

**Ensaio de Degradação Destrutiva:
Aplicação em Tempo de Vida de Prateleira**

Rosilaine de Menezes Viane

Orientadora: Marta Afonso Freitas

25 de Novembro de 2008

UFMG

*Agradeço a Deus e a todos que contribuíram para
a realização deste trabalho.*

Sumário

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	vi
1 Introdução	1
1.1 A natureza dos dados oriundos de avaliações sensoriais	2
1.2 Trabalhos relacionados	3
1.3 Objetivo do trabalho	5
2 Situação real motivadora	7
3 Modelos de degradação e degradação acelerada	10
3.1 Modelos de degradação	11
3.1.1 Modelo geral de degradação	11
3.1.2 Estimção dos parâmetros do modelo de degradação	13
3.1.3 Avaliação de $F(t)$	13
3.1.4 Estimção de $F(t)$	14
3.1.5 Análise de degradação aproximada	14
3.2 Modelos de degradação acelerada	14
3.2.1 Modelo geral de degradação acelerada	15
3.2.2 Estimção dos parâmetros do modelo de degradação acelerada	15
3.2.3 Estimção da função de distribuição acumulada, $F(t)$	15
3.2.4 Análise de degradação acelerada aproximada	16
4 Modelos de degradação acelerada com ensaios destrutivos	17
4.1 Dados da cola adesiva B	18

4.2	Modelo geral de degradação acelerada com ensaios destrutivos	19
4.3	Modelo para aceleração	21
4.4	Estimação pelo método de máxima verossimilhança	23
4.4.1	Estimação dos parâmetros do modelo para cada nível de temperatura separadamente	23
4.4.2	Verossimilhança para o modelo de aceleração usando os dados de todos os níveis de temperatura	24
4.4.3	Análise dos resíduos	25
4.5	Distribuição da degradação no tempo e condições de aceleração $(t, AccVar)$	26
4.5.1	Função de distribuição da degradação	26
4.5.2	Quantis da distribuição da degradação	26
4.6	Distribuição do tempo de falha em valores fixos de $(AccVar, D_f)$ para degradação linear decrescente	27
4.6.1	Distribuição do tempo de falha	27
4.6.2	Quantis da distribuição do tempo de falha	27
4.7	Avaliação da confiabilidade da cola adesiva B	27
4.8	Fatores de aceleração	28
5	Aplicação em tempo de vida de prateleira	30
5.1	Dados oriundos das avaliações sensoriais	31
5.2	Modelo de degradação acelerada para os dados oriundos das avaliações sensoriais	34
5.3	Modelo para aceleração	36
5.4	Estimação pelo método de máxima verossimilhança	38
5.4.1	Estimação dos parâmetros do modelo para cada condição de armazenagem separadamente	38
5.4.2	Verossimilhança para o modelo de aceleração usando os dados de todas as condições de armazenagem	39
5.4.3	Análise dos resíduos	41
5.5	Avaliação do tempo de vida de prateleira por atributo	43
5.5.1	Quantis da distribuição do tempo de falha	44
5.5.2	Intervalos de 95% de confiança bootstrap	44

5.6 Fatores de aceleração	45
6 Considerações finais e conclusões	47
Referências Bibliográficas	50

Lista de Figuras

4.1	Dados da resistência da cola adesiva B.	18
4.2	Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados da cola adesiva B em cada nível de temperatura.	20
4.3	Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados transformados.	21
4.4	Modelo de perfil de degradação para as três temperaturas.	22
4.5	Resíduos versus valores ajustados.	25
4.6	Gráfico de probabilidade normal para os resíduos padronizados.	25
5.1	Dados do Odor para todas as condições de armazenagem.	31
5.2	Dados do Sabor para todas as condições de armazenagem.	32
5.3	Dados do Aspecto para todas as condições de armazenagem.	32
5.4	Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados do Odor para cada condição de armazenagem.	34
5.5	Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados do Sabor para cada condição de armazenagem.	35
5.6	Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados do Aspecto para cada condição de armazenagem.	36
5.7	Modelo de degradação para as três condições de armazenagem.	37
5.8	Resíduos versus valores ajustados para o Odor.	41
5.9	Gráfico de probabilidade normal para os resíduos padronizados do Odor.	41
5.10	Resíduos versus valores ajustados para o Sabor.	42
5.11	Gráfico de probabilidade normal para os resíduos padronizados do Sabor.	42
5.12	Resíduos versus valores ajustados para o Aspecto.	43

5.13 Gráfico de probabilidade normal para os resíduos padronizados do Aspecto. 43

Lista de Tabelas

4.1	Alocação das unidades testadas.	19
4.2	Estimativas de máxima verossimilhança considerando distribuição normal e IC de 95% (assintótico) para o parâmetro de inclinação em cada nível de temperatura.	23
4.3	Estimativas de máxima verossimilhança para o ajuste do modelo de aceleração dos dados da cola adesiva B e intervalos de confiança assintóticos. . .	24
5.1	Alocação das unidades avaliadas.	33
5.2	Estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir dos dados do Odor considerando distribuição normal e IC de 95% para o parâmetro de inclinação em cada condição de armazenagem.	38
5.3	Estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir dos dados do Sabor considerando distribuição normal e IC de 95% para o parâmetro de inclinação em cada condição de armazenagem.	39
5.4	Estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir dos dados do Aspecto considerando distribuição normal e IC de 95% para o parâmetro de inclinação em cada condição de armazenagem.	39
5.5	Estimativas de máxima verossimilhança para o ajuste do modelo de aceleração considerando os dados do Odor.	40
5.6	Estimativas de máxima verossimilhança para o ajuste do modelo de aceleração considerando os dados do Sabor.	40
5.7	Estimativas de máxima verossimilhança para o ajuste do modelo de aceleração considerando os dados do Aspecto.	40

5.8	Quantis da distribuição do tempo de vida de prateleira para todos os atributos em semanas.	44
5.9	Estimativas considerando o atributo Odor.	44
5.10	Estimativas considerando o atributo Sabor.	45
5.11	Estimativas considerando o atributo Aspecto.	45
5.12	Fatores de aceleração.	46

Capítulo 1

Introdução

A intensa competição das indústrias por uma maior participação no mercado, aliada à crescente expectativa dos consumidores, têm pressionado os fabricantes a produzirem produtos de alta qualidade.

Na indústria alimentícia esse panorama não é diferente. A competição entre as empresas pelo aumento da fatia de mercado, a intensificação de órgãos oficiais de inspeção, bem como o apeço dos consumidores pela qualidade dos alimentos, contribuem para acelerar o processo de melhoria da qualidade neste ramo.

Produtos alimentícios estão sujeitos à perda de nutrientes, oxidação, corrosão da embalagem, alterações no odor, sabor, aparência geral, etc. Tecnólogos e engenheiros de alimentos utilizam o termo *vida de prateleira* (*shelf life*) para referirem-se ao período de tempo compreendido entre a manufatura e o consumo de um produto alimentício no varejo, durante o qual ele tem qualidade satisfatória, em termos de seu valor nutricional, características relacionadas à saúde do consumidor (grau de deteriorização, culturas, oxidação, etc.) e, finalmente, em termos de aspectos sensoriais (odor, sabor, textura, cor, etc.)(IFT, 1974).

A vida de prateleira é determinada pelo fabricante, sendo diferente para cada tipo de alimento. Esta informação é um fator essencial para determinação das condições e métodos utilizados na distribuição do produto.

Desta forma, estudos para estimação do tempo de vida de prateleira são parte essencial de todo programa de desenvolvimento, manutenção e melhoria da qualidade de produtos alimentícios. Estes estudos são baseados em avaliações sensoriais e não-sensoriais.

Neste trabalho, apresentaremos uma abordagem - baseada em modelos de degradação para ensaios destrutivos - para análise de dados oriundos de testes sensoriais.

1.1 A natureza dos dados oriundos de avaliações sensoriais

Nas avaliações sensoriais, unidades experimentais do produto são submetidas ao julgamento de avaliadores treinados. Um experimento característico é aquele em que cada avaliador julga separadamente os atributos (por exemplo: odor, sabor e aspecto) e atribui notas em uma escala discreta previamente escolhida.

Na situação prática motivadora deste trabalho, descrita no Capítulo 2, é utilizada uma escala de “0” a “6”. O escore “0” representa total diferença em relação a um padrão de referência oferecido ao avaliador e “6” representa total similaridade. Isto significa que quanto mais próxima de “0” estiver a pontuação dada ao atributo avaliado, mais inadequado para consumo estará o produto considerando este atributo.

De maneira geral, as empresas definem um ponto de corte na escala adotada, indicando a “falha” do produto. Na situação mencionada acima, o ponto de corte é o escore “3”. As unidades pontuadas com escore menor ou igual a esse valor são consideradas impróprias para consumo (em relação ao atributo avaliado).

Assim, nos tempos de observação pré-determinados, são obtidos escores atribuídos a cada atributo das unidades avaliadas. Note que essas unidades ficam armazenadas desde o início do estudo até serem selecionadas aleatoriamente para avaliação. Dada a natureza destrutiva do ensaio, as unidades avaliadas não voltam para o armazenamento, são descartadas. Desta forma, Freitas, Borges e Ho (2003) destacam que:

- se uma unidade recebe um escore maior que o ponto de corte para um atributo A, digamos na 2ª semana, isto significa que ela estava ainda adequada para consumo na 2ª semana (em relação ao atributo A). Não se sabe quando ela ficará inadequada pois ela será descartada;
- se a unidade recebe um escore menor ou igual ao ponto de corte para o atributo A, digamos na 5ª semana, sabe-se que esta unidade se deteriorou em algum momento

entre o início do período de armazenamento e a data de avaliação.

Portanto, os dados oriundos de uma avaliação sensorial deste tipo têm a característica de serem censurados à direita e à esquerda (Meeker e Escobar, 1998).

1.2 Trabalhos relacionados

Na literatura, Gacula (1975) abordou o problema da estimação do tempo de vida de prateleira utilizando um modelo de regressão linear simples. Nesse modelo, a variável preditora é o tempo (pré-estabelecido) de avaliação e a variável resposta é a pontuação recebida pelo atributo do produto. Após a estimação dos parâmetros do modelo, a informação de interesse - o tempo no qual o atributo do produto recebe o escore igual ao ponto de corte - é obtida substituindo este valor na equação da reta estimada e resolvendo tal equação em função da variável preditora.

Esta abordagem é bem simples, entretanto, em grande parte das aplicações práticas, os dados oriundos deste tipo de estudo violam as suposições básicas para a utilização da análise de regressão (por exemplo, normalidade e homocedasticidade). Uma desvantagem desse enfoque é a dificuldade de estimar características importantes da distribuição do tempo de vida de prateleira, tais como percentis e fração de itens “não conformes”. Além disso, torna-se difícil incorporar variáveis explicativas (covariáveis ou fatores de um experimento planejado) no modelo e construir intervalos de confiança para as quantidades mencionadas.

Gacula e Kubala (1975) utilizaram distribuições comumente empregadas para modelar tempos de falha (Weibull, Lognormal e Valor Extremo, por exemplo) na modelagem de dados oriundos das avaliações sensoriais. Para isso, definiram como “tempo de falha”, o tempo de avaliação no qual a unidade (atributo do produto) recebe nota menor ou igual ao ponto de corte “c”. Devido à natureza destrutiva do ensaio, as unidades avaliadas com notas maiores do que “c” em um dado tempo de avaliação, são registradas como sendo censuras à direita. Os tempos de falha e as censuras à direita são então utilizados para avaliar a adequação dos diferentes modelos estatísticos.

Uma vez escolhida a distribuição que melhor descreve o comportamento do fenômeno, podemos estimar, por exemplo, percentis e frações de falha da distribuição do tempo de

vida de prateleira. Esta abordagem, embora sendo melhor do que a de Gacula (1975) tem o ponto fraco de poder superestimar algumas das quantidades de interesse como, por exemplo, o tempo médio de vida.

Freitas, Borges e Ho (2003) trataram o problema em questão através da dicotomização dos resultados. Nesta abordagem, é definida uma nova variável

$$y_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n_i),$$

que assume valor “0”, caso a unidade avaliada ainda não tenha falhado no tempo de avaliação t_i ; ou “1”, caso a unidade já tenha falhado.

Dessa forma, em cada tempo t_i de avaliação tem-se uma amostra da variável aleatória y_{ij} , distribuída segundo uma Bernoulli com probabilidade p_{ij} de falha, dada por:

$$p_{ij} = P(y_{ij} = 1) = P(0 < T_{ij} \leq t_i),$$

onde T_{ij} é a variável aleatória que representa o tempo de falha da j -ésima unidade da amostra de tamanho n_i , avaliada em t_i . Esta variável aleatória é modelada pelos autores segundo uma distribuição de Weibull, $W(\alpha_j; \delta)$, na qual o parâmetro de escala α é escrito em função de variáveis explicativas (covariáveis ou fatores de um experimento planejado).

Com esta suposição,

$$p_{ij} = 1 - R_j(t_i) = 1 - \exp\{-(\alpha_j t_i)^\delta\},$$

assim, a função de verossimilhança é então escrita para a amostra de variáveis aleatórias Bernoulli (independentes) e os parâmetros do modelo são estimados. Os percentis e frações de itens “não conformes” em vários pontos no tempo são estimados utilizando a propriedade de invariância dos estimadores de máxima verossimilhança.

Freitas e Costa (2006) generalizaram o modelo anterior, incorporando variáveis explicativas (covariáveis ou variáveis de um experimento planejado) à forma funcional do parâmetro de forma (δ) da distribuição de Weibull. Com isso, tornaram o modelo mais flexível para o tratamento de dados oriundos de experimentos planejados ou não.

Considerando o fato de que as censuras à esquerda e à direita são casos particulares de censura intervalar (Kalbfleisch e Prentice, 2002), uma outra abordagem seria utilizar modelos desenvolvidos para este tipo de censura.

Basicamente a análise de dados com censura intervalar pode ser feita pelo ajuste de dois tipos de modelos discretos - o de riscos proporcionais e o logístico - à probabilidade da falha ocorrer no intervalo, dado que não ocorreu no intervalo anterior. Lawless (1982) e Collet (2003) apresentam esta abordagem.

