

Universidade Federal de Minas Gerais

# Probabilidade de Ruína com eventos espaciais

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do  
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Minas Gerais

ALINE MARTINES PIROUTEK

Orientador: Prof. Dr. Renato Martins Assunção

Março-2009

Universidade Federal de Minas Gerais

*Instituto de Ciências Exatas*

# Probabilidade de Ruína com eventos espaciais

Aline Martines Piroutek

Universidade Federal de Minas Gerais

*Instituto de Ciências Exatas*

## Probabilidade de Ruína com eventos espaciais

---

*A conquista de um sonho nunca acontece em um percurso solitário. Pessoas sempre estão a nossa volta nos ouvindo, nos observando e interferindo quando estamos imersos demais na situação. Por esse motivo, eu tenho orgulho de oferecer essa conquista a todos àqueles que estiveram ao meu lado.*

---

*Obrigada Deus por me guiar. Ao grande mestre e inspirador Prof. Renato Assunção agradeço por acreditar em mim. Aos meus pais pelo apoio. Às minhas irmãs Tálita e Jéssica agradeço o carinho. Ao Rafael pelo incentivo e companheirismo. Ao meu irmão André pelos conselhos. Às minhas amigas Thábatta, Cibele, Débora, Vanessa e Alice pela alegria. Ao Matheus pelos risos. Agradeço aos integrantes do Leste pela ajuda. À Kiki pela companhia. A todos que amo muito eu agradeço por fazerem parte dessa etapa cumprida.*

Aline Martines Piroutek

# Sumário

<b>1. Introdução</b>	<b>7</b>
1.1 Motivação e Objetivos	9
<b>2. Modelo Clássico</b>	<b>11</b>
2.1 Introdução	11
2.2 Processo de Poisson	11
2.3 Processo de Poisson Composto	13
2.4 Modelo Clássico de Cramér-Lundberg	14
<b>3. Probabilidade de Ruína</b>	<b>17</b>
3.1 Definições e propriedades	17
3.2 Desigualdade de Lundberg e Coeficiente de Ajuste R	18
3.3 Influência do capital inicial	22
3.4 Influência do valor das indenizações no coeficiente de ajuste	23
3.5 Cálculo da probabilidade de ruína	26
<b>4. Aproximação da Probabilidade de Ruína</b>	<b>27</b>
<b>5. Metodologia Desenvolvida</b>	<b>30</b>
5.1 Modelo 1	30
5.1.1 Agregação das indenizações por evento	32
5.2 Modelo 2	34
5.2.1 Coeficiente de correlação e as Indenizações vizinhas	37
5.3 Modelo 3	42
<b>6. Resultados</b>	<b>44</b>
<b>6.1 Parte 1: A Desigualdade de Lundberg e o Coeficiente de ajuste R</b>	<b>44</b>
6.1.1 Modelo 1	44
6.1.1.1 Agregação das indenizações por evento e a Desigualdade de Lundberg	46
6.1.1.2 O valor médio das indenizações e a Desigualdade de Lundberg	48
6.1.2 Modelo 2	49
6.1.2.1 Agregação das indenizações por evento e a Desigualdade de Lundberg	52
6.1.2.2 O valor médio de indenizações e a Desigualdade de Lundberg	53
6.1.2.3 Coeficiente de correlação espacial e a Desigualdade de Lundberg	55
6.1.3 Modelo Clássico, Modelo 1 e Modelo 2	56
<b>6.2 Parte2: Aproximação da Probabilidade de Ruína</b>	<b>58</b>
6.2.1 Momentos do Modelo 2	58
6.2.1 Momentos do Modelo 3	60

6.2.3 Escolha das Distribuições	61
<b>7. Análises</b>	<b>63</b>
7.1 Primeira indenização : $X_0 \sim Exponencial(\alpha)$	64
7.2 Primeira indenização : $X_0 \sim Pareto(\delta, \gamma)$	66
7.2 Primeira indenização : $X_0 \sim Weibull(\delta, \gamma)$	68
<b>8. Conclusão</b>	<b>71</b>
<b>9. Apêndice</b>	<b>73</b>
<b>10. Referências:</b>	<b>87</b>

## Índice de Figuras

Figura 1 - O Processo Reserva de Risco .....	15
Figura 2 - Coeficiente de Ajuste R.....	19
Figura 3 - Probabilidade de ruína e Desigualdade de Lundberg.....	20
Figura 4 - Desigualdade de Lundberg com diferentes Coeficientes.....	21
Figura 5 - Probabilidade de ruína de acordo com o capital inicial.....	23
Figura 6 - Desigualdade de Lundberg variando valor médio do sinistro .....	25
Figura 7 - Visualização do numero médio de apólices por evento: $\lambda =100$ e $\lambda_1 =4$ .....	33
Figura 8 - Visualização do numero médio de apólices por evento: $\lambda =100$ e $\lambda_1 =11$ .....	34
Figura 9 - Comportamento do $\rho(s_{ik})$ .....	36
Figura 10 - Trajetória com $X_0 \sim \text{Exponencial}\left(\frac{1}{200}\right)$ .....	41
Figura 11 - Decaimento das indenizações no Modelo 3 com diferentes correlações espaciais.....	43
Figura 12 - Influência do número médio de eventos na Desigualdade de Lundberg.....	47
Figura 13 - Influência do valor médio de indenizações na Desigualdade de Lundberg.....	49
Figura 14 - Influência do número médio de eventos .....	53
Figura 15 - Influência do valor médio de indenizações na Desigualdade de Lundberg.....	54
Figura 16 - Influência do valor do coeficiente de correlação espacial.....	55
Figura 17 - Comparação de Modelos com $\lambda_1 = 25$ .....	57
Figura 18 - Comparação de Modelos com $\lambda_1 = 195$ .....	58
Figura 19 - Comparação de Modelos Exponenciais com correlação espacial $\rho_0 = 0.9$ - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1: $\lambda_1 = 25$ . Gráfico- 2: $\lambda_1 = 195$ .....	64
Figura 20 - Comparação de Modelos Exponenciais com correlação espacial $\rho_0 = 0.1$ - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1: $\lambda_1 = 25$ . Gráfico- 2: $\lambda_1 = 195$ .....	66
Figura 21 - Comparação de Modelos Pareto com correlação espacial $\rho_0 = 0.9$ - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1: $\lambda_1 = 25$ . Gráfico- 2: $\lambda_1 = 195$ .....	67
Figura 22 - Comparação de Modelos Pareto com correlação espacial $\rho_0 = 0.1$ - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1: $\lambda_1 = 25$ . Gráfico- 2: $\lambda_1 = 195$ .....	68
Figura 23 - Comparação de Modelos Weibull com correlação espacial $\rho_0 = 0.9$ - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1: $\lambda_1 = 25$ . Gráfico- 2: $\lambda_1 = 195$ .....	69
Figura 24 - Comparação de Modelos Weibull com correlação espacial $\rho_0 = 0.1$ - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1: $\lambda_1 = 25$ . Gráfico- 2: $\lambda_1 = 195$ .....	69

## 1. Introdução

Os princípios básicos do seguro prevêm a adequação da base financeira da entidade seguradora visando alocar recursos de forma eficiente para honrar suas obrigações. A natureza do seguro é caracterizada por essa gestão de recursos que busca a formação de um fundo garantidor de pagamentos de indenizações ocorridos durante um período de tempo (Souza, 2002).

Os riscos atuantes nesse processo estão relacionados a áreas atuariais, financeiras, estatísticas, entre outras. Deve-se buscar a equivalência dos direitos e obrigações em todo o tempo descrito nesse processo. Para isso, de um lado há as contribuições e o capital inicial da entidade e de outro o pagamento de todas as indenizações com seus respectivos valores.

A capacidade da entidade em permanecer apta a efetuar os pagamentos caracteriza a solvência dessa entidade. Isto é, ela será solvente se o fluxo de receita futuro ultrapassar o fluxo de desembolsos futuros.

Existem diversas variáveis que influenciam a solvência de uma seguradora. O número e espalhamento dos sinistros no tempo, o valor da indenização, o capital inicial e o fluxo de prêmios a serem arrecadados podem determinar como o caixa da entidade vai se comportar durante o tempo em estudo. Procura-se com a maior probabilidade possível que esse caixa permaneça maior do que zero até um tempo específico  $t$ .

