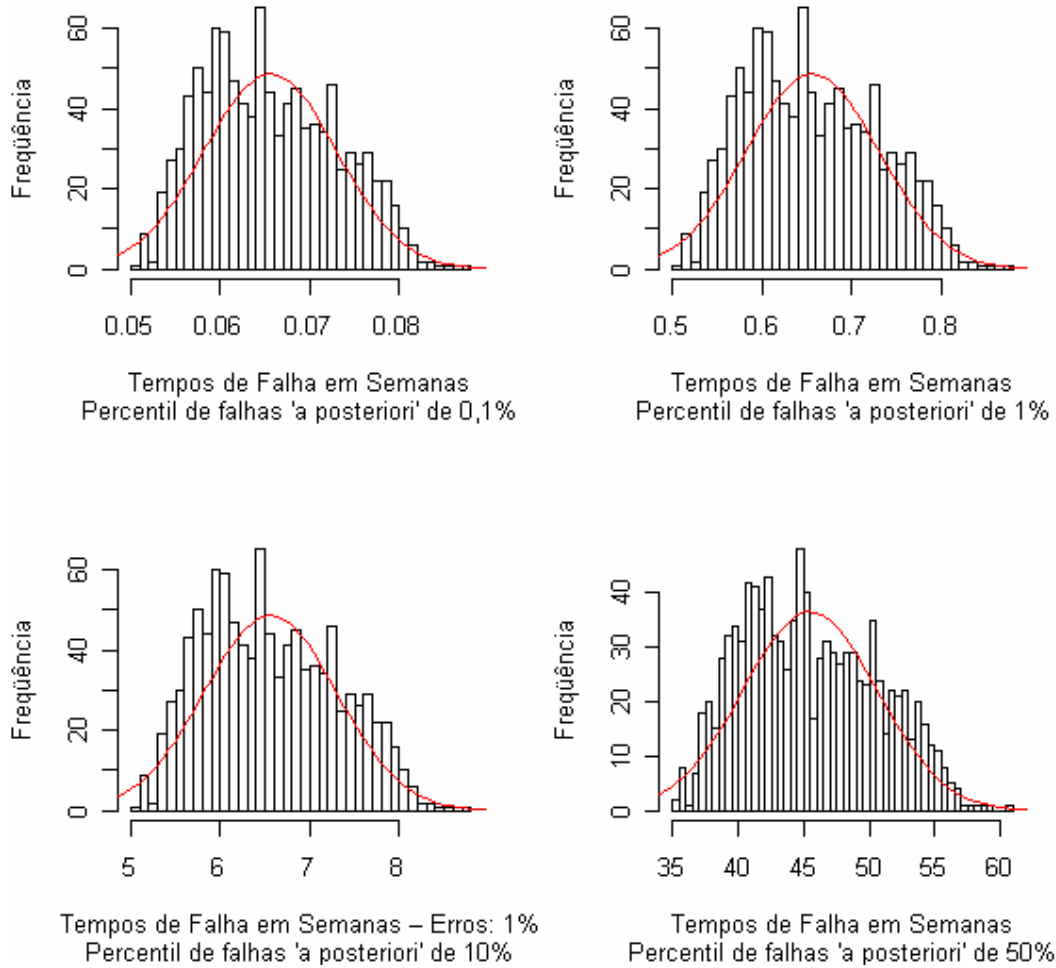


Fig. 6.8

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” de Jeffreys, e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Atributo ODOR

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

**Tabela 6.1
ATRIBUTO: ODOR**

Comparação entre os tempos dos percentis de amostras que falharam utilizando a distribuição
“a priori” Gama(16;800 e a distribuição “a priori” de Jeffreys

PERCENTIL DE FALHAS (%)	Distribuição “a priori” Gama(16;800) SEM INCORPORAÇÃO DE ERROS			Distribuição “a priori” de Jeffreys COM INCORPORAÇÃO DE ERROS UNIFORMES ATÉ 1%		
	MÉDIA	MEDIANA	IC _[2,5%;97,5%]	MÉDIA	MEDIANA	IC _[2,5%;97,5%]
	$t_{0,001}$	0,06433	0,06418	[0,0563;0,0733]	0,06559	0,06467
$t_{0,01}$	0,6433	0,6418	[0,5633;0,7332]	0,6559	0,6467	[0,5386;0,7984]
$t_{0,10}$	6,433	6,418	[5,633;7,332]	6,559	6,467	[5,386;7,984]
$t_{0,50}$	44,59	44,49	[39,04;50,82]	45,46	44,83	[37,33;55,34]

Obs.: Valores de tempo em semanas.

**6.5 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando
uma Gama(16;800) e erros uniformes para o atributo SABOR.**

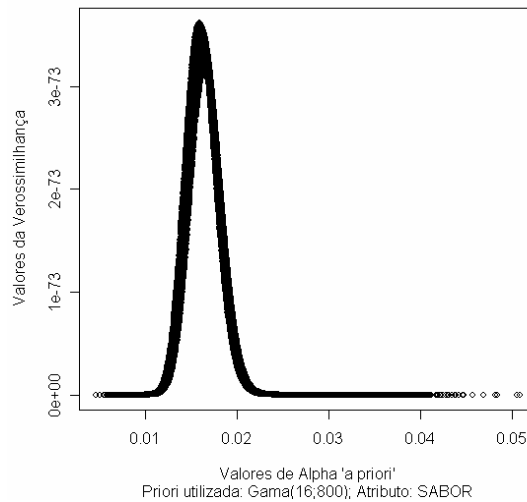


Fig. 6.9

**Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1%
Experimento Real do Trabalho de Referência – Prióri Gama(16;800) -Atributo SABOR**

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

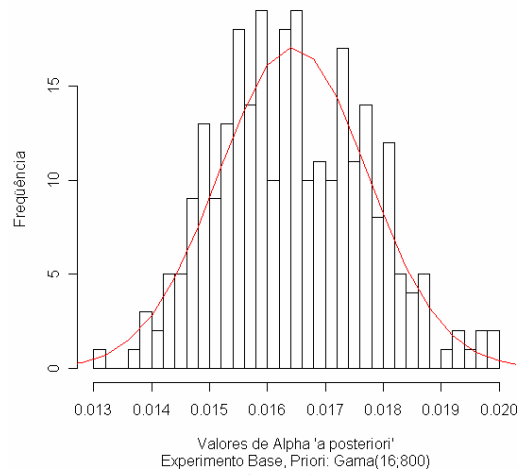


Fig. 6.10

Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Priori Gama(16;800) - Atributo SABOR

6.6 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Gama(16;800) e a dos erros é U(0,001;0,01) para o atributo SABOR.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

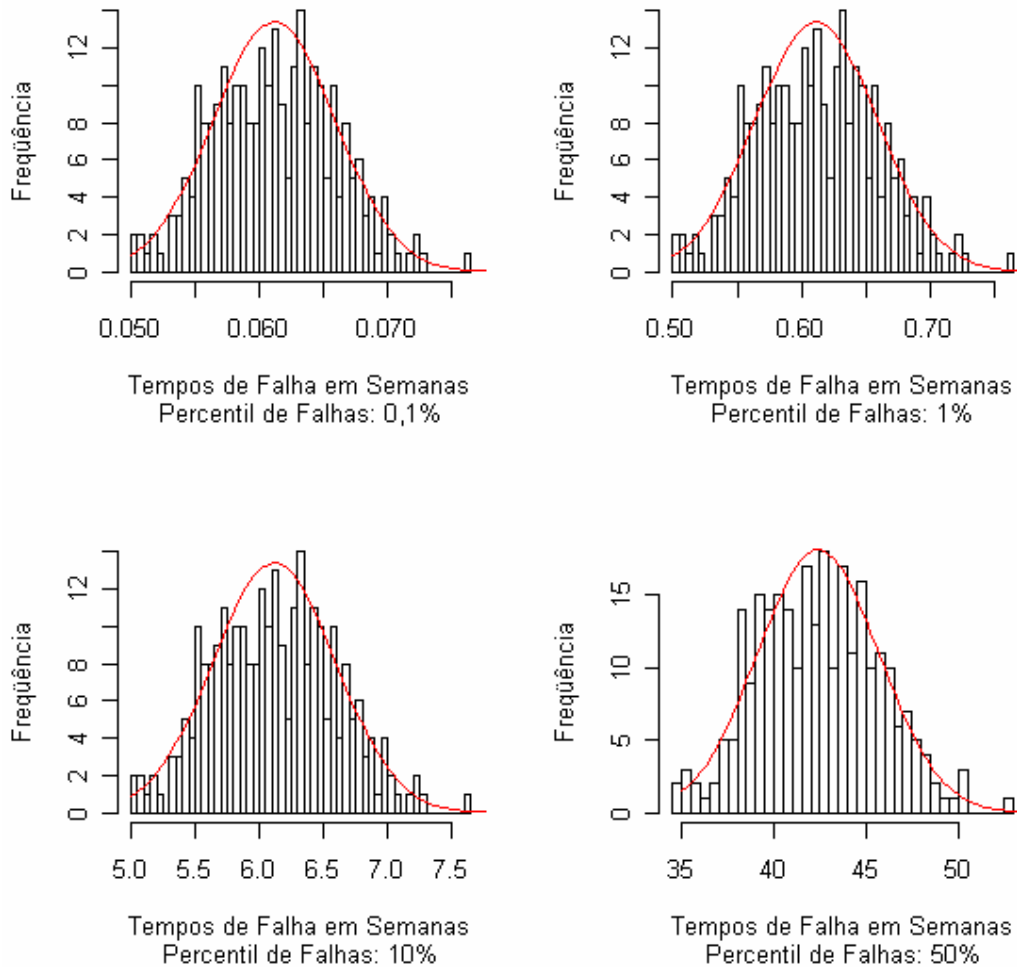


Fig. 6.11

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Prióri Gama(16;800) - Atributo SABOR

6.7 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α e erros uniformes limitados a 1%. Atributo SABOR.

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO DADOS DO EXPERIMENTO BASE

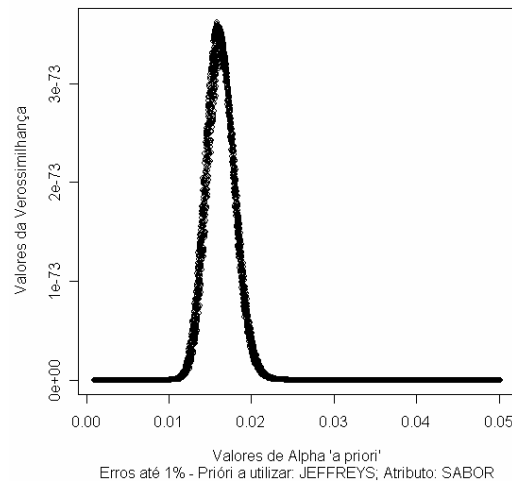
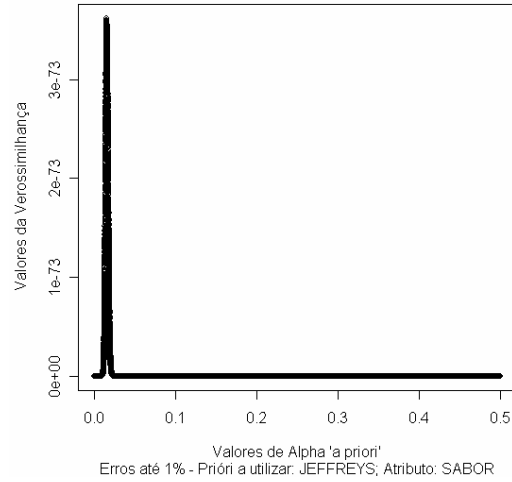


Fig. 6.12

**Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1%
Experimento Real do Trabalho de Referência – Priori Jeffreys – Atributo SABOR**

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

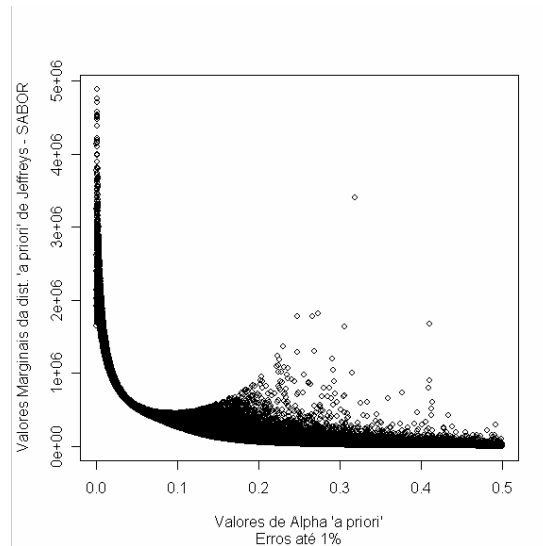


Fig. 6.13

Distribuição “a priori” de Jeffreys em função de α com erros de classificação até 1% para o experimento base – Atributo SABOR

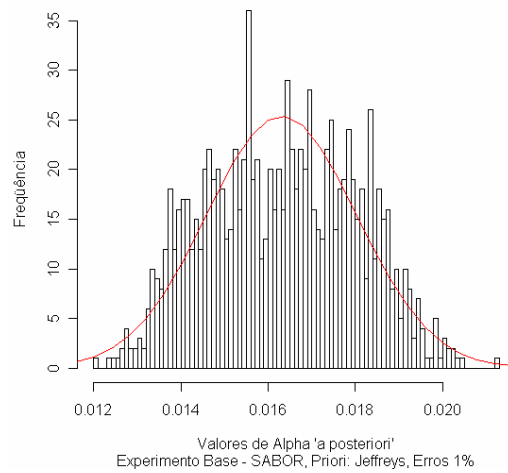


Fig. 6.14

Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” de Jeffreys – Atributo SABOR

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE

6.8 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Jeffreys e a dos erros é $U(0,001;0,01)$ para o atributo SABOR.

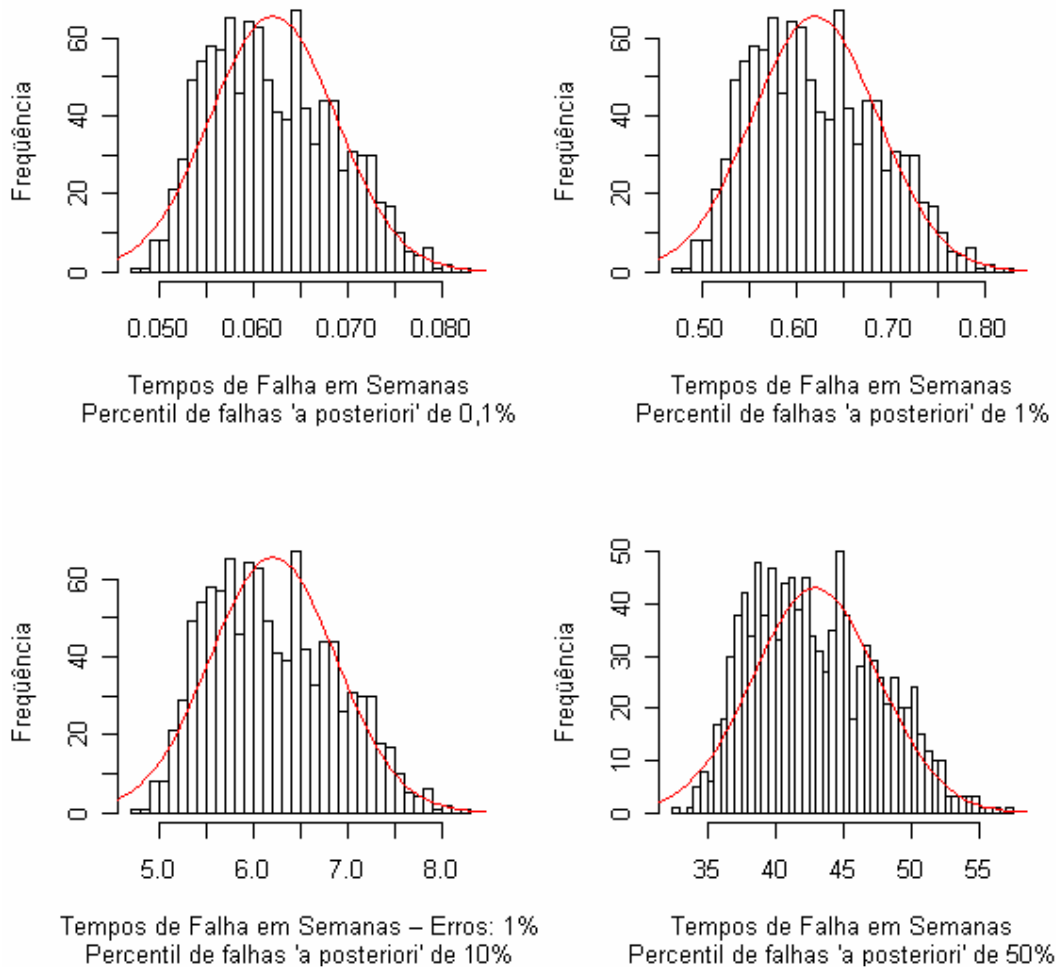


Fig. 6.15

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” de Jeffreys, e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Atributo SABOR

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

**Tabela 6.2
ATRIBUTO: SABOR**

**Comparação entre os tempos dos percentis de amostras que falharam utilizando a distribuição
“a priori” Gama(16;800) e a distribuição “a priori” de Jeffreys**

PERCENTIL DE FALHAS (%)	Distribuição “a priori” Gama(16;800) SEM INCORPORAÇÃO DE ERROS			Distribuição “a priori” de Jeffreys COM INCORPORAÇÃO DE ERROS UNIFORMES ATÉ 1%		
	MÉDIA	MEDIANA	IC _[2,5%;97,5%]	MÉDIA	MEDIANA	IC _[2,5%;97,5%]
	$t_{0,001}$	0,06117	0,06109	[0,05220;0,07040]	0,06202	0,06118
$t_{0,01}$	0,6117	0,6109	[0,5220;0,7040]	0,6202	0,6118	[0,5148;0,7512]
$t_{0,10}$	6,117	6,109	[5,220;7,040]	6,202	6,118	[5,148;7,512]
$t_{0,50}$	42,40	42,35	[36,18;48,80]	42,99	42,41	[35,68;52,07]

Obs.: Valores de tempo em semanas.

**6.9 Obtenção da distribuição “a posteriori” marginal de α utilizando
uma Gama(16;800) e erros uniformes para o atributo ASPECTO.**

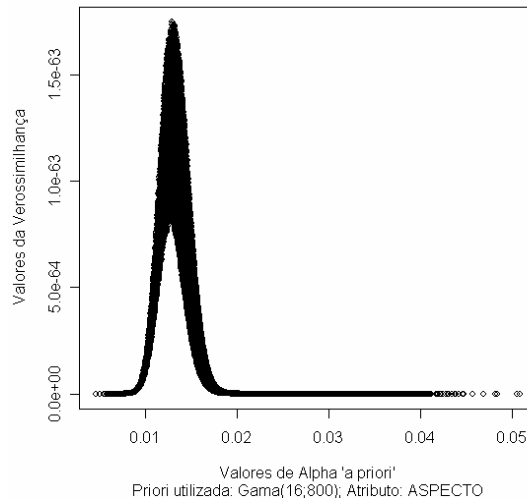


Fig. 6.16
Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1%
Experimento Real do Trabalho de Referência – Prióri Gama(16;800) -Atributo ASPECTO

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

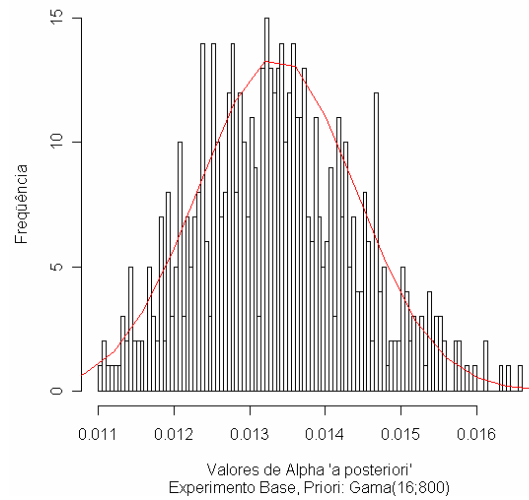


Fig. 6.17

Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Priori Gama(16;800) - Atributo ASPECTO

6.10 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Gama(16;800) e a dos erros é U(0,001;0,01) para o atributo ASPECTO.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

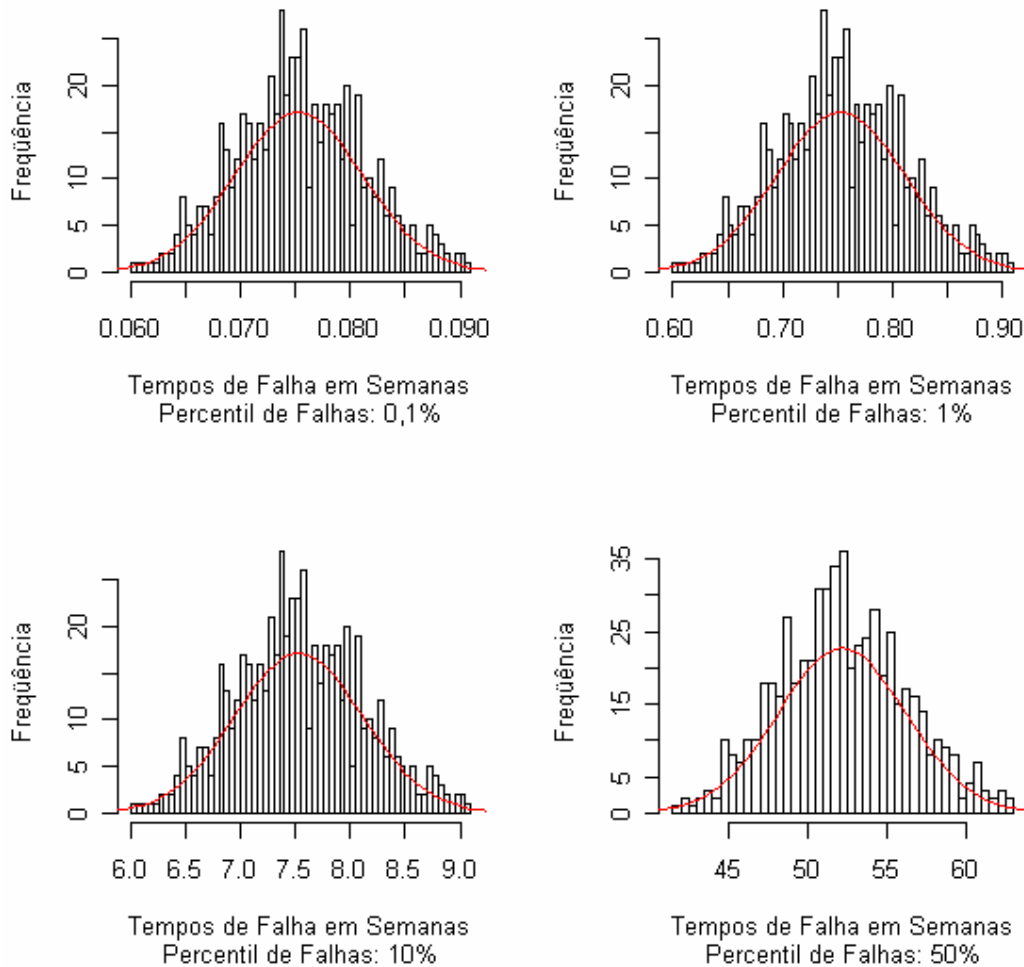


Fig. 6.18

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” Gama(16;800), e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Prióri Gama(16;800) - Atributo ASPECTO

6.11 Utilização de uma distribuição “a priori” de Jeffreys para o parâmetro α e erros uniformes limitados a 1%. Atributo ASPECTO.

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO DADOS DO EXPERIMENTO BASE

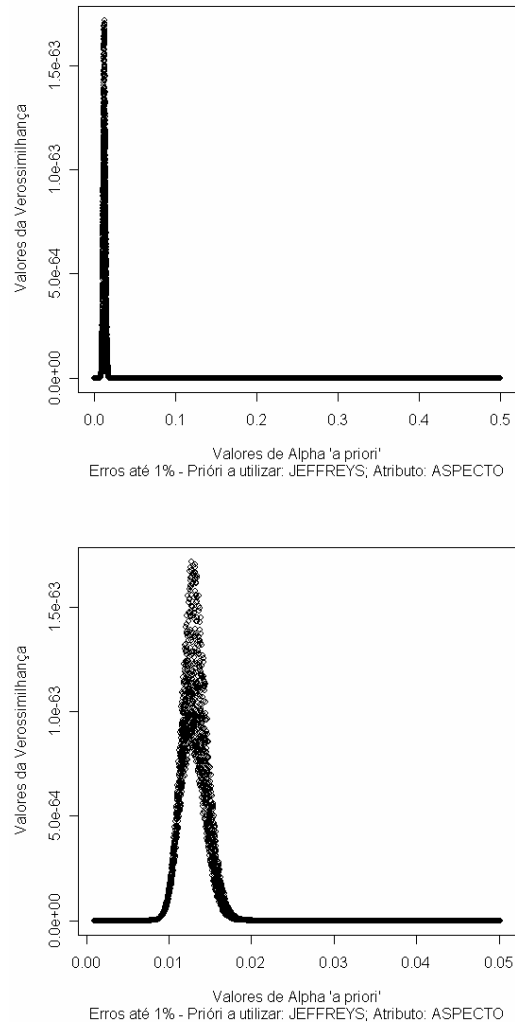


Fig. 6.19

**Verossimilhança marginal em relação a α com incorporação de erros uniformes até 1%
Experimento Real do Trabalho de Referência – Priori Jeffreys – Atributo ASPECTO**

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO DADOS DO EXPERIMENTO BASE

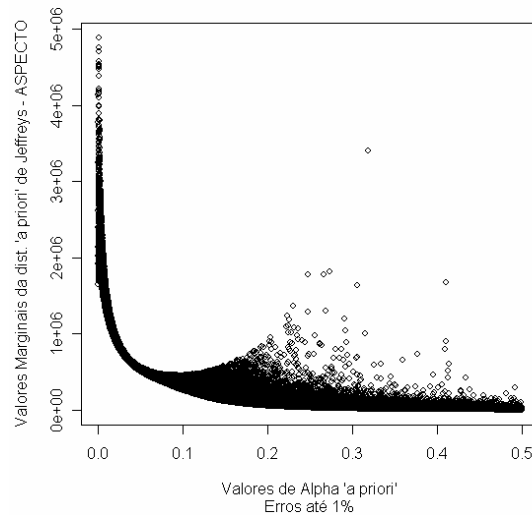


Fig. 6.20

Distribuição “a priori” de Jeffreys em função de α com erros de classificação até 1% para o experimento base – Atributo ASPECTO

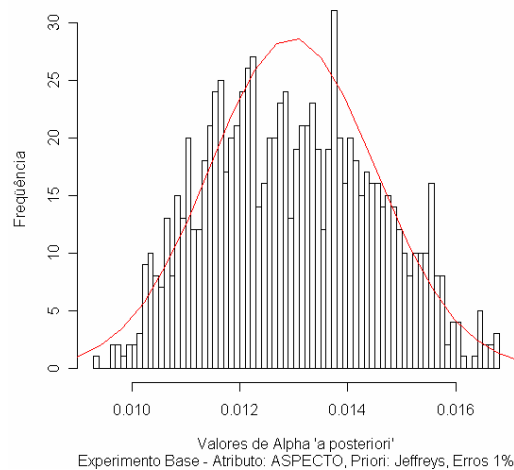


Fig. 6.21

Histograma dos valores de α “a posteriori” com incorporação de erros até 1% e distribuição “a priori” Gama(16;800) – Atributo ASPECTO

6.12 Obtenção das distribuições “a posteriori” de percentis de interesse (a distribuição de α “a priori” é a Jeffreys e a dos erros é $U(0,001;0,01)$ para o atributo ASPECTO.

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

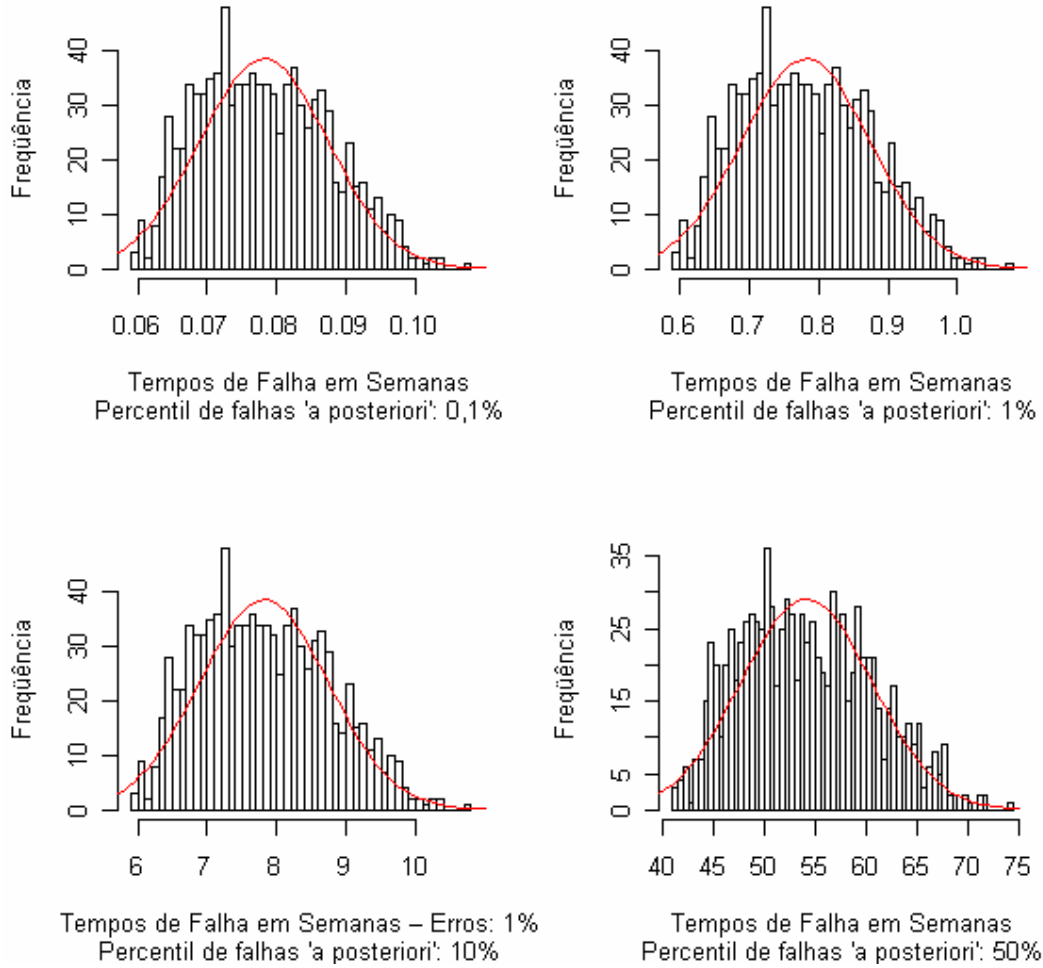


Fig. 6.22

Distribuição “a posteriori” dos percentis $t_{0,001}$, $t_{0,01}$, $t_{0,10}$ e $t_{0,50}$ - (com base na distribuição “a priori” de Jeffreys, e incorporação de erros uniformes limitados a 1%) – Atributo ASPECTO

**ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO
DADOS DO EXPERIMENTO BASE**

Tabela 6.3

ATRIBUTO: ASPECTO

**Comparação entre os tempos dos percentis de amostras que falharam utilizando a distribuição
“a priori” Gama(16;800 e a distribuição “a priori” de Jeffreys**

PERCENTIL DE FALHAS	Distribuição “a priori” Gama(16;800)			Distribuição “a priori” de Jeffreys		
	SEM INCORPORAÇÃO DE ERROS			COM INCORPORAÇÃO DE ERROS		
	UNIFORMES ATÉ 1%					
(%)	MÉDIA	MEDIANA	IC_[2,5%;97,5%]	MÉDIA	MEDIANA	IC_[2,5%;97,5%]
$t_{0,001}$	0,07531	0,07506	[0,06446;0,08748]	0,07815	0,07754	[0,06335;0,09688]
$t_{0,01}$	0,7531	0,7506	[0,6446;0,7506]	0,7815	0,7754	[0,63346;0,9688]
$t_{0,10}$	7,531	7,506	[6,4464;8,7481]	7,815	7,754	[6,3346,9,6880]
$t_{0,50}$	52,20	52,03	[44,68;60,64]	54,17	53,75	[43,91;67,15]

Obs.: Valores de tempo em semanas.

* * *

7 CONCLUSÕES

Embora a distribuição exponencial não seja a mais indicada para modelar o tempo de falha, tendo sido usada como uma primeira aproximação ao se introduzir as técnicas Bayesianas para o fim proposto, obtivemos resultados coerentes com a observação. Futuros trabalhos deverão ser feitos utilizando-se outras ditribuições para modelagem do tempo de falha, especialmente a Weibull que tem mostrado sua adequação para tal tipo de situação.

Nas simulações feitas antes da incorporação de erros de classificação (Cap. 4) observou-se que tanto com a utilização de uma distribuição “a priori” informativa (Gama(16;800)) como com a utilização da distribuição “a priori” não informativa de Jeffreys, os valores para os tempos de falha das amostras divergiram em torno de 2,22%. É interessante observar que os tempos de falha menores ocorreram com a utilização da distribuição “a priori” informativa. De alguma maneira tais informações levaram a considerar que os produtos tendem a falhar mais cedo do que quando se usa a distribuição não informativa.

Observou-se que com a incorporação de erros (Cap. 5), ao se usar a distribuição não-informativa (Jeffreys), não houve grandes variações do tempo de vida antes da incorporação de erros tendo a divergência de tempos ficado em torno de 0,74% para menos ou seja os tempos de vida previstos foram menores. Tais divergências porém foram muito maiores (em torno de 40,5%, quando se utiliza a distribuição informativa o que nos mostra que ao considerarmos a hipótese de um determinado nível de erros de classificação, essa incerteza potencializa a tendência, já observada na simulação sem incorporação de erros, de que as informações constantes na priori informativa levam a uma conduta mais cuidadosa no sentido de que os produtos podem falhar com maior rapidez.

Nas Fig. 5.5 e 5.14 podemos observar o efeito da elevação do nível dos erros de avaliação de 1% para 5%. Em ambos os casos considerou-se a distribuição “a priori” informativa Gama(16;800). Observa-se que a duração do tempo de falha é aumentada com a elevação do nível de erros. No caso da elevação considerada de 1% para 5%, o aumento foi de cerca de 5,6%. Esse resultado nos aconselha cuidar para que esse nível seja o mais baixo possível pois a elevação do tempo de falha devido a maiores erros não colabora para a obtenção de um tempo de falha mais seguro.

Ao utilizarmos, no Cap. 6, dados do experimento real utilizado no trabalho de Freitas, Borges e Ho (2003), observamos que para os atributos ODOR e SABOR os tempos de falha obtidos com a utilização de uma distribuição informativa ou não informativa, variam pouco, abaixo de 1%, sendo maiores para a distribuição não informativa (Jeffreys). Já para o atributo ASPECTO a variação é um pouco maior, tendo, para o caso estudado sido obtidos tempos de falha 3,3% maiores para a utilização da distribuição não informativa de Jeffreys. Desses atributos o que apresentou menores tempos de falha foi o SABOR, a seguir o ODOR, ficando com o atributo ASPECTO os maiores tempos de falha obtidos, sendo 22,9% maiores que os tempos de falha para o SABOR, quando se usa priori infomativa e 26,7% maiores quando se usa priori não informativa.

ABORDAGEM BAYESIANA INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO DADOS DO EXPERIMENTO BASE

As técnicas Bayesianas implicam em intenso uso da computação tendo em vista que as funções de verossimilhança e as distribuições de Jeffreys são em geral desconhecidas. Apesar disso, tais técnicas têm o grande conveniente de apresentar uma metodologia uniforme. No presente trabalho, utilizou-se o algoritmo SIR, desenvolvido por Rubin (1988), para se obter as distribuições “a posteriori”. Outras técnicas como o “Gibbs Sampler” fornecem um estímulo para outras abordagens deste rico tema.