Freitas e Gomes (2006), utilizaram na situação de dados oriundos de avaliações sensoriais um modelo de riscos proporcionais. Neste caso, o modelo se simplifica pois o limite inferior dos intervalos é sempre o início do estudo. Os autores demonstraram que o modelo Weibull utilizado no trabalho anterior (Freitas, Borges e Ho, 2003) é um caso particular deste modelo de riscos proporcionais, no qual os parâmetros que representam o efeito dos intervalos de tempo entre as avaliações são função linear do logaritmo dos tempos pré-fixados de avaliação.

Pelo que foi exposto até aqui, fica claro que o problema da modelagem e análise dos dados oriundos de avaliações sensoriais pode ser visto sob diferentes abordagens. Além disso, a maioria das abordagens apresentadas não modelaram os escores propriamente ditos. A seguir apresentamos o objetivo deste trabalho.

1.3 Objetivo do trabalho

O objetivo deste trabalho é apresentar uma nova abordagem para estimar o tempo de vida de produto em prateleira. Utilizaremos modelos desenvolvidos para dados de testes de degradação acelerada, no caso de ensaios destrutivos, para os dados oriundos de avaliações sensoriais. Essa nova abordagem se justifica pelas seguintes razões:

- a maioria das abordagens utilizadas anteriormente para tratar o mesmo problema não fizeram uso dos escores propriamente ditos;
- os escores atribuídos nas avaliações sensoriais podem ser vistos como medidas de degradação dos atributos do produto;
- para o caso estudado (ver Capítulo 2) as avaliações sensoriais têm caráter destrutivo e as diferentes condições de armazenagem às quais as unidades foram submetidas podem ser vistas como variáveis de estresse para acelerar o processo de degradação.

Assim, modelaremos os escores oriundos das avaliações sensoriais através de modelos de degradação acelerada para ensaios destrutivos. A idéia básica desta modelagem está no artigo de Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003). Os autores utilizaram esta modelagem para o caso específico de uma cola adesiva utilizada em um componente de certo tipo de impressora. A análise foi feita supondo que os resultados experimentais seguissem a distribuição Normal.

Na situação prática motivadora deste trabalho, os dados experimentais são categóricos ordinais. Dessa forma algumas adaptações serão necessárias, modelaremos os dados supondo que a normalidade é válida.

Este texto está organizado em seis capítulos. No Capítulo 2, apresentamos a situação real motivadora deste trabalho (a mesma apresentada por Freitas, Borges e Ho, 2003). No Capítulo 3, expomos a idéia geral dos modelos de degradação e degradação acelerada. No Capítulo 4, um conjunto de dados referente à cola adesiva, semelhante ao apresentado por Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003), é analisado a título de ilustração da metodologia. No Capítulo 5, analisamos os dados oriundos das avaliações sensoriais através dos modelos de degradação acelerada com ensaios destrutivos. E, finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas considerações finais e conclusões.

Capítulo 2

Situação real motivadora

Com o objetivo de determinar o tempo de vida de prateleira de um produto desidratado, uma indústria adotou os procedimentos para a realização de testes sensoriais.

Uma amostra de unidades do produto foi selecionada da linha de produção, sendo cada uma das unidades alocada aleatoriamente em uma das seguintes condições de armazenagem:

- refrigeração (temperatura média no período: 4° C): temperatura e umidade relativa não controladas, manteve-se um registro das médias semanais (esses dados foram usados como referência);
- ambiente (temperatura média no período: 28, 8° C): temperatura e umidade relativa registradas continuamente;
- câmara climática: temperatura e umidade relativa controladas em 30° C e 80%, respectivamente;
- estufa: temperatura controlada em 37° C e umidade relativa não era controlada, mas manteve-se um registro das médias semanais.

Foram treinados 45 julgadores para as avaliações das unidades do produto em relação a três atributos: odor, sabor e aspecto. As avaliações eram feitas semanalmente por um grupo de oito julgadores selecionado aleatoriamente. Unidades do produto oriundas das condições de armazenagem eram selecionadas e atribuídas aos julgadores.

Nas semanas iniciais, cada julgador recebia em ordem aleatória três “kits” de unidades

para serem avaliados: [RE, REC, A]; [RE, REC, CC]; [RE, REC, E] onde RE: referência, REC: referência cega, A: ambiente, CC: câmara climática e E: estufa.

A unidade RE (referência) era rotulada como tal, e era sempre oriunda da condição de refrigeração. As outras unidades do “kit” não eram identificadas. A unidade REC (referência cega) também era oriunda da condição de refrigeração. Ela foi utilizada apenas para testar a consistência das notas do julgador.

As notas para os atributos da unidade sob avaliação eram dadas em comparação aos atributos da unidade rotulada como referência (RE) em uma escala de 0 a 6:

- 6: sem diferença;
- 5: muito pouca diferença;
- 4: leve diferença;
- 3: diferente;
- 2: grande diferença;
- 1: enorme diferença;
- 0: total diferença.

A empresa considerou unidades avaliadas com nota menor ou igual a 3 impróprias para o consumo. Em outras palavras, escores menores ou iguais a 3 caracterizaram a “falha” do produto (em relação ao atributo avaliado).

Note que um produto pode ter notas diferentes para cada atributo. Assim, decidiu-se por estudar cada atributo separadamente.

Uma vez avaliadas em relação aos três atributos, as unidades eram descartadas. Na data seguinte de avaliação, outras unidades eram selecionadas aleatoriamente das condições de armazenagem. Isto foi feito até o final do estudo. O tempo de duração do teste foi de 51, 36 e 18 semanas para as condições de armazenagem: ambiente, câmara climática e estufa, respectivamente.

Em seguida, apresentamos modelos de degradação e degradação acelerada, e logo depois um modelo de degradação acelerada para dados oriundos de ensaios destrutivos

utilizado por Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003) em uma situação semelhante à aqui apresentada.

Capítulo 3

Modelos de degradação e degradação acelerada

Certos produtos falham em consequência de um processo de degradação de algumas de suas características. Nesse caso, o tempo de falha T é definido como o tempo necessário para que a degradação de uma determinada característica atinja um nível crítico D_f .

Uma alternativa para a avaliação da confiabilidade desses produtos consiste em tomar medidas de degradação de unidades amostrais ao longo do tempo, ao invés dos tempos de falha, muitas vezes censurados. Dessa forma, avaliamos a confiabilidade de um produto a partir do uso de um modelo específico que, de maneira geral, descreve o comportamento no tempo de uma degradação particular. Veremos que, estimando os parâmetros desse modelo, a distribuição do tempo de falha pode ser estimada.

Quando a degradação - nas condições normais de uso - ocorre muito lentamente, é comum introduzir uma variável de estresse adequada (por exemplo: temperatura, umidade, voltagem, etc.), para acelerar o processo. Assim, o modelo deve considerar também o efeito da variável de aceleração na degradação.

A principal vantagem do uso de dados de degradação e dados de degradação acelerada está no fato de que em aplicações com poucas ou nenhuma falha, esses dados fornecem mais informação sobre a confiabilidade do que os tradicionais dados de tempo de falha censurados.

3.1 Modelos de degradação

Os dados de degradação podem representar medidas de degradação física ou medidas de alguma performance do produto em função do tempo (Meeker e Escobar, 1998). Estes dados podem estar disponíveis continuamente ou em pontos específicos no tempo onde medidas são tomadas.

Observemos que se todas as unidades de um certo produto fossem idênticas e estivessem submetidas às mesmas condições operacionais e ambientais, um modelo determinístico seria adequado para descrever a situação. Isso porque todas as unidades seguiriam a mesma trajetória de degradação e falhariam no mesmo tempo.

Entretanto, existe uma certa variabilidade em todos esses fatores, que é refletida nas curvas de degradação e nos tempos de falha das unidades. Então a aleatoriedade pode ser introduzida, apropriadamente, usando distribuições de probabilidade.

Em seguida expomos de maneira sucinta o modelo geral para dados de degradação apresentado por Meeker e Escobar (1998), bem como a estimação dos seus parâmetros e da função de distribuição acumulada do tempo de falha.

3.1.1 Modelo geral de degradação

O perfil de degradação de uma unidade particular no tempo é denotado por $D(t)$, $t > 0$. Nas aplicações são consideradas amostras cuja degradação observada y_{ij} de uma unidade i no tempo t_{ij} é dada por:

$$y_{ij} = D_{ij} + \epsilon_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i; \quad (3.1)$$

onde $D_{ij} = D(t_{ij}, \beta_{1i}, \dots, \beta_{ki})$ é o perfil de desgaste da unidade i no tempo t_{ij} e $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ é um erro aleatório correspondendo à observação da unidade i no tempo t_{ij} . O número total de inspeções na unidade i é denotado por m_i . O tempo t pode ser o tempo real, tempo de operação, ou alguma outra medida apropriada de uso como, por exemplo, quilometragem ou número de ciclos. Para a i -ésima unidade, $(\beta_{1i}, \dots, \beta_{ki})$ é um vetor de k parâmetros desconhecidos (geralmente, $k = 1, 2, 3$ ou 4) associado a covariáveis. Alguns desses parâmetros poderão variar de unidade para unidade, enquanto outros podem ser comuns à todas as unidades.

As escalas de y e t podem ser escolhidas para simplificar a forma de $D(t, \beta_1, \dots, \beta_k)$.

Transformações monótonas crescentes são empregadas com esse objetivo.

A escolha do modelo de degradação requer especificações da forma da função $D(t, \beta_1, \dots, \beta_k)$, e de quais β_1, \dots, β_k variam de unidade para unidade e quais são comuns à todas as unidades. Aqueles que variam de unidade para unidade serão considerados efeitos aleatórios e os demais serão efeitos fixos. Na exposição que se segue consideraremos por simplicidade como sendo de efeitos aleatórios.

Devido à flexibilidade na especificação da forma de $D(t, \beta_1, \dots, \beta_k)$, e na maneira em que β_1, \dots, β_k aparecem nessa forma, nós podemos, por simplicidade, modelar a variabilidade unidade-à-unidade nos parâmetros β_1, \dots, β_k com uma distribuição normal multivariada com vetor de média μ_β e matriz de covariância Σ_β .

Geralmente assume-se que os parâmetros β_1, \dots, β_k são independentes dos erros ϵ_{ij} e que σ_ϵ é constante. A adequação dessa última suposição pode ser afetada pela transformação de $D(t)$. Como os y_{ij} são tomados periodicamente na mesma unidade, existe uma potencialidade para autocorrelação entre os valores de ϵ_{ij} , $j = 1, \dots, m_i$, especialmente se existem leituras próximas. Porém, em muitas aplicações práticas a correlação é fraca e, além disso, dominada pela variabilidade de unidade para unidade nos valores β_1, \dots, β_k podendo ser ignorada.

Apesar dos valores de β_1, \dots, β_k para unidades individuais serem de interesse em algumas aplicações, concentraremos nosso estudo no uso de dados de degradação para fazer inferências sobre a população, processo ou predições sobre unidades futuras. Neste caso, os parâmetros de interesse serão μ_β e Σ_β , bem como o desvio padrão do erro aleatório σ_ϵ . Iremos usar $\theta_\beta = (\mu_\beta, \Sigma_\beta)$ para denotar todos os parâmetros da população ou processo.

Uma questão importante é a especificação da forma funcional (determinística) de $D(t)$. Como o modelo será utilizado para estimar o tempo de vida do produto ou sistema, é importante que, sempre que possível, engenheiros e cientistas encontrem formas funcionais para $D(t)$ que sejam baseadas em modelos existentes em sua literatura ou que os desenvolva a partir de princípios básicos relativos ao processo de degradação subjacente. Quando isso não for possível, um modelo empírico pode ser utilizado.

3.1.2 Estimação dos parâmetros do modelo de degradação

A verossimilhança para a estimação dos parâmetros aleatórios do modelo de degradação (3.1) pode ser expressa como:

$$L(\theta_\beta, \sigma_\epsilon | \text{Dados}) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\sigma_\epsilon} \phi_{nor}(\zeta_{ij}) \right] \times f_\beta(\beta_{1i}, \dots, \beta_{ki}; \theta_\beta) d\beta_{1i}, \dots, d\beta_{ki}, \quad (3.2)$$

onde $\zeta_{ij} = [y_{ij} - D(t_{ij}, \beta_{1i}, \dots, \beta_{ki})] / \sigma_\epsilon$ e $f_\beta(\beta_{1i}, \dots, \beta_{ki}; \theta_\beta)$ é a função de densidade normal multivariada.

Maximizar essa verossimilhança com respeito a $(\mu_\beta, \Sigma_\beta, \sigma_\epsilon)$ diretamente, é extremamente difícil, a menos que $D(t)$ seja uma função linear. Pinheiro e Bates (1995) implementaram a função nlme no S-Plus para estimar por máxima verossimilhança os parâmetros $\theta_\beta = (\mu_\beta, \Sigma_\beta)$ e σ_ϵ , bem como componentes específicos de cada unidade em $\beta_{1i}, \dots, \beta_{ki}, i = 1, \dots, n$.

3.1.3 Avaliação de $F(t)$

Um modelo específico para $D(t)$ e um nível crítico D_f , definem a distribuição dos tempos de falha. De maneira geral, esta distribuição pode ser escrita como uma função dos parâmetros do modelo de degradação.

Como uma unidade falha no tempo t se o seu nível de degradação atinge D_f nesse tempo, então

$$P(T \leq t) = F(t) = F(t; \theta_\beta) = P[D(t, \beta_1, \dots, \beta_k) \geq D_f], \quad (3.3)$$

para o caso de $D(t)$ ser do tipo crescente em t , ou

$$P(T \leq t) = F(t) = F(t; \theta_\beta) = P[D(t, \beta_1, \dots, \beta_k) \leq D_f], \quad (3.4)$$

para o caso de $D(t)$ ser do tipo decrescente.