A ruína corresponde ao evento no qual o capital da entidade se torna menor que zero em um certo tempo  $t$ . Quando isso ocorre, a seguradora não possuirá recursos para pagar as obrigações assumidas. Ou seja, seu caixa é negativo e a ocorrência de um sinistro trará seu endividamento (Dickson and Waters, 1992).

Nesta dissertação será abordado com maior ênfase o Modelo Clássico, onde a ocorrência de sinistros é considerada como um processo de Poisson com intensidade

constante e igual a  $\lambda$ . Isso significa que o tempo entre ocorrências segue uma distribuição exponencial com média  $1/\lambda$ .

A distribuição exponencial tem larga aplicação em várias áreas. Enquanto utilizamos a distribuição de Poisson para definir o número de ocorrência em determinado período, a distribuição exponencial calcula o tempo entre ocorrências sucessivas. É comumente usada para tempos entre chegadas a, por exemplo, cabines de pedágios. Pode-se usar também esta distribuição para calcular probabilidades de falhas, quando do estudo de confiabilidade; ou seja, o intervalo de tempo decorrido entre o instante em que uma peça é sujeita a um esforço mecânico e o instante em que ocorre uma falha (a quebra da peça, por exemplo).

A distribuição exponencial possui a propriedade de falta de memória. Isso significa que a probabilidade de que seja necessário esperar mais que  $s + t$  até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes do tempo  $s$ , é a mesma de que esse evento ocorra depois do tempo  $t$ .

Como descrito acima, o Modelo Clássico de risco de seguros utiliza a distribuição exponencial para determinar o tempo de ocorrência entre os sinistros. Devido à utilização dessa distribuição, os tempos entre as ocorrências dos sinistros tornam-se independentes. Além dessa suposição, o modelo ainda assume independência entre os valores das indenizações.

As suposições acima se tornam inválidas quando lidamos com catástrofes naturais. Nesse tipo de cenário, existe grande dependência do tempo entre sinistros e entre os valores das indenizações. Isso acontece, por exemplo, quando um furacão consegue destruir casas durante seu percurso em terra. Se o furacão for muito devastador, os danos serão bem maiores do que aqueles provocados por furações menos devastadores. É fácil perceber que os tempos entre ocorrência são dependentes entre si, assim como o valor das indenizações. Ainda podemos pensar sobre o cenário em que ocorreu esse evento, o furacão. Em regiões muito povoadas os danos serão bem maiores comparados com as



regiões pouco povoadas. Assim, a localização do evento e a configuração espacial são fatores importantes que não são considerados no Modelo Clássico.

## 1.1 Motivação e Objetivos

A motivação desse trabalho provém da possibilidade de existir algum evento que desencadeie a ocorrência de indenizações próximos no espaço e tempo, podendo levar uma seguradora à falência.

Diante das perspectivas de aumento de catástrofes naturais, resultantes das mudanças climáticas, as seguradoras estão conscientes de que, a longo prazo, terão de pagar mais por indenizações. Por isso, já existem modelos alternativos de transferência de risco para os mercados financeiros.

Um exemplo de catástrofe que causou sinistros seqüencialmente, com grande prejuízo às companhias de seguros, ocorreu em 1997. A passagem do furacão Andrew devastou as ilhas Bahamas, o sul da Flórida e a Louisiana. As seguradoras do mundo inteiro tiveram que pagar 17 bilhões de dólares.

Em 2001, segundo um estudo da seguradora alemã Rück, as catástrofes naturais provocaram prejuízos de 40 bilhões de dólares, o que significa um aumento de 20% em relação ao ano anterior, embora estatisticamente o número de catástrofes tenha diminuído de 850 para 700 casos.

Após cada catástrofe, as pessoas estão se conscientizando de que devem tomar medidas que impeçam que seus impactos gerem perdas humanas, físicas e financeiras para a sociedade. Os terremotos, os furacões, as inundações, as erupções vulcânicas e outras catástrofes naturais são uma parte inevitável da vida. Isto não quer dizer que não possamos fazer nada para nos tornarmos menos vulneráveis.

Percebemos que a freqüência dessas catástrofes tem aumentado, desencadeando diversas perdas. Portanto, metodologias mais eficientes devem ser adotadas para que se mitiguem os riscos.

É importante, neste contexto, o aprofundamento e a melhoria dos métodos que considerem os riscos dependentes, já que as ocorrências de catástrofes influenciam o cenário de seguros (Albrecher, 1998).

Em certos estudos, é utilizada a modelagem de dependência entre o tempo de espera de um sinistro e seu valor (ver, por exemplo, Albrecher and Teugels, 2006). Cai (2002) estuda a probabilidade de ruína com taxas de prêmios dependentes para modelos de risco generalizados. Os pagamentos são considerados dependentes com uma estrutura auto-regressiva. Para sua análise, Cai utilizou a Desigualdade de Lundberg para as probabilidades de ruína a partir de técnicas de renovação recursiva. Müller and Pflug(2001) derivam a Desigualdade de Lundberg para probabilidades de ruína assintóticas em casos de um processo com incrementos dependentes. Eles assumem que a função geral de probabilidade existe e que seu logaritmo converge.

Nosso objetivo é verificar o impacto do grau da dependência espacial dos sinistros na probabilidade de ruína em três modelos propostos assumindo diferentes distribuições para o valor das indenizações. Em particular, queremos avaliar o erro cometido no cálculo da probabilidade de ruína quando ignoramos a correlação espacial dos sinistros.

## 2. Modelo Clássico

### 2.1 Introdução

Os trabalhos de Filip Lundberg sobre a teoria do risco foram escritos em um momento em que nenhuma teoria geral dos processos estocásticos existia e quando métodos coletivos de resseguro, no presente sentido da palavra, eram totalmente desconhecidos para as companhias de seguros. Em ambos os aspectos suas idéias eram muito à frente do seu tempo, e suas obras merecem ser geralmente reconhecidas como pioneiras e de fundamental importância.

Em 1903, Lundberg terminou sua tese de doutorado de difícil compreensão para a época, *Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks*. Este trabalho introduziu o Processo de Poisson Composto e envolveu estudos utilizando o Teorema Central do Limite.

Cramér desenvolveu as idéias de Lundberg sobre os riscos e as relacionou à emergente teoria de processos estocásticos. É nesta fase que foi introduzido o Modelo Clássico de Cramér-Lundberg ou Modelo Clássico de risco coletivo. (Shiryayev ,1999).

O Modelo Clássico foi mais tarde estendido para tornar mais flexíveis alguns dos seus pressupostos. Na maioria dos casos em que é utilizado tem como objetivo calcular a probabilidade de ruína.

### 2.2 Processo de Poisson

Um processo Estocástico é um processo cujo comportamento é não-determinístico, no sentido em que cada estado desse processo não determina completamente qual será o seu estado seguinte. Isto significa que mesmo que a condição

inicial seja conhecida, existem muitas possibilidades, sendo que alguns caminhos são mais prováveis que outros.

Um processo de Poisson, segundo Wasan(1975) e Karlin & Taylor(1975), é um processo estocástico em que eventos ocorrem continuamente e independentemente um do outro. Muitos processos não são exatamente um processo de Poisson, mas se assemelham o suficiente para que em certos tipos de análise eles possam ser considerados como tais.