* * *

ANEXO A

Desenvolvimento da forma da função de verossimilhança para o caso em que a distribuição subjacente do tempo de vida de prateria é Exponencial

A equação (5.5):

$$L(\tilde{p} | \tilde{y}) = \prod_{i=1}^k \{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha\tau_i)]\}^{S_i} \{e_2[1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i)\}^{N_i-S_i}$$

pode ser dividida em diversas partes, a saber:

$$L(\tilde{p} | \tilde{y}) = \prod_{i=1}^k \underbrace{\left\{ \overbrace{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha\tau_i)]}^{(a)} \right\}^{S_i}}_{(i)} \underbrace{\left\{ \overbrace{e_2[1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i)}^{(d)} \right\}^{N_i-S_i}}_{(ii)}$$

Escrevendo (a) e (b) e (c) e (d) como binômios de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{e} \quad (c+d)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c^k d^{n-k}$$

(I):

$$\left\{ \overbrace{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha\tau_i)]}^{(a)} \right\}^{S_i} = \sum_{r_i}^{S_i} \binom{S_i}{r_i} [e_1 \exp(-\alpha\tau_i)]^{r_i} \{(1-e_2)[1-\exp(-\alpha\tau_i)]\}^{S_i-r_i}$$

(II):

$$\{(1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i) + e_2[1-\exp(-\alpha\tau_i)]\}^{N_i-S_i} = \sum_{l_i}^{N_i-S_i} \binom{N_i-S_i}{l_i} [(1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i)]^{l_i} \{e_2[1-\exp(-\alpha\tau_i)]\}^{N_i-S_i-l_i}$$

Portanto, de (I) e (II):

$$I \times II = \sum_{r_i=0}^{S_i} \sum_{l_i=0}^{N_i-S_i} \binom{S_i}{r_i} \binom{N_i-S_i}{l_i} e_1^{r_i} (1-e_1)^{l_i} \times e_2^{(N_i-S_i-l_i)} (1-e_2)^{S_i-r_i} \times \exp[-\alpha\tau_i(r_i+l_i)] [1-\exp(-\alpha\tau_i)]^{S_i-r_i+N_i-S_i-l_i}$$

Assim, reescrevendo a função de verossimilhança, obtemos:

$$L(\tilde{p} | \tilde{y}) = L(e_1, e_2, \alpha | (N_1, \dots, N_k)^T; (S_1, \dots, S_k)^T) = \prod_{i=1}^k p_i^{S_i} (1-p_i)^{N_i-S_i}$$

ANEXO A

$$L(\underset{\sim}{p} | \underset{\sim}{y}) = \prod_{i=1}^k \left\{ \sum_{r_i=0}^{S_i} \sum_{l_i=0}^{N_i-S_i} \binom{S_i}{r_i} \binom{N_i-S_i}{l_i} e_1^{r_i} (1-e_1)^{l_i} \times e_2^{(N_i-S_i-l_i)} (1-e_2)^{S_i-r_i} \times \exp[-\alpha \tau_i(r_i+l_i)] [1-\exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i-r_i+N_i-S_i-l_i} \right\}$$

Desenvolvendo o produtório, a equação de verossimilhança fica:

$$L(\underset{\sim}{p} | \underset{\sim}{y}) = \sum_{r_1=0}^{S_1} \sum_{l_1=0}^{N_1-S_1} \binom{S_1}{r_1} \binom{N_1-S_1}{l_1} e_1^{r_1} (1-e_1)^{l_1} \times e_2^{(N_1-S_1-l_1)} (1-e_2)^{S_1-r_1} \times \\ \times \exp[-\alpha \tau_1(r_1+l_1)] [1-\exp(-\alpha \tau_1)]^{N_1-r_1-l_1} \times \dots \times \sum_{r_k=0}^{S_k} \sum_{l_k=0}^{N_k-S_k} \binom{S_k}{r_k} \binom{N_k-S_k}{l_k} e_1^{r_k} (1-e_1)^{l_k} \times e_2^{(N_k-S_k-l_k)} (1-e_2)^{S_k-r_k} \times \\ \times \exp[-\alpha \tau_k(r_k+l_k)] [1-\exp(-\alpha \tau_k)]^{N_k-r_k-l_k}$$

Então,

$$L(\underset{\sim}{p} | \underset{\sim}{y}) = \sum_{r_1=1}^{S_1} \dots \sum_{r_k=1}^{S_k} \sum_{l_1=1}^{N_1-S_1} \dots \sum_{l_k=1}^{N_k-S_k} \binom{S_1}{r_1} \binom{S_2}{r_2} \dots \binom{S_k}{r_k} \binom{N_1-S_1}{l_1} \dots \binom{N_k-S_k}{l_k} \exp[-\alpha [\tau_1(r_1+l_1) \oplus \dots \oplus \tau_k(r_k+l_k)]] \times \\ \times e_1^{(r_1+r_2+\dots+r_k)} (1-e_1)^{(l_1+l_2+\dots+l_k)} \times e_2^{(N_1-S_1+\dots+(N_k-S_k)-(l_1+\dots+l_k))} (1-e_2)^{S_1+S_2+\dots+S_k-(r_1+\dots+r_k)} \times \\ \times [1-\exp(-\alpha \tau_1)]^{N_1-r_1-l_1} \times \dots \times [1-\exp(-\alpha \tau_k)]^{N_k-r_k-l_k}$$

Note-se que:

$[1-\exp(-\alpha \tau_i)]^{N_i-r_i-l_i}$ $i = 1, 2, \dots, k$ pode ser escrita como binômio de Newton. Então:

$$[1-\exp(-\alpha \tau_i)]^{N_i-r_i-l_i} = \sum_{m_i=1}^{N_i-r_i-l_i} \binom{N_i-r_i-l_i}{m_i} (-1)^{N_i-r_i-l_i-m_i} \exp[-\alpha \tau_i(N_i-r_i-l_i-m_i)] \quad (\text{A.1})$$

Substituindo (A.1) na equação da verossimilhança acima teremos a equação final da verossimilhança que contempla erros de classificação com a função de distribuição de tempos de falha exponencial. Chamaremos a essa expressão de L_{EXP-EC} :

$$L(\underset{\sim}{p} | \underset{\sim}{y}) = L(e_1, e_2, \alpha | (N_1, \dots, N_k)^T; (S_1, \dots, S_k)^T)$$

Então:

ANEXO A

$$L\left(\begin{matrix} p \\ - \\ - \\ - \end{matrix} \middle| y\right) = \sum_{r_1=1}^{S_1} \dots \sum_{r_k=1}^{S_k} \sum_{l_1=1}^{N_1-S_1} \dots \sum_{l_k=1}^{N_k-S_k} \binom{S_1}{r_1} \binom{S_2}{r_2} \dots \binom{S_k}{r_k} \binom{N_1-S_1}{l_1} \dots \binom{N_k-S_k}{l_k} \exp\{-\alpha[\tau_1(r_1+l_1) \oplus \dots \oplus \tau_k(r_k+l_k)]\} \times \\ \times e_1^{(r_1+r_2+\dots+r_k)} (1-e_1)^{(l_1+l_2+\dots+l_k)} \times e_2^{(N_1-S_1)+\dots+(N_k-S_k)-(l_1+\dots+l_k)} (1-e_2)^{S_1+S_2+\dots+S_k-(r_1+\dots+r_k)} \times \\ \times [1-\exp(-\alpha\tau_1)]^{N_1-r_1-l_1} \times \dots \times [1-\exp(-\alpha\tau_k)]^{N_k-r_k-l_k}$$

Desenvolvendo as somas, elevadas à expoentes, como binômios de Newton:

$$L\left(\begin{matrix} p \\ - \\ - \\ - \end{matrix} \middle| y\right) = \sum_{r_1=1}^{S_1} \dots \sum_{r_k=1}^{S_k} \sum_{l_1=1}^{N_1-S_1} \dots \sum_{l_k=1}^{N_k-S_k} \binom{S_1}{r_1} \binom{S_2}{r_2} \dots \binom{S_k}{r_k} \binom{N_1-S_1}{l_1} \dots \binom{N_k-S_k}{l_k} \times \\ \times e_1^{\sum_{i=1}^k r_i} (1-e_1)^{\sum_{i=1}^k l_i} e_2^{\left(\sum_{i=1}^k (N_i-S_i) - \sum_{i=1}^k l_i\right)} (1-e_2)^{\sum_{i=1}^k S_i - \sum_{i=1}^k r_i} \times \\ \times \left\{ \sum_{m_1=1}^{N_1-r_1-l_1} \binom{N_1-r_1-l_1}{m_1} (-1)^{(N_1-r_1-l_1-m_1)} \exp[-\alpha\tau_1(N_1-r_1-l_1-m_1)] \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{m_2=1}^{N_2-r_2-l_2} \binom{N_2-r_2-l_2}{m_2} (-1)^{(N_2-r_2-l_2-m_2)} \exp[-\alpha\tau_2(N_2-r_2-l_2-m_2)] \right\} \times \dots \times \\ \times \left\{ \sum_{m_k=1}^{N_k-r_k-l_k} \binom{N_k-r_k-l_k}{m_k} (-1)^{(N_k-r_k-l_k-m_k)} \exp[-\alpha\tau_k(N_k-r_k-l_k-m_k)] \right\}$$

Na classificação feita em τ_i , temos:

r_i = itens classificados como impróprios para o consumo sendo em realidade apropriados.

l_i = itens classificados como apropriados para o consumo sendo em realidade impróprios.

S_i = total de itens avaliados como ruins.

$N_i - S_i$ = total de itens avaliados como bons.

Para prosseguirmos o trabalho teríamos, dentro da abordagem clássica, que maximizar a função de verossimilhança via matriz de informação de Fisher, o que além de trabalhoso traria o risco de chegarmos a algum ponto sem perspectiva de solução.

Outra possibilidade, por nós adotada, foi a de partirmos para a abordagem bayesiana, tomando como resultados “a priori”, os obtidos anteriormente no trabalho de Freitas, Borges e Ho.

ANEXO B

Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” Gama(16;800)

AMOSTRA COM 100.000 VALORES DE ALPHA E AVALIAÇÃO EM 51 SEMANAS:

PROCEDIMENTO PARA CALCULAR AS DISTRIBUIÇÕES “A POSTERIORI” COM RESPEITO AO PARÂMETRO DA DISTRIBUIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL QUE MODELA O TEMPO DE FALHA DAS AMOSTRAS DO EXPERIMENTO PROPOSTO COM DISTRIBUIÇÃO “A PRIORI” GAMA(16;800) SEM INCORPORAÇÃO DE ERROS DE AVALIAÇÃO.

Cálculo da Função de Verossimilhança, conforme mostrado em 4.4. é fornecida por (4.6):

$$L(\alpha_j | N_i, S_i) = \underbrace{\exp\left[-\alpha_j \sum_{i=1}^k \tau_i (N_i - S_i)\right]}_{\text{Fator A}} \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha_j \tau_i)]^{S_i} \right\}}_{\text{Fator B}}$$

Procedimentos iniciais:

a) Geração da amostra de 357 tempos de vida de uma distribuição exponencial Exp(0,02):
`te<-rexp(357, 0.02)`

b) Valor da distribuição exponencial correspondente:
`ye<-dexp(te, 0.02)`

c) Distribuição dos Tempos de Vida Exponencial (te) obtidos:

```
te
[1] 23.70040433 110.98757335 152.32701711 41.17669398 52.81218001
[6] 15.60672417 52.96356343 18.34564965 148.00804033 52.35876252
[11] 151.51885412 45.79828228 5.91208914 11.72901261 3.81819750
[16] 37.24134315 41.67006807 41.58935556 92.40691973 34.24272418
[21] 35.67627896 2.74284772 2.42863232 6.21477105 17.78134131
[26] 109.67981238 38.54135886 86.21647106 24.27789189 102.02519372
[31] 84.95633993 17.38499040 50.45741303 0.15566836 36.75688861
[36] 5.48243214 15.51064495 39.24146415 18.91839545 46.14734528
[41] 98.79696862 94.47132516 0.83422104 20.20845027 54.12950823
[46] 15.18897036 78.48591916 12.25978395 48.69658854 115.79263126
[51] 239.35995045 45.40992742 25.61053222 5.20412116 17.93506378
[56] 15.20322504 8.28001039 39.80023083 34.38591857 56.86854651
[61] 78.88781512 6.92938487 35.45897938 48.35182180 11.55246596
[66] 66.94938829 69.43381809 58.92646047 188.20463071 46.63142161
[71] 89.29533697 16.99763560 1.18783994 21.30757449 57.71010942
[76] 6.03116593 106.62603802 10.66298021 9.23707045 0.40615359
[81] 17.97221188 198.13327742 7.15818982 44.86622877 67.16021495
[86] 17.00107695 7.01420419 28.29061341 4.74575120 121.17787395
[91] 171.31519131 21.88288551 57.30570168 17.26550818 2.48865092
```

ANEXO B

```
[96] 44.07821926 3.79225560 49.90318250 5.78293023 6.39967388
[101] 136.28392508 65.80202365 161.86308785 11.53194460 30.47824625
[106] 16.20161016 29.38551079 50.85285106 80.83943424 232.89691749
[111] 74.93350682 1.78387151 46.40878197 1.82991696 10.66142952
[116] 4.57973722 38.31194914 51.65618011 31.99675435 57.45322817
[121] 38.95334156 154.27861362 12.43943404 9.38657458 21.40880023
[126] 19.98572990 172.34369329 14.10954178 57.22114952 262.11427085
[131] 5.56715245 10.98969539 31.56903638 41.48625413 4.42104680
[136] 22.95195733 155.52401542 37.01293105 6.79300576 48.78890649
[141] 38.75347856 28.19149166 6.61874709 0.32571508 45.01832304
[146] 61.46111823 61.77503238 20.76972092 33.56843032 83.63895546
[151] 5.40331011 103.53741133 57.88897108 3.76029320 55.49122863
[156] 135.47025369 68.97805729 81.58585266 27.62516786 0.05277467
[161] 200.20348531 47.69614005 199.41448000 19.94875268 89.17577825
[166] 133.94027640 23.72802531 10.37964304 107.73067575 17.23549983
[171] 12.57893194 16.32988907 44.62857707 52.42394376 67.74358544
[176] 30.52579821 58.49274844 35.05940526 58.16007578 169.00557279
[181] 26.46798450 54.00825100 16.22417709 6.26590149 93.83532619
[186] 24.12525811 7.03286286 15.14595298 1.76782908 21.51910625
[191] 1.35590925 81.14247769 30.78406008 0.25852761 4.98292048
[196] 44.23100734 90.66969622 61.92395835 43.28783384 41.78195139
[201] 51.11344964 24.04380181 15.68794405 61.27921170 3.62676885
[206] 14.53288514 0.50294203 10.24798109 52.96901017 4.85918028
[211] 13.17161117 25.41959402 79.26809676 180.42475939 18.52681856
[216] 98.81919631 53.17996919 130.34742651 19.90002721 137.60457644
[221] 194.97367320 3.19628771 27.22616463 14.51267514 57.46047813
[226] 23.17795285 5.67096401 58.85293763 4.82615352 85.62377020
[231] 28.90153695 203.25402197 33.10579415 81.84136474 74.02150101
[236] 33.29233935 2.77793987 4.65019057 73.14255964 60.36777515
[241] 12.68542516 2.21957487 83.47771652 90.86378635 37.60389960
[246] 51.32652800 76.11835233 56.60435022 33.93835260 2.55558491
[251] 53.59472842 24.03960819 110.31207075 13.52650186 43.69370341
[256] 58.42077700 176.86010328 102.02081992 4.09977117 180.59781966
[261] 25.17885759 89.69071740 11.65503159 13.61287513 14.06697405
[266] 109.87720144 29.18394797 77.21719313 148.70302666 49.52022160
[271] 36.84216635 53.73839987 140.35196937 86.11381163 71.17786387
[276] 6.30508640 65.83412476 16.79504064 51.57000059 93.23535693
[281] 32.02099698 15.74671585 59.46587436 94.55116773 32.26411184
[286] 28.09075599 13.15421938 37.20264262 14.76706243 127.41544069
[291] 275.95898442 45.43714202 113.41009375 60.91944673 6.59421017
[296] 19.90298466 46.81321936 5.31726845 71.84934429 14.97880081
[301] 21.72466759 55.97028327 90.51856007 105.23607069 52.30176109
[306] 95.04916761 8.93996658 19.89884614 65.21658869 167.27013364
[311] 16.54143801 9.80240346 28.87807668 91.57150900 24.59137943
[316] 81.59983493 200.01530972 55.98391755 27.36391050 121.72252563
[321] 0.50540706 5.75945365 21.37485126 70.11259235 17.90888447
[326] 2.97030905 1.62359236 50.92217666 53.07294945 10.83774376
[331] 27.14435621 89.47644652 50.30542966 62.03955565 84.88020841
[336] 117.98879662 71.61329528 114.79285465 31.60756975 64.09595180
[341] 4.87900777 14.12051867 13.88751441 22.97790793 101.48498602
[346] 52.62246891 31.47637297 82.04614743 2.22209326 136.70428199
[351] 71.35847527 80.80212388 1.90977340 168.67338567 14.35240333
[356] 11.10074623 53.63193610
```

```
#write(te, "tempoexp.txt")
```

```
mean(te)
[1] 52.41301
```

```
median(te)
[1] 38.54136
```


ANEXO B

Fig. 4.1 :

```
te<-scan("tempoexp.txt")
ye<-dexp(te,1/50)
plot(te,ye,sub="Tempo de vida Exponencial",xlab="Tempo de Vida
em Semanas",ylab="Valores da
```

Distribuição Exp(50) ")

Com base na amostra gerada da Exp(50) podemos determinar se os itens avaliados em cada uma das 357 semanas falhou ou não na semana de avaliação. A amostra terá falhado se o tempo de falha (exponencial) (medido em semanas) for menor ou igual ao número da semana de avaliação. Os resultados, segundo a distribuição das amostras por semana são dados abaixo, onde a variável dicotômica Y assume o valor 0 quando não foi constatado falha e o valor 1, quando a amostra foi considerada ruim.

TABELA B.1

Valores da Variável Dicotômica, Y para cada amostra, comparando o tempo de falha exponencial a ela aleatoriamente atribuído com o tempo em que a mesma foi avaliada.

No. da amostra	Classificação da Amostra		
	Semana i	Tempo t	Variável Dicotômica Y
1	1	23,70040	0
2	1	15,60672	0
3	1	151,51890	0
4	1	37,24134	0
5	1	35,67628	0
6	1	109,67980	0
7	1	84,95634	0
8	2	5,48243	0
9	2	98,79697	0
10	2	15,18897	0
11	2	239,36000	0
12	2	15,20323	0
13	2	78,88782	0
14	2	66,94939	0
15	3	89,29534	0
16	3	6,03117	0
17	3	17,97221	0
18	3	17,00108	0
19	3	171,31520	0
20	3	44,07822	0
21	3	136,28390	0
22	4	16,20161	0
23	4	74,93350	0
24	4	4,57974	0
25	4	38,95334	0
26	4	19,98573	0

ANEXO B

27	4	5,56715	0
28	4	22,95196	0
29	5	38,75348	0
30	5	61,46112	0
31	5	5,40331	0
32	5	135,47030	0
33	5	200,20350	0
34	5	133,94030	0
35	5	12,57893	0
36	6	30,52580	0
37	6	26,46798	0
38	6	24,12526	0
39	6	1,35591	1
40	6	44,23101	0
41	6	51,11345	0
42	6	14,53289	0
43	7	13,17161	0
44	7	98,81920	0
45	7	194,97370	0
46	7	23,17795	0
47	7	28,90154	0
48	7	33,29234	0
49	7	12,68543	0
50	8	51,32653	0
51	8	53,59473	0
52	8	58,42078	0
53	8	25,17886	0
54	8	109,87720	0
55	8	36,84217	0
56	8	6,30509	1
57	9	32,02100	0
58	9	28,09076	0
59	9	275,95900	0
60	9	19,90298	0
61	9	21,72467	0
62	9	95,04917	0
63	9	16,54144	0
64	10	81,59983	0
65	10	0,50541	1
66	10	2,97031	1
67	10	27,14436	0
68	10	117,98880	0
69	10	4,87901	1
70	10	52,62247	0
71	11	71,35848	0
72	11	11,10075	0
73	11	110,98760	0
74	11	52,96356	0
75	11	45,79828	0

ANEXO B

76	11	41,67007	0
77	11	2,74285	1
78	12	38,54136	0
79	12	17,38499	0
80	12	15,51064	0
81	12	94,47133	0
82	12	78,48592	0
83	12	45,40993	0
84	12	8,28001	1
85	13	6,92939	1
86	13	69,43382	0
87	13	16,99764	0
88	13	106,62600	0
89	13	198,13330	0
90	13	7,01420	1
91	13	21,88289	0
92	14	3,79226	1
93	14	65,80202	0
94	14	29,38551	0
95	14	1,78387	1
96	14	38,31195	0
97	14	154,27860	0
98	14	172,34370	0
99	15	10,98970	1
100	15	155,52400	0
101	15	28,19149	0
102	15	61,77503	0
103	15	103,53740	0
104	15	68,97806	0
105	15	47,69614	0
106	16	23,72803	0
107	16	16,32989	0
108	16	58,49275	0
109	16	54,00825	0
110	16	7,03286	1
111	16	81,14248	0
112	16	90,66970	0
113	17	24,04380	0
114	17	0,50294	1
115	17	25,41959	0
116	17	53,17997	0
117	17	3,19629	1
118	17	5,67096	1
119	17	203,25400	0
120	18	2,77794	1
121	18	2,21958	1
122	18	76,11835	0
123	18	24,03961	0
124	18	176,86010	0

ANEXO B

125	18	89,69072	0
126	18	29,18395	0
127	19	53,73840	0
128	19	65,83412	0
129	19	15,74672	1
130	19	13,15422	1
131	19	45,43714	0
132	19	46,81322	0
133	19	55,97028	0
134	20	8,93997	1
135	20	9,80240	1
136	20	200,01530	0
137	20	5,75945	1
138	20	1,62359	1
139	20	89,47645	0
140	20	71,61330	0
141	21	14,12052	1
142	21	31,47637	0
143	21	80,80212	0
144	21	53,63194	0
145	21	152,32700	0
146	21	18,34565	1
147	21	5,91209	1
148	22	41,58936	0
149	22	2,42863	1
150	22	86,21647	0
151	22	50,45741	0
152	22	39,24146	0
153	22	0,83422	1
154	22	12,25978	1
155	23	25,61053	0
156	23	39,80023	0
157	23	35,45898	0
158	23	58,92646	0
159	23	1,18784	1
160	23	10,66298	1
161	23	7,15819	1
162	24	28,29061	0
163	24	57,30570	0
164	24	49,90318	0
165	24	161,86310	0
166	24	50,85285	0
167	24	46,40878	0
168	24	51,65618	0
169	25	12,43943	1
170	25	14,10954	1
171	25	31,56904	0
172	25	37,01293	0
173	25	6,61875	1

ANEXO B

174	25	20,76972	1
175	25	57,88897	0
176	26	81,58585	0
177	26	199,41450	0
178	26	10,37964	1
179	26	44,62858	0
180	26	35,05941	0
181	26	16,22418	1
182	26	15,14595	1
183	27	30,78406	0
184	27	61,92396	0
185	27	15,68794	1
186	27	10,24798	1
187	27	79,26810	0
188	27	130,34740	0
189	27	27,22616	0
190	28	58,85294	0
191	28	33,10579	0
192	28	4,65019	1
193	28	83,47772	0
194	28	56,60435	0
195	28	110,31210	0
196	28	102,02080	0
197	29	11,65503	1
198	29	77,21720	0
199	29	140,35200	0
200	29	16,79504	1
201	29	59,46587	0
202	29	37,20264	0
203	29	113,41010	0
204	30	5,31727	1
205	30	90,51856	0
206	30	19,89885	1
207	30	28,87808	1
208	30	55,98392	0
209	30	21,37485	1
210	30	50,92218	0
211	31	50,30543	0
212	31	114,79290	0
213	31	13,88751	1
214	31	82,04615	0
215	31	1,90977	1
216	31	41,17669	0
217	31	148,00800	0
218	32	11,72901	1
219	32	92,40692	0
220	32	6,21477	1
221	32	24,27789	1
222	32	0,15567	1

ANEXO B

223	32	18,91840	1
224	32	20,20845	1
225	33	48,69659	0
226	33	5,20412	1
227	33	34,38592	0
228	33	48,35182	0
229	33	188,20460	0
230	33	21,30757	1
231	33	9,23707	1
232	34	44,86623	0
233	34	4,74575	1
234	34	17,26551	1
235	34	5,78293	1
236	34	11,53194	1
237	34	80,83943	0
238	34	1,82992	1
239	35	31,99675	1
240	35	9,38658	1
241	35	57,22115	0
242	35	41,48625	0
243	35	6,79301	1
244	35	0,32572	1
245	35	33,56843	1
246	36	3,76029	1
247	36	27,62517	1
248	36	19,94875	1
249	36	107,73070	0
250	36	52,42394	0
251	36	58,16008	0
252	36	6,26590	1
253	37	1,76783	1
254	37	0,25853	1
255	37	43,28783	0
256	37	61,27921	0
257	37	52,96901	0
258	37	180,42480	0
259	37	19,90003	1
260	38	14,51268	1
261	38	4,82615	1
262	38	81,84136	0
263	38	73,14256	0
264	38	90,86379	0
265	38	33,93835	1
266	38	13,52650	1
267	39	4,09977	1
268	39	13,61288	1
269	39	148,70300	0
270	39	86,11381	0
271	39	51,57000	0

ANEXO B

272	39	94,55117	0
273	39	14,76706	1
274	40	60,91945	0
275	40	71,84934	0
276	40	105,23610	0
277	40	65,21659	0
278	40	91,57150	0
279	40	27,36391	1
280	40	70,11259	0
281	41	53,07295	0
282	41	62,03956	0
283	41	31,60757	1
284	41	22,97791	1
285	41	2,22209	1
286	41	168,67340	0
287	41	52,81218	0
288	42	52,35876	0
289	42	3,81820	1
290	42	34,24272	1
291	42	17,78134	1
292	42	102,02520	0
293	42	36,75689	1
294	42	46,14735	0
295	43	54,12951	0
296	43	115,79260	0
297	43	17,93506	1
298	43	56,86855	0
299	43	11,55247	1
300	43	46,63142	0
301	43	57,71011	0
302	44	0,40615	1
303	44	67,16021	0
304	44	121,17790	0
305	44	2,48865	1
306	44	6,39967	1
307	44	30,47825	1
308	44	232,89690	0
309	45	10,66143	1
310	45	57,45323	0
311	45	21,40880	1
312	45	262,11430	0
313	45	4,42105	1
314	45	48,78891	0
315	45	45,01832	0
316	46	83,63896	0
317	46	55,49123	0
318	46	0,05277	1
319	46	89,17578	0
320	46	17,23550	1

ANEXO B

321	46	67,74359	0
322	46	169,00560	0
323	47	93,83533	0
324	47	21,51911	1
325	47	4,98292	1
326	47	41,78195	1
327	47	3,62677	1
328	47	4,85918	1
329	47	18,52682	1
330	48	137,60460	0
331	48	57,46048	0
332	48	85,62377	0
333	48	74,02150	0
334	48	60,36778	0
335	48	37,60390	1
336	48	2,55559	1
337	49	43,69370	1
338	49	180,59780	0
339	49	14,06697	1
340	49	49,52022	0
341	49	71,17786	0
342	49	93,23536	0
343	49	32,26411	1
344	50	127,41540	0
345	50	6,59421	1
346	50	14,97880	1
347	50	52,30176	0
348	50	167,27010	0
349	50	24,59138	1
350	50	121,72250	0
351	51	17,90888	1
352	51	10,83774	1
353	51	84,88020	0
354	51	64,09595	0
355	51	101,48500	0
356	51	136,70430	0
357	51	14,35240	1

Como são avaliadas 7 amostras por semana, o número de amostras ruins e boas em cada uma das 51 semanas onde foi realizada a avaliação é dado segundo a tabela abaixo:

TABELA B.2
Dados Semanais dos Valores de Ni, Si e Ni-Si

Resultados por Semana			
Semana	No. de Amostras	Ruins	Boas
i	Ni	Si	Ni-Si
1	7	0	7
2	7	0	7

ANEXO B

3	7	0	7
4	7	0	7
5	7	0	7
6	7	1	6
7	7	0	7
8	7	1	6
9	7	0	7
10	7	3	4
11	7	1	6
12	7	1	6
13	7	2	5
14	7	2	5
15	7	1	6
16	7	1	6
17	7	3	4
18	7	2	5
19	7	2	5
20	7	4	3
21	7	3	4
22	7	3	4
23	7	3	4
24	7	0	7
25	7	4	3
26	7	3	4
27	7	2	5
28	7	1	6
29	7	2	5
30	7	4	3
31	7	2	5
32	7	6	1
33	7	3	4
34	7	5	2
35	7	5	2
36	7	4	3
37	7	3	4
38	7	4	3
39	7	3	4
40	7	1	6
41	7	3	4
42	7	4	3
43	7	2	5
44	7	4	3
45	7	3	4
46	7	2	5
47	7	6	1
48	7	2	5
49	7	3	4
50	7	3	4
51	7	3	4

ANEXO B

Obs.: As tabelas acima estão planilhadas no arquivo “Base de Dados de Tempo de Vida Exponencial.xls”

Escolha da distribuição “a priori”:

Para algumas funções Gama consideradas, calculou-se os valores de $\pi(\alpha)$ para os valores extremos do intervalo e para o valor da média $E(\alpha) = 0,02$.

Tab. 4.2:

```
pi0001e005<-dgamma(c(0.0175,0.0200,0.0225),shape=0.001,scale=1/0.05)
pi001e05<-dgamma(c(0.0175,0.0200,0.0225),shape=0.01,scale=1/0.5)
pi01e5<-dgamma(c(0.0175,0.0200,0.0225),shape=0.1,scale=1/5)
pile50<-dgamma(c(0.0175,0.0200,0.0225),shape=1,scale=1/50)
pilp5e75<-dgamma(c(0.0175,0.0200,0.0225),shape=1.5,scale=1/75)
pi8e400<-dgamma(c(0.0175,0.0200,0.0225),shape=8,scale=1/400)
pi16e800<-dgamma(c(0.0175,0.0200,0.0225),shape=16,scale=1/800)
pi20e1000<-dgamma(c(0.0175,0.0200,0.0225),shape=20,scale=1/1000)
```

pi0001e005

[1] 0.05672497 0.04963477 0.04411948

pi001e05

[1] 0.5433169 0.4754429 0.4225854

pi01e5

[1] 4.313416 3.777460 3.355320

pile50

[1] 20.84310 18.39397 16.23262

pilp5e75

[1] 26.09483 23.12705 20.33603

pi8e400

[1] 59.60111 55.83461 46.84645

pi16e800

[1] 79.13856 79.37403 62.86042

pi20e1000

[1] 85.60022 88.83532 68.35139

Seguem abaixo os gráficos dessas funções.

Figura 4.2:

```
alphagama20e1000<-rgamma(100000,shape=20,scale=1/1000)
plot(alphagama20e1000,dgamma(alphagama20e1000,shape=20,scale=1/1000),xlab="Valores de Alpha",ylab="Distribuições Gama G(20;1000);G(16;800);G(8;400) e G(1,5;75)",col="blue")
alphagama16e800<-rgamma(100000,shape=16,scale=1/800)
lines(sort(alphagama16e800),dgamma(sort(alphagama16e800),shape=16,scale=1/800),col="red")
alphagama8e400<-rgamma(100000,shape=8,scale=1/400)
lines(sort(alphagama8e400),dgamma(sort(alphagama8e400),shape=8,scale=1/400),col="green")
alphagama1p5e75<-rgamma(100000,shape=1.5,scale=1/75)
```

ANEXO B

```
lines(sort(alphagama1p5e75), dgamma(sort(alphagama1p5e75), shape=1.5, scale=1/75), col="yellow")
title("Distribuições Gama")
```

Figura 4.3:

```
alphagama1p0e50<-rgamma(100000, shape=1.0, scale=1/50)
plot(sort(alphagama1p0e50[1:800]), dgamma(sort(alphagama1p0e50[1:800]), shape=1, scale=1/50), xlab="Valores de Alpha", ylab="Valores das Distribuições Gama G(1;50);G(0,10;5);G(0,01;0,5) e G(0,001;0,05)", col="black")
alphagama01e5<-rgamma(100000, shape=0.10, scale=1/5)
lines(sort(alphagama01e5), dgamma(sort(alphagama01e5), shape=0.10, scale=1/5), col="magenta")
alphagama001e05<-rgamma(100000, shape=0.01, scale=1/0.5)
lines(sort(alphagama001e05), dgamma(sort(alphagama001e05), shape=0.01, scale=1/0.5), col="brown")
alphagama0001e005<-rgamma(100000, shape=0.001, scale=1/0.05)
lines(sort(alphagama0001e005), dgamma(sort(alphagama0001e005), shape=0.001, scale=1/0.05), col="orange")
title(" ")
```

Iremos escolher a função *Gama*(16;800) como a distribuição “a priori” de α , ou seja:

O gráfico dessa função é:

Fig. 4.4:

```
plot(alphagama16e800, dgamma(alphagama16e800, shape=16, scale=1/800), xlab="Valores de Alpha", ylab="Função Densidade de Distribuição")
title(" ", sub="Distribuição Gama(16;800)")
```

a) Geração inicial de uma amostra com 100000 valores de alpha de uma distribuição *Gama*(16;800, por nós escolhida como distribuição “a priori”:

```
alpha<-rgamma(100.000, shape=16, scale=1/800)
```

b) Valor da Distribuição *Gama*(16;800), correspondente:

```
yg<-dgamma(alpha, shape=16, scale=1/800)
salpha<-sort(alpha)
write(salpha, "alphaordenado.txt")
```

Utilizando os dados da Tabela B.2 determina-se, então, o vetor de 51 itens relativo ao produto $\tau_i(N_i - S_i)$.

Exportando a tabela B.2 da planilha Excel para o arquivo de texto “Aval Semanais.txt” podemos carregar os dados das avaliações semanais para dentro do R, utilizando os seguintes comandos:

ANEXO B

1) Leitura dos dados das avaliações semanais, de um arquivo texto obtido depois de planilhá-los em uma planilha do Excel:

```
avalsem<-read.table("Aval Semanais.txt",header=TRUE)
```

```
avalsem
```

	i	Ni	Si	Ni.Si
1	1	7	0	7
2	2	7	0	7
3	3	7	0	7
4	4	7	0	7
5	5	7	0	7
6	6	7	1	6
7	7	7	0	7
8	8	7	1	6
9	9	7	0	7
10	10	7	3	4
11	11	7	1	6
12	12	7	1	6
13	13	7	2	5
14	14	7	2	5
15	15	7	1	6
16	16	7	1	6
17	17	7	3	4
18	18	7	2	5
19	19	7	2	5
20	20	7	4	3
21	21	7	3	4
22	22	7	3	4
23	23	7	3	4
24	24	7	0	7
25	25	7	4	3
26	26	7	3	4
27	27	7	2	5
28	28	7	1	6
29	29	7	2	5
30	30	7	4	3
31	31	7	2	5
32	32	7	6	1
33	33	7	3	4
34	34	7	5	2
35	35	7	5	2
36	36	7	4	3
37	37	7	3	4
38	38	7	4	3
39	39	7	3	4
40	40	7	1	6
41	41	7	3	4
42	42	7	4	3

ANEXO B

```
43 43 7 2 5
44 44 7 4 3
45 45 7 3 4
46 46 7 2 5
47 47 7 6 1
48 48 7 2 5
49 49 7 3 4
50 50 7 3 4
51 51 7 3 4
```

2) Intens que vão ficando inadequados para o consumo, a cada semana transcorrida - Si:

Extração da coluna dos Si da tabela de avaliações semanais transcrita no objeto `avalsem` do espaço de trabalho do R, formando um vetor de elementos representativos da quantidade de unidades que falharam em cada uma das 51 semanas de avaliação:

```
Si<-avalsem$Si
Si
 [1] 0 0 0 0 0 1 0 1 0 3 1 1 2 2 1 1 3 2 2 4 3 3 3 0 4 3 2 1 2 4 2 6 3 5 5 4 3 4
[39] 3 1 3 4 2 4 3 2 6 2 3 3 3
```

3) Obtenção dos vetores Ni e de itens ainda adequados ao consumo a cada semana – bons = Ni-Si:

```
Ni<-7
bons<-Ni-Si
bons
 [1] 7 7 7 7 7 6 7 6 7 4 6 6 5 5 6 6 4 5 5 3 4 4 4 7 3 4 5 6 5 3 5 1 4 2 2 3 4 3
[39] 4 6 4 3 5 3 4 5 1 5 4 4 4
```

4) Valores amostrados de alpha:

```
alphaordenado<-scan("alphaordenado.txt")
Read 100000 itens.
Alphaordenado<-matrix(alphaordenado,ncol=1)
#write(Alphaordenado,"Alphaordenado.txt")
```

5) Média dos valores amostrados:

```
mean(alphaordenado)
[1] 0.02000963
```

6) Mediana dos valores amostrados:

```
median(alphaordenado)
[1] 0.01959786
```

7) Obtenção do vetor do número indicativo da semana de avaliação, tau:

```
tau<-1:51
tau
 [1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
[26] 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
[51] 51
```

ANEXO B

8) expoenteA:

Criemos agora o vetor de 100.000 elementos $\left[-\alpha_j \sum_{i=1}^k \tau_i (N_i - S_i)\right]$, chamando-o de “expoenteA”, fazendo a multiplicação: $-\text{alphaordenado} * \text{sum}(\text{taui} * \text{bons})$. O vetor alphaordenado foi obtido, através de uma amostra de tamanho 100.000 (já objetivando uma amostra de tamanho 5000 para a distribuição “a posteriori” de α) da distribuição “a priori” $\text{Gama}(16;800)$, de α . Lembrando: Como não conhecemos o valor de α que devemos utilizar, os princípios Bayesianos, nos indicam considera α como uma distribuição, em vez de apenas um valor determinado. Ao multiplicar o vetor alphaordenado pelo escalar $\text{sum}(\text{taui} * \text{bons})$, obtemos o vetor, também de 100.000 itens, “expoenteA”.

```
taui*bons
[1] 7 14 21 28 35 36 49 48 63 40 66 72 65 70 90 96 68 90 95
[20] 60 84 88 92 168 75 104 135 168 145 90 155 32 132 68 70 108 148 114
[39] 156 240 164 126 215 132 180 230 47 240 196 200 204

sum(taui*bons)
[1] 5419

expoenteA<--alphaordenado*sum(taui*bons)
```

9) Cálculo da matriz coluna de 100.000 elementos de Fator A na expressão da Verossimilhança:

```
fatorA<-exp(expoenteA)
```

Transformando esse vetor em uma matriz coluna [100.000x1]:

```
FatorA<-matrix(fatorA,nrow=100000,ncol=1)
```

10) Obtenção da matriz [100000x51] ExpExpoenteB no segundo fator da Verossimilhança:

```
Alphaordenado<-matrix(alphaordenado,nrow=100000,ncol=1)
Taufi<-matrix(taufi,nrow=1,ncol=51)
ExpoenteB<--Alphaordenado%*%Taufi
ExpExpoenteB<-exp(ExpoenteB)
```

11) Obtenção da matriz [100000x51] denominada BaseB:

```
BaseB<-1-ExpExpoenteB
```

12) Definindo uma matriz Y que receberá as colunas extraídas da matriz BaseB elevadas a Si:

```
i=1
Y<-matrix(rep(0,100000),nrow=100000,ncol=i)
```

13) Obtenção da matriz [100.000x51] FatorBaseB:

```
i=1
j=1
while(i<52){
```

ANEXO B

```
colunaBaseB<-BaseB[,i]
colunaSi<-Si[i]
colunaFatorBaseB<-colunaBaseB^colunaSi
ColunaFatorBaseB<-as.matrix(colunaFatorBaseB)
Y<-cbind(Y,ColunaFatorBaseB)
i=i+1
}
```

Extraindo da matriz Y a matriz de 100.000 linhas e 51 colunas, ou seja, eliminando a coluna de "0" da matriz Y e obtendo a desejada matriz FatorBaseB.

```
FatorBaseB<-Y[,2:i]
```

Para obtermos a expressão do Fator B, devemos produzir uma matriz de [100000,51] onde cada uma das 51 colunas é o produto das correspondentes de FatorBaseB pelas colunas anteriores, ou seja na coluna i=10 de Fator B, cada elemento é o produtório dos elementos das linhas correspondentes das 10 primeiras colunas de FatorBaseB. Assim teremos:

```
i=2
colm<-FatorBaseB[,i-1]
Colm<-as.matrix(colm)
while(i<52){
  coli<-FatorBaseB[,i]
  Coli<-as.matrix(coli)
  colh<-Colm[,i-1]
  Colh<-as.matrix(colh)
  Coli<-Coli*Colh
  Colm<-cbind(Colm,Coli)
  i=i+1
}
FatorB<-Colm
```

14) Obtenção da Verossimilhança $L_{\alpha N_i S_i}$:

```
LalphaNiSi<-fatorA*FatorB
```

Obs.: Observe-se que estamos multiplicando o vetor de 100.000 itens "fatorA" pela matriz {100000x51} FatorB, portanto não é uma multiplicação matricial e sim multiplica-se cada linha de cada coluna da matriz pelos elementos do vetor.

Nos interessam os dados obtidos considerando as primeiras 51 semanas do experimento, ou seja, como cada coluna da matriz $L_{\alpha N_i S_i}$, refere-se à duração do experimento em uma semana, duas semanas, ..., 51 semanas, devemos tomar como valor de interesse apenas a última coluna, onde cada uma das 100.000 linhas dizem respeito aos 100.000 valores amostrados de alpha, devidamente ordenados.

Então $L_{\alpha 51}$ será:

Fig. 4.5:

```
plot(Alphaordenado,Lalpha51,xlab="Valores de Alpha",
ylab="Valores da Verossimilhança")
```

ANEXO B

```
title(" ",sub="51 Semanas de Observação")
```

15) Distribuição “a posteriori” de alpha:

Obtida a Verossimilhança de interesse, que no nosso caso é Lalpha51, podemos determinar os valores de alpha, da distribuição “a posteriori” na região onde a verossimilhança apresenta maiores valores. Isso será feito através do método SIR (Sampling Importance Resampling), desenvolvido por Rubin e que está explicado no corpo do texto principal (Seção 4.3).