Para um D_f fixo, a distribuição de T depende da distribuição de β_1, \dots, β_k , que depende basicamente dos parâmetros padrões em θ_β . Em alguns casos simples é possível escrever uma expressão com a forma fechada para $F(t)$. Em geral, no entanto, uma expressão com forma fechada não irá existir. Para muitos modelos práticos, especialmente quando $D(t)$ é não-linear e mais que um dos β_1, \dots, β_k é aleatório, é necessário avaliar $F(t)$ com métodos numéricos (integração direta ou método de Monte Carlo).

3.1.4 Estimação de $F(t)$

Podemos estimar a distribuição do tempo de falha $F(t)$ substituindo as estimativas $\hat{\theta}_\beta$ na equação (3.3) ou (3.4) obtendo $\hat{F}(t) = F(t; \hat{\theta}_\beta)$. Isto é direto para o caso em que existe uma forma fechada para a expressão de $F(t)$. Quando esta forma fechada não existe e quando métodos de transformação numérica são complicados, uma alternativa é utilizar o método de integração direta ou Monte Carlo para avaliar (3.3) ou (3.4) em $\hat{\theta}_\beta$.

Como não há método simples de calcular o desvio padrão de $\hat{F}(t)$, uma alternativa para uma estimativa intervalar da função de distribuição $F(t)$ consiste em usar o método bootstrap.

3.1.5 Análise de degradação aproximada

Um método alternativo (apenas aproximadamente correto) de analisar dados de degradação consiste em separar a análise para cada caminho (perfil) amostral. Neste caso, um modelo é ajustado separadamente para cada perfil por mínimos quadrados. Este modelo é então utilizado para prever os tempos de falha para cada unidade da amostra, ou seja, o tempo no qual cada perfil irá atingir o nível crítico D_f . Esses tempos são chamados “pseudo tempos de falha” e são analisados como uma amostra completa de tempos de falha para estimar $F(t)$.

Apesar de ser relativamente simples, esse método apresenta algumas limitações. Por exemplo, nem sempre é fácil obter a expressão do tempo de falha. Em casos onde a forma funcional de $D(t)$ é linear os pseudo tempos de falha são calculados como sendo $t = (D_f - \beta_0)/\beta_1$. Entretanto, quando a forma funcional de $D(t)$ é mais complicada, esse cálculo nem sempre é possível. Uma outra deficiência é que este método apresenta uma precisão artificialmente maior do que a real pois o erro da estimação dos parâmetros do modelo não é incorporado ao cálculo do desvio-padrão das estimativas do tempo de falha t .

3.2 Modelos de degradação acelerada

Para alguns produtos, as taxas de degradação nas condições de uso são tão baixas que uma degradação apreciável não irá ser observada durante testes usuais. Em tais casos,

pode ser possível acelerar o processo de degradação, por exemplo, introduzindo variáveis de estresse, como temperatura, umidade, voltagem, etc.

Nesta seção expomos de maneira resumida o modelo geral de degradação acelerada apresentado por Meeker e Escobar (1998), bem como a estimação dos seus parâmetros e da função de distribuição acumulada.

3.2.1 Modelo geral de degradação acelerada

Como na seção 3.1.1, a medida de degradação observada y_{ij} da i -ésima unidade no tempo t_{ij} é dada pela equação (3.1), porém agora $D(t)$ incluirá um componente extra devido à variável de estresse utilizada.

3.2.2 Estimação dos parâmetros do modelo de degradação acelerada

A estimação de μ_β, Σ_β e $\sigma\epsilon$ é também feita a partir da expressão de verossimilhança (3.2). O método de estimação citado na seção 3.1.2 pode ser aplicado diretamente ao modelo de degradação acelerada.

3.2.3 Estimação da função de distribuição acumulada, $F(t)$

Assim como no caso dos modelos de degradação, podemos estimar $F(t)$ substituindo a estimativa de $\hat{\theta}_\beta = (\hat{\mu}_\beta, \Sigma_\beta)$ em

$$P(T \leq t) = F(t) = F(t; \theta_\beta) = P[D(t, \beta_1, \dots, \beta_k) \geq D_f], \quad (3.5)$$

no caso de $D(t)$ ser crescente em t , ou

$$P(T \leq t) = F(t) = F(t; \theta_\beta) = P[D(t, \beta_1, \dots, \beta_k) \leq D_f], \quad (3.6)$$

no caso de $D(t)$ ser decrescente.

Obtemos diretamente $\hat{F}(t) = F(t; \hat{\theta}_\beta)$ quando $F(t)$ possui uma forma fechada.

Quando não existe expressão fechada para $F(t)$, e quando métodos de transformações numéricas são complicados, pode-se usar o algoritmo de integração direta ou o método de Monte Carlo para avaliar $F(t)$ em $\hat{\theta}_\beta$.

Podemos também usar o método bootstrap para uma estimativa intervalar de $F(t)$ nos modelos de degradação acelerada.

3.2.4 Análise de degradação acelerada aproximada

O método simples para análise de dados de degradação explicado na seção 3.1.5 pode ser estendido diretamente para a análise de degradação acelerada.

Capítulo 4

Modelos de degradação acelerada com ensaios destrutivos

Em algumas aplicações o processo de medida da degradação destrói as unidades testadas. Dessa forma, não é possível acompanhar a trajetória de degradação de uma unidade ao longo do tempo, apenas uma medida significativa pode ser tomada em cada unidade. Nestas aplicações coletamos “dados de degradação com ensaios destrutivos”. A situação prática descrita no Capítulo 2 se enquadra neste tipo de problema pois podemos considerar os escores atribuídos aos atributos como medidas de degradação e as unidades, quando submetidas à avaliação sensorial, são descartadas.

Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003) apresentam uma importante classe de modelos para dados de degradação acelerada com ensaios destrutivos. Eles exemplificam com os dados oriundos de um teste realizado para a estimação da confiabilidade de um tipo de uma cola adesiva utilizada em um componente de certo tipo de impressora.

Neste capítulo, apresentamos esta classe de modelos e refazemos a análise do exemplo da cola adesiva, com o objetivo de ilustrar o método. Algumas adaptações foram feitas pois os dados não estavam disponíveis no artigo. Os comentários pertinentes serão feitos ao longo do capítulo.

4.1 Dados da cola adesiva B

Um teste de degradação foi realizado com o objetivo de avaliar a resistência de uma cola adesiva ao longo do tempo. Em particular, era de interesse estimar a proporção de componentes com resistência abaixo de 40 Newtons, após 5 anos de operação (aproximadamente 260 semanas), na temperatura de 25° C. O tempo disponível para a realização do teste era de 16 semanas, então aceleração seria necessária, uma vez que a 25° C, pouca ou nenhuma degradação deveria ser esperada. O teste era de natureza destrutiva, uma vez que a resistência de cada unidade pode ser medida uma única vez.

Os dados da resistência são mostrados na Figura 4.1. Como os dados originais não estavam disponíveis em Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003), elaboramos um banco de dados semelhante ao utilizado por eles. Além disso, em Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003), 80 unidades foram submetidas ao teste, sendo que 6 delas apresentaram valores muito baixos de resistência e foram consideradas como censuras. Na nossa análise, desconsideramos essas observações.

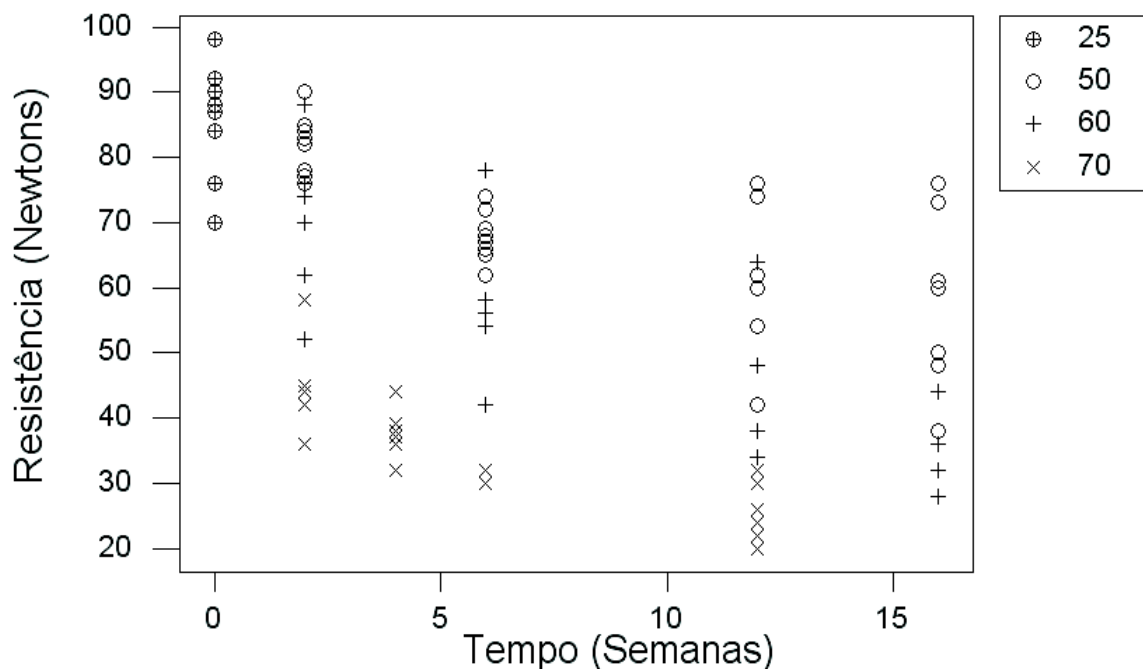


Figura 4.1: Dados da resistência da cola adesiva B.

Assim temos oito unidades, medidas no início do experimento a 25° C, e um total de

74 unidades alocadas e medidas de acordo com a temperatura e o tempo mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Alocação das unidades testadas.

Temp °C	Semanas					
	0	2	4	6	12	16
70	5	6	4	9	0	
60	6	0	5	5	4	
50	8	0	8	7	7	
-	8					

4.2 Modelo geral de degradação acelerada com ensaios destrutivos

Para os testes de degradação acelerada com ensaios destrutivos, o perfil de degradação de uma unidade avaliada em um determinado tempo t_i , submetida a uma particular condição da variável de aceleração $AccVar_j$, é denotado por:

$$D_{ij} = D(\tau_i, x_j, \beta); \quad (4.1)$$

onde $\tau_i = h_t(t_i)$ e $x_j = h_a(AccVar_j)$ são transformações monótonas crescentes de t_i e $AccVar_j$, respectivamente.

Nas aplicações são consideradas amostras cujo modelo para o perfil de degradação da unidade k é dado por:

$$y_{ijk} = h_d(D_{ij}) + \epsilon_{ijk} = \mu_{ij} + \epsilon_{ijk}, \quad (4.2)$$

onde $\mu_{ij} = h_d(D_{ij})$ e y_{ijk} são, respectivamente, transformações monótonas crescentes de D_{ij} e da degradação (resistência) observada da unidade k ($k = 1, \dots, n_{ij}$) submetida ao nível de temperatura j ($j = 1, \dots, m$) no tempo i ($i = 1, \dots, l_j$). O erro aleatório é representado por ϵ_{ijk} , e descreve a variabilidade de unidade para unidade. Temos que $(\epsilon_{ijk}/\sigma) \sim \Phi(z)$, onde $\Phi(z)$ é uma distribuição completamente especificada. Para a

aplicação da cola adesiva B, consideraremos a distribuição Normal.

A forma da função D e as transformações apropriadas podem ser sugeridas pela teoria físico-química, experiência passada ou empiricamente.

Na aplicação apresentada neste capítulo, os parâmetros β são comuns à todas as unidades e desconhecidos.

A Figura 4.2 sugere que algum tipo de transformação deve ser usada para linearizar os perfis de degradação da resistência da cola adesiva B.

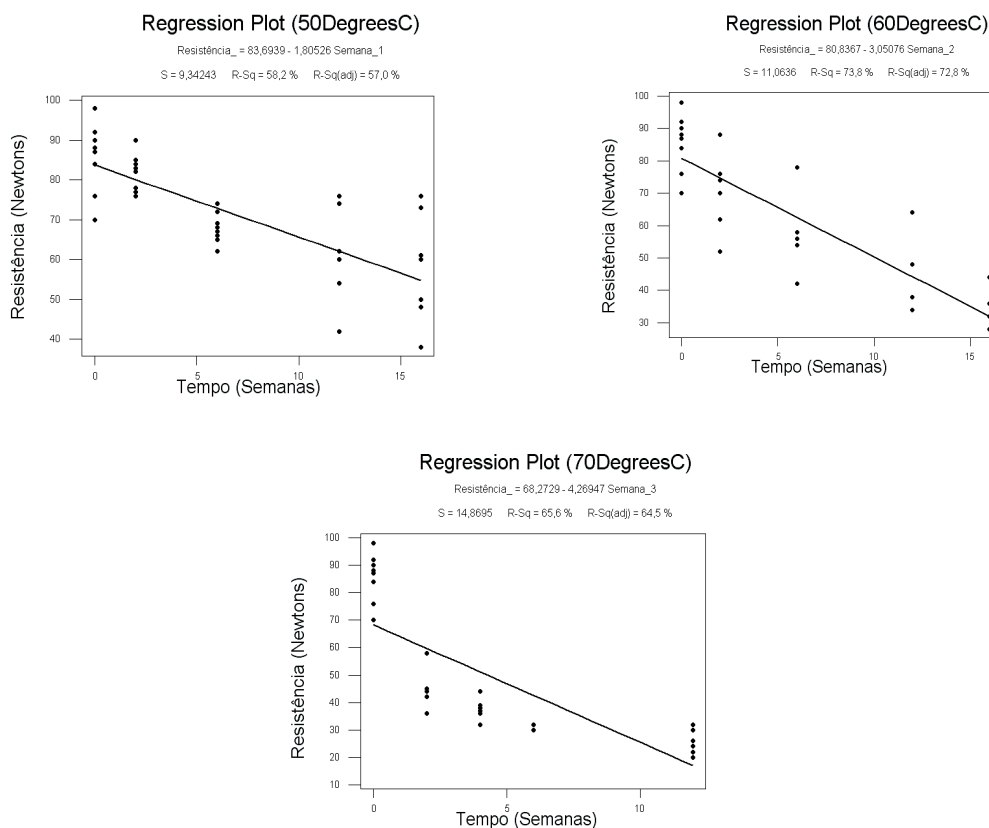


Figura 4.2: Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados da cola adesiva B em cada nível de temperatura.