O processo de Poisson é uma coleção  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  de variáveis aleatórias, onde  $N(t)$  é o número de eventos que ocorreram até o tempo  $t$  (começando do tempo 0). O número de eventos entre o tempo  $a$  e o tempo  $b$  é dado como  $N(b) - N(a)$  e seguem uma distribuição de Poisson. Cada realização do processo  $\{N(t)\}$  é função de saltos não negativos. Diz-se um processo de Poisson de intensidade  $\lambda$  se verifica as seguintes condições:

- $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  tem incrementos estacionários e independentes. Diz-se ter incrementos independentes se, para todos os inteiros  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ , as variáveis aleatórias  $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$  são independentes. Eles serão estacionários se para qualquer  $s$ ,  $N(t_1 + s) - N(t_1)$  tem a mesma distribuição de  $N(t_2 + s) - N(t_2)$  para todo valor de  $t$ .
- $\forall t > 0, N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ . Ou seja:

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

A variável aleatória  $N(t)$  tem valor esperado e variância iguais a  $\lambda t$  e sua função geradora de momento é dada por:

$$M_{N(t)}(r) = E(e^{rN(t)}) = e^{\lambda t(e^r - 1)}$$

Calculando as três sucessivas derivadas da função geradora de momentos em relação à  $r$  e avaliando essas derivadas no ponto  $r=0$ , podemos encontrar os momentos ordinários em relação à origem de  $N(t)$ . Desta forma, obtemos:

$$\begin{aligned} E(N(t)) &= M'_{N(t)}(0) = \lambda t \\ E(N(t)^2) &= M''_{N(t)}(0) = \lambda t + (\lambda t)^2 \\ E(N(t)^3) &= M'''_{N(t)}(0) = \lambda t + 3(\lambda t)^2 + (\lambda t)^3 \end{aligned}$$

### 2.3 Processo de Poisson Composto

Um processo  $S(t)$  é chamado de Processo de Poisson Composto se:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

onde  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo de Poisson homogêneo e  $\{X_i\}_{i \geq 0}$  é uma variável aleatória contínua positiva independente e identicamente distribuída e independente de  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ .

Sua função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned} M_{S(t)}(r) &= E\left[E\left(e^{rS(t)} \mid N(t)\right)\right] \\ &= \sum_n E\left(e^{rS(t)} \mid N(t) = n\right) P(N(t) = n) = \sum_n E\left(e^{r \sum_{k=1}^n X_k}\right) P(N(t) = n) \\ &= \sum_n E\left(e^{r \cdot X_1} e^{r \cdot X_2} \dots e^{r \cdot X_n}\right) P(N(t) = n) = \sum_n E\left(e^{rX}\right)^n P(N(t) = n) \\ &= \sum_n M_X(r)^n P(N(t) = n) = E\left(M_X(r)^{N(t)}\right) = E\left(e^{N(t) \ln M_X(r)}\right) \\ &= M_{N(t)}(\ln M_X(r)) \end{aligned}$$

Substituindo a função geradora de momentos de  $N(t)$  temos que:

$$M_{S(t)}(r) = e^{\lambda t(M_X(r)-1)}$$

Novamente, para encontrar os três primeiros momentos, vamos calcular as três sucessivas derivadas da função geradora de momentos em relação à  $r$ , e avaliá-los no ponto  $r=0$ . Desta forma, obtemos:

$$E(S(t)) = M'_{S(t)}(0) = \lambda t E(X)$$

$$E(S(t)^2) = M''_{S(t)}(0) = \lambda t E(X^2) + (\lambda t)^2 E^2(X)$$

$$E(S(t)^3) = M'''_{S(t)}(0) = \lambda t E(X^3) + 3(\lambda t)^2 E(X^2)E(X) + (\lambda t)^3 E^3(X)$$

## 2.4 Modelo Clássico de Cramér-Lundberg

O Modelo Clássico de risco coletivo em tempo contínuo é um processo estocástico  $\{U(t), t \geq 0\}$  definido da seguinte forma e ilustrado na Figura 1:

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad \mathbf{1}$$

em que:

$U(t)$  é a provisão de risco de uma carteira no instante  $t$ ,

$S(t)$  são as indenizações agregadas ocorridas em  $(0, t]$ ,

$ct$  é o volume de prêmios recebidos em  $(0, t]$ ,

$c$  é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo e

$u=U(0)$  é a provisão inicial.

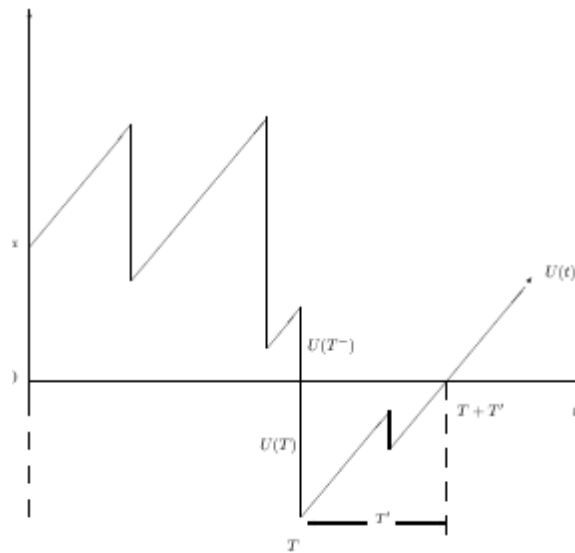


Figura 1 - O Processo Reserva de Risco

Esse modelo somente considera as indenizações e prêmios, descartando assim fatores tais como força de juros na formação da provisão e encargos de gestão, entre outros. Vamos agora declarar algumas hipóteses e definições (Ceteno, 2000):

- $N(t)$  é o número de indenizações em  $(0,t]$ . É um Processo de Poisson com intensidade  $\lambda$  ;
- $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  ;  $\{S(t), t \geq 0\}$  é um processo de Poisson Composto.  $S(t)=0$ , se  $N(t)=0$ ;
- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  é uma seqüência de v.a's iid e independentes de  $N(t)$ , e representam as indenizações particulares ou individuais;
- A função de distribuição de  $X$  é  $P(x)=P(X \leq x)$  e a sua função de densidade é  $f(x)$ . Em geral, consideramos  $P(0)=0$ ;
- Supõe-se a existência de  $p_1=E(X)$ ;

- Supõe-se que  $c > \lambda p_1$ , isto é, o prêmio recebido em uma unidade de tempo é superior às indenizações agregadas esperadas no mesmo período.
- Em grande parte dos resultados é necessário admitir a existência do momento de ordem  $k$ ,  $\rho_k = E(X^k)$  e, adicionalmente, da função geradora de momentos de  $X$ , denotada por  $M(s) = E(e^{sX})$ .

A soma agregada das indenizações  $\{S(t), t \geq 0\}$  tem a esperança, a variância e a função geradora de momentos dadas por:

$$E(S(t)) = E(N)E(X) = \lambda t p_1 \quad 2$$

$$V(S(t)) = E(N)V(X) + V(N)E^2(X) = \lambda t(p_2 - p_1^2) + \lambda t p_1^2 = \lambda t p_2 \quad 3$$

$$M_{S(t)}(r) = M_N[\log(M_X(r))] \quad 4$$

O Modelo Clássico não leva em consideração alguns fatores associados com as despesas administrativas, taxas de juros, inflação ou rendimentos provenientes de investimentos. Ele utiliza os prêmios arrecadados como única forma de geração da reserva da companhia de seguro e as indenizações como único fator de redução dessa reserva. Com a condição  $c > \lambda p_1$ , a companhia se assegura de que o valor pago pelo prêmio é superior ao valor esperado das indenizações por unidade de tempo.

Entretanto, existe uma condição no Modelo Clássico:

$\exists \theta > 0$  tal que:

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 > 0$$

$$c = (1 + \theta)\lambda p_1$$



onde  $\theta$  é chamado de fator de carregamento.

### 3. Probabilidade de Ruína

#### 3.1 Definições e propriedades

A probabilidade de ruína corresponde à probabilidade da seguradora tornar seu capital negativo em algum momento condicionado a um capital inicial escolhido no início do processo. Essa probabilidade pode ser calculada considerando-se que o momento de ruína é um instante no intervalo  $(0, t]$ , com  $t$  finito, ou então é um instante na semi-reta  $(0, \infty)$ .

Em nosso trabalho utilizaremos somente a probabilidade no intervalo  $(0, \infty)$  dada por:

$$\psi(u) = P(T < +\infty | U(0) = u) = P(U(t) < 0 \text{ para algum } t > 0 | U(0) = u) \quad 5$$

onde  $T = \inf \{t > 0 \text{ e } U(t) > 0\}$  é a variável aleatória que representa o instante em que a ruína ocorre dado o capital inicial  $u$ . A equação 5 corresponde à probabilidade de ruína  $\psi(u)$  em um tempo indeterminado condicionada ao capital inicial.

Percebe-se que somente poderá ocorrer a ruína no momento de ocorrência do sinistro, pois são somente nesses instantes que a reserva da seguradora decresce em função do pagamento de indenizações.