16) Procedimentos para calcular a distribuição "a posteriori", via SIR:

1. Geração da distribuição "a priori":

```
priori<-dgamma(alphaordenado,shape=16,scale=1/800)
```

2. Determinação do produto da Verossimilhança Lalpha51 pela priori:

```
veropri<-Lalpha51*priori
```

3. Determinação de uma vetor proporcional ao vetor "posteriori":

```
Kposteriori<-veropri
```

4. Histograma de alphaordenado:

```
hist(alphaordenado)
```

5. Criação de uma matriz Alphavero, onde a primeira coluna é formada pelos 100000 alpha ordenados e a segunda é a verossimilhança Lalpha51:

```
LALPHA51<-matrix(Lalpha51,nrow=100000,ncol=1)  
#write(LALPHA51,"LALPHA51.txt")  
Alphavero<-cbind(Alphaordenado,LALPHA51)
```

6. Método SIR, com n=100000:

```
alphapos<-numeric(5000)  
b<-numeric(100000)  
q<-numeric(100000)  
u<-numeric(5000)  
li<-numeric(100000)  
ls<-numeric(100000)  
t<-numeric(5000)  
j<-numeric(100000)  
i<-1  
j<-1  
b<-Lalpha51  
q<-b/sum(b)
```


ANEXO B

```
u<-sort(runif(5000,0,1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
  li[i]<-li[i-1]+q[i]
  i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
  ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
  j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
  for (l in 1:100000) {
    if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l]||u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
      t[k]<-b[l]
  }
}
```

7. Criação de uma matriz Alphapos onde a primeira coluna é formada por 5000 linhas de valores ordenados de Alpha correspondentes aos valores de verossimilhança na coluna 2, advindos do sorteio ponderado no método SIR e que integram o vetor t.

```
i=1
T<-matrix(t,ncol=1)
#alphapos<-W[W[,2]==T[i,1],]
Alphapos<-matrix(alphapos,ncol=2)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  alphaverol<-Alphaverol[Alphaverol[,2]==t1,]
  Alphaverol<-matrix(alphaverol,ncol=2)
  Alphapos<-rbind(Alphapos,Alphaverol)
  i=i+1
}

#write(Alphapos,"Alphaposeg-e1-0-e2-0.txt")
```

8. Gráfico dos valores de verossimilhança a posteriori em função dos valores de alpha.

```
plot(Alphapos[,1],Alphapos[,2])
```

9. Histograma da distribuição de alpha "a posteriori":

```
hist(Alphapos[,1])
```

ANEXO B

RESULTADOS:

Fig. 4.6:

```
hist(Alphapos[,1],main=" ",sub="51 Semanas de  
Observação",xlab="Valores de Alpha 'a  
posteriori'",ylab="Frequência")
```

```
mean(Alphapos[,1])  
[1] 0.01713464  
median(Alphapos[,1])  
[1] 0.01708232  
sd(Alphapos[,1])  
[1] 0.001500987  
summary(Alphapos[,1])  
Min. :0.01268  
1st Qu.:0.01609  
Median :0.01708  
Mean :0.01713  
3rd Qu.:0.01811  
Max. :0.02386
```

No gráfico abaixo temos a comparação das funções “a priori” e “a posteriori”. A fim de que as duas curvas tenham valores de ordenadas similares, que nos permitam sua adequada visualização, multiplicamos as ordenadas da distribuição “a posteriori” por 10 elevado à potência de 91,3.

Fig. 4.7:

```
plot(sort(alphagama16e800),dgamma(sort(alphagama16e800),shape=  
16,scale=1/800),xlab="Valores de Alpha",ylab="Valores de  
Verossimilhança 'a posteriori' x 10^91,3")  
title("Comparação de Valores 'a priori' e 'a posteriori'")  
lines(Alphapos[,1],Alphapos[,2]*10^91.3)
```

Acrescentando ao gráfico acima a curva da função de verossimilhança temos:

Fig. 4.8:

```
plot(sort(alphagama16e800),dgamma(sort(alphagama16e800),shape=  
16,scale=1/800),xlab="Valores de Alpha",ylab="Verossimilhança  
'a posteriori' x 10^91,3 e a Função Verossimilhança x 91,2")  
title("Funções 'a priori', 'a posteriori' e Verossimilhança")  
lines(Alphapos[,1],Alphapos[,2]*10^91.3)  
lines(Alphaordenado,Lalpha51*10^91.2)
```

Determinação dos Percentis “a posteriori”:

Iremos considerar as seguintes frações de falhas nas amostras utilizadas:

```
Alphaposteriori<-matrix(Alphapos[,1],ncol=1)  
A1<-matrix(rep(0.001,length(Alphaposteriori)),ncol=1)  
A2<-matrix(rep(0.01,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
```

ANEXO B

```
A3<-matrix(rep(0.1,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
A4<-matrix(rep(0.287682,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
A6<-matrix(rep(1.3862944,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/Alphaposteriori
Tempoporcentagem2<-A2/Alphaposteriori
Tempoporcentagem3<-A3/Alphaposteriori
Tempoporcentagem4<-A4/Alphaposteriori
Tempoporcentagem5<-A5/Alphaposteriori
Tempoporcentagem6<-A6/Alphaposteriori
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3, Tempoporcentagem4, Tempoporcentagem5,
Tempoporcentagem6)
```

Gráficos:

```
Resumo1<-summary(Tempoporcentagem[,1])
Resumo1
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.04191 0.05522 0.05854 0.05881 0.06216 0.07884
```

Cálculo do intervalo de 95% de credibilidade para os quantis 2,5% e 97,5%:

```
quantile(Tempoporcentagem[,1],c(0.025,0.975))
  2.5%    97.5%
0.04946497 0.06935211
```

```
Resumo2<-summary(Tempoporcentagem[,2])
Resumo2
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.4191  0.5522  0.5854  0.5881  0.6216  0.7884
```

```
quantile(Tempoporcentagem[,2],c(0.025,0.975))
 2.5%    97.5%
0.4946497 0.6935211
```

```
Resumo3<-summary(Tempoporcentagem[,3])
Resumo3
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  4.191   5.522   5.854   5.881   6.216   7.884
```

```
quantile(Tempoporcentagem[,3],c(0.025,0.975))
  2.5%    97.5%
4.946497 6.935211
```

```
Resumo5<-summary(Tempoporcentagem[,5])
Resumo5
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 29.05  38.27  40.58  40.76  43.08  54.65
```

ANEXO B

```
quantile(Tempoporcentagem[,5],c(0.025,0.975))
2.5%      97.5%
34.28650  48.07121
```

Fig. 4.9:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(Tempoporcentagem[,1],50, main=" ",sub="Tempo de
Observação: 51 semanas",xlab="Valores de t para 0,1% de falhas
das amostras",ylab="Frequência")
hist(Tempoporcentagem[,2],50, main=" ",sub="Tempo de
Observação: 51 semanas",xlab="Valoresde t para 1% de falhas
das amostras",ylab="Frequência")
hist(Tempoporcentagem[,3],50, main=" ",sub="Tempo de
Observação: 51 semanas",xlab="Valores de t para 10% de falhas
das amostras",ylab="Frequência")
hist(Tempoporcentagem[,5],50, main=" ",sub="Tempo de
Observação: 51 semanas",xlab="Valores de t para 50% de falhas
das amostras",ylab="Frequência")
par(mfrow=c(1,1))
```

ANEXO C

Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” de Jeffreys

AMOSTRA COM 100.000 VALORES DE ALPHA E AVALIAÇÃO EM 51 SEMANAS:

PROCEDIMENTO PARA CALCULAR AS DISTRIBUIÇÕES “A POSTERIORI” COM RESPEITO AO PARÂMETRO DA DISTRIBUIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL QUE MODELA O TEMPO DE FALHA DAS AMOSTRAS DO EXPERIMENTO PROPOSTO COM DISTRIBUIÇÃO “A PRIORI” DE JEFFREYS SEM INCORPORAÇÃO DE ERROS NAS AVALIAÇÕES.

Utilizando-se procedimentos análogos aos descritos no Anexo B para a mesma distribuição de tempos de falha, porém utilizando-se para a distribuição do parâmetro alpha uma distribuição “a priori”, de Jeffreys, com função de referência $U(0,001;0,5)$ foi feito o seguinte desenvolvimento:

```
#=====
# Procedimentos para calcular Posteriori a partir de uma
# distribuição "a priori" de Jeffreys e uma amostra de 100000
# valores de alpha de uma distribuição de referência
# U(0,001;0,5), via SIR:
#=====
```

Desenvolvimento detalhado da distribuição “a priori” de Jeffreys conforme sumarizado na Capítulo 4, seção 4.8:

$$\pi(\alpha | x) \propto \sqrt{I(\alpha | x)}$$
$$I(\alpha | X) = -E_x \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \log \{ f(X | \alpha) | \alpha \} \right]$$

No caso:

ANEXO C

$$\begin{aligned}
 f(x|\alpha) &= L(\alpha | N_{\sim i}, S_{\sim i}) = \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i})\right] \left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i} \right\} \\
 \log[f(x|\alpha)] &= \log\left[\exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i})\right] \left\{ \prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i} \right\}\right] = \log\left\{\exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i})\right]\right\} + \\
 &+ \log\left\{\prod_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i}\right\} = -\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) + \sum_{i=1}^k \log[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{S_i} = \\
 &= -\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) + \sum_{i=1}^k S_{\sim i} \log[1 - \exp(-\alpha \tau_i)] \\
 \frac{d}{d\alpha} \{\log[f(x|\alpha)]\} &= \frac{d}{d\alpha} \left\{ -\alpha \sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) + \sum_{i=1}^k S_{\sim i} \log[1 - \exp(-\alpha \tau_i)] \right\} = -\sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) + \\
 &+ \sum_{i=1}^k \left\{ S_{\sim i} \left[\frac{1}{1 - \exp(-\alpha \tau_i)} \times [-\exp(-\alpha \tau_i)](-\tau_i) \right] \right\} = -\sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) + \sum_{i=1}^k \frac{S_{\sim i} [-\exp(-\alpha \tau_i)](-\tau_i)}{1 - \exp(-\alpha \tau_i)}
 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\alpha} \{\log[f(x|\alpha)]\} &= -\sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) + \sum_{i=1}^k \frac{S_{\sim i} \tau_i [\exp(-\alpha \tau_i)]}{1 - \exp(-\alpha \tau_i)} \\
 \frac{d^2}{d\alpha^2} \{\log[f(x|\alpha)]\} &= \frac{d}{d\alpha} \left\{ -\sum_{i=1}^k \tau_i (N_{\sim i} - S_{\sim i}) + \sum_{i=1}^k \frac{S_{\sim i} \tau_i [\exp(-\alpha \tau_i)]}{1 - \exp(-\alpha \tau_i)} \right\} = \\
 &= \frac{d}{d\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{S_{\sim i} \tau_i [\exp(-\alpha \tau_i)]}{1 - \exp(-\alpha \tau_i)} \right\} = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^k S_{\sim i} \tau_i [\exp(-\alpha \tau_i)] [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{-1} \right\} \\
 \frac{d^2}{d\alpha^2} \{\log[f(x|\alpha)]\} &= \frac{d}{d\alpha} \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^k S_{\sim i} \tau_i [\exp(-\alpha \tau_i)]}_a \underbrace{[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{-1}}_b \right\} = \sum_{i=1}^k (a'b + ab')
 \end{aligned}$$

$$a' = S_{\sim i} \tau_i [\exp(-\alpha \tau_i)](-\tau_i) = -S_{\sim i} \tau_i^2 [\exp(-\alpha \tau_i)]$$

$$\begin{aligned}
 b' &= \frac{d}{d\alpha} [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{-1} = (-1)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{-2} [-\exp(-\alpha \tau_i)](-\tau_i) = \\
 &= -\tau_i \exp(-\alpha \tau_i) [1 - \exp(-\alpha \tau_i)]^{-2}
 \end{aligned}$$

Então:

ANEXO C

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\alpha^2} \{\log[f(x|\alpha)]\} &= \sum_{i=1}^k (a'b + ab') = \sum_{i=1}^k \left\{ -S_{\sim i} \tau_i^2 [\exp(-\alpha\tau_i)] [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^{-1} + \right. \\ &= \sum_{i=1}^k \left\{ -S_{\sim i} \tau_i^2 [\exp(-\alpha\tau_i)] [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^{-1} - S_{\sim i} \tau_i^2 [\exp(-\alpha\tau_i)]^2 [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^{-2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\alpha^2} \{\log[f(x|\alpha)]\} &= \sum_{i=1}^k \left\{ -S_{\sim i} \tau_i^2 [\exp(-\alpha\tau_i)] [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^{-1} - S_{\sim i} \tau_i^2 [\exp(-\alpha\tau_i)]^2 [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^{-2} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^k \left\{ -S_{\sim i} \tau_i^2 [\exp(-\alpha\tau_i)] \left\{ [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^{-1} + [\exp(-\alpha\tau_i)] [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^{-2} \right\} \right\} \\ \frac{d^2}{d\alpha^2} \{\log[f(x|\alpha)]\} &= \sum_{i=1}^k \left\{ -S_{\sim i} \tau_i^2 [\exp(-\alpha\tau_i)] \left\{ [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^{-1} + [\exp(-\alpha\tau_i)] [1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^{-2} \right\} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^k -S_{\sim i} \tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i) \left\{ \frac{1}{1 - \exp(-\alpha\tau_i)} + \frac{\exp(-\alpha\tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^2} \right\} = \sum_{i=1}^k -S_{\sim i} \tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i) \left\{ \frac{1}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^2} \right\} \\ \frac{d^2}{d\alpha^2} \{\log[f(x|\alpha)]\} &= -\sum_{i=1}^k \frac{S_{\sim i} \tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^2} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -E_{S_{\sim i}} \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \log\{f(X|\alpha)|\alpha\} \right] = -E_{S_{\sim i}} \left[-\sum_{i=1}^k \frac{S_{\sim i} \tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^2} \right] = E_{S_{\sim i}} \left[\sum_{i=1}^k \frac{S_{\sim i} \tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^2} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^k E_{S_{\sim i}} \left\{ \frac{S_{\sim i} \tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^2} \right\} = \sum_{i=1}^k \frac{\tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^2} E_{S_{\sim i}} \{S_{\sim i}\} \end{aligned}$$

Mas,

$$E_{S_{\sim i}} \{S_{\sim i}\} = \sum_{j=1}^{n_i} E(Y_{ij}) = \sum_{j=1}^{n_i} (1 \times \Pr[Y_{ij} = 1]) = n_i [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] = n_i p_i$$

Então:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \sum_{i=1}^k \frac{\tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^2} E_{S_{\sim i}} \{S_{\sim i}\} = \sum_{i=1}^k \frac{\tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]^2} n_i [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i \tau_i^2 \exp(-\alpha\tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]} \end{aligned}$$

A distribuição “a priori” de Jeffreys, será então;

ANEXO C

$$\pi(\alpha) \propto \sqrt{I(\alpha)} = \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i \tau_i^2 \frac{\exp(-\alpha \tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]}} = \left\{ \sum_{i=1}^k n_i \tau_i^2 \frac{\exp(-\alpha \tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]} \right\}^{1/2}$$

Como foram feitas observações por 51 semanas, e $n_i = 7$, teremos:

$$\begin{aligned} J(\alpha) &\propto \left\{ \sum_{i=1}^{51} 7 \tau_i^2 \frac{\exp(-\alpha \tau_i)}{[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]} \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ 7 \left(\frac{\exp(-\alpha)}{[1 - \exp(-\alpha)]} + 2^2 \frac{\exp(-2\alpha)}{[1 - \exp(-2\alpha)]} + \dots + 51^2 \frac{\exp(-51\alpha)}{[1 - \exp(-51\alpha)]} \right) \right\}^{1/2} = \\ &= \sqrt{7} \left(\frac{\exp(-\alpha)}{[1 - \exp(-\alpha)]} + 2^2 \frac{\exp(-2\alpha)}{[1 - \exp(-2\alpha)]} + \dots + 51^2 \frac{\exp(-51\alpha)}{[1 - \exp(-51\alpha)]} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Segue-se a codificação detalhada para o software R, para implantação dessa distribuição.

```
#=====
# Obtenção dos dados iniciais das amostras em 51 semanas:
#=====

avalsem<-read.table("Aval Semanais.txt",header=TRUE)

Si<-avalsem$Si

Ni<-7

bons<-Ni-Si

taui<-1:51

Tau<-matrix(taui,nrow=1)

#=====
# Implementação no R da priori de Jeffreys utilizada:
#=====

salpha<-sort(runif(100000,min=0.001,max=0.5))

Alphaordenado1<-matrix(salpha,ncol=1)

Yu<-matrix(dunif(Alphaordenado1,min=0.001,max=0.5),ncol=1)

write(Alphaordenado1,"Alphaordenado1.txt")

alphaordenado1<-as.vector(Alphaordenado1)
```


ANEXO C

```
hist(Alphaordenadol)

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA O CÁLCULO DA PRIORI DE JEFFREYS
# ENCONTRADA. GERAÇÃO DE AMOSTRA DE UMA FUNÇÃO DE REFERÊNCIA
# U(0,001;0,5):
#=====

Alphaordenadol<-matrix(scan("Alphaordenadol.txt"),ncol=1)

AlphaTaufi<-(-1)*Alphaordenadol%*%Taufi

ExpAT<-exp(AlphaTaufi)

CompExpAT<-1-ExpAT

RATComp<-ExpAT/CompExpAT

Taufi2<-Taufi^2

i=1
A<-matrix(RATComp[,1]*Taufi2[1,1],ncol=1)
i=i+1
while(i<52){
    Am<-matrix(RATComp[,i]*Taufi2[1,i],ncol=1)
    A<-cbind(A,Am)
    i=i+1
}

i=1
Soma<-matrix(A[,i]+A[,i+1],ncol=1)
i=i+1
while(i<51){
    Soma<-matrix(Soma+A[,i+1],nrow=100000)
    i=i+1
}

RaizSoma<-matrix(sqrt(Soma),ncol=1)

Jeffreys<-sqrt(7)*RaizSoma

plot(Alphaordenadol,Jeffreys)

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A VEROSSIMILHANÇA COM PRIORI DE
# JEFFREYS, AMOSTRA DE 100.000 VALORES DE ALPHA, GERADA
# CONFORME UMA FUNÇÃO DE REFERÊNCIA  $g(\alpha) \sim U(0,001;0,5)$ :
#=====
```

ANEXO C

```
#=====
expoenteA<--alphaordenadol*sum(tauibons)

fatorA<-exp(expoenteA)

Alphaordenadol<-matrix(alphaordenadol,nrow=100000,ncol=1)
Tauib<-matrix(tauib,nrow=1,ncol=51)
ExpoenteB<--Alphaordenadol%*%Tauib
ExpExpoenteB<-exp(ExpoenteB)

BaseB<-1-ExpExpoenteB

i=1
Y<-matrix(rep(0,100000),nrow=100000,ncol=i)

i=1
j=1
while(i<52){
  colunabaseB<-BaseB[,i]
  colunasi<-Si[i]
  colunafatorbaseB<-colunabaseB^colunasi
  ColunafatorbaseB<-as.matrix(colunafatorbaseB)
  Y<-cbind(Y,ColunafatorbaseB)
  i=i+1
}
FatorbaseB<-Y[,2:i]

i=2
colm<-FatorbaseB[,i-1]
Colm<-as.matrix(colm)
while(i<52){
  coli<-FatorbaseB[,i]
  Coli<-as.matrix(coli)
  colh<-Colm[,i-1]
  Colh<-as.matrix(colh)
  Coli<-Coli*Colh
  Colm<-cbind(Colm,Coli)
  i=i+1
}
FatorB<-Colm

LalphaNiSi<-fatorA*FatorB

Lalpha51<- LalphaNiSi[,51]

LALPHA51<-matrix(Lalpha51,nrow=100000,ncol=1)
```

ANEXO C

```
write(LALPHA51, "LALPHA51.txt")

plot(Alphaordenado1, LALPHA51)

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# DISTRIBUIÇÃO "A PRIORI" DE JEFFREYS E FUNÇÃO DE REFERÊNCIA
#  $g(\alpha) \sim U(0,001;0,5)$ ; objeto  $u \sim U(0;0,5)$ 
#=====

Priori<-Jeffreys

veropri<-LALPHA51*Priori

h<-veropri

H<-matrix(h, ncol=1)

g<-dunif(Alphaordenado1, min=0.001, max=0.5)

G<-matrix(g, ncol=1)

w<-h/g

W<-matrix(w, ncol=1)

Alphavero<-cbind(Alphaordenado1, LALPHA51)
write(Alphavero, "Alphavero.txt")

AlphaW<-cbind(Alphaordenado1, W)
write(AlphaW, "AlphaW.txt")

Alphapos<-numeric(5000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
j<-1
b<-w
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000, 0, 1))
li[1]<-0
i<-i+1
```

ANEXO C

```
while (i<100001) {
  li[i]<-li[i-1]+q[i]
  i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
  ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
  j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
  for (l in 1:100000) {
    if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l]||u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
      t[k]<-b[l]
  }
}

T<-matrix(t,ncol=1)
write(T,"T.txt")

i=1
Alphapos<-matrix(AlphaW[AlphaW[,2]==T[i,1],],ncol=2)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  AlphaW1<-matrix(AlphaW[AlphaW[,2]==t1,],ncol=2)
  Alphapos<-rbind(Alphapos,AlphaW1)
  i=i+1
}

write(Alphapos,"Alphapos.txt")

hist(Alphapos[,1])
```

Gráficos:**1) Função Verossimilhança, compreendendo 51 semanas de observação:****Fig. 4.10:**

```
plot(Alphaordenado1,LALPHA51,xlab="Valores de Alpha 'a priori'",ylab="Valores de Verossimilhança")
title(" ",sub="100.000 valores de alpha amostrados de uma U(0,001;0,5)")
```

Fig. 4.11:

```
plot(Alphaordenado1[1:5000],LALPHA51[1:5000],xlab="Valores de Alpha 'a priori'",ylab="Valores de Verossimilhança")
title(" ",sub="Primeiros 5000 valores de alpha amostrados de uma U(0,001;0,5)")
```

3) Distribuição “a priori” de Jeffreys:**Fig. 4.12:**

```
plot(Alphaordenado1,Jeffreys,xlab="Valores de Alpha",ylab="Valores da distribuição de Jeffreys")
title(" ",sub="100.000 Valores de alpha amostrados de uma U(0,001;0,5)")
```

4) Histogramas dos valores de alpha “a posteriori”:**Fig. 4.13:**

```
hist(Alphapos[,1],50, main=" ",sub="Distribuição 'a priori' de Jeffreys",xlab="Valores de Alpha 'a posteriori'",ylab="Frequência")
```

```
summary(Alphapos[,1])
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.01152 0.01571 0.01670 0.01678 0.01778 0.02238
var(Alphapos[,1])
[1] 2.374069e-06
sd(Alphapos[,1])
[1] 0.001540801
```

5) Distribuição Normal dos valores de alpha “a posteriori”:**6) Valores de $W=(\text{Verossimilhança} \times \text{Priori})/\text{Referência}$ em função de Alpha:****Comparação entre as distribuições “a priori” e “a posteriori” de alpha:**

No gráfico abaixo temos a comparação das funções “a priori” e “a posteriori”. A fim de que as duas curvas tenham valores de ordenadas similares, que nos permitam sua adequada visualização, multiplicamos as ordenadas da distribuição “a posteriori” por 10 elevado à potência de 90,4..

Fig. 4.14:

ANEXO C

```
plot(Alphaordenado1[1:20000],Jeffreys[1:20000],xlab="Valores
de Alpha",ylab="Distribuições 'a priori';'a posteriori'e
Verossimilhança")
lines(Alphapos[,1],Alphapos[,2]*10^90.4)
lines(Alphaordenado1,LALPHA51*10^92.5)
title(" ")
```

Determinação dos Percentis “a posteriori”:

Seguindo os mesmos procedimentos do Anexo B, para os mesmos percentis teremos:

```
Alphaposteriori<-matrix(Alphapos[,1],ncol=1)
A1<-matrix(rep(0.001,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
A4<-matrix(rep(0.287682,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
A6<-matrix(rep(1.3862944,length(Alphaposteriori)),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/Alphaposteriori
Tempoporcentagem2<-A2/Alphaposteriori
Tempoporcentagem3<-A3/Alphaposteriori
Tempoporcentagem4<-A4/Alphaposteriori
Tempoporcentagem5<-A5/Alphaposteriori
Tempoporcentagem6<-A6/Alphaposteriori
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3, Tempoporcentagem4, Tempoporcentagem5,
Tempoporcentagem6)
```

Gráficos:

Fig. 4.15:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(Tempoporcentagem[,1],50, main=" ",sub="Percentil de Falhas:
0,1%",xlab="Tempos de Falha em Semanas",ylab="Frequência")
hist(Tempoporcentagem[,2],50, main=" ",sub="Percentil de Falhas:
1%",xlab="Tempos de Falha em Semanas",ylab="Frequência")
hist(Tempoporcentagem[,3],50, main=" ",sub="Percentil de Falhas:
10%",xlab="Tempos de Falha em Semanas",ylab="Frequência")
hist(Tempoporcentagem[,5],50, main=" ",sub="Percentil de Falhas:
50%",xlab="Tempos de Falha em Semanas",ylab="Frequência")
par(mfrow=c(1,1))
```

```
Resumo1<-summary(Tempoporcentagem[,1])
Resumo1
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.04469 0.05625 0.05987 0.06009 0.06366 0.08680
```

```
quantile(Tempoporcentagem[,1],c(0.025,0.975))
  2.5%    97.5%
0.04999327 0.07186818
```

ANEXO C

```
Resumo2<-summary(Tempoporcentagem[,2])
```

```
Resumo2
```

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
0.4469	0.5625	0.5987	0.6009	0.6366	0.8680

```
quantile(Tempoporcentagem[,2],c(0.025,0.975))
```

2.5%	97.5%
0.4999327	0.7186818

```
Resumo3<-summary(Tempoporcentagem[,3])
```

```
Resumo3
```

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
4.469	5.625	5.987	6.009	6.366	8.680

```
quantile(Tempoporcentagem[,3],c(0.025,0.975))
```

2.5%	97.5%
4.999327	7.186818

```
Resumo5<-summary(Tempoporcentagem[,5])
```

```
Resumo5
```

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
30.98	38.99	41.50	41.65	44.12	60.17

```
quantile(Tempoporcentagem[,5],c(0.025,0.975))
```

2.5%	97.5%
34.65269	49.81522

* * *

ANEXO D

INCORPORAÇÃO DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” Gama(16;800)

AMOSTRA COM 100.000 VALORES DE ALPHA E AVALIAÇÃO EM 51 SEMANAS:

PROCEDIMENTO PARA CALCULAR AS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS “A POSTERIORI” COM RESPEITO AO PARÂMETRO DA DISTRIBUIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL QUE MODELA O TEMPO DE FALHA DAS AMOSTRAS DO EXPERIMENTO PROPOSTO COM DISTRIBUIÇÃO “A PRIORI” CONJUNTA GAMA(16;800) COM ERROS UNIFORMES LIMITADOS A 10% DAS AVALIAÇÕES.

Conforme (5.5) :

$$L(\tilde{p} | \tilde{y}) = \prod_{i=1}^k \underbrace{\left\{ \underbrace{e_1 \exp(-\alpha\tau_i)}_a + \underbrace{(1-e_2)[1-\exp(-\alpha\tau_i)]}_b \right\}}_A^{S_i} \underbrace{\left\{ \underbrace{e_2[1-\exp(-\alpha\tau_i)]}_c + \underbrace{(1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i)}_d \right\}}_B^{N_i-S_i}$$

onde temos os seguintes parâmetro bayesianos (serão tratados como distribuições de valores):

$$\alpha \sim Gama(16;800)$$

$$e_1 \sim U(0;0,01)$$

$$e_2 \sim U(0;0,01)$$

```
#=====
# Construção de uma matriz [100.000x3] onde na primeira coluna
# constarão valores de alpha já amostrados nas simulações
# anteriores e as colunas 1 e 2 serão respectivamente erros
# tipo 1 e tipo 2 amostrados aleatoriamente de uma U(0;0,1) :
#=====
```

```
# alphaordenado<-matrix(scan("alphaordenado.txt"),ncol=1)
# Alphaordenado<-matrix(alphaordenado,ncol=1)
```

```
x<-Alphaordenado
mean(x)
[1] 0.02000963
sd(x)
```

ANEXO D

```
[1] 0.004995512

e1<-runif(100000,min=0,max=0.01)
e1<-matrix(e1,ncol=1)

write(e1,"Erros tipo1 - 1%.txt")

x<-e1
mean(x)
[1] 0.004986591
sd(x)
[1] 0.00288546

e2<-runif(100000,min=0,max=0.01)
e2<-matrix(e2,ncol=1)

write(e2,"Erros tipo2 - 1%.txt")

x<-e2
mean(x)
[1] 0.005002227
sd(x)
[1] 0.002880395

Alphaordenado<-matrix(scan("alphaordenado.txt"),ncol=1)
e1<-matrix(scan("Erros tipo1 - 1%.txt"),ncol=1)
e2<-matrix(scan("Erros tipo2 - 1%.txt"),ncol=1)

Param<-cbind(Alphaordenado,e1,e2)
write(Param,"Parametros erros 1% - prigama.txt")

#=====
# Obtenção da expressão das distribuições "a priori" e
# "a posteriori" conjuntas de alpha e dos erros tipo 1 e tipo
# 2:
#=====


$$\pi(\alpha; e_1; e_2) = \pi(\alpha) \times \pi(e_1) \times \pi(e_2) = \text{Gama}(16;800) \times U(0;0,1) \times U(0;0,1) \quad (5.7)$$

```

ANEXO D

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha; e_1; e_2) &= \frac{800^{16}}{\Gamma(16)} \alpha^{16-1} \exp(-800\alpha) \times \frac{1}{e_1} \times \frac{1}{e_2} = \frac{800^{16} \alpha^{15}}{(16-1)! e_1 e_2} \exp(-800\alpha) = \\
 &= \frac{800^{16} \alpha^{15}}{15! e_1 e_2} \exp(-800\alpha) = \frac{(2^3 \times 10^2)^{16} \alpha^{15}}{15! e_1 e_2} \exp(-800\alpha) = \frac{[2^3 \times (2 \times 5)^2]^{16} \alpha^{15}}{15! e_1 e_2} \exp(-800\alpha) = \\
 &= \frac{(2^5 \times 5^2)^{16} \alpha^{15}}{2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times 5) \times e_1 e_2} \exp(-800\alpha) = \\
 &= \frac{2^{80} \times 5^{32} \alpha^{15}}{2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times e_1 e_2} \exp(-800\alpha) = \frac{2^{69} \times 5^{29} \alpha^{15}}{3^6 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times e_1 e_2} \exp(-800\alpha) \\
 \pi(\alpha; e_1; e_2) &= \frac{2^{69} \times 5^{29}}{3^6 \times 7^2 \times 11 \times 13} \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

A distribuição “a posteriori” conjunta, será:

$$\pi(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = \frac{h(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i)}{\int_0^{0.50} \int_0^{0.10} \int_0^1 h(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) d\alpha de_1 de_2} \tag{5.9}$$

Mas,

$$h(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \times \pi(\alpha; e_1; e_2)$$

Então:

$$h(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \times \frac{2^{69} \times 5^{29}}{3^6 \times 7^2 \times 11 \times 13} \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha)$$

A distribuição “a posteriori”, ficará:

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) &= \frac{L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \times \frac{2^{69} \times 5^{29}}{3^6 \times 7^2 \times 11 \times 13} \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha)}{\int_0^{0.5} \int_0^{0.01} \int_0^{0.01} L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \times \frac{2^{69} \times 5^{29}}{3^6 \times 7^2 \times 11 \times 13} \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) d\alpha de_1 de_2} = \\
 &= \frac{L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha)}{\int_0^{0.5} \int_0^{0.01} \int_0^{0.01} L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) d\alpha de_1 de_2}
 \end{aligned}$$

ANEXO D

Assim, a distribuição conjunta “a posteriori”, será:

$$\pi(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = \frac{L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha)}{\int_0^{0.5} \int_0^{0.01} \int_0^{0.01} L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha) d\alpha de_1 de_2} \quad (5.10)$$

È uma constante K que só depende de N_i e S_i .

Observamos que:

$$\pi(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = \frac{L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha)}{K} = \frac{1}{K} \underbrace{\times L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i)}_{\text{Verossimilhança conjunta}} \underbrace{\times \frac{\alpha^{15}}{e_1 e_2} \exp(-800\alpha)}_{\text{"a priori" conjunta}}$$

(5.11)

```

#=====
# Obtenção dos dados de falhas do arquivo de Avaliações
# Semanais das amostras em 51 semanas:
#=====

avalsem<-read.table("Aval Semanais.txt",header=TRUE)

Si<-avalsem$Si

Ni<-7

bons<-Ni-Si

taui<-1:51

Tau<-matrix(taui,nrow=1)

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A VEROSSIMILHANÇA COM AMOSTRAS
# DE ALPHA EXTRAÍDAS DE UMA GAMA(16;800):
#=====
#=====
# Extração das informações dos itens bons e ruins da
# tabela de avaliações:
#=====

Si<-avalsem$Si

```

ANEXO D

```
Si<-matrix(Si,nrow=1)

Ni<-7
bons<-Ni-Si
Bons<-matrix(bons,nrow=1)

#=====
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenado x Tau1
#=====

Expoente<--Alphaordenado**Tau1

#=====
# Obtenção da matriz Parcelaa com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau1):
#=====

# Para multiplicarmos cada linha da coluna de 100.000
# linhas da matriz e1 pelas 51 colunas da matriz
# exp(Expoente), necessitaremos usar o seguinte
# algoritmo, já que as matrizes não são de dimensões
# compatíveis para a multiplicação de uma matriz coluna
# [100000x1] por uma de [100000x51].

Expexpoente<-exp(Expoente)
i=1
Parcelaa<-e1*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parcelaam<-e1*Expexpoente[,i+1]
    Parcelaa<-cbind(Parcelaa,Parcelaam)
    i=i+1
}

# write(Parcelaa,"Parcelaa.txt")
Parcelaa<-scan("Parcelaa.txt")

#=====
# Obtenção da matriz Parcelab com dimensão [100000x51]:
# (1-e2)(1-*exp(-alphaxTau1)):
#=====

p<-1-Expexpoente
q<-1-e2

i=1
Parcelab<-q*p[,1]
while(i<51){
```

ANEXO D

```
Parcelabm<-q*p[,i+1]
Parcelab<-cbind(Parcelab,Parcelabm)
i=i+1
}

# write(Parcelab,"Parcelab.txt")
Parcelab<-scan("Parcelab.txt")

#=====
# Obtenção da matriz Fatorf com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau)+ (1-e2) (1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

Fatorf<-Parcelaa + Parcelab

# write(Fatorf,"Fatorf.txt")
Fatorf<-scan("Fatorf.txt")
rm(Parcelaa)
rm(Parcelab)

#=====
# Obtenção da matriz A com dimensão [100000x51]:
# Fatorf^Si:
#=====

i=1
A<-(Fatorf[,1])^(Si[,1])
while(i<51){
  Am<-(Fatorf[,i+1])^(Si[,i+1])
  A<-cbind(A,Am)
  i=i+1
}

# write(A,"A.txt")
A<-scan("A.txt")
rm(Fatorf)
rm(Am)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelac com dimensão [100000x51]:
# e2(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

p<-1-Expexpoente

i=1
Parcelac<-e2*p[,1]
while(i<51){
```

ANEXO D

```
Parcelacm<-e2*p[,i+1]
Parcelac<-cbind(Parcelac,Parcelacm)
i=i+1
}

# write(Parcelac,"Parcelac.txt")
Parcelac<-scan("Parcelac.txt")

#=====
# Obtenção da matriz Parcelad com dimensão [100000x51]:
# (1-e1)*(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

Parcelad<-(1-e1)*exp(Expoente)

r<-1-e1
i=1
Parcelad<-r*Expexpoente[,1]
while(i<51){
  Parceladm<-r*Expexpoente[,i+1]
  Parcelad<-cbind(Parcelad,Parceladm)
  i=i+1
}

# write(Parcelad,"Parcelad.txt")
Parcelad<-scan("Parcelad.txt")

#=====
# Obtenção da matriz Fatorg com dimensão [100000x51]:
# e2*(1-exp(-alphaxTau))+(1-k1)*exp(-alphaxTau):
#=====

Fatorg<-Parcelac + Parcelad

# write(Fatorg,"Fatorg.txt")
Fatorg<-scan("Fatorg.txt")
rm(Parcelac)
rm(Parcelad)

#=====
# Obtenção da matriz B com dimensão [100000x51]:
# Fatorg^(Ni-Si):
#=====

i=1
B<-(Fatorg[,1])^(Bons[,1])
while(i<51){
  Bm<-(Fatorg[,i+1])^(Bons[,i+1])
```

ANEXO D

```
        B<-cbind(B,Bm)
        i=i+1
    }

# write(B,"B.txt")
B<-scan("B.txt")
rm(Fatorg)
rm(Bm)

#=====
# Obtenção da matriz AB (multiplicação das colunas de A
# pelas colunas respectivas de B)com dimensão [100000x1]:
#=====

AB<-A*B

#=====
# Obtenção da matriz MCAB (multiplicação das colunas de AB)
# com dimensão [100000x1]:
#=====

i=1
MCAB<-AB[,i]*AB[,i+1]
while(i<50){
    MCAB<-MCAB*AB[,i+2]
    i=i+1
}

MCAB<-matrix(MCAB,ncol=1)

L51egele2<-MCAB

# write(L51egele2,"L51egele2.txt")
L51egele2<-matrix(scan("L51egele2.txt"),ncol=1)

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# PRIORI GAMA(16;800), FUNÇÃO DE REFERÊNCIA GAMA(16;800):
#=====

# alphaordenado<-scan("Alphaordenado.txt")
# Alphaordenado<-matrix(alphaordenado,ncol=1)

# priori<-dgamma(Alphaordenado,shape=16,scale=1/800)

# veropri<-L51egele2*priori
```


ANEXO D

```
# Kposteriori<-veropri

# hist(Alphaordenado)

L51egele2<-matrix(L51egele2,nrow=100000,ncol=1)
Alphaveroele2<-cbind(Alphaordenado,L51egele2)

alphaposele2<-numeric(5000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
j<-1
b<-L51egele2
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000,0,1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
  li[i]<-li[i-1]+q[i]
  i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
  ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
  j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
  for (l in 1:100000) {
    if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l]||u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
      t[k]<-b[l]
  }
}

T<-matrix(t,ncol=1)
write(T,"T.txt")

i=1
Alphaposele2<-matrix(alphaposele2,ncol=2)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  Alphaverom<-Alphaveroele2[Alphaveroele2[,2]==t1,]
```