Foram investigadas algumas transformações para os dados da cola adesiva B e para outros conjuntos de dados similares. De todos os casos, a combinação de uma transformação logarítmica da resposta de degradação com a raiz quadrada do tempo resultaram em um melhor ajuste. A Figura 4.3 apresenta gráficos que ilustram o efeito destas transformações.

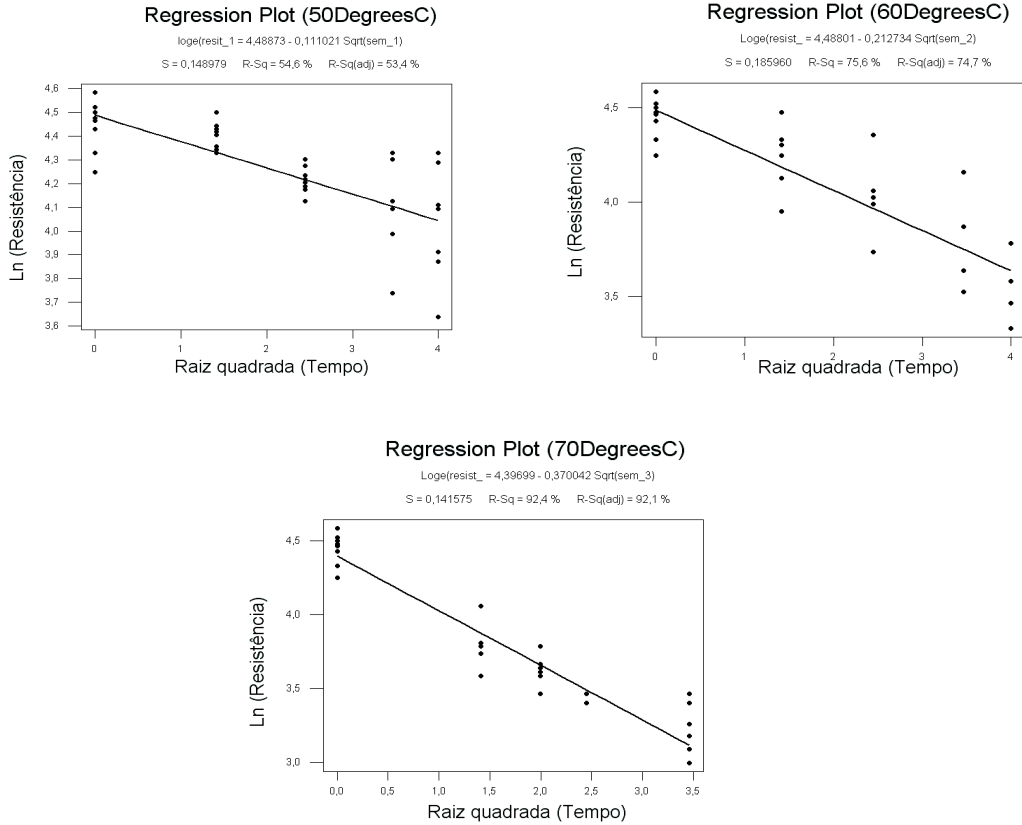


Figura 4.3: Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados transformados.

4.3 Modelo para aceleração

Para a aplicação da cola adesiva B, Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003) assumiram que a taxa de degradação (na escala de tempo transformada) poderia ser descrita pela relação de Arrhenius, dessa forma:

$$D(\tau, x, \beta) = \exp[\beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x) \tau], \quad (4.3)$$

onde $\tau = \sqrt{\text{semana}}$ e $x = -11605/({}^\circ\text{C}_j + 273,15)$. Esta relação entre a degradação e a temperatura é mostrada na Figura 4.4.

Assim, na escala log-degradação, as regressões individuais são lineares em τ , isto é,

$$\log[D(\tau, x, \beta)] = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x) \tau.$$

Então, para a aplicação da cola adesiva B, os modelos para perfis de degradação amostral são, em geral, da forma:

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \epsilon_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x_j) \tau_i + \epsilon_{ijk}, \quad i = 1, \dots, l_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n_{ij} \quad (4.4)$$

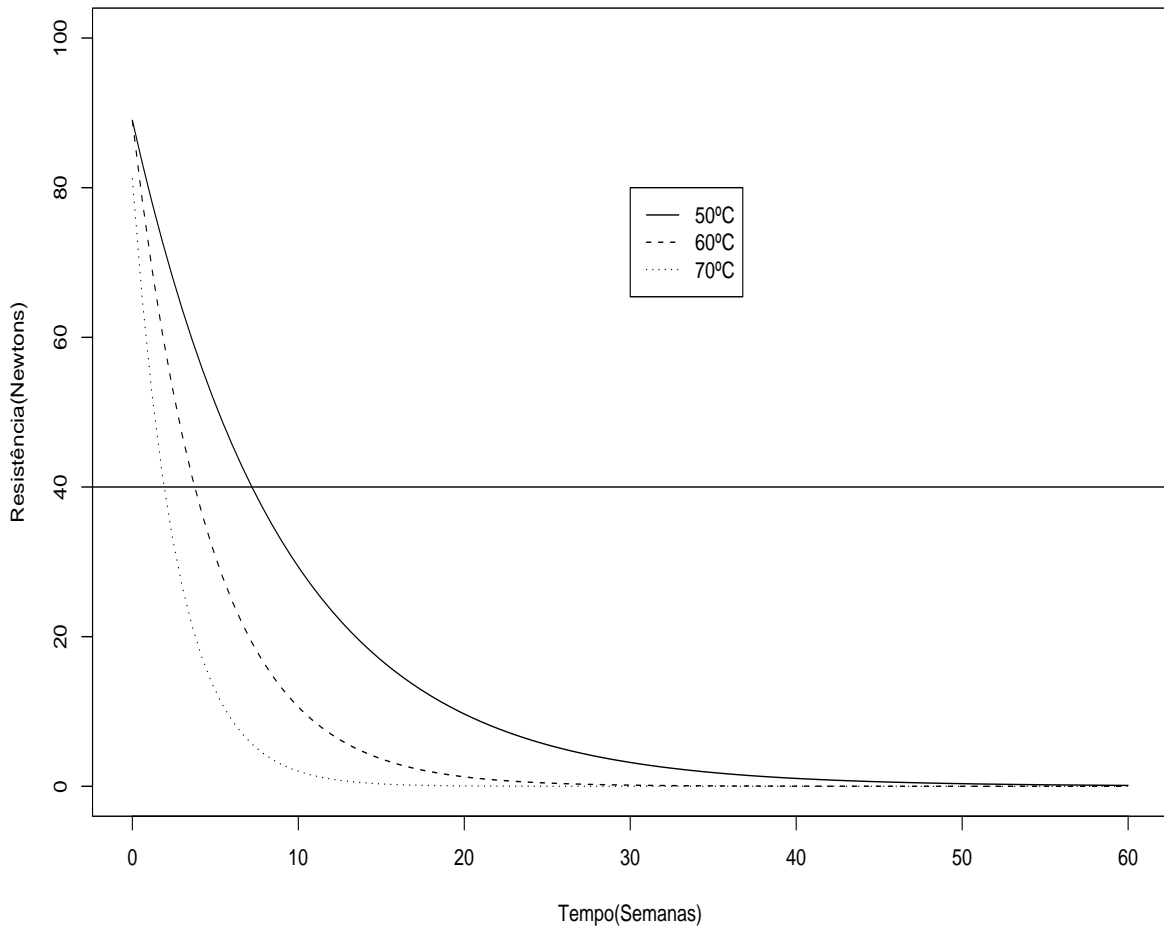


Figura 4.4: Modelo de perfil de degradação para as três temperaturas.

onde y_{ijk} é o logaritmo da degradação observada.

Para situações de múltiplas variáveis de aceleração, o termo $\beta_2 x_j$ pode ser trocado por uma combinação linear de variáveis de aceleração.

4.4 Estimação pelo método de máxima verossimilhança

4.4.1 Estimação dos parâmetros do modelo para cada nível de temperatura separadamente

Para os dados da cola adesiva B coletados a partir de unidades alocadas em uma condição fixa x_j da *AccVar*, sem observações censuradas, a verossimilhança é:

$$L_j(\theta|Dados) = \prod_{i=1}^{l_j} \prod_{k=1}^{n_{ij}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_{ijk} - \mu_{ij})^2}{2\sigma^2}\right] \right\}, \quad (4.5)$$

onde $\mu_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x_j) \tau_i$, $\theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma)$ é o vetor de parâmetros desconhecidos e n_{ij} é o número de observações em (τ_i, x_j) .

Para x_j fixo, os parâmetros considerados são: o desvio padrão do erro σ ; o intercepto β_0 ; e a inclinação da linha $v^{[j]} = \beta_1 \exp(\beta_2 x_j)$. Assim, para cada condição específica de x_j , três estimativas de máxima verossimilhança são obtidas: $\hat{\beta}_0^{[j]}$, $\hat{v}^{[j]}$ e $\hat{\sigma}^{[j]}$. O parâmetro $v^{[j]}$ pode ser interpretado como a taxa de degradação de μ_{ij} em relação ao tempo transformado τ_i .

Os resultados obtidos para as estimativas de máxima verossimilhança de $\beta_0^{[j]}$ e $v^{[j]}$, bem como para o desvio padrão de $v^{[j]}$, nas condições $x_1 = 50^\circ C$, $x_2 = 60^\circ C$ e $x_3 = 70^\circ C$ são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Estimativas de máxima verossimilhança considerando distribuição normal e IC de 95% (assintótico) para o parâmetro de inclinação em cada nível de temperatura.

<i>AccVar_j</i>	Estimativas			IC de 95%* para $v^{[j]}$	
	$\hat{\beta}_0^{[j]}$	$\hat{v}^{[j]}$	$\hat{\sigma}_{\hat{v}^{[j]}}$	LI	LS
50° C	4,489	-0,111	0,01687	-0,1441	-0,0779
60° C	4,488	-0,213	0,02368	-0,2594	-0,1666
70° C	4,397	-0,370	0,01939	-0,4080	-0,3320

*assintótico

4.4.2 Verossimilhança para o modelo de aceleração usando os dados de todos os níveis de temperatura

Para uma amostra de n unidades (sem observações censuradas), a verossimilhança pode ser expressa como:

$$L(\theta|Dados) = \prod_{j=1}^m L_j(\theta|Dados) = \prod_{ijk} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_{ijk} - \mu_{ij})^2}{2\sigma^2}\right] \right\}, \quad (4.6)$$

onde $\mu_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x_j) \tau_i$ e $\theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma)$.

Para os dados da cola adesiva B a Tabela 4.3 mostra as estimativas obtidas utilizando o método de otimização global *Simulated Annealing* (Laarhoven e Aarts, 1988) do software R.

Tabela 4.3: Estimativas de máxima verossimilhança para o ajuste do modelo de aceleração dos dados da cola adesiva B e intervalos de confiança assintóticos.

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC de 95% assintótico	
			LI	LS
β_0	4,479	0,03288	4,415	4,543
β_1	$-8,0 \times 10^8$	$3,355 \times 10^4$	-800065758	-799934242
β_2	0,634	0,001463	0,631	0,637
σ	0,172	0,01447	0,1436	0,2007

Estas estimativas são usadas também para fazer previsões nas condições de uso (25° C).

Durante a estimação desses parâmetros um fato nos chamou atenção. A estimativa encontrada para o parâmetro β_1 coincidiu com o “chute” inicial que foi dado para a execução do método, para vários valores escolhidos próximos da estimativa desse parâmetro ($-8,641 \times 10^8$) apresentada no artigo de Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003). Para valores muito diferentes desse, o método converge para próximo destes outros valores. É importante ressaltar a baixa precisão da estimativa obtida para β_1 .

4.4.3 Análise dos resíduos

Para os dados da cola adesiva B, a Figura 4.5 mostra o gráfico dos resíduos padronizados versus valores ajustados (note que há um valor ajustado distinto para cada combinação de tempo e temperatura).

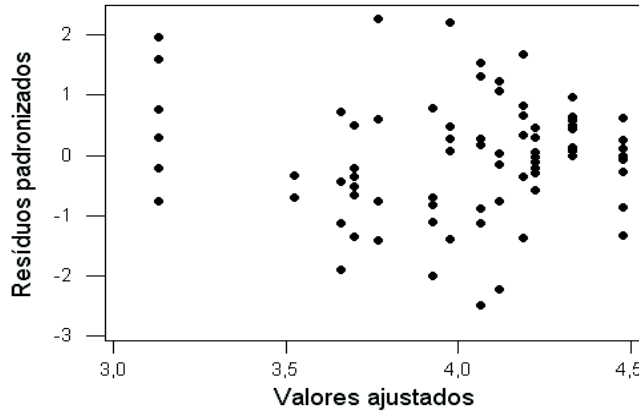


Figura 4.5: Resíduos versus valores ajustados.

A Figura 4.6 é um gráfico de probabilidade normal dos resíduos. Estes gráficos sugerem que a distribuição normal é adequada para os resíduos.

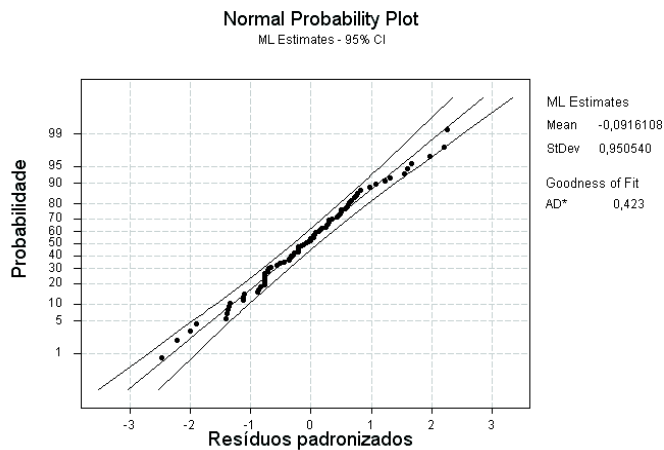


Figura 4.6: Gráfico de probabilidade normal para os resíduos padronizados.