Como por suposição  $c > \lambda p_1$ , então  $0 \leq \psi(u) < 1$ , caso contrário,  $\psi(u) = 1$ , ou seja, ruína é certa.

Facilmente compreende-se que  $\psi(u) \rightarrow 0$  se  $u \rightarrow \infty$ .

A partir dessas análises podemos seguir com as seguintes propriedades que relacionam  $\psi(u)$  e  $\psi(u,t)$ :

Considere  $0 < u_1 < u_2$  e  $0 < t_1 < t_2 < \infty$ .

- $\psi(u_2,t) < \psi(u_1,t)$
- $\psi(u_2) < \psi(u_1)$
- $\psi(u,t_1) < \psi(u,t_2) < \psi(u)$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u,t) = \psi(u)$

Veja as demonstrações dessas propriedades em Dickson and Waters(1992).

### 3.2 Desigualdade de Lundberg e Coeficiente de Ajuste R

Em grande parte dos casos, não é possível conseguir uma expressão fechada para a probabilidade da ruína. Devido à complexidade dos cálculos, vários trabalhos foram feitos em busca de estimativas para essa probabilidade.

Para amenizar essa complexidade, supondo que a distribuição das indenizações seja exponencial, surgiu a aproximação denominada *Desigualdade de Lundberg*, muito utilizada na literatura atuarial. Essa abordagem fornece uma cota ou limite superior para a probabilidade de ruína  $\psi(u)$  assumindo a existência de um coeficiente de ajuste  $R$ . O Coeficiente de ajuste será a menor raiz da equação (Shiryayev,1996 e Ramsay,1992):

$$\lambda + cR - \lambda M_x(R) = 0 \quad 6$$

O parâmetro  $\lambda$  representa o número médio de sinistros,  $c$  é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo e  $M_x(R)$  representa a Função Geradora de Momentos da variável  $X$  avaliada em  $R$ .

A equação 6 possui uma única raiz real positiva que satisfaz a igualdade, independentemente da distribuição de sinistro.

A Figura 2 apresenta um exemplo do coeficiente de ajuste com fator de carregamento  $\theta = 0.1$ ,  $\lambda = 200$ , e o valor das indenizações individuais  $X$  tem distribuição exponencial com parâmetro  $\alpha = 1/200$ . A partir dessa figura, podemos ver claramente as duas raízes da equação, a primeira derivada positiva em torno do ponto zero e a concavidade.

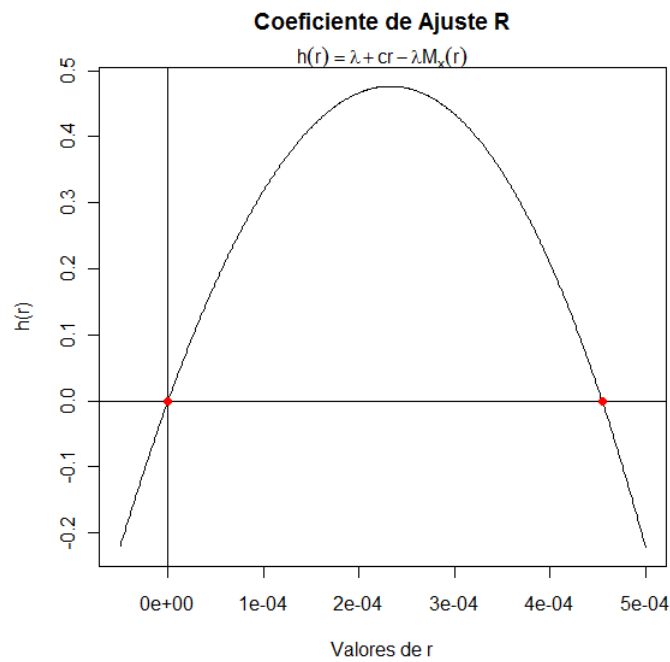


Figura 2 - Coeficiente de Ajuste R

Dado o coeficiente de Ajuste R, o limite superior da ruína também chamado de Desigualdade de Lundberg é dado por:

$$\psi(u) \leq \exp(-Ru) \quad 7$$

onde  $u$  é a reserva inicial da seguradora,  $R$  é o coeficiente de ajuste.

O parâmetro  $R$  só depende do processo de sinistros agregados e da taxa  $\lambda t$ , cujos parâmetros correspondem ao processo de Poisson composto na soma dos sinistros.

Pela própria equação 7 percebe-se que quanto maior o parâmetro  $R$ , menor se torna a probabilidade de ruína. Esse comportamento era previsível uma vez que a relação entre essas grandezas segue uma função exponencial decrescente.

A Figura 3 mostra um gráfico da cota superior da Desigualdade de Lundberg, (representada pela linha pontilhada) e da probabilidade de ruína  $\psi(u)$  (representada pela linha contínua) com o capital inicial variando de 0 a 25 unidades monetárias. Este gráfico foi obtido considerando as indenizações individuais seguindo uma distribuição exponencial  $\alpha = 1/10$  e fator de carregamento  $\theta = 0.1$ .

Observe que com capital inicial próximo de zero, a probabilidade de ruína se aproxima de um, ou seja, se torna bem mais provável. Ao aumentar o capital inicial percebe-se um decaimento na função de probabilidade de ruína. Pela análise do gráfico, também percebemos que a distribuição de  $\psi(u)$  é muito próxima da cota  $\exp(-Ru)$ , e esta proximidade absoluta aumenta com o aumento do capital inicial  $u$ . Podemos então dizer que  $\psi(u) \cong \exp(-Ru)$ .

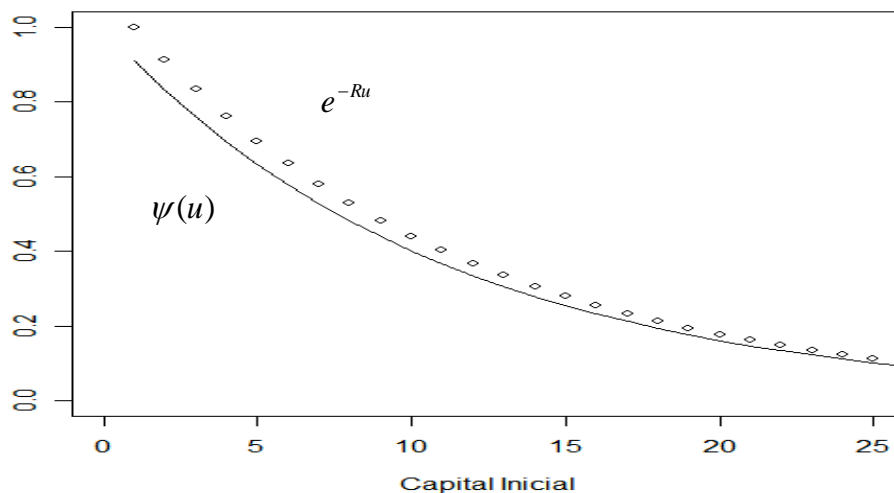


Figura 3 - Probabilidade de ruína e Desigualdade de Lundberg

Pode-se interpretar  $R$  como sendo uma mensuração do risco. Assim, quanto maior for  $R$ , menor se tornará a cota superior para  $\psi(u)$ . Esperamos que  $\psi(u)$  decresça com o aumento de  $R$ .

Para melhor análise, veja a Figura 4. Nela, nós fixamos cinco valores para o coeficiente de ajuste  $R$  e analisamos a o limite superior da probabilidade de ruína a partir da variação do capital inicial  $u$ . Nesse gráfico não assumimos nenhuma distribuição para os tempos de ocorrência dos sinistros e seus valores. Somente variamos o capital inicial e o valor do coeficiente de ajuste e analisamos o comportamento da desigualdade de Lundberg.