ANEXO D

```
Alphaverom<-matrix(Alphaverom,ncol=2)
Alphaposele2<-rbind(Alphaposele2,Alphaverom)
i=i+1
}

write(Alphaveroele2,"Alphaveroele2.txt")
write(Alphaposele2,"Alphaposele2.txt")

plot(Alphaposele2[,1],Alphaposele2[,2])

hist(Alphaposele2[,1])

#=====
# Procedimentos para localizar valores de alpha idênticos em
# Alphaposele2[,1]:
#=====

x<-Alphaposele2[,1]
x<-x[5000:9999]
y<-Alphaposele2[,2]
y<-y[5000:9999]

Alphaveropos<-cbind(x,y)

i=1
AVpos<-matrix(Alphaveropos,ncol=2)
z1<-matrix(c(0,0),ncol=2)
z2<-z1
Temp1<-matrix(AVpos[,1:2],ncol=2)
while(i<5000){
  temp2<-Temp1[,]==Temp1[i,1]
  Temp2<-matrix(temp2,ncol=2)
  Temp3<-Temp2*1
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  while(Temp4>1){
    Temp5<-Temp1[Temp1[,1]==Temp1[i,1],]
    Temp5<-matrix(Temp5,ncol=2)
    Temp6<-sum(Temp5[,2])
    Temp7<-matrix(c(Temp1[i,1],Temp6),ncol=2)
    z1<-rbind(z1,Temp5)
    z2<-rbind(z2,Temp7)
    Temp4=0
  }
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  i=i+Temp4
}
z<-z2[2:length(z2[,1]),]
```

ANEXO D

```
x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z
```

```
mean(x)
[1] 0.02914314
sd(x)
[1] 0.003841148
```

```
summary(x)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.01950 0.02634 0.02870 0.02914 0.03135 0.04381
```

Fig. 5.1:

```
hist(x,100,main=" ",sub="51 semanas de
Observação",xlab="Valores de Alpha 'a
```

```
posteriori'",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.02914314,sd=0.003841148)*0.11,0.012,0.045
,add=TRUE,col="red")
```

```
#=====
# Extração dos erros "a posteriori", em função dos
# valores obtidos da verossimilhança "a posteriori":
#=====
```

```
i=1
Paramvero<-cbind(Param,L51egele2)
parampos<-numeric(5000)
Parampos<-matrix(parampos,ncol=4)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  paramverom<-Paramvero[Paramvero[,4]==t1,]
  Paramverom<-matrix(paramverom,ncol=4)
  Parampos<-rbind(Parampos,Paramverom)
  i=i+1
}
```

```
#=====
# Histograma dos erros "a posteriori":
#=====
```

```
dim(Parampos)
[1] 6249 4
x1<-Parampos[1250:6249,]
```

ANEXO D

Fig. 5.2:

```
hist(x1[,2],50,main=" ",sub="51 semanas de
Observação",xlab="Valores dos erros tipo 1 'a
posteriori'",ylab="Frequência")
```

Fig. 5.3:

```
hist(x1[,3],50,main=" ",sub="51 semanas de
Observação",xlab="Valores dos erros tipo 2 'a
posteriori'",ylab="Frequência")
```

```
#=====
# Comparação das funções "a priori" e "a posteriori". A
# fim de que as duas curvas tenham valores de ordenadas
# similares, que nos permitam sua adequada visualização,
# multiplicamos as ordenadas da distribuição "a posteriori"
# por 10 elevado à potência de 91,3.
#=====
```

```
mean(x1[,1])
[1] 0.02726442
sd(x1[,1])
[1] 0.004076979
mean(x1[,2])
[1] 0.004983087
sd(x1[,2])
[1] 0.002912145
mean(x1[,3])
[1] 0.005034056
sd(x1[,3])
[1] 0.002870217
mean(x1[,4])
[1] 1.735677e-90
sd(x1[,4])
[1] 1.054689e-90

#z<-dgamma(Alphaordenado,shape=16,scale=1/800)
```

Fig. 5.4a:

```
plot(Alphaordenado,L51egele2,
xlab="Valores de Alpha",
ylab="Veros. Marginal 'a priori'")
```

Fig. 5.4b:

```
plot(z[,1],z[,2],
xlab="Valores de Alpha",
ylab="Veros. Marginal 'a posteriori'")
```

ANEXO D

```
# A matriz Parampos de dimensão [6249x4] reúne em suas colunas
os seguintes valores:
# Na coluna 1: Valores de Alpha "a posteriori", ordenados em
ordem crescente.
# Na coluna 2: Valores dos erros tipo 1 'a posteriori',
correspondentes aos valores de alpha

# da coluna 1, devido à forma como foi obtida a
verossimilhança para cada trio de valores de

# alpha, erro 1 e erro 2.
# Na coluna 3: Idem para os erros tipo 2.
# Na coluna 4: Valores de verossimilhança "a posteriori",
correspondentes a cada
# trio de valores de cada linha das primeiras três colunas.

#=====
# Determinação dos Percentis "a posteriori":
#=====

# Iremos considerar as frações de falhas nas amostras
utilizadas de forma análoga ao que foi
# feito antes de incorporarmos os erros. Usaremos as frações
de falha: 0,1%, 1%, 10%, 25%,
# 50% e 75% do total das amostras para determinar em quantas
semanas, tal fração de falhas
# ocorre.

A1<-matrix(rep(0.001,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A4<-matrix(rep(0.287682,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A6<-matrix(rep(1.3862944,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem2<-A2/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem3<-A3/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem4<-A4/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem5<-A5/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem6<-A6/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3,
Tempoporcentagem4, Tempoporcentagem5, Tempoporcentagem6)

#=====
```

ANEXO D

```
# Gráficos:
#=====

z<-z2[2:length(z2[,1]),]
x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

# 1)
x<-Tempoporcentagem1
mean(x)
[1] 0.03488763
sd(x)
[1] 0.004448811
y<-Tempoporcentagem2
mean(y)
[1] 0.3488763
sd(y)
[1] 0.04448811
v<-Tempoporcentagem3
mean(v)
[1] 3.488763
sd(v)
[1] 0.4448811
w<-Tempoporcentagem5
mean(w)
[1] 24.18226
sd(w)
[1] 3.08368
```

Fig. 5.5:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(Tempoporcentagem[,1],50,
main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 0,1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.03488763,sd=0.004448811)*0.25,0.02,0.05,
add=TRUE,col="red")
hist(Tempoporcentagem[,2],50,
main=" ",sub="Percentil de Falhas: 1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.3488763,sd=0.04448811)*2,0.20,0.50,
add=TRUE,col="red")
hist(Tempoporcentagem[,3],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 10%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
```

ANEXO D

```
curve(dnorm(x,mean=3.488763,sd=0.4448811)*22,2.0,5.0,add=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,5],50,main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 50%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=24.18226,sd=3.08368)*200,10.0,35.0,
add=TRUE,
col="red")
par(mfrow=c(1,1))

summary(x)
quantile(x,c(0.025,0.975))
summary(y)
quantile(y,c(0.025,0.975))
summary(v)
quantile(v,c(0.025,0.975))
summary(w)
quantile(w,c(0.025,0.975))

summary(x)
      V1
Min.   :0.02282
1st Qu.:0.03190
Median :0.03484
Mean   :0.03489
3rd Qu.:0.03797
Max.   :0.05129
quantile(x,c(0.025,0.975))
      2.5%      97.5%
0.02605840 0.04352348
summary(y)
      V1
Min.   :0.2282
1st Qu.:0.3190
Median :0.3484
Mean   :0.3489
3rd Qu.:0.3797
Max.   :0.5129
quantile(y,c(0.025,0.975))
      2.5%      97.5%
0.2605840 0.4352348
summary(v)
      V1
Min.   :2.282
1st Qu.:3.190
Median :3.484
Mean   :3.489
```

ANEXO D

```
3rd Qu.:3.797
Max.    :5.129
quantile(v,c(0.025,0.975))
  2.5%    97.5%
2.605840 4.352348
summary(w)
  V1
Min.    :15.82
1st Qu.:22.11
Median  :24.15
Mean    :24.18
3rd Qu.:26.32
Max.    :35.55
quantile(w,c(0.025,0.975))
  2.5%    97.5%
18.06230 30.16817
```

* * *

ANEXO E

INCORPORAÇÃO DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” Gama(16;800)

AMOSTRA COM 100.000 VALORES DE ALPHA E AVALIAÇÃO EM 51 SEMANAS:

PROCEDIMENTO PARA CALCULAR AS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS “A POSTERIORI” COM RESPEITO AO PARÂMETRO DA DISTRIBUIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL QUE MODELA O TEMPO DE FALHA DAS AMOSTRAS DO EXPERIMENTO PROPOSTO COM DISTRIBUIÇÃO “A PRIORI” CONJUNTA GAMA(16;800) COM ERROS UNIFORMES LIMITADOS A 5% DAS AVALIAÇÕES.

Conforme (5.5):

$$L(\tilde{p} | \tilde{y}) = \prod_{i=1}^k \underbrace{\left\{ \underbrace{e_1 \exp(-\alpha\tau_i)}_a + \underbrace{(1-e_2)[1-\exp(-\alpha\tau_i)]}_b \right\}}_A^{S_i} \underbrace{\left\{ \underbrace{e_2[1-\exp(-\alpha\tau_i)]}_c + \underbrace{(1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i)}_d \right\}}_B^{N_i-S_i}$$

onde temos os seguintes parâmetro bayesianos (serão tratados como distribuições de valores):

$$\alpha \sim \text{Gama}(16;800)$$

$$e_1 \sim U(0;0,05)$$

$$e_2 \sim U(0;0,05)$$

```

=====
# Construção de uma matriz [100.000x3] onde a primeira coluna
# serão valores de alpha já amostrados nas simulações
# anteriores e as colunas 1 e 2 serão respectivamente erros
# tipo 1 e tipo 2 amostrados aleatoriamente de uma U(0;0,1):
=====

#alphaordenado<-matrix(scan("alphaordenado.txt"),ncol=1)
#Alphaordenado<-matrix(alphaordenado,ncol=1)

e1<-runif(100000,min=0,max=0.05)
e1<-matrix(e1,ncol=1)

write(e1,"Erros tipol - até 5%.txt")

```

ANEXO E

```
x<-e1
mean(x)
sd(x)

e2<-runif(100000,min=0,max=0.05)
e2<-matrix(e2,ncol=1)

write(e2,"Erros tipo2 - até 5%.txt")

x<-e2
mean(x)
sd(x)

e1<-matrix(scan("Erros tipo1 - até 5%.txt"),ncol=1)
e2<-matrix(scan("Erros tipo2 - até 5%.txt"),ncol=1)
Param<-cbind(Alphaordenado,e1,e2)
write(Param,"Parametros erprigexpconj erros 5%.txt")
Param<-scan("Parametros erprigexpconj erros 5%.txt")

#=====
# Procedimentos para calcular Posteriori a partir de uma
# distribuição "a priori" Gama(16;800) e uma amostra de
# 100000 valores de alpha observadas por 51 semanas e uma
# distribuição de referência idêntica, com incorporação de
# erros de classificação via SIR:
#=====

#=====
# Obtenção dos dados de falhas do arquivo de Avaliações
# Semanais das amostras em 51 semanas:
#=====

avalsem<-read.table("Aval Semanais.txt",header=TRUE)

Si<-avalsem$Si

Ni<-7

bons<-Ni-Si

taui<-1:51

Tau<-matrix(taui,nrow=1)

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A VEROSSIMILHANÇA COM PRIORI
# GAMA(16;800), FUNÇÃO DE REFERÊNCIA GAMA(16;800):
```

ANEXO E

```
#=====
#=====
# Extração das informações dos itens bons e ruins da
# tabela de avaliações:
#=====

Si<-avalsem$Si
Si<-matrix(Si,nrow=1)

Ni<-7
bons<-Ni-Si
Bons<-matrix(bons,nrow=1)

#=====
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenado x Tau1
#=====

Expoente<--Alphaordenado%%Tau1

#=====
# Obtenção da matriz Parcelaa com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau1):
#=====

# Para multiplicarmos cada linha da coluna de 100.000
# linhas da matriz e1 pelas 51 colunas da matriz
# exp(Expoente), necessitaremos usar o seguinte
# algoritmo, já que as matrizes não são de dimensões
# compatíveis para a multiplicação de uma matriz coluna
# [100000x1] por uma de [100000x51].

Expexpoente<-exp(Expoente)
i=1
Parcelaa<-e1*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parcelaam<-e1*Expexpoente[,i+1]
    Parcelaa<-cbind(Parcelaa,Parcelaam)
    i=i+1
}

write(Parcelaa,"Parcelaa erros 5%.txt")
# Parcelaa<-scan("Parcelaa erros 5%.txt")

#=====
# Obtenção da matriz Parcelab com dimensão [100000x51]:
# (1-e2)(1-*exp(-alphaxTau1)):
#=====
```

ANEXO E

```
p<-1-Expexpoente
q<-1-e2

i=1
Parcelab<-q*p[,1]
while(i<51){
  Parcelabm<-q*p[,i+1]
  Parcelab<-cbind(Parcelab,Parcelabm)
  i=i+1
}

write(Parcelab,"Parcelab erros 5%.txt")
# Parcelab<-scan("Parcelab erros 5%.txt")

#=====
# Obtenção da matriz Fatorf com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau)+ (1-e2) (1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

Fatorf<-Parcelaa + Parcelab
Fatorf<-matrix(Fatorf,ncol=51)

write(Fatorf,"Fatorf erros 5%.txt")
# Fatorf<-scan("Fatorf erros 5%.txt")
rm(Parcelaa)
rm(Parcelab)

#=====
# Obtenção da matriz A com dimensão [100000x51]:
# Fatorf^Si:
#=====

i=1
A<-(Fatorf[,1])^(Si[,1])
while(i<51){
  Am<-(Fatorf[,i+1])^(Si[,i+1])
  A<-cbind(A,Am)
  i=i+1
}

write(A,"A erros 5%.txt")
# A<-scan("A erros 5%.txt")
rm(Fatorf)
rm(Am)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelac com dimensão [100000x51]:
```

ANEXO E

```
# e2(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

p<-1-Expexpoente

i=1
Parcelac<-e2*p[,1]
while(i<51){
  Parcelacm<-e2*p[,i+1]
  Parcelac<-cbind(Parcelac,Parcelacm)
  i=i+1
}

write(Parcelac,"Parcelac erros 5%.txt")
# Parcelac<-scan("Parcelac erros 5%.txt")

#=====
# Obtenção da matriz Parcelad com dimensão [100000x51]:
# (1-e1)*(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

r<-1-e1
i=1
Parcelad<-r*Expexpoente[,1]
while(i<51){
  Parceladm<-r*Expexpoente[,i+1]
  Parcelad<-cbind(Parcelad,Parceladm)
  i=i+1
}

write(Parcelad,"Parcelad erros 5%.txt")
# Parcelad<-scan("Parcelad erros 5%.txt")

#=====
# Obtenção da matriz Fatorg com dimensão [100000x51]:
# e2*(1-exp(-alphaxTau))+(1-k1)*exp(-alphaxTau):
#=====

Fatorg<-Parcelac + Parcelad

write(Fatorg,"Fatorg erros 5%.txt")
# Fatorg<-scan("Fatorg erros 5%.txt")
rm(Parcelac)
rm(Parcelad)

#=====
# Obtenção da matriz B com dimensão [100000x51]:
# Fatorg^(Ni-Si):
```

ANEXO E

```
#=====

i=1
B<-(Fatorg[,1])^(Bons[,1])
while(i<51){
    Bm<-(Fatorg[,i+1])^(Bons[,i+1])
    B<-cbind(B,Bm)
    i=i+1
}

write(B,"B erros 5%.txt")
# B<-scan("B erros 5%.txt")
rm(Fatorg)
rm(Bm)

#=====
# Obtenção da matriz AB (multiplicação das colunas de A
# pelas colunas respectivas de B) com dimensão [100000x1]:
#=====

AB<-A*B

#=====
# Obtenção da matriz MCAB (multiplicação das colunas de AB)
# com dimensão [100000x1]:
#=====

i=1
MCAB<-AB[,i]*AB[,i+1]
while(i<50){
    MCAB<-MCAB*AB[,i+2]
    i=i+1
}

MCAB<-matrix(MCAB,ncol=1)

L51egele2<-MCAB

write(L51egele2,"L51egele2 erros 5%.txt")
# L51egele2<-matrix(scan("L51egele2 erros 5%.txt"),ncol=1)

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

Lalpha51<-matrix(scan("LALPHA51.txt"),ncol=1)
```

Fig. 5.12:

ANEXO E

```
plot(Alphaordenado,L51egele2,main=" ",
sub="Priori GAMA(16;800)",xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Verossimilhança Marginal de L(alpha,e1,e2|Ni,Si) em
relação a Alpha")

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# PRIORI GAMA(16;800), FUNÇÃO DE REFERÊNCIA GAMA(16;800):
#=====

# alphaordenado<-scan("Alphaordenado.txt")
# Alphaordenado<-matrix(alphaordenado,ncol=1)

# priori<-dgamma(Alphaordenado,shape=16,scale=1/800)

# veropri<-L51egele2*priori

# Kposteriori<-veropri

# hist(Alphaordenado)

L51egele2<-matrix(L51egele2,nrow=100000,ncol=1)
Alphaveroe2<-cbind(Alphaordenado,L51egele2)

alphaposele2<-numeric(5000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
j<-1
b<-L51egele2
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000,0,1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
li[i]<-li[i-1]+q[i]
i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
j<-j+1
```

ANEXO E

```
}
for (k in 1:5000){
for (l in 1:100000) {
if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l]||u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
t[k]<-b[l]
}
}

T<-matrix(t,ncol=1)
write(T,"T erros 5%.txt")

i=1
Alphaposele2<-matrix(alphaposele2,ncol=2)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  Alphaverom<-Alphaveroele2[Alphaveroele2[,2]==t1,]
  Alphaverom<-matrix(Alphaverom,ncol=2)
  Alphaposele2<-rbind(Alphaposele2,Alphaverom)
  i=i+1
}

write(Alphaveroele2,"Alphaveroele2 erros 5%.txt")
write(Alphaposele2,"Alphaposele2 erros 5%.txt")

hist(Alphaposele2[,1])

#=====
# Procedimentos para localizar valores de alpha idênticos em
# Alphaposele2[,1]:
#=====

x<-Alphaposele2[,1]
y<-Alphaposele2[,2]

Alphaveropos<-cbind(x,y)

i=1
AVpos<-matrix(Alphaveropos,ncol=2)
z1<-matrix(c(0,0),ncol=2)
z2<-z1
Temp1<-matrix(AVpos[,1:2],ncol=2)
while(i<5000){
  temp2<-Temp1[,]==Temp1[i,1]
  Temp2<-matrix(temp2,ncol=2)
  Temp3<-Temp2*1
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  while(Temp4>1){
```


ANEXO E

```
Temp5<-Temp1[Temp1[,1]==Temp1[i,1],]
Temp5<-matrix(Temp5,ncol=2)
Temp6<-sum(Temp5[,2])
Temp7<-matrix(c(Temp1[i,1],Temp6),ncol=2)
z1<-rbind(z1,Temp5)
z2<-rbind(z2,Temp7)
Temp4=0
}
Temp4<-sum(Temp3[,1])
i=i+Temp4
}
z<-z2[2:length(z2[,1]),]

x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

#=====
# Extração dos erros "a posteriori", em função dos
# valores obtidos da verossimilhança "a posteriori":
#=====

i=1
Paramvero<-cbind(Param,L51egele2)
parampos<-numeric(5000)
Parampos<-matrix(parampos,ncol=4)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  paramverom<-Paramvero[Paramvero[,4]==t1,]
  Paramverom<-matrix(paramverom,ncol=4)
  Parampos<-rbind(Parampos,Paramverom)
  i=i+1
}

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

mean(x)
[1] 0.02778042

sd(x)
[1] 0.004223484

Fig. 5.13:
hist(x,20,main=" ",
```

ANEXO E

```
sub="Priori: Gama(16;800) - Erros uniformes limitados a 5%",
xlab="Valores de Alpha 'a posteriori'",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.02778042,sd=0.004223484)*0.33,0.01,0.05,a
dd=TRUE,col="red")

#=====
# Determinação dos Percentis "a posteriori":
#=====

# Iremos considerar as frações de falhas nas amostras
# utilizadas de forma análoga ao que foi feito antes
# de incorporarmos os erros. Usaremos as frações de
# falha: 0,1%, 1%, 10%, e 50% e do total das amostras
# para determinar em quantas semanas, tal fração de
# falhas ocorre.

A1<-matrix(rep(0.001,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
# A4<-matrix(rep(0.287682,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
# A6<-matrix(rep(1.3862944,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem2<-A2/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem3<-A3/Alphaveropos[,1]
# Tempoporcentagem4<-A4/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem5<-A5/Alphaveropos[,1]
# Tempoporcentagem6<-A6/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3,
Tempoporcentagem5)

#=====
# Gráficos:
#=====

z<-z2[2:length(z2[,1]),]
x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

x<-Tempoporcentagem1
y<-Tempoporcentagem2
v<-Tempoporcentagem3
w<-Tempoporcentagem5
```

ANEXO E

```
# 1)
mean(x)
# [1] 0.03676916
sd(x)
# [1] 0.005211146
mean(y)
# [1] 0.3676916
sd(y)
# [1] 0.05211146
mean(v)
# [1] 3.676916
sd(v)
# [1] 0.5211146
mean(w)
# [1] 25.48644
sd(w)
# [1] 3.612091
```

Fig. 5.14:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(Tempoporcentagem[,1],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 0,1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.03676916,sd=0.005211146)*0.18,0.020,0.050
,add=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,2],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.3676916,sd=0.05211146)*1.8,0.20,0.50,add=
TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,3],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 10%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=3.676916,sd=0.5211146)*18,2.0,5.0,add=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,4],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 50%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=25.48644,sd=3.61209)*180,15.0,40.0,add=TRUE
,
col="red")
par(mfrow=c(1,1))
```

ANEXO E

summary(x)

Min. :0.02366
1st Qu.:0.03373
Median :0.03678
Mean :0.03677
3rd Qu.:0.04041
Max. :0.05285

quantile(x, c(0.025, 0.975))

2.5% 97.5%
0.02572046 0.04640604

summary(y)

Min. :0.2366
1st Qu.:0.3373
Median :0.3678
Mean :0.3677
3rd Qu.:0.4041
Max. :0.5285

quantile(y, c(0.025, 0.975))

2.5% 97.5%
0.2572046 0.4640604

summary(v)

Min. :2.366
1st Qu.:3.373
Median :3.678
Mean :3.677
3rd Qu.:4.041
Max. :5.285

quantile(v, c(0.025, 0.975))

2.5% 97.5%
2.572046 4.640604

summary(w)

Min. :16.40
1st Qu.:23.38
Median :25.50
Mean :25.49
3rd Qu.:28.01
Max. :36.63

quantile(w, c(0.025, 0.975))

2.5% 97.5%
17.82806 32.16621

ANEXO E

```
m<-Alphaposele2[2500:7499,1:2]
dim(m)
Alphaposele2<-m

x<-Alphaposele2[,1]
y<-Alphaposele2[,2]

mean(x)
sd(x)
summary(x)

hist(x,100,main="Histograma de Alpha 'a
posteriori'",sub="Incorporados Erros até 5% das
Avaliações",xlab="Valores de Alpha 'a
posteriori'",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.0262087,sd=0.004037432)*2.7,0.012,0.045,a
dd=TRUE,col="red")

# GRÁFICO AQUI

#=====
# Extração dos erros "a posteriori", em função dos
# valores obtidos da verossimilhança "a posteriori":
#=====

i=1
Param<-matrix(Param,ncol=3)
Paramvero<-cbind(Param,L5legele2)
parampos<-numeric(0)
Parampos<-matrix(parampos,ncol=4)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  paramverom<-Paramvero[Paramvero[,4]==t1,]
  Paramverom<-matrix(paramverom,ncol=4)
  Parampos<-rbind(Parampos,Paramverom)
  i=i+1
}

x<-Parampos[,1]
y<-Parampos[,2]
z<-Parampos[,3]
v<-Parampos[,4]
```

ANEXO E

```
mean(x)
sd(x)
mean(y)
sd(y)
mean(z)
sd(z)
mean(v)
sd(v)

hist(y,50,main="Histograma de e1 'a posteriori'",
sub="Incorporados erros até 5%",xlab="Valores de e1 'a posteriori'",ylab="Frequência")

summary(y)

hist(z,50,main="Histograma de e2 'a posteriori'",
sub="51 semanas de observação",
xlab="Incorporados erros até 5%",ylab="Frequência")

summary(z)

v1<-dgamma(Alphaordenado,shape=16,scale=1/800)
plot(Alphaordenado,v1,xlab="Valores de Alpha",ylab="Valores da
Gama(16;800) 'a priori' e da

Veros. Marginal 'a posteriori'",col="red")
lines(x,v*10^91.2,sub="Distribuição Marginal de Alpha com
Incorporação de Erros até

5%",col="blue")
title(main="Comparação de Valores 'a priori' e 'a
posteriori' de Alpha",sub="Valores da

Verossimilhança 'a posteriori' incorporando erros até 5%")

# Obtivemos os seguintes gráficos da Verossimilhança Marginal
em relação a alpha, erros tipo

# 1 e erros tipo 2:

plot(Parampos[,1],Parampos[,4],main="Verossimilhança Marginal
'a posteriori' em relação a Alpha",
sub="Incorporados erros até 5%",xlab="Valores de Alpha 'a
posteriori' ",
ylab="Verossimilhança Marginal em relação a Alpha")
```

ANEXO E

```
plot(Parampos[,2],Parampos[,4],main="Variação da
Verossimilhança com o Erro tipo 1",sub="Incorporados erros até
5%",xlab="Erro tipo 1",ylab="Verossimilhança Marginal em
relação a e1 'a posteriori'")

plot(Parampos[,3],Parampos[,4],main="Variação da
Verossimilhança com o Erro tipo 2",
sub="Incorporados erros até 5%",
xlab="Erro tipo 2",ylab="Verossimilhança 'a posteriori'")

plot(Parampos[,1],Parampos[,3],main="Variação do Erro tipo 1
com Alpha",
sub="Incorporados erros até 5%",xlab="Valores de Alpha",
ylab="Erro tipo 1")

plot(Parampos[,2],Parampos[,1],main="Variação de alpha com o
Erro tipo 1",
sub="Incorporados erros até 5%",xlab="Valores do Erro tipo
1",ylab="Valores de Alpha")

# Determinação dos Percentis "a posteriori":

A1<-matrix(rep(0.001,length(Parampos[,1])),ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01,length(Parampos[,1])),ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1,length(Parampos[,1])),ncol=1)
A4<-matrix(rep(0.287682,length(Parampos[,1])),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(Parampos[,1])),ncol=1)
A6<-matrix(rep(1.3862944,length(Parampos[,1])),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/Parampos[,1]
Tempoporcentagem2<-A2/Parampos[,1]
Tempoporcentagem3<-A3/Parampos[,1]
Tempoporcentagem4<-A4/Parampos[,1]
Tempoporcentagem5<-A5/Parampos[,1]
Tempoporcentagem6<-A6/Parampos[,1]
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3,
Tempoporcentagem4, Tempoporcentagem5, Tempoporcentagem6)

# Gráficos:

x<-Tempoporcentagem1
mean(x)
sd(x)

x<-Tempoporcentagem1
```

ANEXO E

```
hist(x,50,main="Tempos de Falha Incorporando Erros de
Classificação até 5%",sub="Tempo de

Falha para 0,1% das Amostras",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=,sd=)*5,0.02,0.06,add=TRUE)

summary(x)

quantile(x,c(0.025,0.975))

x<-Tempoporcentagem2
mean(x)
sd(x)

hist(x,50,main="Tempos de Falha Incorporando Erros de
Classificação até 5%",sub="Tempo de

Falha para 1% das Amostras",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=,sd=)*50,0.2,0.6,add=TRUE)

summary(x)

quantile(x,c(0.025,0.975))

x<-Tempoporcentagem3
mean(x)
sd(x)

hist(x,50,main="Tempos de Falha Incorporando Erros de
Classificação até 5%",sub="Tempo de

Falha para 10% das Amostras",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=,sd=)*500,2.0,6.0,add=TRUE)

summary(x)

quantile(x,c(0.025,0.975))

x<-Tempoporcentagem4
mean(x)
sd(x)

hist(x,50,main="Tempos de Falha Incorporando Erros de
Classificação até 5%",sub="Tempo de
```


ANEXO E

```
Falha para 25% das Amostras",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=,sd=)*1000,5.0,16.0,add=TRUE)
```

```
summary(x)
```

```
quantile(x,c(0.025,0.975))
```

```
x<-Tempoporcentagem5
```

```
mean(x)
```

```
sd(x)
```

```
hist(x,50,main="Tempos de Falha Incorporando Erros de
Classificação até 5%",sub="Tempo de
```

```
Falha para 50% das Amostras",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
```

```
curve(dnorm(x,mean=,sd=)*2500,14.0,40.0,add=TRUE)
```

```
summary(x)
```

```
quantile(x,c(0.025,0.975))
```

```
x<-Tempoporcentagem6
```

```
mean(x)
```

```
sd(x)
```

```
hist(x,50,main="Tempos de Falha Incorporando Erros de
Classificação até 5%",sub="Tempo de
```

```
Falha para 75% das Amostras",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
```

```
curve(dnorm(x,mean=,sd=)*5000,20.0,80.0,add=TRUE)
```

```
summary(x)
```

```
quantile(x,c(0.025,0.975))
```

* * *

ANEXO F

INCORPORAÇÃO DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” de Jeffreys

AMOSTRA COM 100.000 VALORES DE ALPHA E AVALIAÇÃO EM 51 SEMANAS:

PROCEDIMENTO PARA CALCULAR AS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS “A POSTERIORI” COM RESPEITO AO PARÂMETRO DA DISTRIBUIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL QUE MODELA O TEMPO DE FALHA DAS AMOSTRAS DO EXPERIMENTO PROPOSTO DISTRIBUIÇÃO “A PRIORI” CONJUNTA DE JEFFREYS COM ERROS UNIFORMES LIMITADOS A 10% DAS AVALIAÇÕES.

Outra forma de obtermos a distribuição “a priori” conjunta (5.14) quando há independência entre os valores de α , e_1 e e_2 (Berger, 1985 e Box & Tiao, 1973) é:

$$\pi(\alpha, e_1, e_2) \propto \sqrt{|I(\alpha)||I(e_1)||I(e_2)|} \quad (5.15)$$

em que $I(\alpha)$, $I(e_1)$ e $I(e_2)$ são as matrizes de informação esperada de Fisher, respectivamente em relação a cada um dos três parâmetros α , e_1 e e_2 , como segue::

$$I(\alpha) = -E_X \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha^2} \log(f(X | \alpha, e_1, e_2) | \alpha, e_1, e_2) \right] \quad (5.16)$$

$$I(e_1) = -E_X \left[\frac{\partial^2 e_1}{\partial e_1^2} \log(f(X | \alpha, e_1, e_2) | \alpha, e_1, e_2) \right] \quad (5.17)$$

$$I(e_2) = -E_X \left[\frac{\partial^2 e_2}{\partial e_2^2} \log(f(X | \alpha, e_1, e_2) | \alpha, e_1, e_2) \right] \quad (5.18)$$

Calculemos, primeiramente, as derivadas segundas de α , e_1 e e_2 relativas à logverossimilhança, como indicado acima:

Conforme visto em (5.6):

$$f(x | \alpha, e_1, e_2) = L(\alpha, e_1, e_2 | N_i, S_i) = \prod_{i=1}^k \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\}^{S_i} \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\}^{N_i - S_i}$$

ANEXO F

Então a logverossimilhança será:

$$\begin{aligned}
 & \log[f(x | \alpha, e_1, e_2)] = \\
 & = \log \left[\prod_{i=1}^k \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\}^{S_i} \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\}^{N_i - S_i} \right] = \\
 & = \sum_{i=1}^k \log \left\{ \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\}^{S_i} \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\}^{N_i - S_i} \right\} = \\
 & = \sum_{i=1}^k \left(\log \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\}^{S_i} + \log \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\}^{N_i - S_i} \right) \\
 & \log[f(x | \alpha, e_1, e_2)] = \sum_{i=1}^k \left(\log \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\}^{S_i} + \log \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\}^{N_i - S_i} \right) = \\
 & = \sum_{i=1}^k S_i \log \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\} + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \log \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\} \\
 & (5.19)
 \end{aligned}$$

Tomando as derivadas parciais, sucessivamente, em relação a α , e_1 e e_2 , teremos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^k S_i \log \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \log \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\} \right) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial \alpha} S_i \log \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\} + \\
 & + \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_i - S_i) \log \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\} = \sum_{i=1}^k S_i \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\}}{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]} + \\
 & + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\}}{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)}
 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = \sum_{i=1}^k S_i \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]\}}{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]} + \\
 & + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)\}}{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)} = \sum_{i=1}^k S_i \frac{e_1 \exp(-\alpha \tau_i)(-\tau_i) + (1 - e_2)[- \exp(-\alpha \tau_i)(-\tau_i)]}{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]} + \\
 & + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{e_2 [- \exp(-\alpha \tau_i)(-\tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)(-\tau_i)}{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)} = \sum_{i=1}^k S_i \frac{\tau_i (1 - e_2) [\exp(-\alpha \tau_i)] - \tau_i e_1 \exp(-\alpha \tau_i)}{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha \tau_i)]} + \\
 & + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{e_2 [\exp(-\alpha \tau_i)(\tau_i)] - \tau_i (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)}{e_2 [1 - \exp(-\alpha \tau_i)] + (1 - e_1) \exp(-\alpha \tau_i)}
 \end{aligned}$$

ANEXO F

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) &= \sum_{i=1}^k S_i \frac{\tau_i (1-e_2) [\exp(-\alpha\tau_i)] - \tau_i e_1 \exp(-\alpha\tau_i)}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2) [1-\exp(-\alpha\tau_i)]} + \\ &+ \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{e_2 [\exp(-\alpha\tau_i) (\tau_i)] - \tau_i (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)}{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_1} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) &= \sum_{i=1}^k S_i \frac{\frac{\partial}{\partial e_1} \{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2) [1-\exp(-\alpha\tau_i)]\}}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2) [1-\exp(-\alpha\tau_i)]} + \\ &+ \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{\frac{\partial}{\partial e_1} \{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)\}}{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} = \sum_{i=1}^k S_i \frac{\exp(-\alpha\tau_i)}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2) [1-\exp(-\alpha\tau_i)]} + \\ &+ \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{-\exp(-\alpha\tau_i)}{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} = \sum_{i=1}^k S_i \frac{\exp(-\alpha\tau_i)}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2) [1-\exp(-\alpha\tau_i)]} - \\ &- \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{\exp(-\alpha\tau_i)}{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial e_1} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \sum_{i=1}^k \frac{S_i \exp(-\alpha\tau_i)}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2) [1-\exp(-\alpha\tau_i)]} - \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - S_i) \exp(-\alpha\tau_i)}{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} \quad (5.21)$$

Derivando (5.19) em relação ao parâmetro de erros tipo 2, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) &= \sum_{i=1}^k S_i \frac{\frac{\partial}{\partial e_2} \{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2) [1-\exp(-\alpha\tau_i)]\}}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2) [1-\exp(-\alpha\tau_i)]} + \\ &+ \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{\frac{\partial}{\partial e_2} \{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)\}}{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} = \sum_{i=1}^k S_i \frac{-[1-\exp(-\alpha\tau_i)]}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1-e_2) [1-\exp(-\alpha\tau_i)]} + \\ &+ \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{1-\exp(-\alpha\tau_i)}{e_2 [1-\exp(-\alpha\tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha\tau_i)} \end{aligned}$$

Logo,

ANEXO F

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial e_2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) &= \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - S_i)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]}{e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)} - \sum_{i=1}^k \frac{S_i[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]} = \\
 &= \sum_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] \left\{ \frac{(N_i - S_i)}{e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)} - \frac{S_i}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]} \right\} \\
 \frac{\partial}{\partial e_2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) &= \sum_{i=1}^k [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] \left\{ \frac{(N_i - S_i)}{e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)} - \frac{S_i}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]} \right\} \\
 (5.22)
 \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez as expressões (5.19), (5.20) e (5.21) em relação a cada um dos parâmetros α , e_1 e e_2 , teremos as seguintes derivadas segundas, que compõem a matriz de informação de Fisher:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^k S_i \frac{\tau_i(1 - e_2)\exp(-\alpha\tau_i) - \tau_i e_1 \exp(-\alpha\tau_i)}{e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)]} \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \frac{e_2 \exp(-\alpha\tau_i)(\tau_i) - \tau_i(1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)}{e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)} \right) \\
 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) &= \\
 &= \sum_{i=1}^k S_i \frac{[e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)][1 - \exp(-\alpha\tau_i)][\tau_i(1 - e_2)\exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i) - \tau_i e_1 \exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i)]}{(e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)])^2} - \\
 &- \frac{[\tau_i(1 - e_2)\exp(-\alpha\tau_i) - \tau_i e_1 \exp(-\alpha\tau_i)][e_1 \exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i) + (1 - e_2)[-\exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i)]]}{(e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)])^2} + \\
 &+ \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \left[\frac{[e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)][e_2 \tau_i \exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i) - \tau_i(1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i)]}{(e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i))^2} - \right. \\
 &\left. - \frac{[e_2 \exp(-\alpha\tau_i)(\tau_i) - \tau_i(1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)][e_2[-\exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i)]}{(e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i))^2} \right] \\
 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) &= \\
 &= \sum_{i=1}^k S_i \frac{[e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)][1 - \exp(-\alpha\tau_i)][\tau_i(1 - e_2)\exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i) - \tau_i e_1 \exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i)]}{(e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)])^2} - \\
 &- \frac{[\tau_i(1 - e_2)\exp(-\alpha\tau_i) - \tau_i e_1 \exp(-\alpha\tau_i)][e_1 \exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i) + (1 - e_2)[-\exp(-\alpha\tau_i)(-\tau_i)]]}{(e_1 \exp(-\alpha\tau_i) + (1 - e_2)[1 - \exp(-\alpha\tau_i)])^2} + \\
 &+ \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \left[\frac{[e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)][-\tau_i^2 e_2 \exp(-\alpha\tau_i) + \tau_i^2(1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)]}{(e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i))^2} - \right. \\
 &\left. - \frac{\tau_i [e_2 \exp(-\alpha\tau_i) - (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)][\tau_i e_2 \exp(-\alpha\tau_i) - (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i)(\tau_i)]}{(e_2[1 - \exp(-\alpha\tau_i)] + (1 - e_1)\exp(-\alpha\tau_i))^2} \right]
 \end{aligned}$$

ANEXO F

(5.23)

Observemos que a equação acima, a fim de facilitar seu entendimento, pode ser escrita de uma forma mais simples, desde que façamos:

$$a = \exp(-\alpha\tau_i)$$

Então (5.20), toma a forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \\ & = \sum_{i=1}^k S_i \frac{[e_1 a + (1-e_2)][1-a][\tau_i(1-e_2)a(-\tau_i) - \tau_i e_1 a(-\tau_i)]}{(e_1 a + (1-e_2)[1-a])^2} - \\ & - \frac{[\tau_i(1-e_2)a - \tau_i e_1 a][e_1 a(-\tau_i) + (1-e_2)[-a(-\tau_i)]]}{(e_1 a + (1-e_2)[1-a])^2} + \\ & + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \left[\frac{[e_2[1-a] + (1-e_1)a][-\tau_i^2 e_2 a + \tau_i^2(1-e_1)a]}{(e_2[1-a] + (1-e_1)a)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\tau_i[e_2 a - (1-e_1)a][\tau_i e_2 a - (1-e_1)a\tau_i]}{(e_2[1-a] + (1-e_1)a)^2} \right] \end{aligned}$$