Tudo o que fizemos até agora foi validar o modelo proposto. No entanto, nosso interesse principal é encontrar a distribuição do tempo de falha da cola adesiva B através da distribuição da medida de degradação y da sua resistência. Isso será feito na Seção 4.6.

4.5 Distribuição da degradação no tempo e condições de aceleração ($t, AccVar$)

4.5.1 Função de distribuição da degradação

Para um dado tempo e uma condição da variável de aceleração, a função de distribuição da degradação é:

$$P(Y \leq y; \tau, x) = F_Y(y; \tau; x) = \Phi\left[\frac{y - \mu(\tau, x, \beta)}{\sigma}\right], \quad (4.7)$$

onde $\mu(\tau, x, \beta)$ e y são transformações monótonas crescentes do perfil de degradação e da degradação observada em um determinado tempo $\tau = h(t)$ e uma particular condição da variável de aceleração $x = h(AccVar)$.

A estimativa de máxima verossimilhança da função de distribuição da degradação dado ($t, AccVar$) é obtida fazendo:

$$\hat{F}_Y(y; \tau; x) = \Phi\left(\frac{y - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right). \quad (4.8)$$

Para os dados da cola adesiva B, a estimativa de máxima verossimilhança de $F_Y(y; \tau, x)$ considerando a distribuição normal de Y no tempo e temperatura (semana, °C) é:

$$\hat{F}_Y(y; \tau, x) = \Phi_{nor}\left(\frac{y - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \quad (4.9)$$

onde $y = \log(\text{degradação})$, $\hat{\mu} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \exp(\hat{\beta}_2 x) \tau$, $\tau = \sqrt{\text{semana}}$ e $x = -11605/(\text{°C} + 273,15)$. As estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ e $\hat{\sigma}$ são dadas na Tabela 4.3.

4.5.2 Quantis da distribuição da degradação

O quantil p da distribuição da degradação corresponde ao valor $y_p = \mu(t, x, \beta) + \sigma \Phi^{-1}(p)$.

A estimativa de máxima verossimilhança de y_p na escala transformada (log Newtons para o exemplo da cola adesiva B) é $\hat{y}_p = \hat{\mu} + \hat{\sigma} \Phi_{nor}^{-1}(p)$.

4.6 Distribuição do tempo de falha em valores fixos de $(AccVar, D_f)$ para degradação linear decrescente

4.6.1 Distribuição do tempo de falha

Observe que $T \leq t$ (isto é, $h_t(T) \leq \tau$) é equivalente à degradação observada ser menor que D_f (isto é, $Y \leq \mu_f$), onde $\mu_f = h_d(D_f)$. Então:

$$F_T(t; x, \beta) = P(T \leq t) = F_Y(\mu_f; x, \beta) = \Phi\left[\frac{\mu_f - \mu(\tau, x, \beta)}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\tau - \nu}{\varsigma}\right), \text{ para } t \geq 0 \quad (4.10)$$

onde $\tau = h_t(t)$,

$$\nu = \frac{(\beta_0 - \mu_f) \exp(-\beta_2 x)}{|\beta_1|} \text{ e } \varsigma = \frac{\sigma \exp(-\beta_2 x)}{|\beta_1|}.$$

Para $t > 0$ a função de distribuição acumulada é contínua e concorda com a função de distribuição de uma variável com a função de distribuição padronizada $\Phi(z)$, com parâmetro de locação ν e parâmetro de escala ς .

4.6.2 Quantis da distribuição do tempo de falha

O quantil p da distribuição do tempo de falha pode ser expresso como se segue. Seja $p \geq \Phi[(\beta_0 - \mu_f)/\sigma]$ e $h_t(t_p) = \tau_p = \nu + \varsigma\Phi^{-1}(p)$, onde

$$\nu = \frac{(\beta_0 - \mu_f) \exp(-\beta_2 x)}{|\beta_1|} \text{ e } \varsigma = \frac{\sigma \exp(-\beta_2 x)}{|\beta_1|}.$$

Então o quantil p da distribuição do tempo de falha é $t_p = h_t^{-1}[\nu + \varsigma\Phi^{-1}(p)]$.

4.7 Avaliação da confiabilidade da cola adesiva B

Agora já temos ferramentas suficientes para responder à questão de interesse relativa à confiabilidade da cola adesiva B. Isto é, podemos estimar a proporção de componentes com resistência abaixo de 40 Newtons, após 5 anos de operação (aproximadamente 260 semanas), na temperatura de 25° C.

A partir das estimativas dadas na Tabela 4.3 e da expressão (4.10), estimamos essa proporção como sendo aproximadamente 0,08%. Dessa forma, vemos que após 5 anos de operação a proporção de falhas é pequena.

Apesar de inicialmente não termos interesse em estimar essa proporção após 20 anos (aproximadamente 1040 semanas), também apresentamos essa estimativa que é de 4,27%.

Assim, concluímos que a cola adesiva B apresenta uma baixa proporção de falhas mesmo após um período razoavelmente grande de operação.

Além disso, para a aplicação da cola adesiva B, temos os seguintes quantis da distribuição do tempo de falhas: $\hat{t}_{0,01} = 644,3$ semanas (aproximadamente 12 anos); $\hat{t}_{0,05} = 1093$ semanas (aproximadamente 21 anos); $\hat{t}_{0,1} = 1380,4$ semanas (aproximadamente 26 anos); e $\hat{t}_{0,5} = 2652,5$ semanas (aproximadamente 51 anos).

4.8 Fatores de aceleração

Consideremos o fator de aceleração para quantificar o efeito do uso de um valor x , mais alto que o usual x_U , da variável de aceleração. Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003) apresentam fatores de aceleração para transformações de potência do tempo (isto é, $\tau = h_t(t) = t^k$, onde $k > 0$).

Sendo $\tau(x)$ e $\tau(x_U)$, os tempos transformados para atingir a degradação crítica D_f quando a variável de aceleração assume valores x e x_U , respectivamente, resolvemos a equação

$$D_f[\tau(x), x, \beta] = D_f[\tau(x_U), x_U, \beta] \quad (4.11)$$

para $\tau(x)$ e $\tau(x_U)$, obtendo:

$$\frac{\tau(x_U)}{\tau(x)} = \frac{h_t[t(x_U)]}{h_t[t(x)]} = \exp[\beta_2(x - x_U)]. \quad (4.12)$$

Usando $\tau(x) = h_t[t(x)] = [t(x)]^k$ e resolvendo a equação (4.12) para $t(x_U)/t(x)$ obtemos a seguinte expressão para o fator de aceleração:

$$AF(x) = \frac{t(x_U)}{t(x)} = \exp\left[\frac{\beta_2}{k}(x - x_U)\right]. \quad (4.13)$$

Para a aplicação da cola adesiva B, $k = 1/2$ e a temperatura nas condições de uso é 25° C. Então, a partir da expressão (4.13), podemos obter os fatores de aceleração para as temperaturas de 50° C, 60° C e 70° C. Estes fatores são, respectivamente: 45,52; 178,59 e 646,96.

Isto significa que as unidades submetidas à temperatura usual de operação (25°C)

apresentam resistência abaixo de 40 Newtons após um tempo cerca de 45,52 vezes maior que à 50° C; 178,59 vezes maior que à temperatura de 60° C e 646,96 vezes maior que à 70° C.

Capítulo 5

Aplicação em tempo de vida de prateleira

Como na situação da cola adesiva B apresentada no Capítulo 4, o processo de avaliação dos atributos sensoriais do produto desidratado descrito no Capítulo 2, descarta as unidades testadas. Dessa forma, não temos acompanhamento da trajetória de degradação das unidades ao longo do tempo.

Os escores atribuídos aos atributos sensoriais do produto podem ser vistos como medidas de degradação. Além disso, as diferentes condições de armazenagem, às quais as unidades foram submetidas - ambiente (temperatura média registrada no período: 28,8° C), câmara climática (30° C) e estufa (37° C) - contribuem para acelerar o processo de degradação.

Estas características, justificam o uso de modelos desenvolvidos para dados de testes de degradação acelerada, no caso de ensaios destrutivos, para os dados oriundos das avaliações sensoriais.

Neste capítulo, fazemos a análise da situação prática descrita no Capítulo 2 aplicando o método descrito em Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003). Ressaltamos que para que a metodologia pudesse ser aplicada, foi necessário trabalhar com um subconjunto dos dados originais e adaptar os objetivos originais do estudo. A situação hipotética criada está descrita na próxima seção.

5.1 Dados oriundos das avaliações sensoriais

Conforme descrevemos no Capítulo 2, com o objetivo de determinar a distribuição do tempo de vida de prateleira de um produto desidratado, avaliações sensoriais foram realizadas por uma indústria.

Suponha que seja de interesse estimar a proporção de unidades avaliadas com escores menores ou iguais a 3 - para cada atributo separadamente - após 60 semanas de armazenagem, na temperatura de 20° C. Suponha ainda que o tempo disponível para a realização do teste seja de no máximo 36 semanas, então aceleração seria necessária, uma vez que a 20° C, pouca degradação seria esperada.

Os dados coletados nos testes sensoriais são mostrados nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3 (ressaltamos que para a condição ambiente, utilizou-se os dados avaliados até a 36ª semana somente). Estas figuras nos permitem uma análise da degradação dos atributos nas três condições de armazenagem.

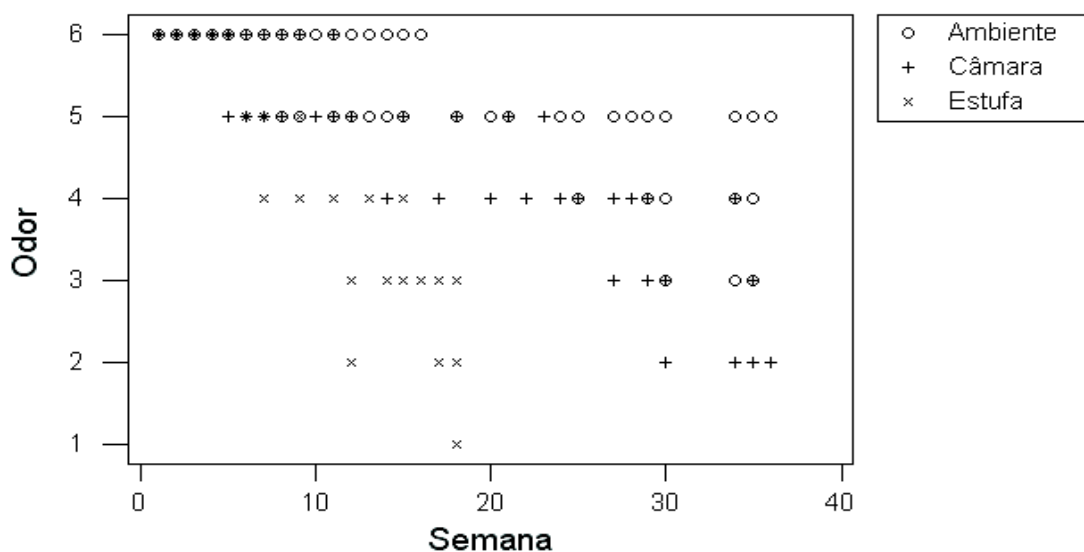


Figura 5.1: Dados do Odor para todas as condições de armazenagem.

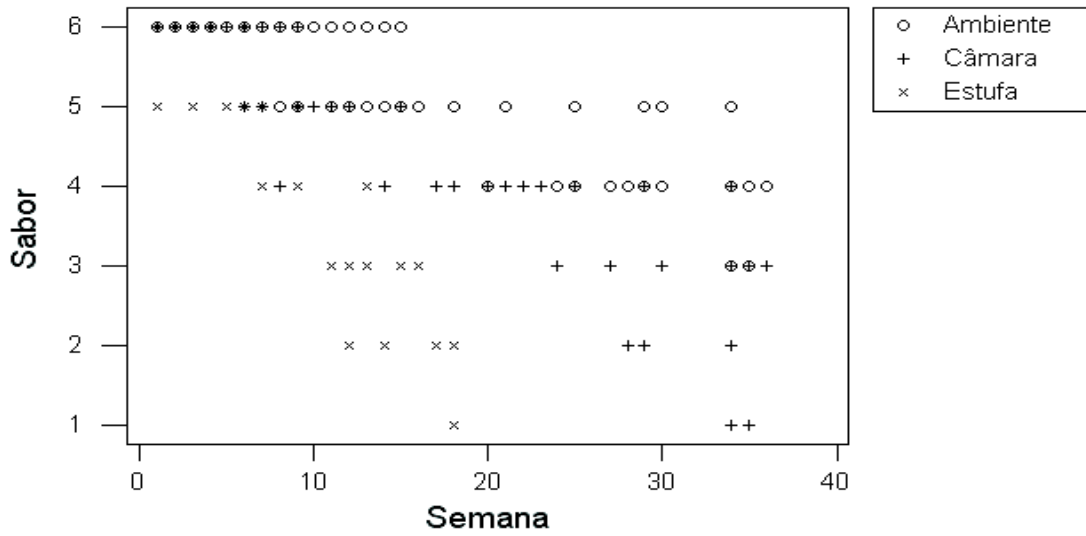


Figura 5.2: Dados do Sabor para todas as condições de armazenagem.