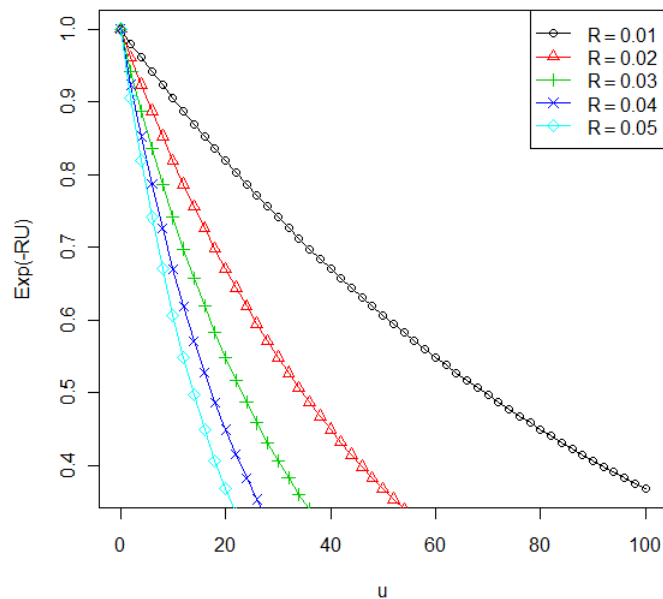


Figura 4 - Desigualdade de Lundberg com diferentes Coeficientes

### 3.3 Influência do capital inicial

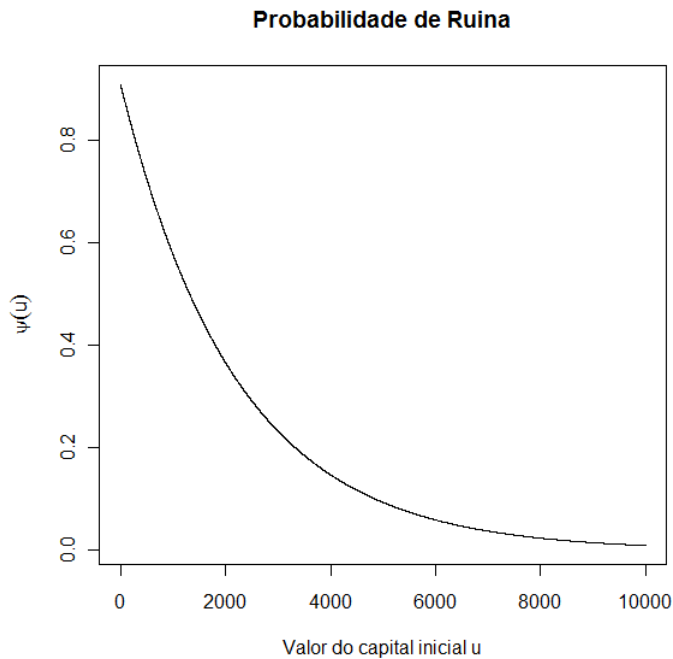
Em todo o processo de ruína observa-se a influência do tempo de ocorrência entre sinistros. Existem cenários que podem exemplificar sua importância.

Poderá existir um cenário cujo capital inicial de uma seguradora seja relativamente razoável, mas o tempo entre sinistros seja curto. Assim, mesmo com esse capital, a seguradora não possuirá tempo para arrecadar contribuições necessárias para pagar todas as indenizações, podendo entrar em ruína.

Em contrapartida, poderemos estar em um cenário com baixo capital inicial, mas com grande tempo entre indenizações. Nesse caso, essa seguradora poderá ter tempo suficiente para conseguir arrecadar as contribuições e pagar as indenizações, quando essas ocorrerem.

Já o capital inicial, pode ser de grande importância em situações em que conhecemos “a priori” a distribuição dos tempos de ocorrência de sinistros. Uma vez conhecida essa distribuição podemos balancear o capital inicial e probabilidade de ruína.

A influência do capital inicial pode ser observada na Figura 5. As indenizações individuais seguem uma distribuição exponencial com parâmetro  $\alpha = 1/200$ , fator de carregamento  $\theta = 0.1$  e número médio de indenizações  $\lambda = 200$ . Quanto maior o capital inicial menor a probabilidade de ruína, e quanto menor for o capital inicial maior é a probabilidade de ocorrer a ruína.



**Figura 5 - Probabilidade de ruína de acordo com o capital inicial**

### 3.4 Influência do valor das indenizações no coeficiente de ajuste

Estudamos anteriormente que o tempo entre ocorrência dos sinistros e o capital inicial de uma seguradora possuem grande importância na possível ocorrência de ruína. Vamos agora entender como o valor das indenizações pode afetar o processo de ruína.

É intuitivo pensar que quanto maiores são as indenizações, maior será a probabilidade de ruína. Pode ocorrer, em algum momento, um sinistro cuja indenização seja tão alta que a seguradora não possua o capital necessário para cobri-lo. Temos uma relação positiva entre o valor das indenizações e a probabilidade de ruína.

Iremos averiguar esse comportamento na Desigualdade de Lundberg supondo que a distribuição do valor de indenizações é exponencial com parâmetro  $\alpha$ . Isso foi feito

devido à facilidade em se obter fórmulas fechadas para a probabilidade de ruína e para o coeficiente de ajuste quando usamos a distribuição exponencial. Lembre-se que a esperança de uma distribuição exponencial  $\alpha$  é o inverso desse parâmetro.

Resolvendo a equação 6, o coeficiente de ajuste R é dado a partir da equação abaixo:

$$R = \alpha - \frac{\lambda}{c} \quad 8$$

A constante c será calculada a partir da relação:

$$c = (1 + \theta) \frac{\lambda}{\alpha} \quad 9$$

Onde  $\theta$  corresponde ao fator de carregamento e  $\lambda$  é o número médio de indenizações.

Sejam os valores fixos:

- $\theta = 0.1$
- $\lambda = 200$
- $u = 1000$



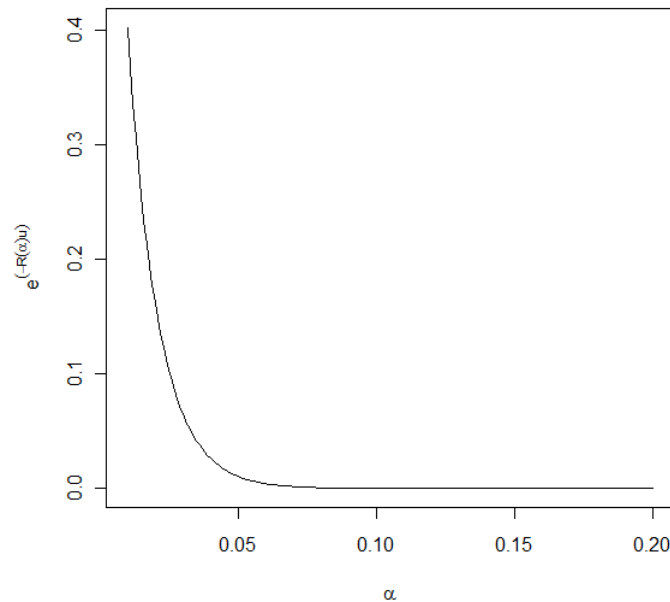


Figura 6 - Desigualdade de Lundberg variando valor médio do sinistro

A Figura 6 apresenta a seguinte relação: Quanto menor o valor de  $\alpha$ , maior é valor médio de indenização e menor será o coeficiente  $R$ . Conseqüentemente a cota superior será maior, obrigando a seguradora adotar um valor de capital inicial maior, pois a probabilidade de ruína aumentou. Do mesmo modo temos que, ao aumentar o valor de  $\alpha$ , menor será o valor médio de indenização e o coeficiente aumentará tornando o valor da desigualdade menor.

Resumindo, quanto maior o parâmetro  $\alpha$ , maior o valor de  $R$ , e quanto menor esse parâmetro, maior será a probabilidade de entrar em ruína. Ou seja, como já esperado, o valor da indenização afetará a probabilidade de ocorrer ruína.

### 3.5 Cálculo da probabilidade de ruína

Nesta seção, apresentamos uma equação para a probabilidade de ruína eventual. A demonstração dessa fórmula está no apêndice desse trabalho. Fica claro que a equação da probabilidade de ruína eventual, apresentada adiante, não exige a existência do coeficiente de ajustamento e por consequência não é necessário saber a função geradora de momento da função de densidade das indenizações particulares

Para o cálculo da probabilidade de ruína, deve-se encontrar uma equação geral para  $\psi(u)$  assumindo que os sinistros agregados seguem um processo de Poisson Composto. Podemos resolver essa equação em casos em que os valores dos sinistros individuais seguem uma distribuição exponencial. A equação da probabilidade de ruína é dada por:

$$\frac{d\psi(u)}{du} = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f_X(x)\psi(u-x)dx + \frac{\lambda}{c}[1 - F_X(u)] \quad 10$$

Esse tipo de equação é conhecido como uma equação integro-diferencial. Em geral, é possível encontrar uma solução explícita para a equação  $\psi(u)$  somente com certas formas de  $F_X(x)$ .