Somando as frações com mesmo denominador:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \\ & = \sum_{i=1}^k S_i \frac{[e_1 a + (1-e_2)][1-a][\tau_i(1-e_2)a(-\tau_i) - \tau_i e_1 a(-\tau_i)] - [\tau_i(1-e_2)a - \tau_i e_1 a][e_1 a(-\tau_i) + (1-e_2)[-a(-\tau_i)]]}{(e_1 a + (1-e_2)[1-a])^2} + \\ & + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \left[\frac{[e_2[1-a] + (1-e_1)a][-\tau_i^2 e_2 a + \tau_i^2(1-e_1)a] - \tau_i[e_2 a - (1-e_1)a][\tau_i e_2 a - (1-e_1)a\tau_i]}{(e_2[1-a] + (1-e_1)a)^2} \right] \end{aligned}$$

Colocando τ_i em evidência:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \\ & = \sum_{i=1}^k S_i \frac{[e_1 a + (1-e_2)][1-a]\tau_i^2 [-(1-e_2)a + e_1 a] - \tau_i^2 [(1-e_2)a - e_1 a][-e_1 a + (1-e_2)a]}{(e_1 a + (1-e_2)[1-a])^2} + \\ & + \sum_{i=1}^k (N_i - S_i) \left[\frac{\tau_i^2 [e_2[1-a] + (1-e_1)a][-e_2 a + (1-e_1)a] - \tau_i^2 [e_2 a - (1-e_1)a][e_2 a - (1-e_1)a]}{(e_2[1-a] + (1-e_1)a)^2} \right] = \\ & = \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \begin{aligned} & S_i \frac{[e_1 a + (1-e_2)][1-a][-(1-e_2)a + e_1 a] - [(1-e_2)a - e_1 a][-e_1 a + (1-e_2)a]}{(e_1 a + (1-e_2)[1-a])^2} + \\ & + (N_i - S_i) \frac{[e_2[1-a] + (1-e_1)a][-e_2 a + (1-e_1)a] - [e_2 a - (1-e_1)a][e_2 a - (1-e_1)a]}{(e_2[1-a] + (1-e_1)a)^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

ANEXO F

Simplificando:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = \\ & = \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ S_i \frac{[e_1 a + (1 - e_2)[1 - a]][-(1 - e_2)a + e_1 a] - [(1 - e_2)a - e_1 a][- e_1 a + (1 - e_2)a]}{(e_1 a + (1 - e_2)[1 - a])^2} + \right. \\ & \quad \left. + (N_i - S_i) \frac{[e_2[1 - a] + (1 - e_1)a][- e_2 a + (1 - e_1)a] - [e_2 a - (1 - e_1)a][e_2 a - (1 - e_1)a]}{(e_2[1 - a] + (1 - e_1)a)^2} \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ S_i \frac{[e_1 a + (1 - e_2)[1 - a]][e_1 a - (1 - e_2)a] - [(1 - e_2)a - e_1 a][(1 - e_2)a - e_1 a]}{(e_1 a + (1 - e_2)[1 - a])^2} + \right. \\ & \quad \left. + (N_i - S_i) \frac{[e_2[1 - a] + (1 - e_1)a][(1 - e_1)a - e_2 a] - [e_2 a - (1 - e_1)a][e_2 a - (1 - e_1)a]}{(e_2[1 - a] + (1 - e_1)a)^2} \right\} \end{aligned}$$

Fazendo:

$$b = 1 - e_1$$

$$c = 1 - e_2$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = \\ & = \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ S_i \frac{[e_1 a + c[1 - a]][e_1 a - ca] - [ca - e_1 a][ca - e_1 a]}{(e_1 a + c[1 - a])^2} + (N_i - S_i) \frac{[e_2[1 - a] + ba][ba - e_2 a] - [e_2 a - ba][e_2 a - ba]}{(e_2[1 - a] + ba)^2} \right\} \end{aligned}$$

Agrupando:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) = \\ & = \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ S_i \frac{[e_1 a + c[1 - a]][e_1 a - ca] - [ca - e_1 a]^2}{(e_1 a + c[1 - a])^2} + (N_i - S_i) \frac{[e_2[1 - a] + ba][ba - e_2 a] - [e_2 a - ba]^2}{(e_2[1 - a] + ba)^2} \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ S_i \frac{-a[e_1 a + c[1 - a]](c - e_1) - a^2[c - e_1]^2}{(e_1 a + c[1 - a])^2} + (N_i - S_i) \frac{a[e_2(1 - a) + ba][b - e_2] - a^2[b - e_2]^2}{(e_2[1 - a] + ba)^2} \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ S_i \frac{-(c - e_1)[a[e_1 a - c[1 - a]] + a^2[c - e_1]]}{(e_1 a + c[1 - a])^2} + (N_i - S_i) \frac{(b - e_2)[a[e_2[1 - a] + ba] - a^2[b - e_2]]}{(e_2[1 - a] + ba)^2} \right\} \end{aligned}$$

Então:

ANEXO F

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \\ & = \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ S_i \frac{-(c-e_1)[a[e_1 a + c[1-a]] + a^2[c-e_1]]}{(e_1 a + c[1-a])^2} + (N_i - S_i) \frac{(b-e_2)[a[e_2(1-a) + ba] - a^2(b-e_2)]}{(e_2[1-a] + ba)^2} \right\} \end{aligned}$$

(5.24)

Analogamente, derivando (5.21) em relação a e_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial e_1^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \frac{\partial}{\partial e_1^2} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{S_i \exp(-\alpha \tau_i)}{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha \tau_i)]} - \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - S_i) \exp(-\alpha \tau_i)}{e_2 [1-\exp(-\alpha \tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i)} \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^k \left\{ S_i \exp(-\alpha \tau_i) \frac{-\exp(-\alpha \tau_i)}{[e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha \tau_i)]]^2} - (N_i - S_i) \exp(-\alpha \tau_i) \frac{-(-1)\exp(-\alpha \tau_i)}{[e_2 [1-\exp(-\alpha \tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i)]^2} \right\} \end{aligned}$$

Fazendo as mesmas substituições precedentes:

$$a = \exp(-\alpha \tau_i)$$

$$b = 1 - e_1$$

$$c = 1 - e_2$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial e_1^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-S_i a^2}{[e_1 a + (1-e_2)[1-a]]^2} - \frac{(N_i - S_i) a^2}{[e_2 [1-a] + (1-e_1) a]^2} \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-S_i a^2}{[e_1 a + c[1-a]]^2} - \frac{(N_i - S_i) a^2}{[e_2 [1-a] + ba]^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial e_1^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-S_i a^2}{[e_1 a + c[1-a]]^2} - \frac{(N_i - S_i) a^2}{[e_2 [1-a] + ba]^2} \right\} \quad (5.25)$$

Da mesma forma, derivando (5.22) em relação a e_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial e_2^2} (\log[f(x|\alpha, e_1, e_2)]) = \\ & = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial e_2} [1-\exp(-\alpha \tau_i)] \left\{ \frac{(N_i - S_i)}{e_2 [1-\exp(-\alpha \tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i)} - \frac{S_i}{e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha \tau_i)]} \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^k [1-\exp(-\alpha \tau_i)] \left\{ (N_i - S_i) \frac{-[1-\exp(-\alpha \tau_i)]}{[e_2 [1-\exp(-\alpha \tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i)]^2} - S_i \frac{-(-1)[1-\exp(-\alpha \tau_i)]}{[e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha \tau_i)]]^2} \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^k [1-\exp(-\alpha \tau_i)] \left\{ \frac{-(N_i - S_i)[1-\exp(-\alpha \tau_i)]}{[e_2 [1-\exp(-\alpha \tau_i)] + (1-e_1) \exp(-\alpha \tau_i)]^2} - \frac{S_i [1-\exp(-\alpha \tau_i)]}{[e_1 \exp(-\alpha \tau_i) + (1-e_2)[1-\exp(-\alpha \tau_i)]]^2} \right\} \end{aligned}$$

Fazendo substituições, idênticas às precedentes para os demais parâmetros:

ANEXO F

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial e_2^2} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) &= \sum_{i=1}^k [1-a] \left\{ \frac{-(N_i - S_i)[1-a]}{[e_2[1-a] + (1-e_1)a]^2} - \frac{S_i[1-a]}{[e_1a + (1-e_2)[1-a]]^2} \right\} = \\ &= -\sum_{i=1}^k [1-a] \left\{ \frac{(N_i - S_i)[1-a]}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{S_i[1-a]}{[e_1a + c[1-a]]^2} \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial e_2^2} (\log[f(x | \alpha, e_1, e_2)]) &= -\sum_{i=1}^k [1-a]^2 \left\{ \frac{(N_i - S_i)}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{S_i}{[e_1a + c[1-a]]^2} \right\} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Levando agora (5.24), (5.25) e (5.26), respectivamente em (5.16), (5.17) e (5.18), teremos os seguintes valores para as matrizes esperadas de informação de Fisher, com respeito a cada um dos parâmetros. Devemos calcular as esperanças em relação à variável X , que no caso é o número de amostras inadequadas para o consumo em cada semana, ou seja, S_i :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -E_X \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha^2} \log(f(X | \alpha, e_1, e_2) | \alpha, e_1, e_2) \right] = \\ &= -E_{S_i} \left[\sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ S_i \frac{-(c-e_1)[a[e_1a + c[1-a]] + a^2[c-e_1]]}{(e_1a + c[1-a])^2} + (N_i - S_i) \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a] + ba] - a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a] + ba)^2} \right\} \right] = \\ &= -\sum_{i=1}^k \tau_i^2 E_{S_i} \left\{ S_i \frac{-(c-e_1)[a[e_1a + c[1-a]] + a^2[c-e_1]]}{(e_1a + c[1-a])^2} + (N_i - S_i) \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a] + ba] - a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a] + ba)^2} \right\} \\ I(\alpha) &= -\sum_{i=1}^k \tau_i^2 E_{S_i} \left\{ S_i \frac{-(c-e_1)[a[e_1a + c[1-a]] + a^2[c-e_1]]}{(e_1a + c[1-a])^2} + (N_i - S_i) \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a] + ba] - a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a] + ba)^2} \right\} = \\ &= -\sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{-(c-e_1)[a[e_1a + c[1-a]] + a^2[c-e_1]]}{(e_1a + c[1-a])^2} E_{S_i}(S_i) + \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a] + ba] - a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a] + ba)^2} E_{S_i}(N_i - S_i) \right\} \end{aligned}$$

Mas, conforme visto no Capítulo 3, o valor esperado para S_i é o valor esperado da variável dicotômica Y_{ij} quando o produto está inadequado do tempo τ_i , ou seja na semana i . Nesse caso a variável Y_{ij} assume o valor 1.

$$E_{S_i} \{S_i\} = \sum_{j=1}^{N_i} E(Y_{ij}) = \sum_{j=1}^{N_i} (1 \times \Pr[Y_{ij} = 1]) = N_i [1 - \exp(-\alpha\tau_i)] = N_i(1-a)$$

e

$$E_{S_i} \{N_i - S_i\} = E_{S_i} \{N_i\} - E_{S_i} \{S_i\} = N_i - N_i(1-a) = N_i(1-1+a) = N_i a$$

ANEXO F

Então,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -\sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{-(c-e_1)[a[e_1a+c[1-a]]+a^2[c-e_1]]}{(e_1a+c[1-a])^2} N_i(1-a) + \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a]+ba]-a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a]+ba)^2} N_i a \right\} = \\ &= -\sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{-(c-e_1)[a[e_1a+c[1-a]]+a^2[c-e_1]]}{(e_1a+c[1-a])^2} (1-a) + \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a]+ba]-a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a]+ba)^2} a \right\} \end{aligned}$$

Logo,

$$I(\alpha) = -\sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{-(c-e_1)[a[e_1a+c[1-a]]+a^2[c-e_1]]}{(e_1a+c[1-a])^2} (1-a) + \frac{(b-e_2)[a[e_2[1-a]+ba]-a^2[b-e_2]]}{(e_2[1-a]+ba)^2} a \right\} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} I(e_1) &= -E_X \left[\frac{\partial^2 e_1}{\partial e_1^2} \log(f(X | \alpha, e_1, e_2) | \alpha, e_1, e_2) \right] = -E_{S_i} \left\{ \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-S_i a^2}{[e_1 a + c[1-a]]^2} - \frac{(N_i - S_i) a^2}{[e_2[1-a] + ba]^2} \right\} \right\} = \\ &= -\sum_{i=1}^k E_{S_i} \left\{ \frac{-S_i a^2}{[e_1 a + c[1-a]]^2} - \frac{(N_i - S_i) a^2}{[e_2[1-a] + ba]^2} \right\} = \\ &= -\sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-a^2}{[e_1 a + c[1-a]]^2} E_{S_i}(S_i) - \frac{a^2}{[e_2[1-a] + ba]^2} E_{S_i}(N_i - S_i) \right\} \\ I(e_1) &= -\sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-a^2}{[e_1 a + c[1-a]]^2} N_i(1-a) - \frac{a^2}{[e_2[1-a] + ba]^2} N_i a \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1 a + c[1-a]]^2} + \frac{a}{[e_2[1-a] + ba]^2} \right\} \end{aligned}$$

Logo,

$$I(e_1) = \sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1 a + c[1-a]]^2} + \frac{a}{[e_2[1-a] + ba]^2} \right\} \quad (5.28)$$

De (5.26):

ANEXO F

$$\begin{aligned}
 I(e_2) &= -E_X \left[\frac{\partial^2 e_2}{\partial e_2^2} \log(f(X | \alpha, e_1, e_2) | \alpha, e_1, e_2) \right] = \\
 &= -E_{S_i} \left[- \sum_{i=1}^k [1-a]^2 \left\{ \frac{(N_i - S_i)}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{S_i}{[e_1 a + c[1-a]]^2} \right\} \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^k E_{S_i} \left\{ [1-a]^2 \left\{ \frac{(N_i - S_i)}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{S_i}{[e_1 a + c[1-a]]^2} \right\} \right\} = \\
 &= \sum_{i=1}^k (1-a)^2 E_{S_i} \left\{ \frac{(N_i - S_i)}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{S_i}{[e_1 a + c[1-a]]^2} \right\} = \sum_{i=1}^k (1-a)^2 \left\{ \frac{E_{S_i}(N_i - S_i)}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{E_{S_i}(S_i)}{[e_1 a + c[1-a]]^2} \right\} \\
 I(e_2) &= \sum_{i=1}^k (1-a)^2 \left\{ \frac{E_{S_i}(N_i - S_i)}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{E_{S_i}(S_i)}{[e_1 a + c[1-a]]^2} \right\} = \sum_{i=1}^k (1-a)^2 \left\{ \frac{N_i a}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{N_i(1-a)}{[e_1 a + c[1-a]]^2} \right\} = \\
 &= \sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{a}{[e_2[1-a] + ba]^2} + \frac{1-a}{[e_1 a + c[1-a]]^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$I(e_2) = \sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1 a + c[1-a]]^2} + \frac{a}{[e_2[1-a] + ba]^2} \right\}$$

(5.29)

Assim, levando esses resultados em (5.15):

ANEXO F

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha, e_1, e_2) &\propto \sqrt{I(\alpha)I(e_1)I(e_2)} \propto \\
&\propto \sqrt{\left[-\sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{-(c-e_1)[a[e_1a+c[1-a]]+a^2[c-e_1]](1-a) + (b-e_2)[a[e_2[1-a]+ba]-a^2[b-e_2]]a}{(e_1a+c[1-a])^2} \right\} \right]} \times \\
&\times \sqrt{\left[\sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c[1-a]]^2} + \frac{a}{[e_2[1-a]+ba]^2} \right\} \right]} \times \sqrt{\left[\sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c[1-a]]^2} + \frac{a}{[e_2[1-a]+ba]^2} \right\} \right]} \\
\pi(\alpha, e_1, e_2) &\propto \left[-\sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{-(c-e_1)[a[e_1a+c[1-a]]+a^2[c-e_1]](1-a) + (b-e_2)[a[e_2[1-a]+ba]-a^2[b-e_2]]a}{(e_1a+c[1-a])^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \left[\sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c[1-a]]^2} + \frac{a}{[e_2[1-a]+ba]^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c[1-a]]^2} + \frac{a}{[e_2[1-a]+ba]^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left[-\sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{(e_1-c)ac(1+2a)(1-a)}{(e_1a+c[1-a])^2} + \frac{(b-e_2)e_2a^2}{(e_2[1-a]+ba)^2} \right\} a \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \left[\sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \\
\pi(\alpha, e_1, e_2) &\propto \left[-\sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{(e_1-c)ac(1+2a)(1-a)}{(e_1a+c-ac)^2} + \frac{(b-e_2)a^2e_2}{(e_2-e_2a+ba)^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \left[\sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left[\sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{(c-e_1)ac(1+2a)(1-a)}{(e_1a+c-ac)^2} + \frac{(e_2-b)a^2e_2}{(e_2-e_2a+ba)^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
&= \left[\sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \right] \times \left[\sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \right]
\end{aligned}$$

No nosso caso como $N_i = cte = 7$, podemos finalmente fazer:

ANEXO F

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha, e_1, e_2) &\propto \\
 &\left\{ 7 \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{(c-e_1)ac(1+2a)(1-a)}{(e_1a+c-ac)^2} + \frac{(e_2-b)a^2e_2}{(e_2-e_2a+ba)^2} \right\} \times \right. \\
 &\left. \times 7 \sum_{i=1}^k a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \times 7 \sum_{i=1}^k (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
 &= 7\sqrt{7} \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{(c-e_1)ac(1+2a)(1-a)}{(e_1a+c-ac)^2} + \frac{(e_2-b)a^2e_2}{(e_2-e_2a+ba)^2} \right\} \times \right. \\
 &\left. \times \sum_{i=1}^k a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \times \sum_{i=1}^k (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 (5.30)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha, e_1, e_2) &\propto \\
 &\propto 7\sqrt{7} \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{ac(c-e_1)(1-a)}{(e_1a+c-ac)^2} - \frac{(b-e_2)\{a[e_2-e_2a+ba]-a^2\}a}{(e_2-e_2a+ba)^2} \right\} \times \sum_{i=1}^k a^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} + \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \times \right. \\
 &\left. \times \sum_{i=1}^k (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{[e_1a+c-ac]^2} - \frac{a}{[e_2-e_2a+ba]^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Em que:

$$a = \exp(-\alpha\tau_i)$$

$$b = 1 - e_1$$

$$c = 1 - e_2$$

Os parâmetros α, e_1 e e_2 são independentes uns dos outros.

Utilizaremos como função de referência para gerarmos os diferentes parâmetros, as seguintes distribuições:

$$\alpha \sim U(0,001;0,5)$$

$$e_1 \sim U(0;0,01)$$

$$e_2 \sim U(0;0,01)$$

Usaremos essas distribuições também ao aplicarmos o método SIR para a geração do histograma marginal da distribuição “a posteriori” de α .

Inicialmente geraremos 100.000 valores de α da distribuição de referência indicada acima:

ANEXO F

```
#=====
# Construção de uma matriz [100.000x3] onde na primeira coluna
# constarão valores de alpha já amostrados nas simulações
# anteriores e as colunas 1 e 2 serão respectivamente erros
# tipo 1 e tipo 2 amostrados aleatoriamente de uma U(0;0,1):
#=====

# Alphaordenado1<-matrix(scan("Alphaordenado1.txt"),ncol=1)
# Alphaordenado1<-matrix(Alphaordenado1,ncol=1)

summary(Alphaordenado1)
  Min.   :0.001003
 1st Qu.:0.124928
  Median :0.250567
  Mean    :0.250141
 3rd Qu.:0.374994
  Max.    :0.499999

#=====

# e1<-runif(100000,min=0,max=0.1)
# e1<-scan("Erros tipo1 - 1%.txt")
e1<-matrix(e1,ncol=1)

# e2<-runif(100000,min=0,max=0.01)
# e2<-scan("Erros tipo2 - 1%.txt")
e2<-matrix(e2,ncol=1)

Param<-cbind(Alphaordenado1,e1,e2)
# write(Param,"Parametros param-prij-exp-erros 1%.txt")

#=====
# Determinação da distribuição de Jeffreys "a priori",
# conjunta, em relação aos parâmetros alpha, e1 e e2:
#=====
```

Conforme mostrado em (5.29), a distribuição de Jeffreys "a priori", para o caso em estudo é dada por:

ANEXO F

$$\pi(\alpha, e_1, e_2) \propto \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{\overbrace{(c-e_1)ac(1+2a)(1-a)}^{b1}}{\underbrace{(e_1a+c-ac)^2}_{a1}} + \frac{\overbrace{(e_2-b)a^2e_2}^{b2}}{\underbrace{(e_2-e_2a+ba)^2}_{a2}} \right\} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^k a^2 \left\{ \frac{\overbrace{1-a}^{c1}}{\underbrace{[e_1a+c-ac]^2}_{a1}} + \frac{a}{\underbrace{[e_2-e_2a+ba]^2}_{a2}} \right\} \times \sum_{i=1}^k (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{\underbrace{[e_1a+c-ac]^2}_{a1}} + \frac{a}{\underbrace{[e_2-e_2a+ba]^2}_{a2}} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\pi(\alpha, e_1, e_2) \propto \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \left\{ \frac{\overbrace{(c-e_1)ac(1+2a)(1-a)}^{M1}}{\underbrace{(e_1a+c-ac)^2}_{a1}} + \frac{\overbrace{(e_2-b)a^2e_2}^{M2}}{\underbrace{(e_2-e_2a+ba)^2}_{a2}} \right\} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^k a^2 \left\{ \frac{1-a}{\underbrace{[e_1a+c-ac]^2}_{a1}} + \frac{a}{\underbrace{[e_2-e_2a+ba]^2}_{a2}} \right\} \times \sum_{i=1}^k (1-a)^2 \left\{ \frac{1-a}{\underbrace{[e_1a+c-ac]^2}_{a1}} + \frac{a}{\underbrace{[e_2-e_2a+ba]^2}_{a2}} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

```
#####
# Abaixo implementaremos cada uma das parcelas e fatores
# indicados acima:
#####
# Extração das informações dos itens bons e ruins da
# tabela de avaliações:
#####
```

```
Si<-avalsem$Si
Si<-matrix(Si,nrow=1)
Ni<-7
bons<-Ni-Si
Bons<-matrix(bons,nrow=1)
```

```
#####
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenado x TauI
#####
```


ANEXO F

```
Expoente<--Alphaordenado1%*%Tau

#=====
# Obtenção dos valores de a, b e c:
#=====

a<-exp(Expoente)

b<-1-e1

c<-1-e2

#=====
# Obtenção de a1 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
a1<-(e1*a[,1]+c-a[,1]*c)^2
while(i<51){
    alm<-(e1*a[,i+1]+c-a[,i+1]*c)^2
    a1<-cbind(a1,alm)
    i=i+1
}

# write(a1,"a1-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(alm)

#=====
# Obtenção de a2 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
a2<-(e2-e2*a[,1]+b*(a[,1]))^2
while(i<51){
    a2m<-(e2-e2*a[,i+1]+b*(a[,i+1]))^2
    a2<-cbind(a2,a2m)
    i=i+1
}

# write(a2,"a2-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(a2m)

#=====
# Obtenção de b1 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
```

ANEXO F

```
b1<-(c-e1)*(a[,1]*c)*(1+2*a[,1])*(1-a[,1])
while(i<51){
  b1m<-(c-e1)*(a[,i+1]*c)*(1+2*a[,i+1])*(1-a[,i+1])
  b1<-cbind(b1,b1m)
  i=i+1
}

# write(b1,"b1-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b1m)

#=====
# Obtenção de R com dimensão [100000x51]
#=====

R<-b1/a1

# write(R,"R-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b1)

#=====
# Obtenção de b2 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
b2<-(e2-b)*((a[,1])^2)*e2
while(i<51){
  b2m<-(e2-b)*((a[,i+1])^2)*e2
  b2<-cbind(b2,b2m)
  i=i+1
}

# write(b2,"b2-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b2m)

#=====
# Obtenção de S com dimensão [100000x51]
#=====

S<-b2/a2

# write(S,"S-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b2)

#=====
# Obtenção de X com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
```

ANEXO F

```
Tau2<-Tau1^2
RmaisS<-R+S
X<-Tau2[,1]*RmaisS[,1]
while(i<51){
    Xm<-Tau2[,i+1]*RmaisS[,i+1]
    X<-cbind(X,Xm)
    i=i+1
}

# write(X,"X-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Tau2)
# rm(RmaisS)
# rm(Xm)

#=====
# Obtenção de M1 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M1<-X[,1]+X[,2]
while(i<50){
    M1m<-X[,i+1]+X[,i+2]
    M1<-M1+M1m
    i=i+1
}
M1<-matrix(M1,ncol=1)

# write(M1,"M1-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(X)
# rm(M1m)

#=====
# Obtenção de c1 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
c1<-(1-a[,1])
while(i<51){
    c1m<-(1-a[,i+1])
    c1<-cbind(c1,c1m)
    i=i+1
}

# write(c1,"c1-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(c1m)

#=====
# Obtenção de T com dimensão [100000x51]
```

ANEXO F

```
#=====
T<-c1/a1

# write(T,"T-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(c1)

#=====
# Obtenção de U com dimensão [100000x51]
#=====

U<-a/a2

# write(U,"U-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de Y com dimensão [100000x51]
#=====

aa<-a^2
TmaisU<-T+U
Y<-aa*TmaisU

# write(Y,"Y-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(T)
# rm(U)
# rm(aa)
# rm(TmaisU)

#=====
# Obtenção de M2 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M2<-Y[,1]+Y[,2]
while(i<50){
    M2m<-Y[,i+1]+Y[,i+2]
    M2<-M2+M2m
    i=i+1
}
M2<-matrix(M2,ncol=1)

# write(M2,"M2-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Y)
# rm(M2m)

#=====
# Obtenção de V com dimensão [100000x51]
```

ANEXO F

```
#=====
V<-c1/a1

# write(V,"V-Jeffreys-erros 10%.txt")
# rm(a1)

#=====
# Obtenção de W com dimensão [100000x51]
#=====

W<-a/a2

# write(W,"W-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(a2)

#=====
# Obtenção de Z com dimensão [100000x51]
#=====

d1<-(1-a)^2
Z<-d1*(V+W)

# write(Z,"Z-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(d1)
# rm(V)
# rm(W)

#=====
# Obtenção de M3 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M3<-Z[,1]+Z[,2]
while(i<50){
    M3m<-Z[,i+1]+Z[,i+2]
    M3<-M3+M3m
    i=i+1
}
M3<-matrix(M3,ncol=1)

# write(M3,"M3-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Z)
# rm(M3m)

#=====
# Obtenção da distribuição de Jeffreys com dimensão
# [100000x1]
```

ANEXO F

```
#=====
Jeffreys<-7*sqrt(7)*((M1*M2*M3)^(1/2))

J1<-(7*M1)^(1/2)
J2<-(7*M2)^(1/2)
J3<-(7*M3)^(1/2)

# write(Jeffreys,"Jeffreys-erros 1%.txt")
# write(J1,"J1-Jeffreys-erros 1%.txt")
# write(J2,"J2-Jeffreys-erros 1%.txt")
# write(J3,"J3-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Gráficos:
#=====
```

Fig. 5.6:

```
plot(Alphaordenado1,Jeffreys,main="Distribuição de Jeffreys
Incorporando Erros de Classificação",sub="51 semanas de
observação",xlab="Valores de Alpha 'a priori'",ylab="Valores
da dist. 'a priori'")
```

```
#=====
# Determinação da Verossimilhança com a distribuição de
# referência  $U(0,001;0,5)$ :
#=====
```

Inicialmente iremos acrescentar à matriz Param, onde a primeira coluna são os 100.000 valores ordenados de alpha, a segunda os erros tipo 1 e a terceira os erros tipo 2, a distribuição de Jeffreys em função dos valores de alpha, formaremos assim a matriz Paramrij:

```
Paramrij<-cbind(Parampri,Jeffreys)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelaa com dimensão [100000x51]:
# e1linha*exp(-alphaxTau):
#=====

# Para multiplicarmos cada linha da coluna de 100.000
# linhas da matriz el pelas 51 colunas da matriz
# exp(Expoente), necessitaremos usar o seguinte
# algoritmo, já que as matrizes não são de dimensões
# compatíveis para a multiplicação de uma matriz coluna
# [100000x1] por uma de [100000x51].
```

ANEXO F

```
Expexpoente<-exp(Expoente)
i=1
Parcelaa<-e1*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parcelaam<-e1*Expexpoente[,i+1]
    Parcelaa<-cbind(Parcelaa,Parcelaam)
    i=i+1
}

# write(Parcelaa,"Parcelaa-Jeffreys-erros 10%.txt")
# Parcelaa<-matrix(scan("Parcelaa-Jeffreys-erros
10%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaam)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelab com dimensão [100000x51]:
# (1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

p<-1-Expexpoente
q<-1-e2

i=1
Parcelab<-q*p[,1]
while(i<51){
    Parcelabm<-q*p[,i+1]
    Parcelab<-cbind(Parcelab,Parcelabm)
    i=i+1
}

# write(Parcelab,"Parcelab-Jeffreys-erros 10%.txt")
# rm(Parcelabm)
# Parcelab<-matrix(scan("Parcelab-Jeffreys-erros
10%.txt"),ncol=51)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorf com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau)+(1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

Fatorf<-Parcelaa + Parcelab

# write(Fatorf,"Fatorf-Jeffreys-erros 10%.txt")
# Fatorf<-matrix(scan("Fatorf.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaa)
# rm(Parcelab)
```

ANEXO F

```
#####
# Obtenção da matriz A com dimensão [100000x51]:
# Fatorf^Si:
#####

i=1
A<-(Fatorf[,1])^(Si[,1])
while(i<51){
    Am<-(Fatorf[,i+1])^(Si[,i+1])
    A<-cbind(A,Am)
    i=i+1
}

# write(A,"A-Jeffreys-erros 10%.txt")
# A<-matrix(scan("A.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorf)
# rm(Am)

#####
# Obtenção da matriz Parcelac com dimensão [100000x51]:
# e2(1-exp(-alphaxTau)):
#####

p<-1-Expexpoente

i=1
Parcelac<-e2*p[,1]
while(i<51){
    Parcelacm<-e2*p[,i+1]
    Parcelac<-cbind(Parcelac,Parcelacm)
    i=i+1
}

# write(Parcelac,"Parcelac-Jeffreys-erros 10%.txt")
# Parcelac<-matrix(scan("Parcelac.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelacm)

#####
# Obtenção da matriz Parcelad com dimensão [100000x51]:
# (1-e1)*(1-exp(-alphaxTau)):
#####

r<-1-e1

i=1
Parcelad<-r*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parceladm<-r*Expexpoente[,i+1]
```


ANEXO F

```
Parcelad<-cbind(Parcelad,Parceladm)
i=i+1
}

# write(Parcelad,"Parcelad-Jeffreys-erros 10%.txt")
# Parcelad<-matrix(scan("Parcelad-Jeffreys-erros
10%.txt"),ncol=51)
# rm(Parceladm)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorg com dimensão [100000x51]:
#  $e^{2*(1-\exp(-\alpha x \tau))} + (1-k) * \exp(-\alpha x \tau)$ :
#=====

Fatorg<-Parcelac + Parcelad

# write(Fatorg,"Fatorg-Jeffreys-erros 10%.txt")
# Fatorg<-matrix(scan("Fatorg.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelac)
# rm(Parcelad)

#=====
# Obtenção da matriz B com dimensão [100000x51]:
#  $Fatorg^{(N_i - S_i)}$ :
#=====

i=1
B<-(Fatorg[,1])^(Bons[,1])
while(i<51){
    Bm<-(Fatorg[,i+1])^(Bons[,i+1])
    B<-cbind(B,Bm)
    i=i+1
}

# write(B,"B-Jeffreys-erros 10%.txt")
# B<-matrix(scan("B.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorg)
# rm(Bm)

#=====
# Obtenção da matriz AB (multiplicação das colunas de A
# pelas colunas respectivas de B) com dimensão [100000x5AB1]:
#=====

AB<-A*B

# write(AB,"AB-Jeffreys-erros 10%.txt")
# AB<-matrix(scan("AB-Jeffreys-erros 10%.txt"),ncol=51)
```

ANEXO F

```
# rm(A)
# rm(B)

#=====
# Obtenção da matriz MCAB (multiplicação das colunas de AB)
# com dimensão [100000x1]:
#=====

i=1
MCAB<-matrix(AB[,1]*AB[,2],ncol=1)
while(i<50){
    MCAB<-matrix(MCAB*AB[,i+2],ncol=1)
    i=i+1
}

MCAB<-matrix(MCAB,ncol=1)

# L51e1jele2<-MCAB

# write(L51e1jele2,"L51e1jele2-Jeffreys-erros 1%.txt")
# L51e1jele2<-matrix(scan("L51e1jele2.txt"),ncol=1)
# write(MCAB,"MCAB-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(AB)
# rm(MCAB)
```

Fig. 5.7:

```
plot(Alphaordenado1,L51e1jele2,main=" ",sub="Função de
Referência: U(0,001;0,5)",xlab="Valores de Alpha 'a
priori'",ylab="Valores da Verossimilhança")
```

Fig. 5.8:

```
plot(Alphaordenado1[1:10000],L51e1jele2[1:10000],main=""
",sub="Verossimilhança para os primeiros 10000 valores de
Alpha",xlab="Valores de Alpha 'a priori'",ylab="Valores da
Verossimilhança")
```

```
#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# PRIORI DE JEFFREYS, FUNÇÃO DE REFERÊNCIA U(0,001;0,5):
#=====
```

```
L51e1jele2<-matrix(L51e1jele2,nrow=100000,ncol=1)
# Alphaveroe2<-cbind(Alphaordenado1,L51e1jele2)
```

```
Priori<-Jeffreys
```

```
veropri<-L51e1jele2*Priori
```

ANEXO F

```
h<-veropri

H<-matrix(h,ncol=1)

g<-dunif(Alphaordenado1,min=0.001,max=0.5)

G<-matrix(g,ncol=1)

w<-h/g

W<-matrix(w,ncol=1)
# write(W,"W-Jeffreys-erros 1%.txt")

# Alphavero<-cbind(Alphaordenado1,L51e1je1e2)
# write(Alphavero,"Alphavero-priori Jeffreys-erros 1%.txt")

# AlphaW<-cbind(Alphaordenado1,W)
# write(AlphaW,"AlphaW-Jeffreys-erros 1%.txt")

AlphapriLW<-cbind(Param,Priori,L51e1je1e2,W)
#Col. 1=alpha
#Col. 2=e1
#Col. 3=e2
#Col. 4=Jeffreys
#Col. 5=L51e1%je1e2
#Col. 6=W

# write(AlphapriLW,"AlphapriLW-Jeffreys-erros 1%.txt")

Alphapos<-numeric(5000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
j<-1
b<-w
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000,0,1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
li[i]<-li[i-1]+q[i]
i<-i+1
}
```

ANEXO F

```
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
for (l in 1:100000) {
if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l]||u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
t[k]<-b[l]
}
}

T<-matrix(t,ncol=1)
write(T,"T-Jeffreys-erros 1%.txt")

v1<-length(T)
i=1
Alphapos<-matrix(AlphapriLW[AlphapriLW[,6]==T[i,1],],ncol=6)
while(i<v1){
      T1<-T[i+1,1]
      t1<-as.vector(T1)
      AlphaW1<-
matrix(AlphapriLW[AlphapriLW[,6]==t1,],ncol=6)
      Alphapos<-rbind(Alphapos,AlphaW1)
      i=i+1
}

write(Alphapos,"Alphapos-Jeffreys erros até 1%.txt")

plot(Alphapos[,1],Alphapos[,5])

hist(Alphapos[,1])

x<-Alphapos[,1]
y<-Alphapos[,5]

mean(x)
[1] 0.01681397
sd(x)
[1] 0.001566561

hist(x,main=" ",sub="51 semanas de Observação",xlab="Valores
de Alpha 'a posteriori'",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.01681397,sd=0.001566561)*5,0.010,0.024,
add=TRUE,col="red")

#=====
```

ANEXO F

```
# Procedimentos para localizar valores de alpha idênticos em
# Alphapos[,1]:
#=====

Alphaveropos<-cbind(x,y)

i=1
AVpos<-matrix(Alphaveropos,ncol=2)
v2<-length(AVpos[,1])
z1<-matrix(c(0,0),ncol=2)
z2<-z1
Temp1<-matrix(AVpos[,1:2],ncol=2)
while(i<v2){
  temp2<-Temp1[,]==Temp1[i,1]
  Temp2<-matrix(temp2,ncol=2)
  Temp3<-Temp2*1
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  while(Temp4>1){
    Temp5<-Temp1[Temp1[,1]==Temp1[i,1],]
    Temp5<-matrix(Temp5,ncol=2)
    Temp6<-sum(Temp5[,2])
    Temp7<-matrix(c(Temp1[i,1],Temp6),ncol=2)
    z1<-rbind(z1,Temp5)
    z2<-rbind(z2,Temp7)
    Temp4=0
  }
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  i=i+Temp4
}
z<-z2[2:length(z2[,1]),]

x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

mean(x)
[1] 0.01681943
sd(x)
[1] 0.001623385

summary(x)
Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
0.01286 0.01554 0.01683 0.01682 0.01807 0.02144
```

Fig. 5.9:

```
hist(x,100,main=" ",sub="51 semanas de
Observação",xlab="Valores de Alpha 'a
posteriori'",ylab="Frequência")
```

ANEXO F

```
curve(dnorm(x,mean=0.01681943,sd=0.001623385)*0.12,0.008,0.025
,add=TRUE,col="red")
```

Fig. 5.10:

```
plot(x,y,main=" ",sub=" ",xlab="Valores de Alpha 'a
posteriori'",ylab="Verossimilhança marginal 'a posteriori'")
```

Determinação dos Percentis “a posteriori”:

Iremos considerar as frações de falhas nas amostras utilizadas de forma análoga ao que foi feito antes de incorporarmos os erros. Usaremos as frações de falha: 0,1%, 1%, 10% e 50% do total das amostras para determinar em quantas semanas, tal fração de falhas ocorre.

```
A1<-matrix(rep(0.001,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A4<-matrix(rep(0.287682,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A6<-matrix(rep(1.3862944,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem2<-A2/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem3<-A3/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem4<-A4/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem5<-A5/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem6<-A6/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3, Tempoporcentagem4, Tempoporcentagem5,
Tempoporcentagem6)
```

Gráficos:

```
z<-z2[2:length(z2[,1]),]
x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

# 1)
x<-Tempoporcentagem1
mean(x)
[1] 0.03488763
sd(x)
[1] 0.004448811
y<-Tempoporcentagem2
mean(y)
[1] 0.3488763
sd(y)
[1] 0.04448811
```