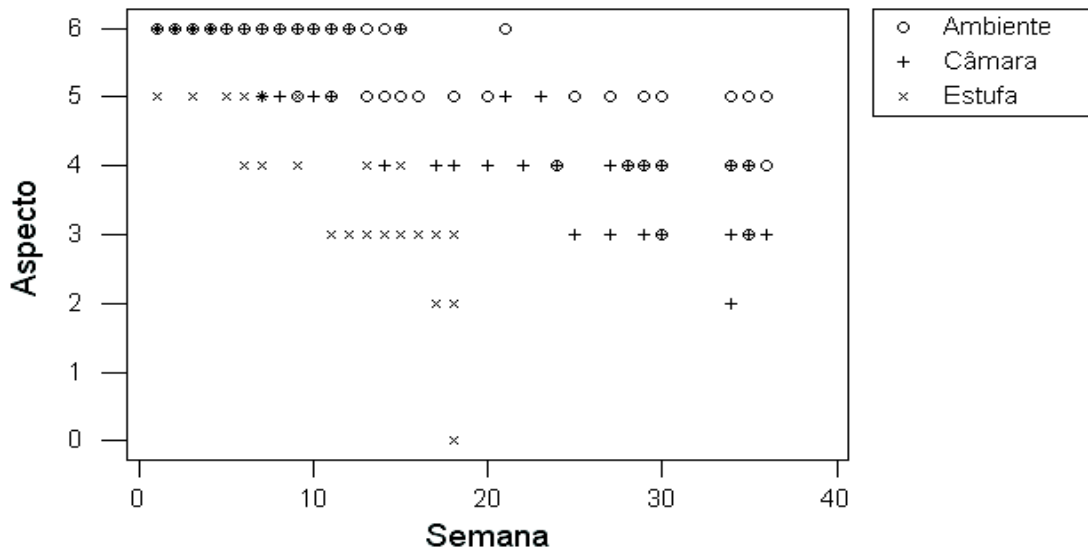


Figura 5.3: Dados do Aspecto para todas as condições de armazenagem.

Observamos para os três atributos que a degradação ocorre mais rapidamente nas condições de armazenagem que apresentam maiores temperaturas - câmara climática e estufa.

Foram consideradas um total de 177 unidades, alocadas e avaliadas de acordo com a condição de armazenagem e o tempo apresentado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Alocação das unidades avaliadas.

Tempo (Semanas)	Ambiente 28, 8°C*	Câmara Climática 30°C	Estufa 37°C
1	3	3	3
2	3	3	4
3	4	1	3
4	3	3	2
5	3	4	1
6	3	5	3
7	3	5	2
8	4	3	0
9	4	2	3
10	1	3	0
11	4	2	1
12	3	2	2
13	5	0	2
14	4	1	1
15	2	2	2
16	1	0	1
17	0	1	2
18	1	2	6
19	0	0	0
20	1	1	0
21	2	1	0
22	0	2	0
23	0	1	0
24	1	1	0
25	2	1	0
26	0	0	0
27	1	2	0
28	1	1	0
29	2	3	0
30	3	2	0
31	0	0	0
32	0	0	0
33	0	0	0
34	4	6	0
35	3	2	0
36	2	1	0
Total	73	66	38

*temperatura média no período

5.2 Modelo de degradação acelerada para os dados oriundos das avaliações sensoriais

O modelo considerado para o perfil de degradação de cada atributo de uma unidade avaliada em um determinado tempo t_i , alocada em uma particular condição de armazenagem (variável de aceleração) $AccVar_j$ é dado pela relação (4.1).

Para cada perfil de degradação amostral na aplicação da avaliação do tempo de vida de prateleira, utilizaremos o modelo (4.2). Como na aplicação da cola adesiva B, também consideraremos a distribuição normal para os erros aleatórios embora essa suposição possa não ser verdadeira. Além disso, para cada atributo separadamente, os parâmetros β são comuns à todas as unidades e desconhecidos.

As figuras 5.4, 5.5 e 5.6 sugerem que o perfil de degradação dos atributos das unidades avaliadas é linear. Dessa forma, nenhuma transformação será aplicada.

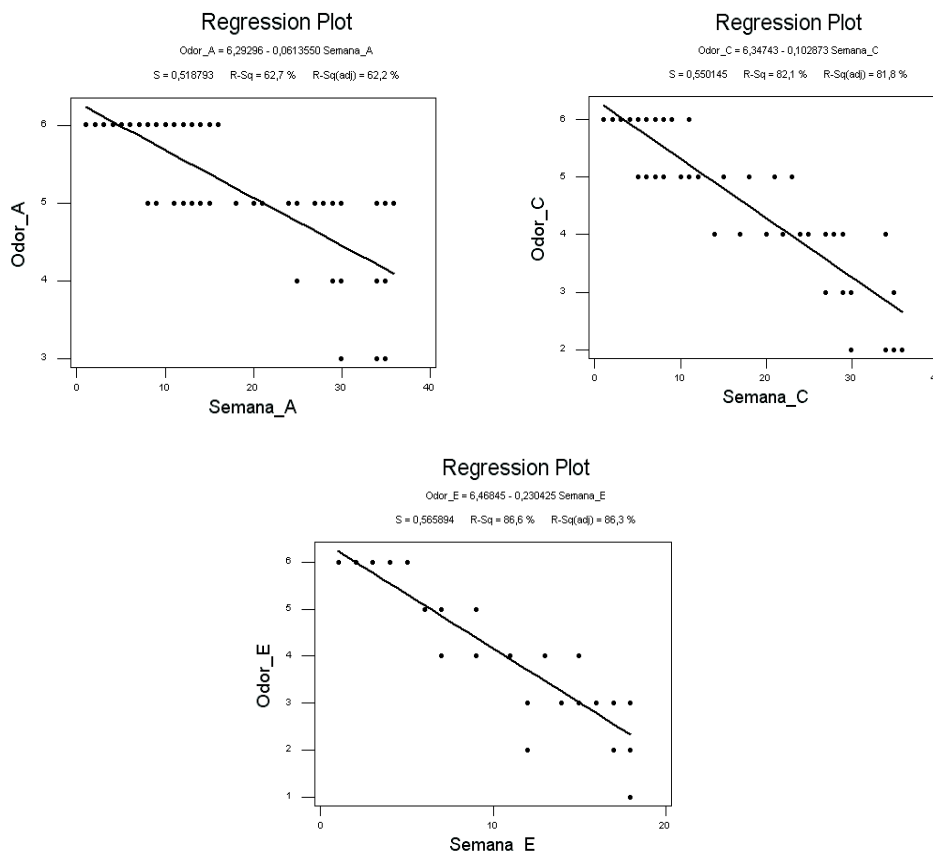


Figura 5.4: Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados do Odor para cada condição de armazenagem.

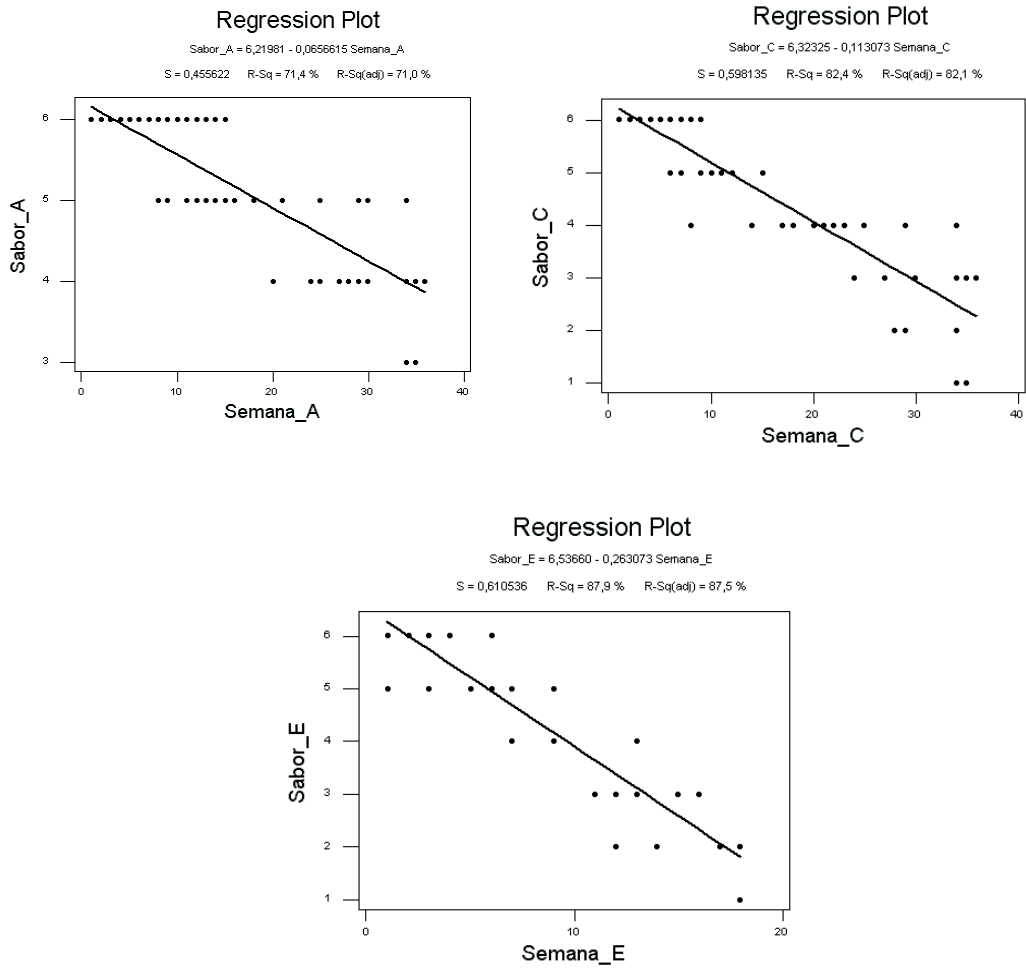


Figura 5.5: Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados do Sabor para cada condição de armazenagem.

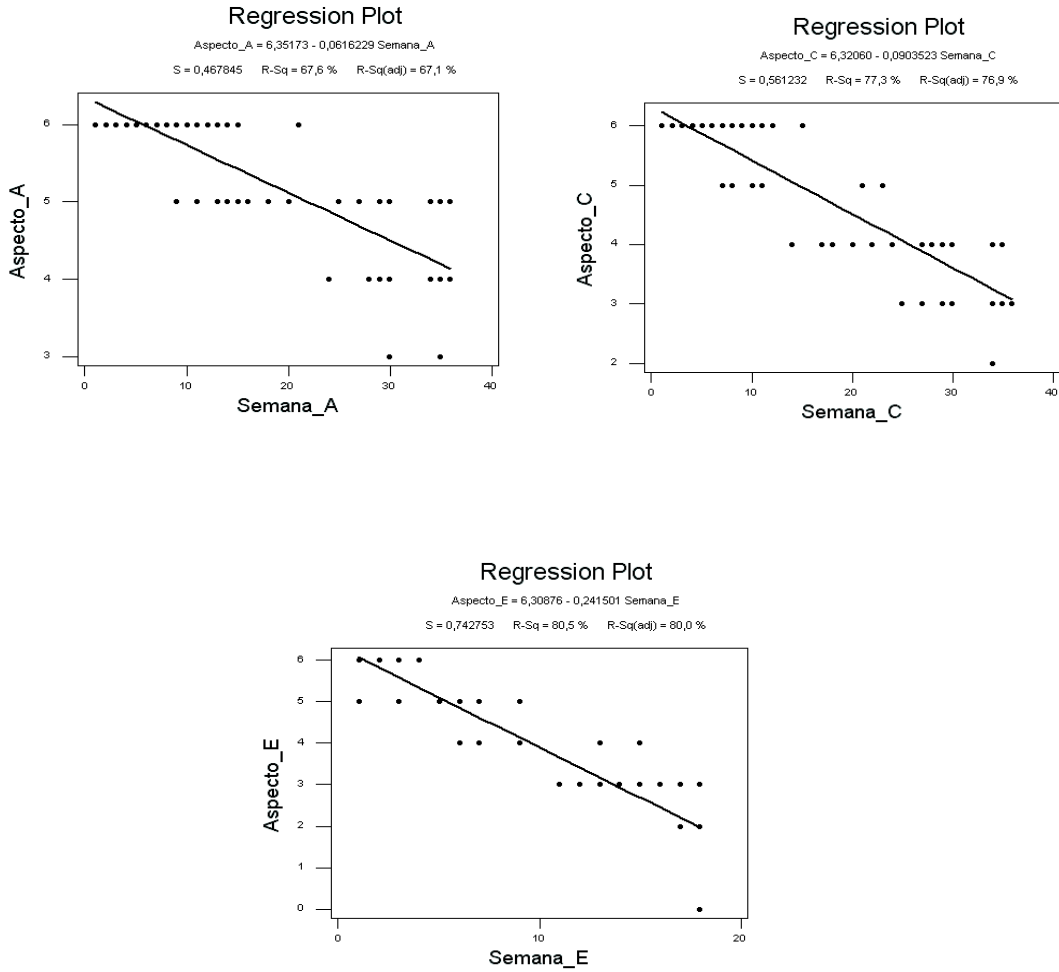


Figura 5.6: Ajuste de máxima verossimilhança considerando a distribuição normal para os dados do Aspecto para cada condição de armazenagem.

5.3 Modelo para aceleração

Para a aplicação da determinação do tempo de vida de prateleira, assumiremos que a taxa de degradação seja descrita pela relação de Arrhenius, dessa forma:

$$D(t, x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x) t, \quad (5.1)$$

onde $x = -11605/({}^\circ C_j + 273,15)$.

Esta relação entre a degradação e a temperatura é mostrada na Figura 5.7.