A equação 10 pode ser calculada para a probabilidade da ruína no caso da utilização da distribuição exponencial. Desse modo, para os sinistros seguindo uma distribuição exponencial com média  $\frac{1}{\alpha}$ , temos:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c\alpha} e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u}, \quad c > \lambda E(x) \quad 11$$

## 4. Aproximação da Probabilidade de Ruína

Existem várias maneiras de se estimar a probabilidade de ruína em casos em que a distribuição não seja exponencial. Nesse trabalho, estudaremos uma aproximação conhecida como Método de Vylder (veja De Vylder, 1978).

A idéia por trás do Método de Vylder é simples. Suponha um processo de risco  $\{U(t), t \geq 0\}$  em que nós desejamos calcular a probabilidade de ruína. Nós podemos aproximar o processo de risco por um processo clássico  $\{\tilde{U}(t), t \geq 0\}$  que possui as seguintes características:

- $\tilde{U}(t) = u + \tilde{c}t - \tilde{S}(t)$
- $\{\tilde{U}(0) = u\}$
- O parâmetro de Poisson é  $\tilde{\lambda}$
- O prêmio por unidade de tempo é  $\tilde{c}$
- A distribuição do sinistro individual é  $\tilde{F}(x) = 1 - e^{-\tilde{\alpha}x}$ ,  $x \geq 0$

Os novos parâmetros para a função de  $\psi(u)$ , desde que a distribuição do sinistro na aproximação do risco seja exponencial com parâmetro  $\tilde{\alpha}$ , são obtidos igualando os três primeiros momentos do processo que estamos interessados  $\{U(t), t \geq 0\}$  com o processo clássico  $\{\tilde{U}(t), t \geq 0\}$ .

Supondo que  $X$  são os reclamos individuais com distribuição  $F(x)$ ,  $c$  é o prêmio arrecadado por unidade de tempo e  $\lambda$  é o número médio de sinistros tempo que:

Igualando os primeiros momentos:

$$\begin{aligned}
E(\tilde{U}(t)) &= E(U(t)) \\
u + \tilde{c}t - E(\tilde{S}(t)) &= u + ct - E(S(t)) \\
\tilde{c}t - \frac{\tilde{\lambda}t}{\tilde{\alpha}} &= ct - \lambda E(X) \\
\tilde{c} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}} &= c - \lambda E(X)
\end{aligned}$$

Igualando os segundos momentos e utilizando a demonstração da variância de um processo de risco temos que:

$$\begin{aligned}
E\left[(\tilde{U}(t) - E(\tilde{U}(t)))^2\right] &= E\left[(U(t) - E(U(t)))^2\right] \\
V(\tilde{S}(t)) &= V(S(t)) \\
\frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^2} &= \lambda p_2
\end{aligned}$$

Igualando os terceiros momentos:

$$\begin{aligned}
E\left[(\tilde{U}(t) - E(\tilde{U}(t)))^3\right] &= E\left[(U(t) - E(U(t)))^3\right] \\
E\left[(u + \tilde{c}t - \tilde{S}(t) - (u + \tilde{c}t - E(\tilde{S}(t))))^3\right] &= E\left[(u + ct - S(t) - (u + ct - E(S(t))))^3\right] \\
-E\left[(\tilde{S}(t) - E(\tilde{S}(t)))^3\right] &= -E\left[(S(t) - E(S(t)))^3\right] \\
\frac{6\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^3} &= \lambda p_3
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\tilde{\alpha} = \frac{3E(X^2)}{E(X^3)} \qquad \tilde{\lambda} = \frac{9E^3(X^2)}{2E^2(X^3)} \qquad \tilde{c} = c - \lambda E(X) + \frac{3E^2(X^2)\lambda}{2E(X^3)}$$

Logo, a aproximação da probabilidade de ruína é dada por:

$$\psi_v(u) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}\tilde{\alpha}} e^{-\left(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}\right)u}$$

12

O método De Vylder é conhecido por apresentar bons resultados quando se conhece a função geradora de momentos. Grandell (2000) analisou através de resultados numéricos alguns métodos simples de aproximações para a probabilidade de ruína

eventual e verificou que a aproximação de De Vylder foi a que apresentou melhor resultado.

No caso em que a distribuição dos sinistros é exponencial, é esperado que a aproximação de De Vylder apresente resultado exato. Entretanto, em casos em que a distribuição não é exponencial, a aplicação desse método somente é possível quando existem os três primeiros momentos.

Na dissertação de Lemos(2008), existe um estudo dessa aproximação variando a distribuição das indenizações individuais. Ela adota distribuições de caudas pesadas tais como Pareto e Weibull. Essas últimas não possuem função geradora de momentos. Ela também analisa outros dois métodos de aproximação. Ao comparar via simulação as três aproximações, variando a distribuição do valor das indenizações, não foi observada nenhuma distinção na qualidade da estimação.

## 5. Metodologia Desenvolvida

### 5.1 Modelo 1

Considere a equação 1 de processo de reserva e da soma das indenizações já descrito anteriormente:

$$U(t) = u + ct - S(t) \text{ e } S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

onde  $S(t)$  é a soma agregada de indenizações,  $X_i$  é o valor das indenizações individuais, com distribuição  $F_X(x)$  e considerados como variáveis aleatórias independentes.  $N(t)$  é um processo de Poisson com taxa  $\lambda$ .

O Modelo Clássico considera os valores das indenizações independentes, sendo somados gradativamente de acordo com sua ocorrência. Sabe-se que, na prática, existe dependência entre esses valores. Pense por exemplo em fazendas sendo afetadas por uma geada. Nesse caso, a ocorrência de tal evento pode ocasionar danos em mais de uma apólice, sendo estas dependentes.

É feita uma nova abordagem, considerando então, a ocorrência de eventos e as indenizações causadas por cada evento. Ou seja, acontece um evento (catástrofe) que gera vários sinistros, associados com várias apólices, que recebem indenizações. Para cada evento considerado no processo, existirá uma apólice que receberá indenização (a primeira a contactar o seguro) e outras possíveis apólices afetadas. Chamaremos de eventos as catástrofes que causam danos às apólices.

Assumimos que:

- $N(t)$  é o número de indenizações até o tempo  $t$ , segundo o Modelo Clássico, e  $\lambda$  será o número médio de eventos até o tempo  $t$ .

- $N_1(t)$  é o número de eventos até o tempo  $t$ , e  $\lambda_1$  será o número médio de eventos até o tempo  $t$ .
- $N_2$  é o número de indenizações associadas por evento, e  $\lambda_2$  será o número médio de indenizações afetadas por evento sem contar a primeira indenização.

Logo, o número médio de indenizações total será a soma das o número médio de eventos multiplicado por um mais o número médio de indenizações para cada evento.

$$\lambda = \lambda_1(1 + \lambda_2) \quad 13$$

No processo de risco  $U(t)$ , representaremos  $S(t)$  como o valor das indenizações agregadas. Essa soma não será mais de sinistros individuais. Subdividiremos o processo em  $N_1(t)$  eventos. Para cada um, será contabilizado o valor da indenização da apólice que acionou a seguradora mais as indenizações das outras apólices afetadas pelo evento.

Este trabalho propõe uma nova abordagem para o processo de risco da seguinte forma:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i \quad 14$$

$$N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t)$$

$$Y_i = X_{i0} + \sum_{k=1}^{N_2} X_{ik} \quad 15$$

onde  $X_{i0}$  e  $X_{ik}$  são iid com distribuição  $F_X(x)$ .

$$N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$$

No modelo, o número de evento,  $N_1(t)$ , será um Processo de Poisson e o número  $N_2$  de outras possíveis apólices que sofreram danos decorrentes de algum evento terá distribuição de Poisson.