ANEXO F

```
v<-Tempoporcentagem3
mean(v)
[1] 3.488763
sd(v)
[1] 0.4448811
w<-Tempoporcentagem5
mean(w)
[1] 24.18226
sd(w)
[1] 3.08368
```

Fig. 5.11:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(Tempoporcentagem[,1],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 0,1%",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.06002076,sd=0.00590322)*0.6,0.04,0.08,add
=TRUE,col="red")
hist(Tempoporcentagem[,2],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 1%",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.6002076,sd=0.0590322)*5,0.40,0.80,
add=TRUE,col="red")
hist(Tempoporcentagem[,3],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 10%",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=6.002076,sd=0.590322)*50,4,8,add=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,5],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 50%",xlab="Tempos de Falha em
Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=41.60322,sd=4.0918)*500,30.0,60.0,add=TRUE,
col="red")
par(mfrow=c(1,1))

summary(x)
quantile(x,c(0.025,0.975))
summary(y)
quantile(y,c(0.025,0.975))
summary(v)
quantile(v,c(0.025,0.975))
summary(w)
quantile(w,c(0.025,0.975))
```

```
summary(x)
Min. :0.02282
1st Qu.:0.03190
Median :0.03484
```

ANEXO F

```
Mean      :0.03489
3rd Qu.:0.03797
Max.      :0.05129
quantile(x,c(0.025,0.975))
  2.5%      97.5%
0.02605840 0.04352348
```

```
summary(y)
Min.      :0.2282
1st Qu.:0.3190
Median   :0.3484
Mean     :0.3489
3rd Qu.:0.3797
Max.     :0.5129
quantile(y,c(0.025,0.975))
  2.5%      97.5%
0.2605840 0.4352348
```

```
summary(v)
Min.      :2.282
1st Qu.:3.190
Median   :3.484
Mean     :3.489
3rd Qu.:3.797
Max.     :5.129
quantile(v,c(0.025,0.975))
  2.5%      97.5%
2.605840 4.352348
```

```
summary(w)
Min.      :15.82
1st Qu.:22.11
Median   :24.15
Mean     :24.18
3rd Qu.:26.32
Max.     :35.55
quantile(w,c(0.025,0.975))
  2.5%      97.5%
18.06230 30.16817
```

* * *

ANEXO G

INCORPORAÇÃO DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” Gama(16;800)

UTILIZAÇÃO DE DADOS REAIS DO EXPERIMENTO BASE

No experimento base realizado por Marta, Borges e Ho, foram recolhidos os seguintes dados seguindo o método explicado no Capítulo 2.

A tabela das avaliações semanais apresentou os seguintes dados:

i	Ni	ODOR		SABOR		ASPECTO	
		Sio	Ni-Sio	Sis	Ni-Sio	Sia	Ni-Sia
1	7	0	7	1	6	0	7
2	7	0	7	0	7	0	7
3	7	0	7	0	7	0	7
4	6	0	6	1	5	0	6
5	6	0	6	1	5	0	6
6	6	0	6	0	6	0	6
7	6	0	6	0	6	0	6
8	5	1	4	0	5	0	5
9	6	2	4	0	6	0	6
10	7	0	7	1	6	1	6
11	6	0	6	0	6	0	6
12	6	0	6	1	5	0	6
13	7	0	7	0	7	0	7
14	7	0	7	0	7	0	7
15	7	1	6	2	5	0	7
16	7	2	5	3	4	1	6
17	7	2	5	1	6	0	7
18	7	4	3	1	6	0	7
19	6	1	5	1	5	2	4
20	7	1	6	3	4	1	6
21	8	3	5	3	5	3	5
22	7	1	6	2	5	4	3
23	3	2	1	3	0	2	1
24	7	2	5	2	5	2	5
25	7	1	6	1	6	3	4
26	7	0	7	2	5	0	7
27	7	3	4	3	4	0	7
28	7	2	5	3	4	2	5
29	7	3	4	3	4	1	6
30	7	3	4	2	5	4	3
31	0	0	0	0	0	0	0

ANEXO G

32	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0
34	7	3	4	2	5	2	5
35	7	4	3	3	4	5	2
36	7	4	3	4	3	3	4
37	0	0	0	0	0	0	0
38	7	3	4	4	3	3	4
39	8	3	5	4	4	2	6
40	7	4	3	4	3	5	2
41	6	3	3	3	3	3	3
42	7	4	3	4	3	4	3
43	7	3	4	3	4	2	5
44	7	2	5	2	5	2	5
45	0	0	0	0	0	0	0
46	8	5	3	5	3	5	3
47	8	5	3	5	3	4	4
48	8	5	3	4	4	4	4
49	0	0	0	0	0	0	0
50	8	5	3	4	4	4	4
51	8	5	3	6	2	6	2

```

#=====
# Gráficos:
#=====

```

Fig. 6.1:

Gráfico de NixTauti:

```

plot(Tauti, Ni, type="o", sub="Número de itens avaliados por
semana", xlab="Tempo em Semanas", ylab="Número de amostras
avaliado na semana")

```

Conforme (5.5) sabemos que:

$$L(\tilde{p} | \tilde{y}) = \prod_{i=1}^k \underbrace{\left\{ \underbrace{e_1 \exp(-\alpha\tau_i)}_a + \underbrace{(1-e_2)[1-\exp(-\alpha\tau_i)]}_b \right\}}_f^{S_{io}} \underbrace{\left\{ \underbrace{e_2[1-\exp(-\alpha\tau_i)]}_c + \underbrace{(1-e_1)\exp(-\alpha\tau_i)}_d \right\}}_g^{N_i-S_{io}}$$

Determinemos então a função de Verossimilhança no software R:

```

#=====
# Experimento Marta - Determinação da Verossimilhança - ODOR:
#=====
Alphaordenado<-matrix(scan("Alphaordenado.txt"),ncol=1) #já
#utilizado

e1<-scan("Erros tipol - 1%.txt") #já utilizados nas simulações
e1<-matrix(e1,ncol=1)

```

ANEXO G

```
e2<-scan("Erros tipo2 - 1%.txt") #já utilizados nas imulações
e2<-matrix(e2,ncol=1)

Param<-cbind(Alphaordenado,e1,e2)

#=====
# Obtenção dos dados de falhas do arquivo de Avaliações
# Semanais das amostras em 51 semanas:
#=====

AvalsemanalMarta<-read.table("Avalsemanal-
Marta.txt",header=TRUE)

Ni<-AvalsemanalMarta$Ni
Sio<-AvalsemanalMarta$Sio
Sis<-AvalsemanalMarta$Sis
Sia<-AvalsemanalMarta$Sia
Bonsio<-AvalsemanalMarta$Ni-Sio
Bonsis<-AvalsemanalMarta$Ni-Sis
Bonsia<-AvalsemanalMarta$Ni-Sia

Ni<-matrix(Ni,nrow=1)
Sio<-matrix(Sio,nrow=1)
Sis<-matrix(Sis,nrow=1)
Sia<-matrix(Sia,nrow=1)
Bonsio<-matrix(Bonsio,nrow=1)
Bonsis<-matrix(Bonsis,nrow=1)
Bonsia<-matrix(Bonsia,nrow=1)

#=====
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenado x Tau1
#=====
Expoente<--Alphaordenado%*%Tau1

taui<-1:51

Tau1<-matrix(taui,nrow=1)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelaa com dimensão [100000x51]:
# e1linha*exp(-alphaxTau1):
#=====
Expexpoente<-exp(Expoente)

i=1
Parcelaa<-e1*Expexpoente[,1]
```

ANEXO G

```
while(i<51){
  Parcelaam<-e1*Expexpoente[,i+1]
  Parcelaa<-cbind(Parcelaa,Parcelaam)
  i=i+1
}

#=====
# Obtenção da matriz Parcelab com dimensão [100000x51]:
# (1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

p<-1-Expexpoente
q<-1-e2

i=1
Parcelab<-q*p[,1]
while(i<51){
  Parcelabm<-q*p[,i+1]
  Parcelab<-cbind(Parcelab,Parcelabm)
  i=i+1
}

#=====
# Obtenção da matriz Fatorf com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau)+(1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

Fatorf<-Parcelaa + Parcelab

#=====
# Obtenção da matriz A com dimensão [100000x51]:
# Fatorf^Sio:
#=====

i=1
A<-(Fatorf[,1])^(Sio[,1])
while(i<51){
  Am<-(Fatorf[,i+1])^(Sio[,i+1])
  A<-cbind(A,Am)
  i=i+1
}

#=====
# Obtenção da matriz Parcelac com dimensão [100000x51]:
# e2(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

p<-1-Expexpoente
```

ANEXO G

```
i=1
Parcelac<-e2*p[,1]
while(i<51){
  Parcelacm<-e2*p[,i+1]
  Parcelac<-cbind(Parcelac,Parcelacm)
  i=i+1
}

#=====
# Obtenção da matriz Parcelad com dimensão [100000x51]:
# (1-e1)*(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

r<-1-e1

i=1
Parcelad<-r*Expexpoente[,1]
while(i<51){
  Parceladm<-r*Expexpoente[,i+1]
  Parcelad<-cbind(Parcelad,Parceladm)
  i=i+1
}

#=====
# Obtenção da matriz Fatorg com dimensão [100000x51]:
# e2*(1-exp(-alphaxTau))+(1-k1)*exp(-alphaxTau):
#=====

Fatorg<-Parcelac + Parcelad

#=====
# Obtenção da matriz B com dimensão [100000x51]:
# Fatorg^(Ni-Si):
#=====

i=1
B<-(Fatorg[,1])^(Bonsio[,1])
while(i<51){
  Bm<-(Fatorg[,i+1])^(Bonsio[,i+1])
  B<-cbind(B,Bm)
  i=i+1
}

#=====
# Obtenção da matriz AB (multiplicação das colunas de A
# pelas colunas respectivas de B) com dimensão [100000x5AB1]:
```

ANEXO G

```
#=====
AB<-A*B

#=====
# Obtenção da matriz MCAB (multiplicação das colunas de AB)
# com dimensão [100000x1]:
#=====

i=1
MCAB<-matrix(AB[,1]*AB[,2],ncol=1)
while(i<50){
    MCAB<-matrix(MCAB*AB[,i+2],ncol=1)
    i=i+1
}

MCAB<-matrix(MCAB,ncol=1)

# L51MartaGer1odor<-MCAB
# Lalpha51<-matrix(scan("LALPHA51.txt"),ncol=1)

# write(L51MartaGer1,"L51MartaGer1odor-Marta-Gama-erros
1%.txt")
# L51MartaGer1<-matrix(scan("L51MartaGer1odor-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=1)
# write(MCAB,"MCAB-Marta-odor-Gama-erros 1%.txt")
# rm(AB)
# rm(MCAB)

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

Fig. 6.2:
plot(Alphaordenado,L51MartaGer1odor,main=" ",
sub="Priori utilizada: Gama(16;800); Atributo: Odor",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores da Verossimilhança")

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# PRIORI GAMA(16;800), FUNÇÃO DE REFERÊNCIA GAMA(16;800):
#=====

# alphaordenado<-scan("Alphaordenado.txt")
# Alphaordenado<-matrix(alphaordenado,ncol=1)
```

ANEXO G

```
# priori<-dgamma(Alphaordenado, shape=16, scale=1/800)

# veropri<-L51MartaGerlodor*priori

# Kposteriori<-veropri

# hist(Alphaordenado)

L51MartaGerlodor<-matrix(L51MartaGerlodor, nrow=100000, ncol=1)
Alphaveroele2<-cbind(Alphaordenado, L51MartaGerlodor)

alphaposele2<-numeric(10000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
j<-1
b<-L51MartaGerlodor
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000, 0, 1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
  li[i]<-li[i-1]+q[i]
  i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
  ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
  j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
  for (l in 1:100000) {
    if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l] || u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
      t[k]<-b[l]
  }
}

T<-matrix(t, ncol=1)
write(T, "T.txt")

i=1
```

ANEXO G

```
Alphaposele2<-matrix(alphaposele2,ncol=2)

while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  Alphaverom<-Alphaveroele2[Alphaveroele2[,2]==t1,]
  Alphaverom<-matrix(Alphaverom,ncol=2)
  Alphaposele2<-rbind(Alphaposele2,Alphaverom)
  i=i+1
}

write(Alphaveroele2,"Alphaveroele2-Marta-odor-Gama.txt")
write(Alphaposele2,"Alphaposele2-Marta-odor-Gama.txt")

plot(Alphaposele2[,1],Alphaposele2[,2])

hist(Alphaposele2[,1])

#=====
# Procedimentos para localizar valores de alpha idênticos em
# Alphaposele2[,1]:
#=====

x<-Alphaposele2[,1]
x<-x[5000:9999]
y<-Alphaposele2[,2]
y<-y[5000:9999]

Alphaveropos<-cbind(x,y)

i=1
AVpos<-matrix(Alphaveropos,ncol=2)
z1<-matrix(c(0,0),ncol=2)
z2<-z1
Temp1<-matrix(AVpos[,1:2],ncol=2)
while(i<5000){
  temp2<-Temp1[,]==Temp1[i,1]
  Temp2<-matrix(temp2,ncol=2)
  Temp3<-Temp2*1
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  while(Temp4>1){
    Temp5<-Temp1[Temp1[,1]==Temp1[i,1],]
    Temp5<-matrix(Temp5,ncol=2)
    Temp6<-sum(Temp5[,2])
    Temp7<-matrix(c(Temp1[i,1],Temp6),ncol=2)
    z1<-rbind(z1,Temp5)
    z2<-rbind(z2,Temp7)
  }
}
```


ANEXO G

```
        Temp4=0
      }
      Temp4<-sum(Temp3[,1])
      i=i+Temp4
    }
z<-z2[2:length(z2[,1]),]

x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

#=====
# Extração dos erros "a posteriori", em função dos
# valores obtidos da verossimilhança "a posteriori":
#=====

i=1
Paramvero<-cbind(Param,L51egele2)
parampos<-numeric(5000)
Parampos<-matrix(parampos,ncol=4)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  paramverom<-Paramvero[Paramvero[,4]==t1,]
  Paramverom<-matrix(paramverom,ncol=4)
  Parampos<-rbind(Parampos,Paramverom)
  i=i+1
}

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

mean(x)
[1] 0.01562864

sd(x)
[1] 0.001141586

Fig. 6.3:
hist(x,100,main=" ",
sub="Experimento Base, Priori: Gama(16;800)",
xlab="Valores de Alpha 'a posteriori'",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.01562864,sd=0.001141586)*0.026,0.01,0.05,
add=TRUE,
```

ANEXO G

```
col="red")

#=====
# Determinação dos Percentis "a posteriori":
#=====

# Iremos considerar as frações de falhas nas amostras
# utilizadas de forma análoga ao que foi feito antes
# de incorporarmos os erros. Usaremos as frações de
# falha: 0,1%, 1%, 10%, e 50% e do total das amostras
# para determinar em quantas semanas, tal fração de
# falhas ocorre.

A1<-matrix(rep(0.001,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A4<-matrix(rep(0.287682,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A6<-matrix(rep(1.3862944,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem2<-A2/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem3<-A3/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem4<-A4/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem5<-A5/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem6<-A6/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3, Tempoporcentagem4, Tempoporcentagem5,
Tempoporcentagem6)

#=====
# Gráficos:
#=====

z<-z2[2:length(z2[,1]),]
x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

# 1)
x<-Tempoporcentagem1
mean(x)
# [1] 0.0643266
sd(x)
# [1] 0.004706379
y<-Tempoporcentagem2
mean(y)
```

ANEXO G

```
# [1] 0.643266
sd(y)
# [1] 0.04706379
v<-Tempoporcentagem3
mean(v)
# [1] 6.43266
sd(v)
# [1] 0.4706379
w<-Tempoporcentagem5
mean(w)
# [1] 44.58779
sd(w)
# [1] 3.262213
```

Fig. 6.4:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(Tempoporcentagem[,1],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 0,1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.0643266,sd=0.004706379)*0.18,0.050,0.08,add=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,2],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.643266,sd=0.04706379)*1.8,0.50,0.80,add=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,3],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 10%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=6.43266,sd=0.4706379)*18,5,8,add=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,5],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 50%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=44.58779,sd=3.262213)*180,35.0,60.0,add=TRUE,
col="red")
par(mfrow=c(1,1))

summary(x)
Min.      :0.05407
1st Qu.:0.06059
```

ANEXO G

```
Median :0.06418
Mean   :0.06433
3rd Qu.:0.06762
Max.   :0.07725
quantile(x,c(0.025,0.975))
 2.5%      97.5%
0.05632571 0.07332078
```

```
summary(y)
Min.     :0.5407
 1st Qu.:0.6059
Median   :0.6418
Mean     :0.6433
 3rd Qu.:0.6762
Max.     :0.7725
quantile(y,c(0.025,0.975))
 2.5%      97.5%
0.5632571 0.7332078
```

```
summary(v)
Min.     :5.407
 1st Qu.:6.059
Median   :6.418
Mean     :6.433
 3rd Qu.:6.762
Max.     :7.725
quantile(v,c(0.025,0.975))
 2.5%      97.5%
5.632571  7.332078
```

```
summary(w)
Min.     :37.48
 1st Qu.:42.00
Median   :44.49
Mean     :44.59
 3rd Qu.:46.87
Max.     :53.54
quantile(w,c(0.025,0.975))
 2.5%      97.5%
39.04200  50.82208
```

* * *

ANEXO H

INCORPORAÇÃO DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” de Jeffreys

EXPERIÊNCIA REAL DO TRABALHO DE REFERÊNCIA COM TRATAMENTO
BAYESIANO INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO ATÉ 1%

PROCEDIMENTO PARA CALCULAR AS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS “A POSTERIORI” COM RESPEITO AO PARÂMETRO DA DISTRIBUIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL QUE MODELA O TEMPO DE FALHA DAS AMOSTRAS DO EXPERIMENTO PROPOSTO DISTRIBUIÇÃO “A PRIORI” CONJUNTA DE JEFFREYS COM ERROS UNIFORMES LIMITADOS A 1% DAS AVALIAÇÕES.

Conforme visto no Capítulo 5, a distribuição “a priori” de Jeffreys, com a incorporação de erros, é dada por::

$$\pi(\alpha, e_1, e_2) \propto \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2 N_i \left\{ \frac{(c - e_1)ac(1 + 2a)(1 - a)}{(e_1 a + c - ac)^2} + \frac{(e_2 - b)a^2 e_2}{(e_2 - e_2 a + ba)^2} \right\} \times \sum_{i=1}^k N_i a^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right\} \times \sum_{i=1}^k N_i (1 - a)^2 \left\{ \frac{1 - a}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Em que:

$$a = \exp(-\alpha \tau_i)$$

$$b = 1 - e_1$$

$$c = 1 - e_2$$

Os parâmetros α, e_1 e e_2 são independentes uns dos outros.

Utilizaremos como função de referência para gerarmos os diferentes parâmetros, as seguintes distribuições:

$$\alpha \sim U(0,001;0,5)$$

$$e_1 \sim U(0;0,01)$$

$$e_2 \sim U(0;0,01)$$

Os valores de alpha são os mesmos obtidos na simulação anterior com a distribuição de Jeffreys, constante do objeto Alphaordenado1.

ANEXO H

```
#=====
# Experimento Marta - ODOR - Jeffreys:
#=====

#=====
# Construção de uma matriz [100.000x3] onde a primeira coluna
# serão valores de alpha já amostrados nas simulações
# anteriores e as colunas 1 e 2 serão respectivamente erros
# tipo 1 e tipo 2 amostrados aleatoriamente de uma  $U(0;0,1)$ :
#=====

Alphaordenado1<-matrix(scan("Alphaordenado1.txt"),ncol=1)
Alphaordenado1<-matrix(Alphaordenado1,ncol=1)

# e1<-runif(100000,min=0,max=0.01)
# e1<-matrix(scan("Erros tipo1 - 1%.txt"),ncol=1)

# e2<-runif(100000,min=0,max=0.01)
# e2<-matrix(scan("Erros tipo2 - 1%.txt"),ncol=1)

Param<-cbind(Alphaordenado1,e1,e2)

# write(Param,"Param-Marta-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção dos dados de falhas do arquivo de Avaliações
# Semanais das amostras em 51 semanas:
#=====

AvalsemanalMarta<-read.table("Avalsemanal-
Marta.txt",header=TRUE)

Ni<-AvalsemanalMarta$Ni
Sio<-AvalsemanalMarta$Sio
Sis<-AvalsemanalMarta$Sis
Sia<-AvalsemanalMarta$Sia
Bonsio<-AvalsemanalMarta$Ni-Sio
Bonsis<-AvalsemanalMarta$Ni-Sis
Bonsia<-AvalsemanalMarta$Ni-Sia

Ni<-matrix(Ni,nrow=1)
Sio<-matrix(Sio,nrow=1)
Sis<-matrix(Sis,nrow=1)
Sia<-matrix(Sia,nrow=1)
Bonsio<-matrix(Bonsio,nrow=1)
Bonsis<-matrix(Bonsis,nrow=1)
```

ANEXO H

```
Bonsia<-matrix(Bonsia,nrow=1)

taui<-1:51

Tau<-matrix(taui,nrow=1)

DadosMarta<-rbind(Tau,Ni,Sio,Sis,Sia,Bonsio,Bonsis,Bonsia)

# write(DadosMarta,"DadosMarta.txt")
# DadosMarta<-matrix(scan("DadosMarta.txt"),ncol=51)

#=====
# DETERMINAÇÃO DA VEROSSIMILHANÇA DO ATRIBUTO ODOR:
#=====

#=====
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenadol x Tau
#=====

Expoente<--Alphaordenadol%*%Tau

#=====
# Obtenção da matriz Parcelaa com dimensão [100000x51]:
# e1linha*exp(-alphaxTau):
#=====

# Para multiplicarmos cada linha da coluna de 100.000
# linhas da matriz e1 pelas 51 colunas da matriz
# exp(Expoente), necessitaremos usar o seguinte
# algoritmo, já que as matrizes não são de dimensões
# compatíveis para a multiplicação de uma matriz coluna
# [100000x1] por uma de [100000x51].

Expexpoente<-exp(Expoente)

i=1
Parcelaa<-e1*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parcelaam<-e1*Expexpoente[,i+1]
    Parcelaa<-cbind(Parcelaa,Parcelaam)
    i=i+1
}

# write(Parcelaa,"Parcelaa-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Parcelaa<-matrix(scan("Parcelaa-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaam)
```

ANEXO H

```
#####
# Obtenção da matriz Parcelab com dimensão [100000x51]:
# (1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#####

p<-1-Expexpoente
q<-1-e2

i=1
Parcelab<-q*p[,1]
while(i<51){
    Parcelabm<-q*p[,i+1]
    Parcelab<-cbind(Parcelab,Parcelabm)
    i=i+1
}

# write(Parcelab,"Parcelab-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Parcelabm)
# Parcelab<-matrix(scan("Parcelab-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)

#####
# Obtenção da matriz Fatorf com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau)+(1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#####

Fatorf<-Parcelaa + Parcelab

# write(Fatorf,"Fatorf-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Fatorf<-matrix(scan("Fatorf-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaa)
# rm(Parcelab)

#####
# Obtenção da matriz A com dimensão [100000x51]:
# Fatorf^Si:
#####

i=1
A<-(Fatorf[,1])^(Si[,1])
while(i<51){
    Am<-(Fatorf[,i+1])^(Sio[,i+1])
    A<-cbind(A,Am)
    i=i+1
}
```


ANEXO H

```
# write(A,"A-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# A<-matrix(scan("A-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorf)
# rm(Am)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelac com dimensão [100000x51]:
# e2(1-exp(-alphaxTau_i)):
#=====

p<-1-Expexpoente

i=1
Parcelac<-e2*p[,1]
while(i<51){
    Parcelacm<-e2*p[,i+1]
    Parcelac<-cbind(Parcelac,Parcelacm)
    i=i+1
}

# write(Parcelac,"Parcelac-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Parcelac<-matrix(scan("Parcelac-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelacm)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelad com dimensão [100000x51]:
# (1-e1)*(1-exp(-alphaxTau_i)):
#=====

r<-1-e1

i=1
Parcelad<-r*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parceladm<-r*Expexpoente[,i+1]
    Parcelad<-cbind(Parcelad,Parceladm)
    i=i+1
}

# write(Parcelad,"Parcelad-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Parcelad<-matrix(scan("Parcelad-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parceladm)
```

ANEXO H

```
#=====
# Obtenção da matriz Fatorg com dimensão [100000x51]:
# e2*(1-exp(-alphaxTau))+(1-k1)*exp(-alphaxTau):
#=====

Fatorg<-Parcelac + Parcelad

# write(Fatorg,"Fatorg-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Fatorg<-matrix(scan("Fatorg-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelac)
# rm(Parcelad)

#=====
# Obtenção da matriz B com dimensão [100000x51]:
# Fatorg^(Ni-Si):
#=====

i=1
B<-(Fatorg[,1])^(Bonsio[,1])
while(i<51){
    Bm<-(Fatorg[,i+1])^(Bonsio[,i+1])
    B<-cbind(B,Bm)
    i=i+1
}

# write(B,"B-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# B<-matrix(scan("B-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorg)
# rm(Bm)

#=====
# Obtenção da matriz AB (multiplicação das colunas de A
# pelas colunas respectivas de B) com dimensão [100000x5AB1]:
#=====
AB<-A*B

# write(AB,"AB-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# AB<-matrix(scan("AB-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(A)
# rm(B)

#=====
# Obtenção da matriz MCAB (multiplicação das colunas de AB)
# com dimensão [100000x1]:
#=====
```

ANEXO H

```
i=1
MCAB<-matrix(AB[,1]*AB[,2],ncol=1)
while(i<50){
    MCAB<-matrix(MCAB*AB[,i+2],ncol=1)
    i=i+1
}

MCAB<-matrix(MCAB,ncol=1)

# L51e1jele2odor<-MCAB

# write(L51e1jele2odor,"L51e1jele2odor-Marta-Jeffreys-erros
1%.txt")
# L51e1jele2odor<-matrix(scan("L51e1jele2odor-Marta-Jeffreys-
erros 1%.txt"),ncol=1)
# write(MCAB,"MCAB-Marta-odor-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(AB)
# rm(MCAB)

#=====
# Gráficos da Verossimilhança:
#=====
```

Fig. 6.5a:

```
plot(Alphaordenado1,L51e1jele2odor,main=" ",
sub="Erros até 1% - PriÓri a utilizar: JEFFREYS; Atributo:
ODOR",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores da Verossimilhança")
```

Fig. 6.5:

```
plot(Alphaordenado1[1:10000],L51e1jele2odor[1:10000],main=" ",
sub="Erros até 1% - PriÓri a utilizar: JEFFREYS; Atributo:
ODOR",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores da Verossimilhança")
```

```
#=====
# Determinação da distribuição de Jeffreys "a priori",
# conjunta, em relação aos parâmetros alpha, e1 e e2:
#=====
```

Conforme mostrado, temos para a distribuição de Jeffreys:

ANEXO H

$$\pi(\alpha, e_1, e_2) \propto$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^{X_a} N_i \left[\frac{b_1}{(e_1 a + c - ac)^2} + \frac{b_2}{(e_2 - e_2 a + ba)^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \sum_{i=1}^k N_i a^2 \left[\frac{c_1}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right] \right\} \times \left\{ \sum_{i=1}^k N_i (1-a)^2 \left[\frac{1-a}{[e_1 a + c - ac]^2} + \frac{a}{[e_2 - e_2 a + ba]^2} \right] \right\}$$

```

#=====
# Abaixo implementaremos cada uma das parcelas e fatores
# indicados acima:
#=====

```

```

#=====
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenado x Tau1
#=====

```

```
Expoente<--Alphaordenado1%*%Tau1
```

```

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA DETERMINAR A DISTRIBUIÇÃO
# "A PRIORI DE JEFFREYS" COM FUNÇÃO DE REFERÊNCIA
# U(0,001;0,5) e erros uniformes segundo uma U(0;0,1):
#=====

```

```

#=====
# Obtenção dos valores de a [100000x51], b [100000x1]
# e c [100000x1]:
#=====

```

```
a<-exp(Expoente)
```

```
b<-1-e1
```

```
c<-1-e2
```

ANEXO H

```
#####  
# Obtenção de a1 com dimensão [100000x51]  
#####  
  
i=1  
a1<-(e1*a[,1]+c-a[,1]*c)^2  
while(i<51){  
    alm<-(e1*a[,i+1]+c-a[,i+1]*c)^2  
    a1<-cbind(a1,alm)  
    i=i+1  
}  
  
# write(a1,"a1-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# rm(alm)  
  
#####  
# Obtenção de a2 com dimensão [100000x51]  
#####  
  
i=1  
a2<-(e2-e2*a[,1]+b*(a[,1]))^2  
while(i<51){  
    a2m<-(e2-e2*a[,i+1]+b*(a[,i+1]))^2  
    a2<-cbind(a2,a2m)  
    i=i+1  
}  
  
# write(a2,"a2-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# rm(a2m)  
  
#####  
# Obtenção de b1 com dimensão [100000x51]  
#####  
  
i=1  
b1<-(c-e1)*(a[,1]*c)*(1+2*a[,1])*(1-a[,1])  
while(i<51){  
    b1m<-(c-e1)*(a[,i+1]*c)*(1+2*a[,i+1])*(1-a[,i+1])  
    b1<-cbind(b1,b1m)  
    i=i+1  
}  
  
# write(b1,"b1-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# rm(b1m)  
  
#####  
# Obtenção de R com dimensão [100000x51]  
#####
```

ANEXO H

```
R<-b1/a1

# write(R, "R-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b1)

#=====
# Obtenção de b2 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
b2<-(e2-b)*((a[,1])^2)*e2
while(i<51){
    b2m<-(e2-b)*((a[,i+1])^2)*e2
    b2<-cbind(b2,b2m)
    i=i+1
}

# write(b2, "b2-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b2m)

#=====
# Obtenção de S com dimensão [100000x51]
#=====

S<-b2/a2

# write(S, "S-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b2)

#=====
# Obtenção de Xa com dimensão [1x51]
#=====

Xa<-((Tau_i)^2)*Ni

#=====
# Obtenção de X com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
RmaisS<-R+S
Xb<-RmaisS[,1]
while(i<51){
    Xbm<-RmaisS[,i+1]
    Xb<-cbind(Xb,Xbm)
    i=i+1
}
```

ANEXO H

```
# rm(RmaisS)
# rm(Xbm)
# rm(R)
# rm(S)

i=1
X<-Xa[1,i]*Xb[,i]
while(i<51){
    Xm<-Xa[1,i+1]*Xb[,i+1]
    X<-cbind(X,Xm)
    i=i+1
}

# write(X,"X-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Xm)
# rm(Xa)
# rm(Xb)

#=====
# Obtenção de M1 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M1<-X[,1]+X[,2]
while(i<50){
    M1m<-X[,i+1]+X[,i+2]
    M1<-M1+M1m
    i=i+1
}
M1<-matrix(M1,ncol=1)

# write(M1,"M1-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(X)
# rm(M1m)

#=====
# Obtenção de c1 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
c1<-(1-a[,1])
while(i<51){
    c1m<-(1-a[,i+1])
    c1<-cbind(c1,c1m)
    i=i+1
}
```

ANEXO H

```
# write(c1,"c1-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(c1m)

#=====
# Obtenção de T com dimensão [100000x51]
#=====

T<-c1/a1

# write(T,"T-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de U com dimensão [100000x51]
#=====

U<-a/a2

# write(U,"U-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de Ya com dimensão [1x51]
#=====

i=1
Mi<-rbind(Ni,Ni,Ni,Ni,Ni)
while(i<11){
    Mi<-rbind(Mi,Mi)
    i=i+1
}
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-Mi[1:100000,]

Ya<-((a)^2)*Mi

#=====
# Obtenção de Y com dimensão [100000x51]
#=====

Yb<-T+U

Y<-Ya*Yb
```


ANEXO H

```
# rm(Ya)
# rm(Yb)
# rm(T)
# rm(U)

# write(Y, "Y-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de M2 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M2<-Y[,1]+Y[,2]
while(i<50){
    M2m<-Y[,i+1]+Y[,i+2]
    M2<-M2+M2m
    i=i+1
}
M2<-matrix(M2,ncol=1)

# write(M2, "M2-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Y)
# rm(M2m)

#=====
# Obtenção de V com dimensão [100000x51]
#=====

V<-c1/a1

# write(V, "V-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(a1)
# rm(c1)

#=====
# Obtenção de W com dimensão [100000x51]
#=====

W<-a/a2

# write(W, "W-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(a2)

#=====
# Obtenção de Za com dimensão [100000x51]
#=====

Za<-((1-a)^2)*Mi
```

ANEXO H

```
#####  
# Obtenção de Z com dimensão [100000x51]  
#####  
  
Zb<-V+W  
  
Z<-Za*Zb  
  
# write(Z,"Z-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# rm(V)  
# rm(W)  
# rm(Za)  
# rm(Zb)  
  
#####  
# Obtenção de M3 com dimensão [100000x1]  
#####  
  
i=1  
M3<-Z[,1]+Z[,2]  
while(i<50){  
    M3m<-Z[,i+1]+Z[,i+2]  
    M3<-M3+M3m  
    i=i+1  
}  
M3<-matrix(M3,ncol=1)  
  
# write(M3,"M3-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# rm(Z)  
# rm(M3m)  
  
#####  
# Obtenção da distribuição de Jeffreys com dimensão  
# [100000x1]  
#####  
  
JeffreysODOR<-(M1*M2*M3)^(1/2)  
  
J1ODOR<-(M1)^(1/2)  
J2ODOR<-(M2)^(1/2)  
J3ODOR<-(M3)^(1/2)  
  
# write(JeffreysODOR,"Jeffreys-Marta-ODOR-erros 1%.txt")  
# write(J1-ODOR,"J1-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# write(J2-ODOR,"J2-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# write(J3-ODOR,"J3-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
```

ANEXO H

```
# J1ODOR<-matrix(scan("J1-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=1)
# J2ODOR<-matrix(scan("J2-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=1)
# J3ODOR<-matrix(scan("J3-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=1)

#=====
# Gráfico da distribuição de Jeffreys - ODOR:
#=====

Fig. 6.5:
plot(Alphaordenado1,JeffreysODOR,main=" ",
sub="Erros até 1%",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores Marginais da dist. 'a priori' de Jeffreys -
ODOR")

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# PRIORI DE JEFFREYS, FUNÇÃO DE REFERÊNCIA U(0,001;0,5):
#=====

L51e1jele2odor<-matrix(L51e1jele2odor,nrow=100000,ncol=1)
# Alphaveroe1e2<-cbind(Alphaordenado1,L51e1jele2)

Priori<-JeffreysODOR

veropri<-L51e1jele2odor*Priori

h<-veropri

H<-matrix(h,ncol=1)

g<-dunif(Alphaordenado1,min=0.001,max=0.5)

G<-matrix(g,ncol=1)

w<-h/g

W<-matrix(w,ncol=1)
# write(W,"W-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

# Alphavero<-cbind(Alphaordenado1,L51e1jele2odor)
# write(Alphavero,"Alphavero-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt")

# AlphaW<-cbind(Alphaordenado1,W)
```

ANEXO H

```
# write(AlphaW,"AlphaW-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

AlphapriLW<-cbind(Param,Priori,L51e1jele2odor,W)
#Col. 1=alpha
#Col. 2=e1
#Col. 3=e2
#Col. 4=Jeffreys
#Col. 5=L51e1jele2odor
#Col. 6=W

# write(AlphapriLW,"AlphapriLW-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt")

AlhaposLW<-numeric(30000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
j<-1
b<-w
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000,0,1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
li[i]<-li[i-1]+q[i]
i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
for (l in 1:100000) {
if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l]||u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
t[k]<-b[l]
}
}

T<-matrix(t,ncol=1)
write(T,"T-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
```

ANEXO H

```
i=1
AlhaposLW<-numeric(30000)
AlhaposLW<-matrix(AlhaposLW,ncol=6)
AlhaposLW<-AlhaposLW[4999,]
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  AlhaposLWm<-AlhaposLW[AlhaposLW[,6]==t1,]
  AlhaposLWm<-matrix(AlhaposLWm,ncol=6)
  AlhaposLW<-rbind(AlhaposLW,AlhaposLWm)
  i=i+1
}

# write(AlhaposLW,"AlhaposLW.txt")

plot(AlhaposLW[,1],AlhaposLW[,5])

hist(AlhaposLW[,1])

#=====
# Procedimentos para localizar valores de alpha idênticos em
# AlhaposLW[,1]:
#=====

x<-AlhaposLW[,1]
y<-AlhaposLW[,2]

Alhaveropos<-cbind(x,y)

i=1
AVpos<-matrix(Alhaveropos,ncol=2)
z1<-matrix(c(0,0),ncol=2)
z2<-z1
Temp1<-matrix(AVpos[,1:2],ncol=2)
while(i<5000){
  temp2<-Temp1[,]==Temp1[i,1]
  Temp2<-matrix(temp2,ncol=2)
  Temp3<-Temp2*1
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  while(Temp4>1){
    Temp5<-Temp1[Temp1[,1]==Temp1[i,1],]
    Temp5<-matrix(Temp5,ncol=2)
    Temp6<-sum(Temp5[,2])
    Temp7<-matrix(c(Temp1[i,1],Temp6),ncol=2)
    z1<-rbind(z1,Temp5)
    z2<-rbind(z2,Temp7)
    Temp4=0
  }
}
```

ANEXO H

```
Temp4<-sum(Temp3[,1])
i=i+Temp4
}
z<-z2[2:length(z2[,1]),]

x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

#=====
# Extração dos erros "a posteriori", em função dos
# valores obtidos da verossimilhança "a posteriori":
#=====

i=1
Paramvero<-cbind(Param,L5legele2)
parampos<-numeric(5000)
Parampos<-matrix(parampos,ncol=4)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  paramverom<-Paramvero[Paramvero[,4]==t1,]
  Paramverom<-matrix(paramverom,ncol=4)
  Parampos<-rbind(Parampos,Paramverom)
  i=i+1
}

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

mean(x)
[1] 0.01543846

sd(x)
[1] 0.001721522

Fig. 6.7:
hist(x,80,main=" ",
sub="Experimento Base - ODOR, Priori: Jeffreys, Erros 1%",
xlab="Valores de Alpha 'a posteriori'",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.01543846,sd=0.001721522)*0.11,0.01,0.05,a
dd=TRUE,col="red")

summary(x)
Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
0.01140 0.01403 0.01546 0.01544 0.01679 0.01965
```

ANEXO H

```
#=====
# Determinação dos percentis "a posteriori":
#=====

A1<-matrix(rep(0.001,length(x)),ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01,length(x)),ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1,length(x)),ncol=1)
# A4<-matrix(rep(0.287682,length(x)),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(x)),ncol=1)
# A6<-matrix(rep(1.3862944,length(x)),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/x
Tempoporcentagem2<-A2/x
Tempoporcentagem3<-A3/x
Tempoporcentagem5<-A5/x
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3,

Tempoporcentagem5)

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

x<-Tempoporcentagem1
y<-Tempoporcentagem2
v<-Tempoporcentagem3
w<-Tempoporcentagem5

# 1)
mean(x)
# [1] 0.06559201
sd(x)
# [1] 0.007400278

# 2)
mean(y)
# [1] 0.6559201
sd(y)
# [1] 0.07400278

#3)
mean(v)
# [1] 6.559201
sd(v)
# [1] 0.7400278

# 4)
mean(w)
```

ANEXO H

```
# [1] 45.46491
sd(w)
# [1] 5.129481
```

Fig. 6.8:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(x,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori' de 0,1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.06559201,sd=0.007400278)*0.9,0.02,0.09,ad
d=TRUE,col="red")
hist(y,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori' de 1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.6559201,sd=0.07400278)*9,0.2,0.9,add=TRUE
,col="red")
hist(v,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori' de 10%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas - Erros:
1%",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=6.559201,sd=0.7400278)*90,2.0,9.0,add=TRUE,
col="red")
hist(w,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori' de 50%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=45.46491,sd=5.129481)*470,14.0,70.0,add=TRU
E,col="red")
par(mfrow=c(1,1))

1)
summary(x)
Min.    :0.05090
 1st Qu.:0.05957
  Median :0.06467
   Mean  :0.06559
 3rd Qu.:0.07126
   Max.  :0.08774

quantile(x,c(0.025,0.975))
2.5%      97.5%
0.05385662 0.07984019

2)
summary(y)
Min.    :0.5090
 1st Qu.:0.5957
```


ANEXO H

Median :0.6467
Mean :0.6559
3rd Qu.:0.7126
Max. :0.8774

quantile(y, c(0.025, 0.975))
2.5% 97.5%
0.5385662 0.7984019

3)

summary(v)

Min. :5.090
1st Qu.:5.957
Median :6.467
Mean :6.559
3rd Qu.:7.126
Max. :8.774

quantile(x, c(0.025, 0.975))
2.5% 97.5%
5.385662 7.984019

4)

summary(w)

Min. :35.28
1st Qu.:41.29
Median :44.83
Mean :45.46
3rd Qu.:49.39
Max. :60.81

quantile(w, c(0.025, 0.975))
2.5% 97.5%
37.33056 55.34100

* * *

ANEXO I

INCORPORAÇÃO DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” Gama(16;800)

UTILIZAÇÃO DE DADOS REAIS DO EXPERIMENTO BASE

ATRIBUTO SABOR

```
#=====
# Experimento Marta - SABOR:
#=====

Alphaordenado<-matrix(scan("Alphaordenado.txt"),ncol=1)
Alphaordenado<-matrix(Alphaordenado,ncol=1)

# e1<-runif(100000,min=0,max=0.01)
# e1<-scan("Erros tipo1 - 1%.txt")
# e1<-matrix(e1,ncol=1)

# e2<-runif(100000,min=0,max=0.01)
# e2<-scan("Erros tipo2 - 1%.txt")
# e2<-matrix(e2,ncol=1)

Param<-cbind(Alphaordenado,e1,e2)

#=====
# Obtenção dos dados de falhas do arquivo de Avaliações
# Semanais das amostras em 51 semanas:
#=====

AvalsemanalMarta<-read.table("Avalsemanal-
Marta.txt",header=TRUE)

Ni<-AvalsemanalMarta$Ni
Sis<-AvalsemanalMarta$Sis
Bonsis<-AvalsemanalMarta$Ni-Sis

Ni<-matrix(Ni,nrow=1)
Sis<-matrix(Sis,nrow=1)
Bonsis<-matrix(Bonsis,nrow=1)

taui<-1:51
```

ANEXO I

```
Tau1<-matrix(tau1,nrow=1)

#=====
# ATRIBUTO SABOR:
#=====

#=====
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenado x Tau1
#=====

Expoente<--Alphaordenado**Tau1

#=====
# Obtenção da matriz Parcelaa com dimensão [100000x51]:
# e1linha*exp(-alphaxTau1):
#=====

# Para multiplicarmos cada linha da coluna de 100.000
# linhas da matriz e1 pelas 51 colunas da matriz
# exp(Expoente), necessitaremos usar o seguinte
# algoritmo, já que as matrizes não são de dimensões
# compatíveis para a multiplicação de uma matriz coluna
# [100000x1] por uma de [100000x51].