Então, os modelos para os perfis de degradação amostral são da forma:

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \epsilon_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x) t_i + \epsilon_{ijk}, \quad (5.2)$$

onde y_{ijk} é a degradação observada, ou seja, y_{ijk} é o escore atribuído ao atributo da unidade k ($k = 1, \dots, n_{ij}$) submetida ao nível de temperatura j ($j = 1, \dots, m$) no tempo

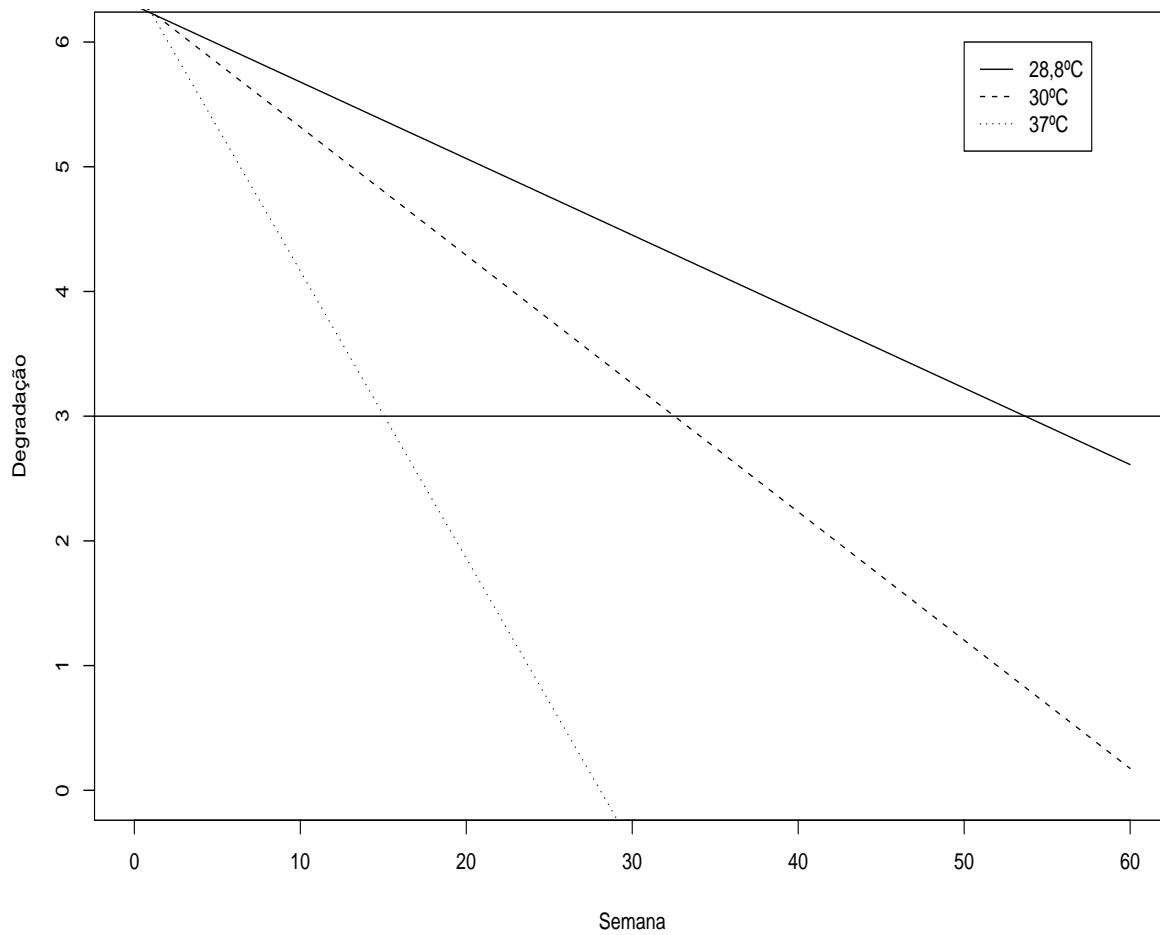


Figura 5.7: Modelo de degradação para as três condições de armazenagem.

i ($i = 1, \dots, l_j$).

5.4 Estimação pelo método de máxima verossimilhança

5.4.1 Estimação dos parâmetros do modelo para cada condição de armazenagem separadamente

Para os dados oriundos das avaliações sensoriais em uma condição fixa da variável de aceleração $AccVar_j$, a verossimilhança é:

$$L_j(\theta|Dados) = \prod_{i=1}^{l_j} \prod_{k=1}^{n_{ij}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_{ijk} - \mu_{ij})^2}{2\sigma^2}\right] \right\}, \quad (5.3)$$

onde $\mu_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x_j) t_i$, $\theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma)$ é o vetor de parâmetros desconhecidos e n_{ij} é o número de observações em (t_i, x_j) .

Como na Seção 4.4.1, para x_j fixo, consideraremos os seguintes parâmetros: desvio padrão do erro (σ), intercepto (β_0) e inclinação da linha ($v^{[j]} = \beta_1 \exp(\beta_2 x_j)$). Dessa forma, para cada atributo e condição de armazenagem específica x_j , três estimativas de máxima verossimilhança são obtidas: $\hat{\sigma}^{[j]}$, $\hat{\beta}_0^{[j]}$ e $\hat{v}^{[j]}$. O parâmetro $v^{[j]}$ pode ser interpretado como a taxa de degradação de μ_{ij} em relação ao tempo t_i .

Os resultados obtidos para as estimativas de máxima verossimilhança de $\beta_0^{[j]}$, $v^{[j]}$ e do desvio padrão de $v^{[j]}$, para cada atributo separadamente, nas três condições de armazenagem, são apresentados nas Tabelas 5.2, 5.3 e 5.4.

Tabela 5.2: Estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir dos dados do Odor considerando distribuição normal e IC de 95% para o parâmetro de inclinação em cada condição de armazenagem.

Condição	Estimativas			IC de 95% para $v^{[j]}$	
	$\hat{\beta}_0^{[j]}$	$\hat{v}^{[j]}$	$\hat{s}e_{\hat{v}^{[j]}}$	LI	LS
Ambiente (28, 8° C)	6, 293	-0, 061	0, 00561	-0, 0724	-0, 0504
Câmara Climática (30° C)	6, 347	-0, 103	0, 00601	-0, 1146	-0, 0911
Estufa (37° C)	6, 468	-0, 230	0, 01509	-0, 2600	-0, 2008

Tabela 5.3: Estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir dos dados do Sabor considerando distribuição normal e IC de 95% para o parâmetro de inclinação em cada condição de armazenagem.

Condição	Estimativas			IC de 95% para $v^{[j]}$	
	$\hat{\beta}_0^{[j]}$	$\hat{v}^{[j]}$	$\hat{s}e_{\hat{v}^{[j]}}$	LI	LS
Ambiente (28, 8° C)	6, 220	-0, 066	0, 00493	-0, 0753	-0, 0560
Câmara Climática (30° C)	6, 323	-0, 113	0, 00653	-0, 1259	-0, 1003
Estufa (37° C)	6, 537	-0, 263	0, 01628	-0, 2950	-0, 2312

Tabela 5.4: Estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir dos dados do Aspecto considerando distribuição normal e IC de 95% para o parâmetro de inclinação em cada condição de armazenagem.

Condição	Estimativas			IC de 95% para $v^{[j]}$	
	$\hat{\beta}_0^{[j]}$	$\hat{v}^{[j]}$	$\hat{s}e_{\hat{v}^{[j]}}$	LI	LS
Ambiente (28, 8° C)	6, 352	-0, 062	0, 00506	-0, 0715	-0, 0517
Câmara Climática (30° C)	6, 321	-0, 090	0, 00613	-0, 1024	-0, 0783
Estufa (37° C)	6, 309	-0, 242	0, 01980	-0, 6296	-0, 1466

5.4.2 Verossimilhança para o modelo de aceleração usando os dados de todas as condições de armazenagem

Considerando amostras nas três condições de armazenagem, a verossimilhança para a aplicação da determinação da distribuição do tempo de vida de prateleira pode ser expressa como:

$$L(\theta|Dados) = \prod_{j=1}^m L_j(\theta|Dados) = \prod_{ijk} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(y_{ijk} - \mu_{ij})^2}{2\sigma^2}\right] \right\}, \quad (5.4)$$

onde $\mu_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x_j) t_i$, $x_j = -11605 / (^\circ C + 273, 15)$ e $\theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma)$.

Para os dados oriundos das avaliações sensoriais as Tabelas 5.5, 5.6 e 5.7 mostram as estimativas obtidas para os três atributos utilizando o método de otimização global *Simulated Annealing* (Laarhoven e Aarts, 1988) do software R.

Tabela 5.5: Estimativas de máxima verossimilhança para o ajuste do modelo de aceleração considerando os dados do Odor.

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC de 95% assintótico	
			LI	LS
β_0	6,122	0,107	5,912	6,332
β_1	-18,752	13,565	-45,339	7,835
β_2	0,141	0,019	0,104	0,178
σ	0,856	0,045	0,768	0,944

Tabela 5.6: Estimativas de máxima verossimilhança para o ajuste do modelo de aceleração considerando os dados do Sabor.

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC de 95% assintótico	
			LI	LS
β_0	6,005	0,123	5,764	6,246
β_1	-12,127	2,932	-17,873	-6,380
β_2	0,129	0,007	0,115	0,143
σ	0,958	0,052	0,856	1,060

Tabela 5.7: Estimativas de máxima verossimilhança para o ajuste do modelo de aceleração considerando os dados do Aspecto.

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC de 95% assintótico	
			LI	LS
β_0	6,111	0,123	5,870	6,352
β_1	-15,335	8,229	-31,463	0,794
β_2	0,137	0,014	0,110	0,164
σ	0,978	0,053	0,874	1,082

Estas estimativas são usadas para fazer previsões nas condições normais de armazenagem (20° C).

5.4.3 Análise dos resíduos

Para os dados do Odor, a Figura 5.8 mostra o gráfico dos resíduos padronizados versus valores ajustados (note que há um valor ajustado distinto para cada combinação de tempo e temperatura).

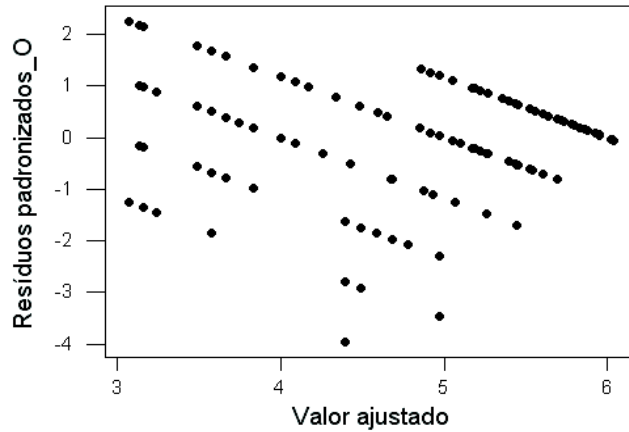


Figura 5.8: Resíduos versus valores ajustados para o Odor.

A Figura 5.9 é um gráfico de probabilidade normal dos resíduos do Odor.

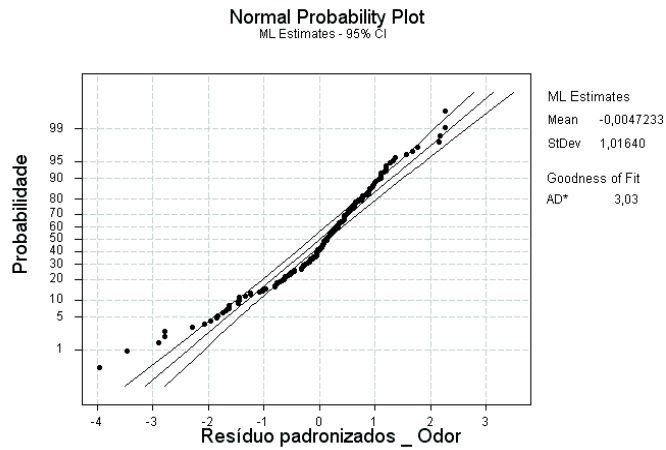


Figura 5.9: Gráfico de probabilidade normal para os resíduos padronizados do Odor.

Para os dados do Sabor, a Figura 5.10 mostra o gráfico dos resíduos padronizados versus valores ajustados.

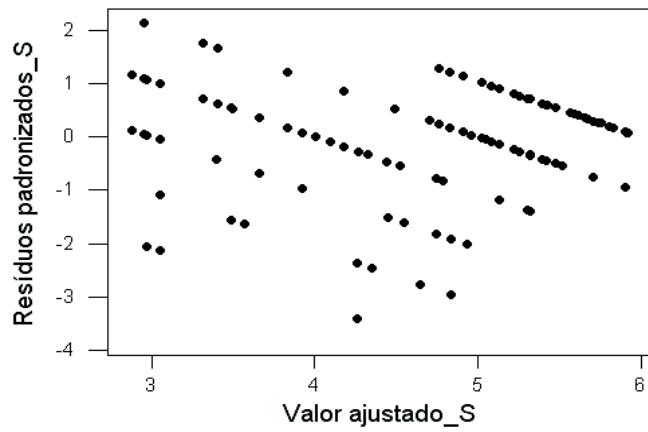


Figura 5.10: Resíduos versus valores ajustados para o Sabor.

A Figura 5.11 é um gráfico de probabilidade normal dos resíduos do Sabor.

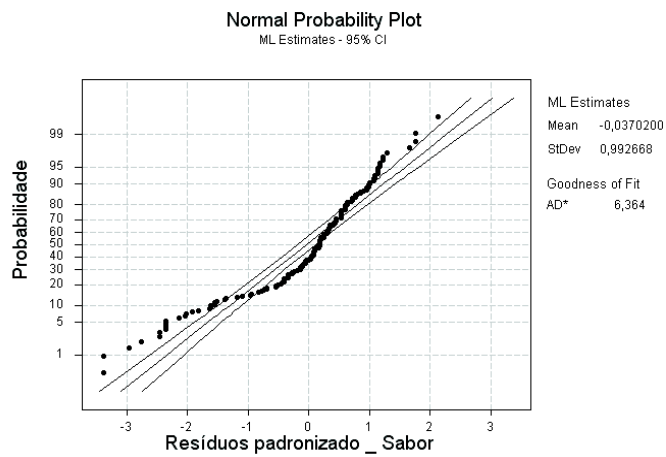


Figura 5.11: Gráfico de probabilidade normal para os resíduos padronizados do Sabor.

Para os dados do Aspecto, a Figura 5.12 mostra o gráfico dos resíduos padronizados versus valores ajustados.

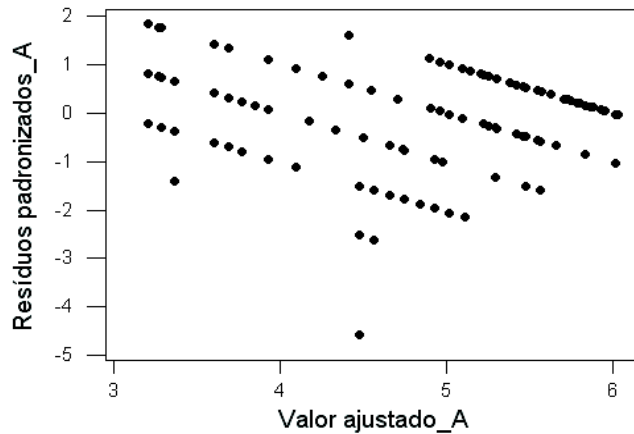


Figura 5.12: Resíduos versus valores ajustados para o Aspecto.