A variável  $Y_i$  representa a perda total ocasionada pelo  $i$ -ésimo evento, sendo decomposta no valor da indenização da apólice que acionou o seguro ( $X_{i0}$ ) mais as somas das indenizações de possíveis apólices afetadas ( $\sum_{k=1}^{N_2} X_{ik}$ ). A variável  $X$  representará o valor das indenizações individuais com distribuição  $F_X(x)$  *iid* e a variável  $N_2$  representa a distribuição do número de vizinhos associados por evento.

### 5.1.1 Agregação das indenizações por evento

Esse modelo sugere que a entrada das indenizações seja feita em blocos, a partir de ocorrência do evento. Então, quando este ocorre, todas as apólices afetadas receberão suas respectivas indenizações sendo contabilizadas no processo. Somente na ocorrência do próximo evento é que haverá a entrada de outras apólices no processo.

Fixemos, por exemplo, o número médio de indenizações  $\lambda=100$ . Se o número médio de evento for  $\lambda_1=2$ , então, para cada evento teremos em média  $\lambda_2=49$  outras apólices afetadas, além daquela que acionou a seguradora. Assim, no total, teremos, em média, as mesmas cem indenizações. Da mesma maneira, poderíamos ter um número médio de evento  $\lambda_1=100$  e o valor médio de outras apólices afetadas  $\lambda_2=0$  além daquela que acionou a companhia, obtendo-se no final cem indenizações. Este último cenário é idêntico ao Modelo Clássico já mencionado, pois as entradas das indenizações são feitas individualmente.

A explicação anterior introduziu a idéia de agregação das indenizações por evento. Assim, com o número médio de indenizações fixo, quanto menor o  $\lambda_1$ , maior é o número



de indenizações resultantes por cada evento, ou seja, cada vez que ocorrer um evento, muitas apólices serão afetadas. Em contrapartida, quanto maior o  $\lambda_1$ , menor será o número médio de indenizações por evento.

A Figura 7 e a Figura 8 apresentam as diferenças das agregações dos eventos. Fixamos o número médio de indenizações  $\lambda = 100$  e variamos o número médio de evento de  $\lambda_1 = 4$ , na primeira figura, para  $\lambda_1 = 11$ , na segunda figura. Observa-se que, ao aumentar o parâmetro  $\lambda_1$ , a configuração muda de agregada (com poucos eventos e concentração de apólice por evento) para uniforme (com mais evento e poucas apólices por evento).

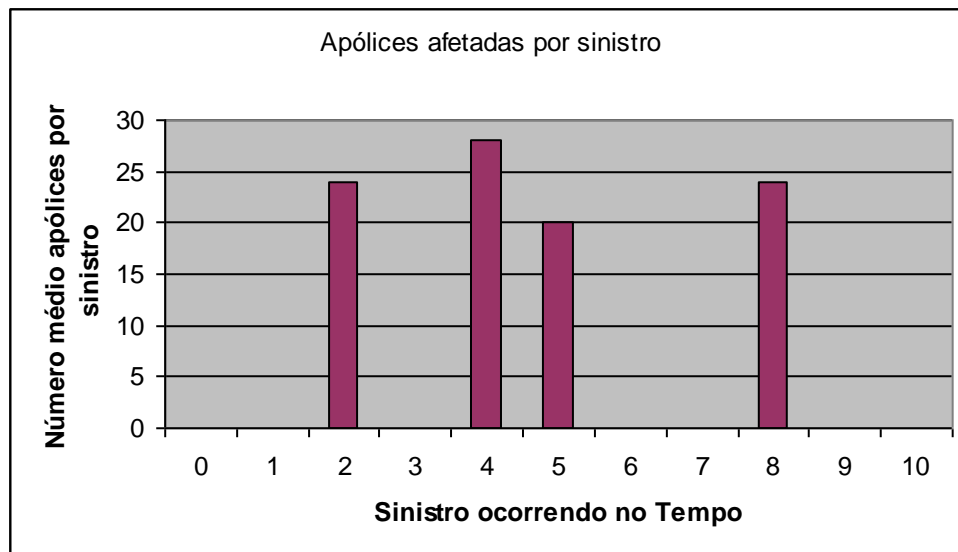


Figura 7 - Visualização do número médio de apólices por evento:  $\lambda = 100$  e  $\lambda_1 = 4$ .

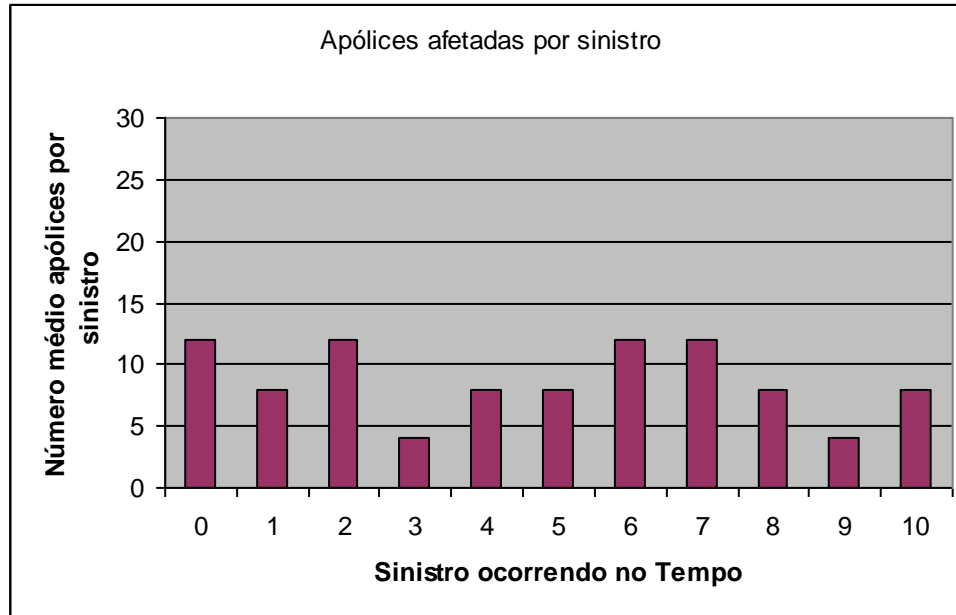


Figura 8 - Visualização do numero médio de apólices por evento:  $\lambda = 100$  e  $\lambda_1 = 11$ .

## 5.2 Modelo 2

Imagine que ocorreu uma geada em um lugar no campo. Nesse modelo também assumimos que há uma fazenda que acionará o seguro para receber sua indenização e que, junto a essa primeira fazenda, outras fazendas também receberão suas respectivas indenizações. É intuitivo pensar que fazendas mais próximas do local onde ocorreu a geada sofrerão danos maiores comparados com aqueles em fazendas mais distantes. Assim, o valor da indenização está relacionado com a distância relativa da fazenda ao local da geada.

Essa nova abordagem nos conduzirá a um modelo com estrutura de dependência entre valores de indenizações. Tal dependência pode ser considerada espacial, já que apólices vizinhas terão valores de indenizações correlacionados.

Veja as seguintes definições :

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad , t \geq 0$$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$$

$$N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t)$$

Assim como no Modelo Clássico,  $U(t)$  representa o processo de reserva,  $S(t)$  a soma agregada de indenizações e  $N_1(t)$  o número de evento até o tempo  $t$ . A variável  $Y_i$  corresponde à soma de indenizações do  $i$ -ésimo evento e será definida como:

$$Y_i = X_{i0} + \sum_{k=1}^{N_2} X_{ik} \text{ , onde}$$

$$N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$$

$$\lambda = \lambda_1(1 + \lambda_2)$$

$X_{i0}$  com distribuição  $F_X(x)$

$X_{ik} | X_{i0}$  iid com distribuição  $F_{X_k | X_{i0}}(x)$ .

O parâmetro  $\lambda$  é definido como número médio de indenizações até o tempo  $t$ .

O ponto chave desse novo modelo é a distribuição da variável  $X_{ik} | X_{i0}$ . Em cada análise, iremos escolher diferentes distribuições para essa variável.

Observe que ao ocorrer a  $i$ -ésima geadada (evento), uma primeira apólice aciona o seguro e recebe sua indenização denotada por  $x_{i0}$ . As demais apólices afetadas terão suas indenizações parecidas com a primeira apólice dado que sofreram do mesmo evento. Por

esse motivo, condicionamos o valor dessas demais apólices ao valor da primeira, sendo que, em média, serão parecidas.