Expexpoente<-exp(Expoente)

i=1
Parcelaa<-e1*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parcelaam<-e1*Expexpoente[,i+1]
    Parcelaa<-cbind(Parcelaa,Parcelaam)
    i=i+1
}

# write(Parcelaa,"Parcelaa-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Parcelaa<-matrix(scan("Parcelaa-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaam)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelab com dimensão [100000x51]:
# (1-e2)(1-*exp(-alphaxTau1)):
#=====

p<-1-Expexpoente
q<-1-e2
```

ANEXO I

```
i=1
Parcelab<-q*p[,1]
while(i<51){
    Parcelabm<-q*p[,i+1]
    Parcelab<-cbind(Parcelab,Parcelabm)
    i=i+1
}

# write(Parcelab,"Parcelab-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# rm(Parcelabm)
# Parcelab<-matrix(scan("Parcelab-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorf com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau)+ (1-e2) (1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

Fatorf<-Parcelaa + Parcelab

# write(Fatorf,"Fatorf-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Fatorf<-matrix(scan("Fatorf-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaa)
# rm(Parcelab)

#=====
# Obtenção da matriz A com dimensão [100000x51]:
# Fatorf^Sio:
#=====

i=1
A<-(Fatorf[,1])^(Sis[,1])
while(i<51){
    Am<-(Fatorf[,i+1])^(Sis[,i+1])
    A<-cbind(A,Am)
    i=i+1
}

# write(A,"A-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# A<-matrix(scan("A-Marta-Gama-erros 1%.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorf)
# rm(Am)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelac com dimensão [100000x51]:
# e2(1-exp(-alphaxTau)):
#=====
```

ANEXO I

```
p<-1-Expexpoente

i=1
Parcelac<-e2*p[,1]
while(i<51){
  Parcelacm<-e2*p[,i+1]
  Parcelac<-cbind(Parcelac,Parcelacm)
  i=i+1
}

# write(Parcelac,"Parcelac-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Parcelac<-matrix(scan("Parcelac-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelacm)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelad com dimensão [100000x51]:
# (1-e1)*(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

r<-1-e1

i=1
Parcelad<-r*Expexpoente[,1]
while(i<51){
  Parceladm<-r*Expexpoente[,i+1]
  Parcelad<-cbind(Parcelad,Parceladm)
  i=i+1
}

# write(Parcelad,"Parcelad-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Parcelad<-matrix(scan("Parcelad-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parceladm)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorg com dimensão [100000x51]:
# e2*(1-exp(-alphaxTau))+(1-k1)*exp(-alphaxTau):
#=====

Fatorg<-Parcelac + Parcelad

# write(Fatorg,"Fatorg-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Fatorg<-matrix(scan("Fatorg-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelac)
# rm(Parcelad)
```

ANEXO I

```
#####  
# Obtenção da matriz B com dimensão [100000x51]:  
# Fatorg^(Ni-Si):  
#####  
  
i=1  
B<-(Fatorg[,1])^(Bonsis[,1])  
while(i<51){  
    Bm<-(Fatorg[,i+1])^(Bonsis[,i+1])  
    B<-cbind(B,Bm)  
    i=i+1  
}  
  
# write(B,"B-Marta-Gama-erros 1%.txt")  
# B<-matrix(scan("B-Marta-Gama-erros 1%.txt"),ncol=51)  
# rm(Fatorg)  
# rm(Bm)  
  
#####  
# Obtenção da matriz AB (multiplicação das colunas de A  
# pelas colunas respectivas de B)com dimensão [100000x5AB1]:  
#####  
  
AB<-A*B  
  
# write(AB,"AB-Marta-Gama-erros 1%.txt")  
# AB<-matrix(scan("AB-Marta-Gama-erros 1%.txt"),ncol=51)  
# rm(A)  
# rm(B)  
  
#####  
# Obtenção da matriz MCAB (multiplicação das colunas de AB)  
# com dimensão [100000x1]:  
#####  
  
i=1  
MCAB<-matrix(AB[,1]*AB[,2],ncol=1)  
while(i<50){  
    MCAB<-matrix(MCAB*AB[,i+2],ncol=1)  
    i=i+1  
}  
  
MCAB<-matrix(MCAB,ncol=1)  
  
# L51MartaGerlsabor<-MCAB  
# Lalpha51<-matrix(scan("LALPHA51.txt"),ncol=1)
```

ANEXO I

```
# write(L51MartaGerlsabor,"L51MartaGerlsabor-Marta-Gama-erros
1%.txt")
# L51MartaGerl<-matrix(scan("L51MartaGerlsabor-Marta-Gama-
erros 1%.txt"),ncol=1)
# write(MCAB,"MCAB-Marta-SABOR-Gama-erros 1%.txt")
# rm(AB)
# rm(MCAB)
```

```
#=====
# Gráfico da Verossimilhança marginal em relação a alpha:
#=====
```

Fig. 6.9:

```
plot(Alphaordenado,L51MartaGerlsabor,main=" ",
sub="Priori utilizada: Gama(16;800); Atributo: SABOR",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores da Verossimilhança")
```

```
#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# PRIORI GAMA(16;800), FUNÇÃO DE REFERÊNCIA GAMA(16;800):
#=====
```

```
# alphaordenado<-scan("Alphaordenado.txt")
# Alphaordenado<-matrix(alphaordenado,ncol=1)

# priori<-dgamma(Alphaordenado,shape=16,scale=1/800)

# veropri<-L51MartaGerlsabor*priori

# Kposteriori<-veropri

# hist(Alphaordenado)

L51MartaGerlsabor<-
matrix(L51MartaGerlsabor,nrow=100000,ncol=1)
Alphaveroele2<-cbind(Alphaordenado,L51MartaGerlsabor)

alphaposele2<-numeric(10000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
```


ANEXO I

```
j<-1
b<-L51MartaGerlsabor
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000,0,1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
li[i]<-li[i-1]+q[i]
i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
for (l in 1:100000) {
if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l] || u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
t[k]<-b[l]
}
}

T<-matrix(t,ncol=1)
write(T,"T.txt")

i=1
Alphaposele2<-matrix(alphaposele2,ncol=2)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  Alphaverom<-Alphaveroele2[Alphaveroele2[,2]==t1,]
  Alphaverom<-matrix(Alphaverom,ncol=2)
  Alphaposele2<-rbind(Alphaposele2,Alphaverom)
  i=i+1
}

write(Alphaveroele2,"Alphaveroele2-Marta-sabor-Gama.txt")
write(Alphaposele2,"Alphaposele2-Marta-sabor-Gama.txt")

plot(Alphaposele2[,1],Alphaposele2[,2])

hist(Alphaposele2[,1])

#=====
# Procedimentos para localizar valores de alpha idênticos em
# Alphaposele2[,1]:
#=====
```

ANEXO I

```
x<-Alphaposele2[,1]
x<-x[5000:9999]
y<-Alphaposele2[,2]
y<-y[5000:9999]

Alphaveropos<-cbind(x,y)

i=1
AVpos<-matrix(Alphaveropos,ncol=2)
z1<-matrix(c(0,0),ncol=2)
z2<-z1
Temp1<-matrix(AVpos[,1:2],ncol=2)
while(i<5000){
  temp2<-Temp1[,]==Temp1[i,1]
  Temp2<-matrix(temp2,ncol=2)
  Temp3<-Temp2*1
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  while(Temp4>1){
    Temp5<-Temp1[Temp1[,1]==Temp1[i,1],]
    Temp5<-matrix(Temp5,ncol=2)
    Temp6<-sum(Temp5[,2])
    Temp7<-matrix(c(Temp1[i,1],Temp6),ncol=2)
    z1<-rbind(z1,Temp5)
    z2<-rbind(z2,Temp7)
    Temp4=0
  }
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  i=i+Temp4
}
z<-z2[2:length(z2[,1]),]

x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

#=====
# Extração dos erros "a posteriori", em função dos
# valores obtidos da verossimilhança "a posteriori":
#=====

i=1
Paramvero<-cbind(Param,L51egele2sabor)
parampos<-numeric(5000)
Parampos<-matrix(parampos,ncol=4)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
```

ANEXO I

```
paramverom<-Paramvero[Paramvero[,4]==t1,]
Paramverom<-matrix(paramverom,ncol=4)
Parampos<-rbind(Parampos,Paramverom)
i=i+1
}

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

mean(x)
[1] 0.0164468

sd(x)
[1] 0.001284087

# Fig. 6.10:
hist(x,40,main=" ",
sub="Experimento Base, Priori: Gama(16;800)",
xlab="Valores de Alpha 'a posteriori'",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.0164468,sd=0.001284087)*0.055,0.01,0.05,a
dd=TRUE,col="red")

#=====
# Determinação dos Percentis "a posteriori":
#=====

# Iremos considerar as frações de falhas nas amostras
# utilizadas de forma análoga ao que foi feito antes
# de incorporarmos os erros. Usaremos as frações de
# falha: 0,1%, 1%, 10%, e 50% e do total das amostras
# para determinar em quantas semanas, tal fração de
# falhas ocorre.

A1<-matrix(rep(0.001,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
# A4<-matrix(rep(0.287682,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
# A6<-matrix(rep(1.3862944,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem2<-A2/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem3<-A3/Alphaveropos[,1]
# Tempoporcentagem4<-A4/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem5<-A5/Alphaveropos[,1]
# Tempoporcentagem6<-A6/Alphaveropos[,1]
```

ANEXO I

```
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,  
Tempoporcentagem3,
```

```
Tempoporcentagem5)
```

```
#=====
```

```
# Gráficos:
```

```
#=====
```

```
z<-z2[2:length(z2[,1]),]
```

```
x<-z[,1]
```

```
y<-z[,2]
```

```
Alphaveropos<-z
```

```
x<-Tempoporcentagem1
```

```
y<-Tempoporcentagem2
```

```
v<-Tempoporcentagem3
```

```
w<-Tempoporcentagem5
```

```
# 1)
```

```
mean(x)
```

```
# [1] 0.0611708
```

```
sd(x)
```

```
# [1] 0.004762412
```

```
mean(y)
```

```
# [1] 0.611708
```

```
sd(y)
```

```
# [1] 0.04762412
```

```
mean(v)
```

```
# [1] 6.11708
```

```
sd(v)
```

```
# [1] 0.4762412
```

```
mean(w)
```

```
# [1] 42.40037
```

```
sd(w)
```

```
# [1] 3.301052
```

Fig. 6.11:

```
par(mfrow=c(2,2))
```

```
hist(Tempoporcentagem[,1],50, main=" ",
```

```
sub="Percentil de Falhas: 0,1%",
```

```
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
```

```
ylab="Frequência")
```

```
curve(dnorm(x,mean=0.0611708,sd=0.004762412)*0.16,0.050,0.08,a
```

```
dd=TRUE,
```

```
col="red")
```

```
hist(Tempoporcentagem[,2],50, main=" ",
```

```
sub="Percentil de Falhas: 1%",
```

ANEXO I

```
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.611708,sd=0.04762412)*1.6,0.50,0.80,add=T
RUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,3],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 10%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=6.11708,sd=0.4762412)*16,5,8,add=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,4],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 50%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=42.40037,sd=3.301052)*150,35.0,60.0,add=TRU
E,
col="red")
par(mfrow=c(1,1))
```

```
summary(x)
```

```
Min.    :0.05031
1st Qu.:0.05749
Median  :0.06109
Mean    :0.06117
3rd Qu.:0.06447
Max.    :0.07600
```

```
quantile(x,c(0.025,0.975))
```

```
 2.5%      97.5%
0.05220129 0.07039745
```

```
summary(y)
```

```
Min.    :0.5031
1st Qu.:0.5749
Median  :0.6109
Mean    :0.6117
3rd Qu.:0.6447
Max.    :0.7600
```

```
quantile(y,c(0.025,0.975))
```

```
 2.5%      97.5%
0.5220129 0.7039745
```

```
summary(v)
```

```
Min.    :5.031
1st Qu.:5.749
Median  :6.109
```

ANEXO I

Mean :6.117
3rd Qu.:6.447
Max. :7.600

```
quantile(v,c(0.025,0.975))  
2.5% 97.5%  
5.220129 7.039745
```

```
summary(w)
```

Min. :34.87
1st Qu.:39.85
Median :42.35
Mean :42.40
3rd Qu.:44.69
Max. :52.68

```
quantile(w,c(0.025,0.975))  
2.5% 97.5%  
36.18317 48.79579
```

* * *

ANEXO J

INCORPORAÇÃO DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” de Jeffreys

EXPERIÊNCIA REAL DO TRABALHO DE REFERÊNCIA COM TRATAMENTO
BAYESIANO INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO ATÉ 1%

ATRIBUTO SABOR

```
#=====
# Experimento Marta - SABOR - Jeffreys:
#=====

#=====
# Construção de uma matriz [100.000x3] onde a primeira coluna
# serão valores de alpha já amostrados nas simulações
# anteriores e as colunas 1 e 2 serão respectivamente erros
# tipo 1 e tipo 2 amostrados aleatoriamente de uma  $U(0;0,1)$ :
#=====

Alphaordenadol<-matrix(scan("Alphaordenadol.txt"),ncol=1)
Alphaordenadol<-matrix(Alphaordenadol,ncol=1)

# e1<-runif(100000,min=0,max=0.01)
# e1<-matrix(scan("Erros tipo1 - 1%.txt"),ncol=1)

# e2<-runif(100000,min=0,max=0.01)
# e2<-matrix(scan("Erros tipo2 - 1%.txt"),ncol=1)

Param<-cbind(Alphaordenadol,e1,e2)

# write(Param,"Param-Marta-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção dos dados de falhas do arquivo de Avaliações
# Semanais das amostras em 51 semanas:
#=====

AvalsemanalMarta<-read.table("Avalsemanal-
Marta.txt",header=TRUE)

Ni<-AvalsemanalMarta$Ni
```

ANEXO J

```
Sis<-AvalsemanalMarta$Sis
Bonsis<-AvalsemanalMarta$Ni-Sis

Ni<-matrix(Ni,nrow=1)
Sis<-matrix(Sis,nrow=1)
Bonsis<-matrix(Bonsis,nrow=1)

taui<-1:51

Tauf<-matrix(tauf,nrow=1)

DadosMarta<-rbind(Tauf,Ni,Sio,Sis,Sia,Bonsio,Bonsis,Bonsia)

# write(DadosMarta,"DadosMarta.txt")
# DadosMarta<-matrix(scan("DadosMarta.txt"),ncol=51)

#=====
# DETERMINAÇÃO DA VEROSSIMILHANÇA DO ATRIBUTO SABOR:
#=====

#=====
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenadol x Tauf
#=====

Expoente<--Alphaordenadol%*%Tauf

#=====
# Obtenção da matriz Parcelaa com dimensão [100000x51]:
# e1linha*exp(-alphaxTauf):
#=====

# Para multiplicarmos cada linha da coluna de 100.000
# linhas da matriz e1 pelas 51 colunas da matriz
# exp(Expoente), necessitaremos usar o seguinte
# algoritmo, já que as matrizes não são de dimensões
# compatíveis para a multiplicação de uma matriz coluna
# [100000x1] por uma de [100000x51].

Expexpoente<-exp(Expoente)

i=1
Parcelaa<-e1*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parcelaam<-e1*Expexpoente[,i+1]
    Parcelaa<-cbind(Parcelaa,Parcelaam)
    i=i+1
}
```


ANEXO J

```
# write(Parcelaa,"Parcelaa-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Parcelaa<-matrix(scan("Parcelaa-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaam)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelab com dimensão [100000x51]:
# (1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

p<-1-Expexpoente
q<-1-e2

i=1
Parcelab<-q*p[,1]
while(i<51){
    Parcelabm<-q*p[,i+1]
    Parcelab<-cbind(Parcelab,Parcelabm)
    i=i+1
}

# write(Parcelab,"Parcelab-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Parcelabm)
# Parcelab<-matrix(scan("Parcelab-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorf com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau)+(1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

Fatorf<-Parcelaa + Parcelab

# write(Fatorf,"Fatorf-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Fatorf<-matrix(scan("Fatorf-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaa)
# rm(Parcelab)

#=====
# Obtenção da matriz A com dimensão [100000x51]:
# Fatorf^Si:
#=====

i=1
A<-(Fatorf[,1])^(Sis[,1])
while(i<51){
```

ANEXO J

```
Am<-(Fatorf[,i+1])^(Sis[,i+1])
A<-cbind(A,Am)
i=i+1
}

# write(A,"A-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# A<-matrix(scan("A-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorf)
# rm(Am)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelac com dimensão [100000x51]:
# e2(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

p<-1-Expexpoente

i=1
Parcelac<-e2*p[,1]
while(i<51){
    Parcelacm<-e2*p[,i+1]
    Parcelac<-cbind(Parcelac,Parcelacm)
    i=i+1
}

# write(Parcelac,"Parcelac-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Parcelac<-matrix(scan("Parcelac-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelacm)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelad com dimensão [100000x51]:
# (1-e1)*(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

r<-1-e1

i=1
Parcelad<-r*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parceladm<-r*Expexpoente[,i+1]
    Parcelad<-cbind(Parcelad,Parceladm)
    i=i+1
}

# write(Parcelad,"Parcelad-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
```

ANEXO J

```
# Parcelad<-matrix(scan("Parcelad-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parceladm)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorg com dimensão [100000x51]:
#  $e^{2 \cdot (1 - \exp(-\alpha \tau))} + (1 - k) \cdot \exp(-\alpha \tau)$ :
#=====

Fatorg<-Parcelac + Parcelad

# write(Fatorg,"Fatorg-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Fatorg<-matrix(scan("Fatorg-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelac)
# rm(Parcelad)

#=====
# Obtenção da matriz B com dimensão [100000x51]:
# Fatorg^(Ni-Si):
#=====

i=1
B<-(Fatorg[,1])^(Bonsis[,1])
while(i<51){
    Bm<-(Fatorg[,i+1])^(Bonsis[,i+1])
    B<-cbind(B,Bm)
    i=i+1
}

# write(B,"B-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# B<-matrix(scan("B-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorg)
# rm(Bm)

#=====
# Obtenção da matriz AB (multiplicação das colunas de A
# pelas colunas respectivas de B)com dimensão [100000x5AB1]:
#=====

AB<-A*B

# write(AB,"AB-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# AB<-matrix(scan("AB-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(A)
# rm(B)
```

ANEXO J

```
#=====
# Obtenção da matriz MCAB (multiplicação das colunas de AB)
# com dimensão [100000x1]:
#=====
i=1
MCAB<-matrix(AB[,1]*AB[,2],ncol=1)
while(i<50){
    MCAB<-matrix(MCAB*AB[,i+2],ncol=1)
    i=i+1
}

MCAB<-matrix(MCAB,ncol=1)

L51e1jele2sabor<-MCAB

# write(L51e1jele2sabor,"L51e1jele2sabor-Marta-Jeffreys-erros
1%.txt")
# L51e1jele2sabor<-matrix(scan("L51e1jele2sabor-Marta-
Jeffreys-erros 1%.txt"),ncol=1)
# write(MCAB,"MCAB-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(AB)
# rm(MCAB)

#=====
# Gráficos da Verossimilhança:
#=====

Fig. 6.12a:
plot(Alphaordenado1,L51e1jele2sabor,main=" ",
sub="Erros até 1% - Prióri a utilizar: JEFFREYS; Atributo:
SABOR",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores da Verossimilhança")

Fig. 6.12:
plot(Alphaordenado1[1:10000],L51e1jele2sabor[1:10000],main="
",
sub="Erros até 1% - Prióri a utilizar: JEFFREYS; Atributo:
SABOR",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores da Verossimilhança")

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA DETERMINAR A DISTRIBUIÇÃO
# "A PRIORI DE JEFFREYS" COM FUNÇÃO DE REFERÊNCIA
# U(0,001;0,5) e erros uniformes segundo uma U(0;0,1):
#=====
```

ANEXO J

```
#####  
# Obtenção dos valores de a [100000x51], b [100000x1]  
# e c [100000x1]:  
#####  
  
a<-exp(Expoente)  
  
b<-1-e1  
  
c<-1-e2  
  
#####  
# Obtenção de a1 com dimensão [100000x51]  
#####  
  
i=1  
a1<-(e1*a[,1]+c-a[,1]*c)^2  
while(i<51){  
    a1m<-(e1*a[,i+1]+c-a[,i+1]*c)^2  
    a1<-cbind(a1,a1m)  
    i=i+1  
}  
  
# write(a1,"a1-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# rm(a1m)  
  
#####  
# Obtenção de a2 com dimensão [100000x51]  
#####  
  
i=1  
a2<-(e2-e2*a[,1]+b*(a[,1]))^2  
while(i<51){  
    a2m<-(e2-e2*a[,i+1]+b*(a[,i+1]))^2  
    a2<-cbind(a2,a2m)  
    i=i+1  
}  
  
# write(a2,"a2-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# rm(a2m)  
  
#####  
# Obtenção de b1 com dimensão [100000x51]  
#####  
  
i=1  
b1<-(c-e1)*(a[,1]*c)*(1+2*a[,1])*(1-a[,1])
```

ANEXO J

```
while(i<51){
  b1m<-(c-e1)*(a[,i+1]*c)*(1+2*a[,i+1])*(1-a[,i+1])
  b1<-cbind(b1,b1m)
  i=i+1
}

# write(b1,"b1-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b1m)

#=====
# Obtenção de R com dimensão [100000x51]
#=====

R<-b1/a1

# write(R,"R-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b1)

#=====
# Obtenção de b2 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
b2<-(e2-b)*((a[,1])^2)*e2
while(i<51){
  b2m<-(e2-b)*((a[,i+1])^2)*e2
  b2<-cbind(b2,b2m)
  i=i+1
}

# write(b2,"b2-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b2m)

#=====
# Obtenção de S com dimensão [100000x51]
#=====

S<-b2/a2

# write(S,"S-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b2)

#=====
# Obtenção de Xa com dimensão [1x51]
#=====

Xa<-((Tau1)^2)*Ni
```

ANEXO J

```
#####  
# Obtenção de X com dimensão [100000x51]  
#####  
  
i=1  
RmaisS<-R+S  
Xb<-RmaisS[,1]  
while(i<51){  
    Xbm<-RmaisS[,i+1]  
    Xb<-cbind(Xb,Xbm)  
    i=i+1  
}  
  
# rm(RmaisS)  
# rm(Xbm)  
# rm(R)  
# rm(S)  
  
i=1  
X<-Xa[1,i]*Xb[,i]  
while(i<51){  
    Xm<-Xa[1,i+1]*Xb[,i+1]  
    X<-cbind(X,Xm)  
    i=i+1  
}  
  
# write(X,"X-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# rm(Xm)  
# rm(Xa)  
# rm(Xb)  
  
#####  
# Obtenção de M1 com dimensão [100000x1]  
#####  
  
i=1  
M1<-X[,1]+X[,2]  
while(i<50){  
    M1m<-X[,i+1]+X[,i+2]  
    M1<-M1+M1m  
    i=i+1  
}  
M1<-matrix(M1,ncol=1)  
  
# write(M1,"M1-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")  
# rm(X)  
# rm(M1m)
```

ANEXO J

```
#=====
# Obtenção de c1 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
c1<-(1-a[,1])
while(i<51){
    c1m<-(1-a[,i+1])
    c1<-cbind(c1,c1m)
    i=i+1
}

# write(c1,"c1-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(c1m)

#=====
# Obtenção de T com dimensão [100000x51]
#=====

T<-c1/a1

# write(T,"T-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de U com dimensão [100000x51]
#=====

U<-a/a2

# write(U,"U-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de Ya com dimensão [1x51]
#=====

i=1
Mi<-rbind(Ni,Ni,Ni,Ni,Ni)
while(i<11){
    Mi<-rbind(Mi,Mi)
    i=i+1
}
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
```


ANEXO J

```
Mi<-Mi[1:100000,]

Ya<-((a)^2)*Mi

#=====
# Obtenção de Y com dimensão [100000x51]
#=====

Yb<-T+U

Y<-Ya*Yb

# rm(Ya)
# rm(Yb)
# rm(T)
# rm(U)

# write(Y,"Y-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de M2 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M2<-Y[,1]+Y[,2]
while(i<50){
    M2m<-Y[,i+1]+Y[,i+2]
    M2<-M2+M2m
    i=i+1
}
M2<-matrix(M2,ncol=1)

# write(M2,"M2-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Y)
# rm(M2m)

#=====
# Obtenção de V com dimensão [100000x51]
#=====

V<-c1/a1

# write(V,"V-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(a1)
# rm(c1)

#=====
# Obtenção de W com dimensão [100000x51]
```

ANEXO J

```
#=====
W<-a/a2

# write(W, "W-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(a2)

#=====
# Obtenção de Za com dimensão [100000x51]
#=====

Za<-((1-a)^2)*Mi

#=====
# Obtenção de Z com dimensão [100000x51]
#=====

Zb<-V+W

Z<-Za*Zb

# write(Z, "Z-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(V)
# rm(W)
# rm(Za)
# rm(Zb)

#=====
# Obtenção de M3 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M3<-Z[,1]+Z[,2]
while(i<50){
    M3m<-Z[,i+1]+Z[,i+2]
    M3<-M3+M3m
    i=i+1
}
M3<-matrix(M3, ncol=1)

# write(M3, "M3-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Z)
# rm(M3m)

#=====
# Obtenção da distribuição de Jeffreys com dimensão
# [100000x1]
#=====
```

ANEXO J

```
JeffreysSABOR<- (M1*M2*M3)^(1/2)

J1SABOR<- (M1)^(1/2)
J2SABOR<- (M2)^(1/2)
J3SABOR<- (M3)^(1/2)

# write(JeffreysSABOR,"Jeffreys-Marta-SABOR-erros 1%.txt")
# write(J1-SABOR,"J1-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# write(J2-SABOR,"J2-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# write(J3-SABOR,"J3-Marta-ODOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

# J1SABOR<-matrix(scan("J1-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=1)
# J2SABOR<-matrix(scan("J2-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=1)
# J3SABOR<-matrix(scan("J3-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=1)

#=====
# Gráfico da distribuição de Jeffreys - ODOR:
#=====

Fig. 6.13:
plot(Alphaordenado1,JeffreysSABOR,main=" ",
sub="Erros até 1%",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores Marginais da dist. 'a priori' de Jeffreys -
SABOR")

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# PRIORI DE JEFFREYS, FUNÇÃO DE REFERÊNCIA U(0,001;0,5):
#=====

L51e1jele2sabor<-matrix(L51e1jele2sabor,nrow=100000,ncol=1)
# Alphaveroele2<-cbind(Alphaordenado1,L51e1jele2)

Priori<-JeffreysSABOR

veropri<-L51e1jele2sabor*Priori

h<-veropri

H<-matrix(h,ncol=1)

g<-dunif(Alphaordenado1,min=0.001,max=0.5)
```

ANEXO J

```
G<-matrix(g,ncol=1)

w<-h/g

W<-matrix(w,ncol=1)
# write(W,"W-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

# Alphavero<-cbind(Alphaordenadol,L51e1jele2sabor)
# write(Alphavero,"Alphavero-Marta-ODOR-Jeffreys-erros
1%.txt")

# AlphaW<-cbind(Alphaordenadol,W)
# write(AlphaW,"AlphaW-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

AlphapriLW<-cbind(Param,Priori,L51e1jele2sabor,W)
#Col. 1=alpha
#Col. 2=e1
#Col. 3=e2
#Col. 4=Jeffreys
#Col. 5=L51e1jele2sabor
#Col. 6=W

# write(AlphapriLW,"AlphapriLW-Marta-SABOR-Jeffreys-erros
1%.txt")

AlphaposLW<-numeric(30000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
j<-1
b<-w
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000,0,1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
li[i]<-li[i-1]+q[i]
i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
```

ANEXO J

```
j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
for (l in 1:100000) {
if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l]||u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
t[k]<-b[l]
}
}

T<-matrix(t,ncol=1)
write(T,"T-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

i=1
AlphaposLW<-numeric(30000)
AlphaposLW<-matrix(AlphaposLW,ncol=6)
AlphaposLW<-AlphaposLW[4999,]
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  AlphaposLWm<-AlphapriLW[AlphapriLW[,6]==t1,]
  AlphaposLWm<-matrix(AlphaposLWm,ncol=6)
  AlphaposLW<-rbind(AlphaposLW,AlphaposLWm)
  i=i+1
}

# write(AlphaposLW,"AlphaposLW.txt")

plot(AlphaposLW[,1],AlphaposLW[,5])

hist(AlphaposLW[,1])

#=====
# Procedimentos para localizar valores de alpha idênticos em
# Alphaposele2[,1]:
#=====

x<-AlphaposLW[,1]
y<-AlphaposLW[,2]

Alphaveropos<-cbind(x,y)

i=1
AVpos<-matrix(Alphaveropos,ncol=2)
z1<-matrix(c(0,0),ncol=2)
z2<-z1
Temp1<-matrix(AVpos[,1:2],ncol=2)
while(i<5000){
  temp2<-Temp1[,]==Temp1[i,1]
```

ANEXO J

```
Temp2<-matrix(temp2, ncol=2)
Temp3<-Temp2*1
Temp4<-sum(Temp3[, 1])
while(Temp4>1) {
  Temp5<-Temp1[Temp1[, 1]==Temp1[i, 1], ]
  Temp5<-matrix(Temp5, ncol=2)
  Temp6<-sum(Temp5[, 2])
  Temp7<-matrix(c(Temp1[i, 1], Temp6), ncol=2)
  z1<-rbind(z1, Temp5)
  z2<-rbind(z2, Temp7)
  Temp4=0
}
Temp4<-sum(Temp3[, 1])
i=i+Temp4
}
z<-z2[2:length(z2[, 1]), ]

x<-z[, 1]
y<-z[, 2]
Alphaveropos<-z

#=====
# Extração dos erros "a posteriori", em função dos
# valores obtidos da verossimilhança "a posteriori":
#=====

i=1
Paramvero<-cbind(Param, L51egele2)
parampos<-numeric(5000)
Parampos<-matrix(parampos, ncol=4)
while(i<5000) {
  T1<-T[i+1, 1]
  t1<-as.vector(T1)
  paramverom<-Paramvero[Paramvero[, 4]==t1, ]
  Paramverom<-matrix(paramverom, ncol=4)
  Parampos<-rbind(Parampos, Paramverom)
  i=i+1
}

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

mean(x)
[1] 0.01630693

sd(x)
[1] 0.00172562
```

ANEXO J

Fig. 6.14:

```
hist(x, 80, main=" ",
sub="Experimento Base - SABOR, Priori: Jeffreys, Erros 1%",
xlab="Valores de Alpha 'a posteriori'", ylab="Frequência")
curve(dnorm(x, mean=0.01630693, sd=0.00172562)*0.11, 0.01, 0.05, add=TRUE, col="red")

summary(x)
Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
0.01140 0.01403 0.01546 0.01544 0.01679 0.01965

#=====
# Determinação dos percentis "a posteriori":
#=====

A1<-matrix(rep(0.001, length(x)), ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01, length(x)), ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1, length(x)), ncol=1)
# A4<-matrix(rep(0.287682, length(x)), ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471, length(x)), ncol=1)
# A6<-matrix(rep(1.3862944, length(x)), ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/x
Tempoporcentagem2<-A2/x
Tempoporcentagem3<-A3/x
Tempoporcentagem5<-A5/x
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3,
Tempoporcentagem5)

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

x<-Tempoporcentagem1
y<-Tempoporcentagem2
v<-Tempoporcentagem3
w<-Tempoporcentagem5

# 1)
mean(x)
# [1] 0.06202449

sd(x)
# [1] 0.006674431

# 2)
```

ANEXO J

```
mean(y)
#[1] 0.6202449
```

```
sd(y)
#[1] 0.06674431
```

```
#3)
mean(v)
# [1] 6.202449
```

```
sd(v)
# [1] 0.6674431
```

```
# 4)
mean(w)
# [1] 42.99210
```

```
sd(w)
# [1] 4.626362
```

Fig. 6.14:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(x,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori' de 0,1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.06202449,sd=0.006674431)*1.1,0.02,0.09,ad
d=TRUE,col="red")
hist(y,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori' de 1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.6202449,sd=0.06674431)*11,0.2,0.9,add=TRU
E,col="red")
hist(v,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori' de 10%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas - Erros:
1%",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=6.202449,sd=0.6674431)*110,2.0,9.0,add=TRUE
,col="red")
hist(w,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori' de 50%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=42.99210,sd=4.626362)*500,14.0,70.0,add=TRU
E,col="red")
par(mfrow=c(1,1))
```

1)

ANEXO J

summary(x)

Min. :0.04700
1st Qu.:0.05653
Median :0.06118
Mean :0.06202
3rd Qu.:0.06704
Max. :0.08279

quantile(x,c(0.025,0.975))

2.5% 97.5%
0.05148039 0.07511652

2)

summary(y)

Min. :0.4700
1st Qu.:0.5653
Median :0.6118
Mean :0.6202
3rd Qu.:0.6704
Max. :0.8279

quantile(y,c(0.025,0.975))

2.5% 97.5%
0.5148039 0.7511652

3)

summary(v)

Min. :4.700
1st Qu.:5.653
Median :6.118
Mean :6.202
3rd Qu.:6.704
Max. :8.279

quantile(v,c(0.025,0.975))

2.5% 97.5%
5.148039 7.511652

4)

summary(w)

Min. :32.58
1st Qu.:39.19
Median :42.41
Mean :42.99
3rd Qu.:46.47
Max. :57.39

quantile(w,c(0.025,0.975))

ANEXO J

2.5% 97.5%
35.68348 52.06680

* * *

ANEXO K

INCORPORAÇÃO DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” Gama(16;800)

UTILIZAÇÃO DE DADOS REAIS DO EXPERIMENTO BASE

ATRIBUTO ASPECTO

```
#=====
# Experimento Marta - ASPECTO:
#=====

Alphaordenado<-matrix(scan("Alphaordenado.txt"),ncol=1)
Alphaordenado<-matrix(Alphaordenado,ncol=1)

# e1<-runif(100000,min=0,max=0.01)
# e1<-scan("Erros tipo1 - 1%.txt")
# e1<-matrix(e1,ncol=1)

# e2<-runif(100000,min=0,max=0.01)
# e2<-scan("Erros tipo2 - 1%.txt")
# e2<-matrix(e2,ncol=1)

Param<-cbind(Alphaordenado,e1,e2)

#=====
# Obtenção dos dados de falhas do arquivo de Avaliações
# Semanais das amostras em 51 semanas:
#=====

AvalsemanalMarta<-read.table("Avalsemanal-
Marta.txt",header=TRUE)

Ni<-AvalsemanalMarta$Ni
Sia<-AvalsemanalMarta$Sia
Bonsia<-AvalsemanalMarta$Ni-Sia

Ni<-matrix(Ni,nrow=1)
Sia<-matrix(Sia,nrow=1)
Bonsia<-matrix(Bonsia,nrow=1)

taui<-1:51
```