A Figura 5.13 é um gráfico de probabilidade normal dos resíduos do Aspecto.

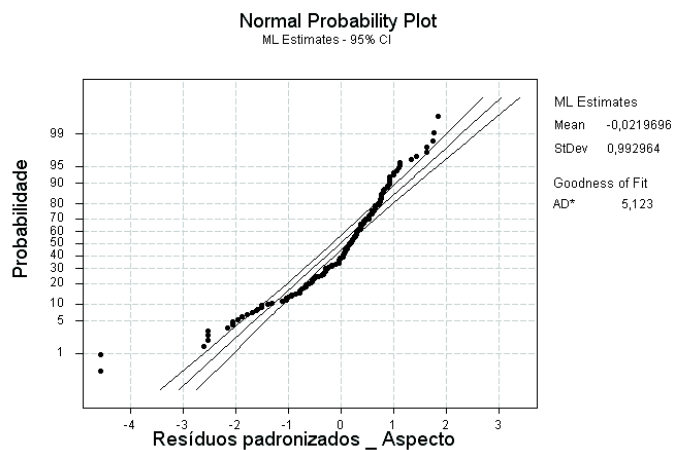


Figura 5.13: Gráfico de probabilidade normal para os resíduos padronizados do Aspecto.

Como esperávamos, a análise de resíduos indica violação das suposições de normalidade.

5.5 Avaliação do tempo de vida de prateleira por atributo

Neste momento, já podemos responder à questão de interesse relativa ao tempo de vida de produto em prateleira. Isto é, vamos estimar a proporção de unidades avaliadas com escores menores ou iguais a 3 - para cada atributo separadamente - após 60 semanas

de armazenagem, na temperatura de 20° C.

A partir das estimativas dadas nas Tabelas 5.5, 5.6 e 5.7, estimamos a proporção para o Odor como 90,32%, para o Sabor como 92,79% e para o Aspecto como 83,40%.

5.5.1 Quantis da distribuição do tempo de falha

O quantil p da distribuição do tempo de vida de prateleira é dado por $t_p = \nu + \varsigma \Phi^{-1}(p)$. A Tabela 5.8 mostra alguns valores dos quantis para o Odor, Sabor e Aspecto, nas condições normais de armazenagem (20° C).

Tabela 5.8: Quantis da distribuição do tempo de vida de prateleira para todos os atributos em semanas.

Atributo	$\hat{t}_{0,01}$	$\hat{t}_{0,05}$	$\hat{t}_{0,10}$	$\hat{t}_{0,50}$
Odor	16,0	24,3	28,7	44,2
Sabor	10,5	19,5	24,2	40,9
Aspecto	12,3	22,2	27,5	46,0

5.5.2 Intervalos de 95% de confiança bootstrap

As Tabelas 5.9, 5.10 e 5.11 mostram os intervalos de 95% de confiança bootstrap para a proporção de falhas após 60 semanas de armazenagem, na temperatura de 20° C. Também são apresentados os intervalos de confiança para os quantis da distribuição do tempo de vida de prateleira, bem como a estimativa bootstrap da mediana de cada um desses valores.

Tabela 5.9: Estimativas considerando o atributo Odor.

	Estimativa	Estimativa bootstrap da mediana	Intervalo 95% de confiança
$\hat{F}(60)$	90,32%	83,80%	(65,75%; 95,30%)
$\hat{t}_{0,01}$	16,0	17,3	(12,2; 22,2)
$\hat{t}_{0,05}$	24,3	26,0	(21,9; 30,6)
$\hat{t}_{0,10}$	28,7	30,7	(26,7; 35,4)
$\hat{t}_{0,50}$	44,2	47,2	(41,9; 53,8)

Tabela 5.10: Estimativas considerando o atributo Sabor.

	Estimativa	Estimativa bootstrap da mediana	Intervalo 95% de confiança
$\hat{F}(60)$	92,79%	91,83%	(80,37%; 98,02%)
$\hat{t}_{0,01}$	10,5	12,4	(7,6; 17,1)
$\hat{t}_{0,05}$	19,5	21,1	(17,3; 25,3)
$\hat{t}_{0,10}$	24,2	25,7	(22,3; 29,8)
$\hat{t}_{0,50}$	40,9	42,2	(37,6; 47,4)

Tabela 5.11: Estimativas considerando o atributo Aspecto.

	Estimativa	Estimativa bootstrap da mediana	Intervalo 95% de confiança
$\hat{F}(60)$	83,40%	71,92%	(55,47%; 86,01%)
$\hat{t}_{0,01}$	12,3	14,2	(6,9; 21,4)
$\hat{t}_{0,05}$	22,2	26,0	(18,9; 31,2)
$\hat{t}_{0,10}$	27,5	30,7	(25,1; 36,6)
$\hat{t}_{0,50}$	46,0	47,2	(45,0; 57,6)

Por se tratar da análise do tempo de vida de prateleira de um produto alimentício, é interessante destacar as estimativas obtidas para o quantil mais baixo $\hat{t}_{0,01}$. Estas estimativas são 16,0; 10,5 e 12,3 semanas para os atributos odor, sabor e aspecto, respectivamente.

Desta forma, é interessante considerar o resultado mais conservativo que indica que após cerca de 10,5 semanas 1% dos produtos estarão impróprios para o consumo.

5.6 Fatores de aceleração

Para a aplicação da determinação do tempo de vida de prateleira, os fatores de aceleração são dados por

$$AF(x) = \frac{t(x_U)}{t(x)} = \exp[\beta_2(x - x_U)] \quad (5.5)$$

onde x_U corresponde à temperatura nas condições normais de armazenagem (20° C).

Dessa forma, podemos encontrar os fatores de aceleração para as temperaturas de 28,8° C, 30° C e 37° C, referentes a cada atributo. A Tabela 5.12 apresenta os resultados.

Tabela 5.12: Fatores de aceleração.

Atributo	Temperatura		
	28,8° C	30° C	37° C
Odor	1,18	1,20	1,35
Sabor	1,16	1,18	1,32
Aspecto	1,17	1,20	1,35

Observemos que a aceleração do processo de degradação foi pequena. Para o atributo odor, por exemplo, as unidades armazenadas na temperatura de 20° C são consideradas adequadas para o consumo durante um tempo cerca de 1,18 vezes maior do que as unidades armazenadas na temperatura média de 28,8° C. Para este mesmo atributo, temos que o tempo para atingir a degradação crítica na temperatura de 20° C é próximo de 1,20 vezes o tempo para unidades armazenadas na temperatura de 30° C e cerca de 1,35 vezes o tempo de falha das unidades armazenadas na temperatura de 37° C.

É interessante observar também que os fatores de aceleração não se diferenciam muito destes valores ao considerarmos os demais atributos.

Capítulo 6

Considerações finais e conclusões

A abordagem apresentada neste trabalho para a análise dos dados oriundos de avaliações sensoriais foi motivada por dois aspectos principais. Um deles foi o desejo de apresentar uma modelagem que fizesse uso dos escores propriamente ditos. O outro, foi a semelhança entre a situação descrita no Capítulo 2 deste trabalho e a situação da cola adesiva B apresentada por Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003).

No entanto, a proposta de utilizar a idéia dos modelos desenvolvidos para dados de testes de degradação acelerada, no caso de ensaios destrutivos, na análise dos dados oriundos de avaliações sensoriais apresentava o desafio de encontrar uma forma funcional para descrever a degradação (escores) em função do tempo e da variável de estresse (temperatura). Apesar disso, nos propusemos a buscar uma solução para este problema.

Por se tratar de uma proposta nova, uma primeira dificuldade foi a ausência de artigos na literatura que abordassem a estimação do tempo de vida de prateleira sob esse foco.

Como Meeker, Escobar, Kugler e Kramer (2003) sugerem que caso a resposta de degradação seja dada em termos de categorias ordenadas, métodos de análise destes dados devem ser encontrados em Agresti (1984), nosso primeiro passo foi buscar esta referência. No entanto, a abordagem utilizada para tratamento de dados categóricos ordenados faz uso de métodos para tabelas de contingência. As modelagens são feitas com o objetivo de fazer inferência sobre a estrutura da tabela, especificamente para as células com probabilidades desconhecidas, modelar frequências esperadas de células e também apresentar métodos para avaliação da associação entre duas variáveis. Desconsideramos essa idéia pois ela não correspondia à nossa proposta de trabalho. De qualquer forma, a leitura de

capítulos deste livro nos levou a plotar os gráficos de proporções de cada escore em função do tempo para cada atributo e condição de armazenagem separadamente.

Diante das dificuldades iniciais de se encontrar um modelo para os escores, um caminho alternativo foi modelar a média dos escores em cada semana em função do tempo utilizando um modelo de regressão linear com estimador de mínimos quadrados ponderados. Porém esta abordagem não era bem o que desejávamos em nosso trabalho.

Concomitantemente, realizamos uma pesquisa bibliográfica sobre modelos politômicos.

Também surgiu a idéia da utilização de regressão quantílica. Mas, após a leitura do artigo de Koenker e Bassett (1978), retomamos a idéia de tentar modelar as proporções dos escores.

Destá vez, a partir da leitura de resumos de artigos obtidos na pesquisa bibliográfica sobre modelos politômicos, surgiu a idéia de estudar modelos IRT (item response theory), em especial, modelos para itens com resposta politômica. Estes modelos são utilizados na análise de testes educacionais e psicológicos. Porém Costa (1986) aplicou esta teoria na análise de testes de habilidade motora em educação física. É interessante notar que modelos de estrutura latente como o RSM (Rating Scale Model) e o GRM (Graded Response Model) (Linden e Hambleton, 1997) são utilizados em situações que apresentam certa analogia com a situação que desejávamos modelar. Para a utilização destes modelos deveríamos pensar nos atributos como sendo itens a serem avaliados.

Porém esta abordagem também não forneceria uma forma funcional para descrever a degradação dos escores em função do tempo. Além disso, consideraria uma análise conjunta dos atributos distanciando da nossa proposta. Os modelos IRT mais flexíveis requerem uma análise complexa e amostras grandes para a estimação dos seus parâmetros.

Enfim, apesar das adaptações realizadas para modelagem dos dados oriundos das avaliações sensoriais através da distribuição normal, todas as modelagens alternativas que pesquisamos necessitariam de alguma adaptação nos dados originais ou de uma reformulação dos objetivos do nosso trabalho.

A abordagem aqui apresentada tem a desvantagem de considerar um modelo normal para variáveis categóricas ordinais. Porém tem a vantagem de fazer uso dos escores propriamente ditos, utilizando toda a informação disponível. Além disso, permite a estimação de características importantes como quantis da distribuição do tempo de vida de

prateleira e proporção de falhas esperada para um determinado tempo.

Referências Bibliográficas

- [1] AGRESTI, A. *Analysis of ordinal categorical data*. New York, John Wiley & Sons, 1984.
- [2] COLLET, D. *Modelling survival data in medical research*. 2^a ed. Flórida: Chapman & Hall/CRC Press LLC, 2003.
- [3] COSTA, M. G.; SAFRIT, M. J. University of Wisconsin-Madison. *Application of item response theory to a motor skill test in physical education*.1986.196f.
- [4] DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. *Bootstrap methods and their application*. New York, Cambridge University Press, 1997.
- [5] FREITAS, M. A.; BORGES, W.; HO, L. L. *A statistical model for shelf life estimation using sensory evaluations scores*. Communications in Statistics - Theory and Methods. n.32, 8, p.1559 – 1589, 2003.
- [6] FREITAS, M. A.; BORGES, W.; HO, L. L. *Sample plans comparisons for shelf life estimation using sensory evaluations scores*. International Journal of Quality and Reliability Management. n.21, 4, p.439 – 466, 2004.
- [7] FREITAS, M. A.; COSTA, J. C. *Shelf life determination using sensory evaluation scores:a general Weibull modeling approach*. Computers & Industrial Engineering, v.51, p. 652 – 670, 2006.
- [8] FREITAS, M. A.; GOMES, R. C.D. *A proportional hazards model for interval-censored data generated by sensory evaluations: application to shelf life determination of food products*. In: International Conference on Degradation, Damage, Fatigue and

- Accelerated Life Models in Reliability testing, 2006, Angers - France. Proceedings of the ALT2006. Angers - França, 2006. v.1. p.232 – 240.
- [9] GACULA, M. C. Jr. *The design of experiments for shelf life study*. Journal of Food Science. n.40, p.399 – 403, 1975.
- [10] GACULA, M. C. Jr.; KUBALA, J. J. *Statistical models for shelf life failures*. Journal of Food Science. n.40, p.404 – 409, 1975.
- [11] IFT, *A report by the Institute of Food Technologists 'Expert Panel on Food Sapety and Nutrition & the Commitee on Public Information*, Food Technology, p. 72 – 74, 1974.
- [12] KALBFLEISCH, J. D.; PRENTICE, R. L. *The statistical analysis of failure time data*. New York: Wiley, 2002.
- [13] KOENKER, R.; BASSETT, G. Jr. *Regression quantiles*. Econometrica. vol.46, n.1,p.33 – 50,1978.
- [14] LAARHOVEN, P. J. M. van; AARTS, E. H. L. *Simulated annealing: theory and aplications (Mathematics & its applications)*. Publishers académicos de Kluwer, 1988.
- [15] LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data*. New York: Wiley, 1982.
- [16] LINDEN, W. J. van der; HAMBLETON, R. K. *Handbook of modern item response theory*. New York: Springer, c1997.
- [17] MEEKER, W. Q., ESCOBAR, L. A. *Statistical methods for reliability data*. New York, John Wiley & Sons, 1998.
- [18] MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A.; KUGLER, D. L.; KRAMER, L. L. *Accelerated destructive degradation tests: data, models, and analysis*. Department of Statistics & Statistical Laboratory, Iowa State University, 2003.
- [19] PINHEIRO, J. C., BATES, D. M. *Mixed effects models, methods, and classes for S and S-PLUS*. Department of Statistics, University of Wisconsin. Available from Statilib, 1995.