ANEXO K

```
Tau1<-matrix(tau1,nrow=1)

#=====
# ATRIBUTO ASPECTO:
#=====

#=====
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenado x Tau1
#=====

Expoente<--Alphaordenado**Tau1

#=====
# Obtenção da matriz Parcelaa com dimensão [100000x51]:
# e1linha*exp(-alphaxTau1):
#=====

# Para multiplicarmos cada linha da coluna de 100.000
# linhas da matriz e1 pelas 51 colunas da matriz
# exp(Expoente), necessitaremos usar o seguinte
# algoritmo, já que as matrizes não são de dimensões
# compatíveis para a multiplicação de uma matriz coluna
# [100000x1] por uma de [100000x51].

Expexpoente<-exp(Expoente)

i=1
Parcelaa<-e1*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parcelaam<-e1*Expexpoente[,i+1]
    Parcelaa<-cbind(Parcelaa,Parcelaam)
    i=i+1
}

# write(Parcelaa,"Parcelaa-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Parcelaa<-matrix(scan("Parcelaa-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaam)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelab com dimensão [100000x51]:
# (1-e2)(1-*exp(-alphaxTau1)):
#=====

p<-1-Expexpoente
q<-1-e2
```

ANEXO K

```
i=1
Parcelab<-q*p[,1]
while(i<51){
    Parcelabm<-q*p[,i+1]
    Parcelab<-cbind(Parcelab,Parcelabm)
    i=i+1
}

# write(Parcelab,"Parcelab-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# rm(Parcelabm)
# Parcelab<-matrix(scan("Parcelab-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorf com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau)+ (1-e2) (1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

Fatorf<-Parcelaa + Parcelab

# write(Fatorf,"Fatorf-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Fatorf<-matrix(scan("Fatorf-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaa)
# rm(Parcelab)

#=====
# Obtenção da matriz A com dimensão [100000x51]:
# Fatorf^Sio:
#=====

i=1
A<-(Fatorf[,1])^(Sia[,1])
while(i<51){
    Am<-(Fatorf[,i+1])^(Sia[,i+1])
    A<-cbind(A,Am)
    i=i+1
}

# write(A,"A-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# A<-matrix(scan("A-Marta-Gama-erros 1%.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorf)
# rm(Am)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelac com dimensão [100000x51]:
# e2(1-exp(-alphaxTau)):
#=====
```

ANEXO K

```
p<-1-Expexpoente

i=1
Parcelac<-e2*p[,1]
while(i<51){
  Parcelacm<-e2*p[,i+1]
  Parcelac<-cbind(Parcelac,Parcelacm)
  i=i+1
}

# write(Parcelac,"Parcelac-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Parcelac<-matrix(scan("Parcelac-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelacm)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelad com dimensão [100000x51]:
# (1-e1)*(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

r<-1-e1

i=1
Parcelad<-r*Expexpoente[,1]
while(i<51){
  Parceladm<-r*Expexpoente[,i+1]
  Parcelad<-cbind(Parcelad,Parceladm)
  i=i+1
}

# write(Parcelad,"Parcelad-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Parcelad<-matrix(scan("Parcelad-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parceladm)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorg com dimensão [100000x51]:
# e2*(1-exp(-alphaxTau))+(1-k1)*exp(-alphaxTau):
#=====

Fatorg<-Parcelac + Parcelad

# write(Fatorg,"Fatorg-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# Fatorg<-matrix(scan("Fatorg-Marta-Gama-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelac)
# rm(Parcelad)
```

ANEXO K

```
#=====
# Obtenção da matriz B com dimensão [100000x51]:
# Fatorg^(Ni-Si):
#=====

i=1
B<-(Fatorg[,1])^(Bonsia[,1])
while(i<51){
    Bm<-(Fatorg[,i+1])^(Bonsia[,i+1])
    B<-cbind(B,Bm)
    i=i+1
}

# write(B,"B-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# B<-matrix(scan("B-Marta-Gama-erros 1%.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorg)
# rm(Bm)

#=====
# Obtenção da matriz AB (multiplicação das colunas de A
# pelas colunas respectivas de B)com dimensão [100000x5AB1]:
#=====

AB<-A*B

# write(AB,"AB-Marta-Gama-erros 1%.txt")
# AB<-matrix(scan("AB-Marta-Gama-erros 1%.txt"),ncol=51)
# rm(A)
# rm(B)

#=====
# Obtenção da matriz MCAB (multiplicação das colunas de AB)
# com dimensão [100000x1]:
#=====

i=1
MCAB<-matrix(AB[,1]*AB[,2],ncol=1)
while(i<50){
    MCAB<-matrix(MCAB*AB[,i+2],ncol=1)
    i=i+1
}

MCAB<-matrix(MCAB,ncol=1)

# L51MartaGerlaspecto<-MCAB
# Lalpha51<-matrix(scan("LALPHA51.txt"),ncol=1)
```

ANEXO K

```
# write(L51MartaGerlaspecto, "L51MartaGerlaspecto-Marta-Gama-
erros 1%.txt")
# L51MartaGer1<-matrix(scan("L51MartaGer1sabor-Marta-Gama-
erros 1%.txt"), ncol=1)
# write(MCAB, "MCAB-Marta-SABOR-Gama-erros 1%.txt")
# rm(AB)
# rm(MCAB)
```

```
#=====
# Gráfico da Verossimilhança marginal em relação a alpha:
#=====
```

Fig. 6.16:

```
plot(Alphaordenado, L51MartaGerlaspecto, main=" ",
sub="Priori utilizada: Gama(16;800); Atributo: ASPECTO",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores da Verossimilhança")
```

```
#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# PRIORI GAMA(16;800), FUNÇÃO DE REFERÊNCIA GAMA(16;800):
#=====
```

```
# alphaordenado<-scan("Alphaordenado.txt")
# Alphaordenado<-matrix(alphaordenado, ncol=1)

# priori<-dgamma(Alphaordenado, shape=16, scale=1/800)

# veropri<-L51MartaGerlaspecto*priori

# Kposteriori<-veropri

# hist(Alphaordenado)

L51MartaGerlaspecto<-
matrix(L51MartaGerlaspecto, nrow=100000, ncol=1)
Alphaveroele2<-cbind(Alphaordenado, L51MartaGerlaspecto)

alphaposele2<-numeric(10000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
```


ANEXO K

```
j<-1
b<-L51MartaGerlaspecto
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000,0,1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
li[i]<-li[i-1]+q[i]
i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
for (l in 1:100000) {
if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l] || u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
t[k]<-b[l]
}
}

T<-matrix(t,ncol=1)
write(T,"T.txt")

i=1
Alphaposele2<-matrix(alphaposele2,ncol=2)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  Alphaverom<-Alphaveroele2[Alphaveroele2[,2]==t1,]
  Alphaverom<-matrix(Alphaverom,ncol=2)
  Alphaposele2<-rbind(Alphaposele2,Alphaverom)
  i=i+1
}

write(Alphaveroele2,"Alphaveroele2-Marta-sabor-Gama.txt")
write(Alphaposele2,"Alphaposele2-Marta-sabor-Gama.txt")

plot(Alphaposele2[,1],Alphaposele2[,2])

hist(Alphaposele2[,1])

#=====
# Procedimentos para localizar valores de alpha idênticos em
# Alphaposele2[,1]:
```

ANEXO K

```
#=====

x<-Alphaposele2[,1]
x<-x[5000:9999]
y<-Alphaposele2[,2]
y<-y[5000:9999]

Alphaveropos<-cbind(x,y)

i=1
AVpos<-matrix(Alphaveropos,ncol=2)
z1<-matrix(c(0,0),ncol=2)
z2<-z1
Temp1<-matrix(AVpos[,1:2],ncol=2)
while(i<5000){
  temp2<-Temp1[,]==Temp1[i,1]
  Temp2<-matrix(temp2,ncol=2)
  Temp3<-Temp2*1
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  while(Temp4>1){
    Temp5<-Temp1[Temp1[,1]==Temp1[i,1],]
    Temp5<-matrix(Temp5,ncol=2)
    Temp6<-sum(Temp5[,2])
    Temp7<-matrix(c(Temp1[i,1],Temp6),ncol=2)
    z1<-rbind(z1,Temp5)
    z2<-rbind(z2,Temp7)
    Temp4=0
  }
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  i=i+Temp4
}
z<-z2[2:length(z2[,1]),]

x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

#=====
# Extração dos erros "a posteriori", em função dos
# valores obtidos da verossimilhança "a posteriori":
#=====

i=1
Paramvero<-cbind(Param,L51egele2sabor)
parampos<-numeric(5000)
Parampos<-matrix(parampos,ncol=4)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
```

ANEXO K

```
t1<-as.vector(T1)
paramverom<-Paramvero[Paramvero[,4]==t1,]
Paramverom<-matrix(paramverom,ncol=4)
Parampos<-rbind(Parampos,Paramverom)
i=i+1
}

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====

mean(x)
[1] 0.01335912

sd(x)
[1] 0.001041431

Fig. 6.17:
hist(x,100,main=" ",
sub="Experimento Base, Priori: Gama(16;800)",
xlab="Valores de Alpha 'a posteriori'",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.01335912,sd=0.001041431)*0.035,0.01,0.05,
add=TRUE,col="red")

#=====
# Determinação dos Percentis "a posteriori":
#=====

# Iremos considerar as frações de falhas nas amostras
# utilizadas de forma análoga ao que foi feito antes
# de incorporarmos os erros. Usaremos as frações de
# falha: 0,1%, 1%, 10%, e 50% e do total das amostras
# para determinar em quantas semanas, tal fração de
# falhas ocorre.

A1<-matrix(rep(0.001,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
#A4<-matrix(rep(0.287682,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
#A6<-matrix(rep(1.3862944,length(Alphaveropos[,1])),ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem2<-A2/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem3<-A3/Alphaveropos[,1]
#Tempoporcentagem4<-A4/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem5<-A5/Alphaveropos[,1]
```

ANEXO K

```
#Tempoporcentagem6<-A6/Alphaveropos[,1]
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3,

Tempoporcentagem5)

#=====
# Gráficos:
#=====

z<-z2[2:length(z2[,1]),]
x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

x<-Tempoporcentagem1
y<-Tempoporcentagem2
v<-Tempoporcentagem3
w<-Tempoporcentagem5

# 1)
mean(x)
# [1] 0.07530681
sd(x)
# [1] 0.005832914
mean(y)
# [1] 0.7530681
sd(y)
# [1] 0.05832914
mean(v)
# [1] 7.530681
sd(v)
# [1] 0.5832914
mean(w)
# [1] 52.1987
sd(w)
# [1] 4.043068
```

Fig. 6.18:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(Tempoporcentagem[,1],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 0,1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.07530681,sd=0.005832914)*0.25,0.050,0.1,a
dd=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,2],50, main=" ",
```

ANEXO K

```
sub="Percentil de Falhas: 1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.7530681,sd=0.05832914)*2.5,0.50,1.0,add=T
RUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,3],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 10%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=7.530681,sd=0.5832914)*25,5,10,add=TRUE,
col="red")
hist(Tempoporcentagem[,4],50, main=" ",
sub="Percentil de Falhas: 50%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=52.1987,sd=4.043068)*230,35.0,70.0,add=TRUE
,
col="red")
par(mfrow=c(1,1))
```

```
summary(x)
```

```
Min.    :0.06029
1st Qu.:0.07117
Median  :0.07506
Mean    :0.07531
3rd Qu.:0.07933
Max.    :0.09069
```

```
quantile(x,c(0.025,0.975))
```

```
2.5%      97.5%
0.06446426 0.08748102
```

```
summary(y)
```

```
Min.    :0.6029
1st Qu.:0.7117
Median  :0.7506
Mean    :0.7531
3rd Qu.:0.7933
Max.    :0.9069
```

```
quantile(y,c(0.025,0.975))
```

```
2.5%      97.5%
0.6446426 0.8748102
```

```
summary(v)
```

```
Min.    :6.029
1st Qu.:7.117
```

ANEXO K

Median :7.506
Mean :7.531
3rd Qu.:7.933
Max. :9.069

quantile(v, c(0.025, 0.975))
2.5% 97.5%
6.446426 8.748102

summary(w)
Min. :41.79
1st Qu.:49.33
Median :52.03
Mean :52.20
3rd Qu.:54.99
Max. :62.86

quantile(w, c(0.025, 0.975))
2.5% 97.5%
44.68321 60.63721

* * *

ANEXO L

INCORPORAÇÃO DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO Tempo de Falha Exponencial. Utilização com distribuição “a priori” de Jeffreys

EXPERIÊNCIA REAL DO TRABALHO DE REFERÊNCIA COM TRATAMENTO
BAYESIANO INCORPORANDO ERROS DE CLASSIFICAÇÃO ATÉ 1%

ATRIBUTO ASPECTO

```
#####  
# Experimento Marta - ASPECTO - Jeffreys:  
#####  
  
#####  
# Construção de uma matriz [100.000x3] onde a primeira coluna  
# serão valores de alpha já amostrados nas simulações  
# anteriores e as colunas 1 e 2 serão respectivamente erros  
# tipo 1 e tipo 2 amostrados aleatoriamente de uma  $U(0;0,1)$ :  
#####  
  
Alphaordenado1<-matrix(scan("Alphaordenado1.txt"),ncol=1)  
Alphaordenado1<-matrix(Alphaordenado1,ncol=1)  
  
# e1<-runif(100000,min=0,max=0.01)  
# e1<-matrix(scan("Erros tipo1 - 1%.txt"),ncol=1)  
  
# e2<-runif(100000,min=0,max=0.01)  
# e2<-matrix(scan("Erros tipo2 - 1%.txt"),ncol=1)  
  
Param<-cbind(Alphaordenado1,e1,e2)  
  
# write(Param,"Param-Marta-Jeffreys-erros 1%.txt")  
  
#####  
# Obtenção dos dados de falhas do arquivo de Avaliações  
# Semanais das amostras em 51 semanas:  
#####  
  
AvalsemanalMarta<-read.table("Avalsemanal-  
Marta.txt",header=TRUE)
```

ANEXO L

```
Ni<-AvalsemanalMarta$Ni
Sia<-AvalsemanalMarta$Sia
Bonsia<-AvalsemanalMarta$Ni-Sia

Ni<-matrix(Ni,nrow=1)
Sia<-matrix(Sia,nrow=1)
Bonsia<-matrix(Bonsia,nrow=1)

taui<-1:51

Tau<-matrix(tau,nrow=1)

DadosMarta<-rbind(Tau,Ni,Sio,Sis,Sia,Bonsio,Bonsis,Bonsia)

# write(DadosMarta,"DadosMarta.txt")
# DadosMarta<-matrix(scan("DadosMarta.txt"),ncol=51)

#=====
# DETERMINAÇÃO DA VEROSSIMILHANÇA DO ATRIBUTO SABOR:
#=====

#=====
# Obtenção da matriz Expoente com dimensão [100000x51]:
# -Alphaordenadol x Tau
#=====

Expoente<--Alphaordenadol%*%Tau

#=====
# Obtenção da matriz Parcelaa com dimensão [100000x51]:
# e1linha*exp(-alphaxTau):
#=====

# Para multiplicarmos cada linha da coluna de 100.000
# linhas da matriz e1 pelas 51 colunas da matriz
# exp(Expoente), necessitaremos usar o seguinte
# algoritmo, já que as matrizes não são de dimensões
# compatíveis para a multiplicação de uma matriz coluna
# [100000x1] por uma de [100000x51].

Expexpoente<-exp(Expoente)

i=1
Parcelaa<-e1*Expexpoente[,1]
while(i<51){
  Parcelaam<-e1*Expexpoente[,i+1]
  Parcelaa<-cbind(Parcelaa,Parcelaam)
  i=i+1
}
```


ANEXO L

```
}

# write(Parcelaa,"Parcelaa-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt")
# Parcelaa<-matrix(scan("Parcelaa-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaam)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelab com dimensão [100000x51]:
# (1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

p<-1-Expexpoente
q<-1-e2

i=1
Parcelab<-q*p[,1]
while(i<51){
    Parcelabm<-q*p[,i+1]
    Parcelab<-cbind(Parcelab,Parcelabm)
    i=i+1
}

# write(Parcelab,"Parcelab-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt")
# rm(Parcelabm)
# Parcelab<-matrix(scan("Parcelab-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorf com dimensão [100000x51]:
# e1*exp(-alphaxTau)+(1-e2)(1-*exp(-alphaxTau)):
#=====

Fatorf<-Parcelaa + Parcelab

# write(Fatorf,"Fatorf-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Fatorf<-matrix(scan("Fatorf-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelaa)
# rm(Parcelab)

#=====
# Obtenção da matriz A com dimensão [100000x51]:
# Fatorf^Si:
#=====
```

ANEXO L

```
i=1
A<-(Fatorf[,1])^(Sia[,1])
while(i<51){
    Am<-(Fatorf[,i+1])^(Sia[,i+1])
    A<-cbind(A,Am)
    i=i+1
}

# write(A,"A-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# A<-matrix(scan("A-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorf)
# rm(Am)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelac com dimensão [100000x51]:
# e2(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

p<-1-Expexpoente

i=1
Parcelac<-e2*p[,1]
while(i<51){
    Parcelacm<-e2*p[,i+1]
    Parcelac<-cbind(Parcelac,Parcelacm)
    i=i+1
}

# write(Parcelac,"Parcelac-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt")
# Parcelac<-matrix(scan("Parcelac-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelacm)

#=====
# Obtenção da matriz Parcelad com dimensão [100000x51]:
# (1-e1)*(1-exp(-alphaxTau)):
#=====

r<-1-e1

i=1
Parcelad<-r*Expexpoente[,1]
while(i<51){
    Parceladm<-r*Expexpoente[,i+1]
    Parcelad<-cbind(Parcelad,Parceladm)
    i=i+1
}
```

ANEXO L

```
}

# write(Parcelad,"Parcelad-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt")
# Parcelad<-matrix(scan("Parcelad-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parceladm)

#=====
# Obtenção da matriz Fatorg com dimensão [100000x51]:
# e2*(1-exp(-alphaxTau))+ (1-k1)*exp(-alphaxTau):
#=====

Fatorg<-Parcelac + Parcelad

# write(Fatorg,"Fatorg-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# Fatorg<-matrix(scan("Fatorg-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Parcelac)
# rm(Parcelad)

#=====
# Obtenção da matriz B com dimensão [100000x51]:
# Fatorg^(Ni-Si):
#=====

i=1
B<-(Fatorg[,1])^(Bonsia[,1])
while(i<51){
    Bm<-(Fatorg[,i+1])^(Bonsia[,i+1])
    B<-cbind(B,Bm)
    i=i+1
}

# write(B,"B-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# B<-matrix(scan("B-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(Fatorg)
# rm(Bm)

#=====
# Obtenção da matriz AB (multiplicação das colunas de A
# pelas colunas respectivas de B) com dimensão [100000x5AB1]:
#=====

AB<-A*B

# write(AB,"AB-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
```

ANEXO L

```
# AB<-matrix(scan("AB-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=51)
# rm(A)
# rm(B)

#=====
# Obtenção da matriz MCAB (multiplicação das colunas de AB)
# com dimensão [100000x1]:
#=====

i=1
MCAB<-matrix(AB[,1]*AB[,2],ncol=1)
while(i<50){
    MCAB<-matrix(MCAB*AB[,i+2],ncol=1)
    i=i+1
}

MCAB<-matrix(MCAB,ncol=1)

L51e1jele2aspecto<-MCAB

# write(L51e1jele2aspecto,"L51e1jele2aspecto-Marta-Jeffreys-
erros 1%.txt")
# L51e1jele2sabor<-matrix(scan("L51e1jele2sabor-Marta-
Jeffreys-erros 1%.txt"),ncol=1)
# write(MCAB,"MCAB-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(AB)
# rm(MCAB)

#=====
# Gráficos da Verossimilhança:
#=====
```

Fig. 6.19a:

```
plot(Alphaordenado1,L51e1jele2aspecto,main=" ",
sub="Erros até 1% - Prióri a utilizar: JEFFREYS; Atributo:
ASPECTO",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores da Verossimilhança")
```

Fig. 6.19:

```
plot(Alphaordenado1[1:10000],L51e1jele2aspecto[1:10000],main="
",
sub="Erros até 1% - Prióri a utilizar: JEFFREYS; Atributo:
ASPECTO",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores da Verossimilhança")
```

ANEXO L

```
#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA DETERMINAR A DISTRIBUIÇÃO
# "A PRIORI DE JEFFREYS" COM FUNÇÃO DE REFERÊNCIA
# U(0,001;0,5) e erros uniformes segundo uma U(0;0,1):
#=====

#=====
# Obtenção dos valores de a [100000x51], b [100000x1]
# e c [100000x1]:
#=====

a<-exp(Expoente)

b<-1-e1

c<-1-e2

#=====
# Obtenção de a1 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
a1<-(e1*a[,1]+c-a[,1]*c)^2
while(i<51){
    alm<-(e1*a[,i+1]+c-a[,i+1]*c)^2
    a1<-cbind(a1,alm)
    i=i+1
}

# write(a1,"a1-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(alm)

#=====
# Obtenção de a2 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
a2<-(e2-e2*a[,1]+b*(a[,1]))^2
while(i<51){
    a2m<-(e2-e2*a[,i+1]+b*(a[,i+1]))^2
    a2<-cbind(a2,a2m)
    i=i+1
}

# write(a2,"a2-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(a2m)

#=====
```

ANEXO L

```
# Obtenção de b1 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
b1<-(c-e1)*(a[,1]*c)*(1+2*a[,1])*(1-a[,1])
while(i<51){
  b1m<-(c-e1)*(a[,i+1]*c)*(1+2*a[,i+1])*(1-a[,i+1])
  b1<-cbind(b1,b1m)
  i=i+1
}

# write(b1,"b1-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b1m)

#=====
# Obtenção de R com dimensão [100000x51]
#=====

R<-b1/a1

# write(R,"R-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b1)

#=====
# Obtenção de b2 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
b2<-(e2-b)*((a[,1])^2)*e2
while(i<51){
  b2m<-(e2-b)*((a[,i+1])^2)*e2
  b2<-cbind(b2,b2m)
  i=i+1
}

# write(b2,"b2-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b2m)

#=====
# Obtenção de S com dimensão [100000x51]
#=====

S<-b2/a2

# write(S,"S-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(b2)

#=====
```

ANEXO L

```
# Obtenção de Xa com dimensão [1x51]
#=====

Xa<-((Tau1)^2)*Ni

#=====
# Obtenção de X com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
RmaisS<-R+S
Xb<-RmaisS[,1]
while(i<51){
    Xbm<-RmaisS[,i+1]
    Xb<-cbind(Xb,Xbm)
    i=i+1
}

# rm(RmaisS)
# rm(Xbm)
# rm(R)
# rm(S)

i=1
X<-Xa[1,i]*Xb[,i]
while(i<51){
    Xm<-Xa[1,i+1]*Xb[,i+1]
    X<-cbind(X,Xm)
    i=i+1
}

# write(X,"X-Marta-APECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Xm)
# rm(Xa)
# rm(Xb)

#=====
# Obtenção de M1 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M1<-X[,1]+X[,2]
while(i<50){
    M1m<-X[,i+1]+X[,i+2]
    M1<-M1+M1m
    i=i+1
}
M1<-matrix(M1,ncol=1)
```

ANEXO L

```
# write(M1, "M1-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(X)
# rm(M1m)

#=====
# Obtenção de c1 com dimensão [100000x51]
#=====

i=1
c1<-(1-a[,1])
while(i<51){
    c1m<-(1-a[,i+1])
    c1<-cbind(c1,c1m)
    i=i+1
}

# write(c1, "c1-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(c1m)

#=====
# Obtenção de T com dimensão [100000x51]
#=====

T<-c1/a1

# write(T, "T-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de U com dimensão [100000x51]
#=====

U<-a/a2

# write(U, "U-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de Ya com dimensão [1x51]
#=====

i=1
Mi<-rbind(Ni, Ni, Ni, Ni, Ni)
while(i<11){
    Mi<-rbind(Mi, Mi)
    i=i+1
}
```


ANEXO L

```
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-rbind(Mi,Mi)
Mi<-Mi[1:100000,]

Ya<-((a)^2)*Mi

#=====
# Obtenção de Y com dimensão [100000x51]
#=====

Yb<-T+U

Y<-Ya*Yb

# rm(Ya)
# rm(Yb)
# rm(T)
# rm(U)

# write(Y,"Y-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")

#=====
# Obtenção de M2 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M2<-Y[,1]+Y[,2]
while(i<50){
    M2m<-Y[,i+1]+Y[,i+2]
    M2<-M2+M2m
    i=i+1
}
M2<-matrix(M2,ncol=1)

# write(M2,"M2-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Y)
# rm(M2m)

#=====
# Obtenção de V com dimensão [100000x51]
#=====

V<-c1/a1

# write(V,"V-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
```

ANEXO L

```
# rm(a1)
# rm(c1)

#=====
# Obtenção de W com dimensão [100000x51]
#=====

W<-a/a2

# write(W,"W-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(a2)

#=====
# Obtenção de Za com dimensão [100000x51]
#=====

Za<-((1-a)^2)*Mi

#=====
# Obtenção de Z com dimensão [100000x51]
#=====

Zb<-V+W

Z<-Za*Zb

# write(Z,"Z-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(V)
# rm(W)
# rm(Za)
# rm(Zb)

#=====
# Obtenção de M3 com dimensão [100000x1]
#=====

i=1
M3<-Z[,1]+Z[,2]
while(i<50){
    M3m<-Z[,i+1]+Z[,i+2]
    M3<-M3+M3m
    i=i+1
}
M3<-matrix(M3,ncol=1)

# write(M3,"M3-Marta-SABOR-Jeffreys-erros 1%.txt")
# rm(Z)
# rm(M3m)
```

ANEXO L

```
#=====
# Obtenção da distribuição de Jeffreys com dimensão
# [100000x1]
#=====

JeffreysASPECTO<-(M1*M2*M3)^(1/2)

J1ASPECTO<-(M1)^(1/2)
J2ASPECTO<-(M2)^(1/2)
J3ASPECTO<-(M3)^(1/2)

# write(JeffreysASPECTO,"Jeffreys-Marta-ASPECTO-erros 1%.txt")
# write(J1-ASPECTO,"J1-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# write(J2-ASPECTO,"J2-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")
# write(J3-ASPECTO,"J3-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")

# J1ASPECTO<-matrix(scan("J1-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=1)
# J2ASPECTO<-matrix(scan("J2-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=1)
# J3ASPECTO<-matrix(scan("J3-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros
1%.txt"),ncol=1)

#=====
# Gráfico da distribuição de Jeffreys - ASPECTO:
#=====

Fig. 6.20:
plot(Alphaordenado1,JeffreysASPECTO,main=" ",
sub="Erros até 1%",
xlab="Valores de Alpha 'a priori'",
ylab="Valores Marginais da dist. 'a priori' de Jeffreys -
ASPECTO")

#=====
# CÓDIGO COMPLETO PARA A DISTRIBUIÇÃO "A POSTERIORI" COM
# PRIORI DE JEFFREYS, FUNÇÃO DE REFERÊNCIA U(0,001;0,5):
#=====

L51e1jele2aspecto<-
matrix(L51e1jele2aspecto,nrow=100000,ncol=1)
# Alphaveroele2<-cbind(Alphaordenado1,L51e1jele2aspecto)

Priori<-JeffreysASPECTO

veropri<-L51e1jele2aspecto*Priori
```

ANEXO L

```
h<-veropri

H<-matrix(h,ncol=1)

g<-dunif(Alphaordenado1,min=0.001,max=0.5)

G<-matrix(g,ncol=1)

w<-h/g

W<-matrix(w,ncol=1)
# write(W,"W-Marta-ASPECTO-Jeffreys-errores 1%.txt")

# Alphavero<-cbind(Alphaordenado1,L51e1jele2aspecto)
# write(Alphavero,"Alphavero-Marta-ODOR-Jeffreys-errores
1%.txt")

# AlphaW<-cbind(Alphaordenado1,W)
# write(AlphaW,"AlphaW-Marta-SABOR-Jeffreys-errores 1%.txt")

AlphapriLW<-cbind(Param,Priori,L51e1jele2aspecto,W)
#Col. 1=alpha
#Col. 2=e1
#Col. 3=e2
#Col. 4=Jeffreys
#Col. 5=L51e1jele2aspecto
#Col. 6=W

# write(AlphapriLW,"AlphapriLW-Marta-ASPECTO-Jeffreys-errores
1%.txt")

AlphaposLW<-numeric(30000)
b<-numeric(100000)
q<-numeric(100000)
u<-numeric(5000)
li<-numeric(100000)
ls<-numeric(100000)
t<-numeric(5000)
j<-numeric(100000)
i<-1
j<-1
b<-w
q<-b/sum(b)
u<-sort(runif(5000,0,1))
li[1]<-0
i<-i+1
while (i<100001) {
li[i]<-li[i-1]+q[i]
```

ANEXO L

```
i<-i+1
}
ls[1]<-q[1]
j<-j+1
while (j<100001) {
ls[j]<-ls[j-1]+q[j]
j<-j+1
}
for (k in 1:5000){
for (l in 1:100000) {
if (u[k]>li[l] & u[k]<ls[l]||u[k]>li[l] & u[k]>ls[l])
t[k]<-b[l]
}
}

T<-matrix(t,ncol=1)
write(T,"T-Marta-ASPECTO-Jeffreys-erros 1%.txt")

i=1
AlphaposLW<-numeric(30000)
AlphaposLW<-matrix(AlphaposLW,ncol=6)
AlphaposLW<-AlphaposLW[4999,]
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  AlphaposLWm<-AlphapriLW[AlphapriLW[,6]==t1,]
  AlphaposLWm<-matrix(AlphaposLWm,ncol=6)
  AlphaposLW<-rbind(AlphaposLW,AlphaposLWm)
  i=i+1
}

# write(AlphaposLW,"AlphaposLW.txt")

plot(AlphaposLW[,1],AlphaposLW[,5])

hist(AlphaposLW[,1])

#=====
# Procedimentos para localizar valores de alpha idênticos em
# Alphaposele2[,1]:
#=====

x<-AlphaposLW[,1]
y<-AlphaposLW[,2]

Alphaveropos<-cbind(x,y)

i=1
```

ANEXO L

```
AVpos<-matrix(Alphaveropos,ncol=2)
z1<-matrix(c(0,0),ncol=2)
z2<-z1
Temp1<-matrix(AVpos[,1:2],ncol=2)
while(i<5000){
  temp2<-Temp1[,]==Temp1[i,1]
  Temp2<-matrix(temp2,ncol=2)
  Temp3<-Temp2*1
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  while(Temp4>1){
    Temp5<-Temp1[Temp1[,1]==Temp1[i,1],]
    Temp5<-matrix(Temp5,ncol=2)
    Temp6<-sum(Temp5[,2])
    Temp7<-matrix(c(Temp1[i,1],Temp6),ncol=2)
    z1<-rbind(z1,Temp5)
    z2<-rbind(z2,Temp7)
    Temp4=0
  }
  Temp4<-sum(Temp3[,1])
  i=i+Temp4
}
z<-z2[2:length(z2[,1]),]

x<-z[,1]
y<-z[,2]
Alphaveropos<-z

#=====
# Extração dos erros "a posteriori", em função dos
# valores obtidos da verossimilhança "a posteriori":
#=====

i=1
Paramvero<-cbind(Param,L51egele2)
parampos<-numeric(5000)
Parampos<-matrix(parampos,ncol=4)
while(i<5000){
  T1<-T[i+1,1]
  t1<-as.vector(T1)
  paramverom<-Paramvero[Paramvero[,4]==t1,]
  Paramverom<-matrix(paramverom,ncol=4)
  Parampos<-rbind(Parampos,Paramverom)
  i=i+1
}

#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====
```

ANEXO L

```
mean(x)
[1] 0.01543846
```

```
sd(x)
[1] 0.001531638
```

Fig. 6.21:

```
hist(x, 80, main=" ",
sub="Experimento Base - Atributo: ASPECTO, Priori: Jeffreys,
Erros 1%",
xlab="Valores de Alpha 'a posteriori'", ylab="Frequência")
curve(dnorm(x, mean=0.01297626, sd=0.001531638)*0.11, 0.009, 0.05,
add=TRUE, col="red")
```

```
summary(x)
Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
0.00933 0.01175 0.01290 0.01298 0.01412 0.01675
```

```
#=====
# Determinação dos percentis "a posteriori":
#=====
```

```
A1<-matrix(rep(0.001, length(x)), ncol=1)
A2<-matrix(rep(0.01, length(x)), ncol=1)
A3<-matrix(rep(0.1, length(x)), ncol=1)
# A4<-matrix(rep(0.287682, length(x)), ncol=1)
A5<-matrix(rep(0.6931471, length(x)), ncol=1)
# A6<-matrix(rep(1.3862944, length(x)), ncol=1)
Tempoporcentagem1<-A1/x
Tempoporcentagem2<-A2/x
Tempoporcentagem3<-A3/x
Tempoporcentagem5<-A5/x
Tempoporcentagem<-cbind(Tempoporcentagem1, Tempoporcentagem2,
Tempoporcentagem3,
```

```
Tempoporcentagem5)
```

```
#=====
# Gráficos dos resultados obtidos:
#=====
```

```
x<-Tempoporcentagem1
y<-Tempoporcentagem2
v<-Tempoporcentagem3
w<-Tempoporcentagem5
```

```
# 1)
```

ANEXO L

```
mean(x)
# [1] 0.07815067
sd(x)
# [1] 0.00929864
```

```
# 2)
mean(y)
# [1] 0.7815067
sd(y)
# [1] 0.0929864
```

```
#3)
mean(v)
# [1] 7.815067
sd(v)
# [1] 0.929864
```

```
# 4)
mean(w)
# [1] 54.16991
sd(w)
# [1] 6.445325
```

Fig. 6.22:

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(x,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori': 0,1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.07815067,sd=0.00929864)*0.9,0.02,0.11,add=TRUE,col="red")
hist(y,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori': 1%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",
ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=0.7815067,sd=0.0929864)*9,0.2,1.1,add=TRUE,col="red")
hist(v,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori': 10%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas - Erros:
1%",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=7.815067,sd=0.929864)*90,2.0,11.0,add=TRUE,col="red")
hist(w,50,main=" ",
sub="Percentil de falhas 'a posteriori': 50%",
xlab="Tempos de Falha em Semanas",ylab="Frequência")
curve(dnorm(x,mean=54.16991,sd=6.445325)*470,14.0,75.0,add=TRUE,col="red")
```


ANEXO L

```
par(mfrow=c(1,1))

1)
summary(x)
  Min.   :0.05969
  1st Qu.:0.07084
  Median :0.07754
  Mean   :0.07815
  3rd Qu.:0.08511
  Max.   :0.10718

quantile(x,c(0.025,0.975))
2.5%      97.5%
0.06334598 0.09688020

2)
summary(y)
  Min.   :0.5969
  1st Qu.:0.7084
  Median :0.7754
  Mean   :0.7815
  3rd Qu.:0.8511
  Max.   :1.0718

quantile(y,c(0.025,0.975))
2.5%      97.5%
0.6334598 0.9688020

3)
summary(v)
  Min.   : 5.969
  1st Qu.: 7.084
  Median : 7.754
  Mean   : 7.815
  3rd Qu.: 8.511
  Max.   :10.718
  Max.   :8.774

quantile(v,c(0.025,0.975))
2.5%      97.5%
6.334598 9.688020

4)
summary(w)
  Min.   :41.37
  1st Qu.:49.11
  Median :53.75
  Mean   :54.17
```

ANEXO L

3rd Qu.:58.99
Max. :74.29

quantile(w, c(0.025, 0.975))
2.5% 97.5%
43.90809 67.15223

* * *

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BERGER, JAMES O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis* Springer-Verlag pp. 87 a 89, 1985
- BOX, GEORGE E. P.; TIAO, GEORGE C. *Bayesian Inference in Statistical Analysis* Wiley classics library ed., pp 53 a 58, 1973
- C. M. D. MAN; ADRIAN A. JONES *Shelf Life Evaluation of Foods* Aspen Publishers Inc., 2000
- COSTA, J. C. *Modelo Weibull com Parâmetros Dependentes de Covariáveis: Aplicação na Determinação de Vida de Prateleira* Tese de Mestrado em Estatística; UFMG, Instituto de Ciências Exatas, Depto. de Estatística junho, 2005
- DENDUKURI, N.; RAHME, E.; BÉLISLE, P.; JOSEPH, L. *Bayesian Sample Size Determination for Prevalence and Diagnostic, Test Studies in the Absence of a Gold Standard Test* Biometrics Vol 60,. pp. 388-397, June 2004
- FISHER, R. A., *Theory of Statistical Informatin* Proceedings of Cambridge Philosophical Society, 1925
- FREITAS, M. A.; COLOSIMO E. A.. *Confiabilidade: Análise de Tempo de Falha e Testes de Vida Acelerados* Fundação Christiano Ottoni, Escola de Engenharia da UFMG, 1997
- FREITAS, M. A.; BORGES, W.; HO, L. L. *A Statistical Model for Shelf Life Estimation Using Sensory Evaluations Scores*. Communications in Statistics (Theory and Methods) Vol 32, No. 8 pp.1559-1589, 2003
- FUJISAWA, H.; IZUMI, S. *Inference about Misclassification Probabilities from Repeated Binary Responses* Biometrics Vol. 56, pp. 706-711 September, 2000
- GABA, A.; WINKLER, R. L. *Implications of Errors in Survey Data: A Bayesian Model* The Institute of Management Sciences Vol. 38, No. 7, July 1992
- GABA, A. *Inferences with an Unknown Noise Level in a Bernoulli Process* The Institute of Management Sciences Vol. 39, No. 10, October 1993
- GACULA, M. C. *The Design of Experiments for Shelf Life Study* Journal of Food Science Vol. 40, pp. 399-403, 1975
- GACULA, M. C. Jr.; KUBALA, J. J., *Statistical model for shelf life failure* Journal of Food Science Vol. 40, pp. 404-409, 1975
- GELMAN, ANDREW; CARLIN, JOHN B.; STERN, HAL S.; RUBIN, DONALD B. *Bayesian Data Analysis* Chapman & Hall/CRC, 2004
- GOMES, R. C. *Estimando o Tempo de Vida de Produto em Prateleira Utilizando Modelo de Riscos Proporcionais em Dados Oriundos de Avaliações Sensoriais* Tese de Mestrado em Estatística; UFMG; Instituto de Ciências Exatas, Depto. de Estatística, abril 2005
- HO, L. L.; FREITAS, M. A. *A Misclassification Statistical Model for Shelf Life Estimation Using Sensory Evaluations Scores* (A ser publicado), July 2003
- JEFFREYS, N. S., *Theory of Probability* Oxford: University Press, (1939)[2nd. Edition: (1948), 3rd. edition (1961)]
- KALBFLEISCH, J. D.; PRENTICE, R. L. *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. Wiley Series in Probability and Statistics, 2002
- LEE, PETER M., *Bayesian Statistics: an Introduction* John Wiley & Sons Inc., 1989
- QUININO, R. C.; HO, L. L. *Estimação da proporção de itens conformes quando existe a possibilidade de erros de classificação* (A ser publicado), 2005

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- RAHME, E.; JOSEPH, L.; GYORKOS, T. *Bayesian sample size determination for estimating binomial parameters from data subject to misclassification* Royal Statistical Society Vol. 49, Part1, pp. 119-128, 2000
- WILKINSON, DARREN J. *Monte Carlo, and Other Kinds of Stochastic Simulation* Newcastle University - School of Mathematics and Statistics – UK, 2003

* * *