Utilizaremos também um novo parâmetro  $\rho(s_{ik})$  que afeta o valor indenizações vizinhas de acordo com a distância que as apólices estão do centro do evento. Esse parâmetro acrescenta no modelo a idéia de que, quanto mais afastada a fazenda está do local onde ocorreu a geada, menores serão os danos e, conseqüentemente, menor o valor de sua indenização. Vamos assumir que a primeira apólice que acionou o seguro está localizada no centro da geada.

Seja  $0 < \rho(s_{ik}) < 1$  e  $s_{ik}$  a distância da fazenda ao centro da geada. Quanto maior a distância  $s_{ik}$ , mais  $\rho(s_{ik})$  se aproximará de zero e conseqüentemente o valor da indenização será em média próxima de zero. Em contra partida, quanto menor for  $s_{ik}$ ,  $\rho(s_{ik})$  será próximo de um e o valor da indenização será em média igual à indenização da primeira apólice que acionou o seguro.

Adotamos um modelo simples em que as fazendas estão equiespaçadas a partir do centro do evento. Isto implica que  $s_{ik} = k$ . Além disso, assumimos que  $\rho(s_{ik}) = \rho_0^k$ , onde  $0 < \rho_0 < 1$ .

A Figura 9 apresenta o comportamento do  $\rho(s_{ik})$ :

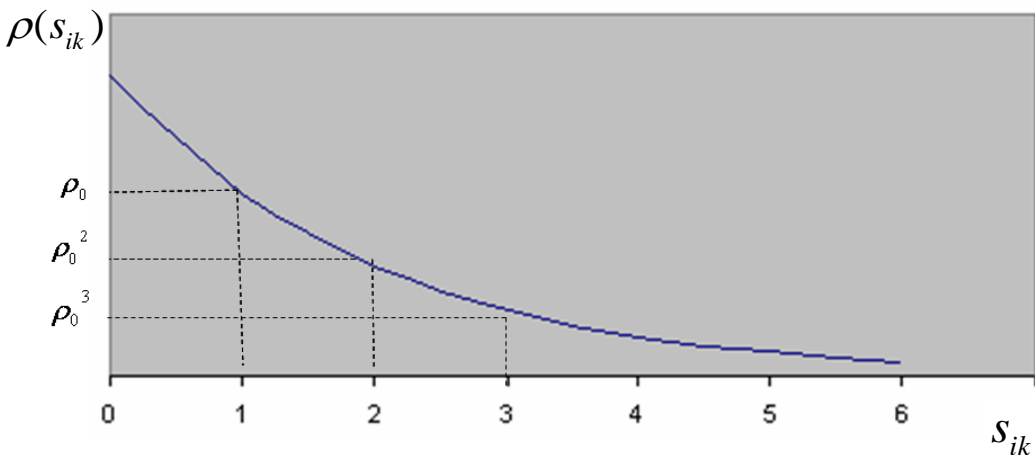


Figura 9 - Comportamento do  $\rho(s_{ik})$

O parâmetro  $\rho_0$  corresponde à correlação espacial entre as apólices que varia de acordo com a configuração espacial do cenário em estudo. Pode-se esperar uma correlação alta quando existe um aglomerado de fazendas, e uma correlação baixa se elas se encontram espaçadas.

### 5.2.1 Coeficiente de correlação e as Indenizações vizinhas

Determinamos anteriormente o comportamento do  $\rho(s_{ik})$  assumindo que as apólices estão equiespaçadas a partir do centro do evento. Assim, o coeficiente de correlação espacial  $\rho_0$  vai nos dizer o quanto as apólices são parecidas. Isso quer dizer que se esse coeficiente for elevado, é provável que dado o valor da primeira indenização, sua primeira vizinha terá um valor de indenização parecido. A segunda vizinha terá a indenização um pouco menor que a primeira vizinha e a terceira vizinha com uma indenização um pouco menor que a vizinha anterior e assim por diante. Se o coeficiente for pequeno, as indenizações serão mais diferentes entre si, tendo um maior decaimento de seu valor ao longo da vizinhança.

Iremos estudar o comportamento das indenizações vizinhas variando o coeficiente de correlação espacial e as distribuições utilizadas.

Utilizamos para o valor da primeira indenização as seguintes distribuições e parâmetros:

$$X_0 \sim \text{Exponencial}\left(\frac{1}{200}\right)$$

$$X_0 \sim \text{Pareto}(4,200)$$

$$X_0 \sim \text{Weibull}(0.9,200)$$

Dada a distribuição  $X_0$  escolhida, nós variamos também a distribuição dos valores das apólices vizinhas da seguinte forma:

$$X_k | X_0 \sim \text{Exponencial}\left(\frac{1}{\rho(s_{ik})x_o}\right)$$

$$X_k | X_0 \sim \text{Pareto}(4, \rho(s_{ik})x_o)$$

$$X_k | X_0 \sim \text{Pareto}(0.9, \rho(s_{ik})x_o)$$

Os demais parâmetros são:

- $\lambda = 200$
- $\theta = 0.1$
- $\lambda_2 = 10$
- $\lambda_1 = \frac{\lambda}{(1 + \lambda_2)}$
- $c = (1 + \theta) \frac{\lambda}{\alpha}$
- $\rho_0 = 0.9, \rho_0 = 0.5$  ou  $\rho_0 = 0.1$

Os gráficos foram feitos via simulação. Primeiro simulamos o valor da indenização da primeira apólice  $x_0$  de acordo com a distribuição escolhida. Utilizamos o valor

simulado  $x_0$  para gerar o valor das indenizações vizinhas. Isso foi feito porque esse modelo assume que os valores das indenizações vizinhas são condicionados ao valor da primeira indenização. Nesse exemplo o número de vizinhos foi fixado em  $\lambda_2 = 10$ , para possibilitar a análise do mesmo número de apólices para todas as simulações. Se assumíssemos esse valor como uma variável aleatória, poderiam existir simulações com zero vizinhos, impossibilitando a análise dos valores das indenizações vizinhas.

Para cada cenário, foram feitas 50 simulações. Cada simulação foi considerada como uma trajetória que representa o comportamento das indenizações a partir de um mesmo evento e do mesmo valor da primeira indenização (vizinho zero). Para facilitar as análises, fixamos as escalas do eixo  $y$  para cada valor de  $\rho_0$  utilizado.

Na Figura 10 consideramos a distribuição exponencial para a primeira indenização. Ao fixar o coeficiente de correlação espacial  $\rho_0 = 0.9$ , podemos comparar o comportamento de cada distribuição em um cenário onde as apólices são bastante correlacionadas. A distribuição exponencial apresentou trajetórias com maiores variações em torno da primeira indenização com vários picos. Esse comportamento aparenta ser aleatório, ou seja, o valor da primeira indenização não influenciou o valor das demais indenizações. Não se observou nenhum decaimento ao longo dos vizinhos. A distribuição de Pareto demonstrou menor variação em torno da primeira observação, ou seja, dada a primeira indenização, as seguintes são bastante parecidas. Além da correlação observada, existe um pequeno decaimento dos valores ao longo dos vizinhos e poucos picos. A distribuição Weibull apresentou menor variação entre todas as distribuições. Como a distribuição Pareto, os valores das indenizações vão decaindo ao longo dos vizinhos, mas não apresentou picos.

A segunda coluna de gráficos representa um cenário com baixa correlação espacial, ou seja, as apólices são pouco correlacionadas, Para isso adotamos um coeficiente de correlação espacial  $\rho_0 = 0.5$ . A distribuição exponencial demonstrou um caimento entre os valores das indenizações com alguns picos nos primeiros vizinhos. O

comportamento das distribuições de Pareto e Weibull é bastante parecido. Os gráficos apresentaram uma queda dos valores das indenizações com menores variações comparadas à distribuição Exponencial. Devido à baixa correlação espacial, todas as distribuições tiveram suas indenizações convergindo para zero.

Enfim, a terceira coluna representa um cenário onde as apólices são bastante diferentes entre si, ou seja,  $\rho_0 = 0.1$ . Em todas as distribuições adotadas, existe um forte decaimento ao longo das indenizações das apólices vizinhas. Como observado anteriormente, a distribuição exponencial continuou apresentando alguns picos.



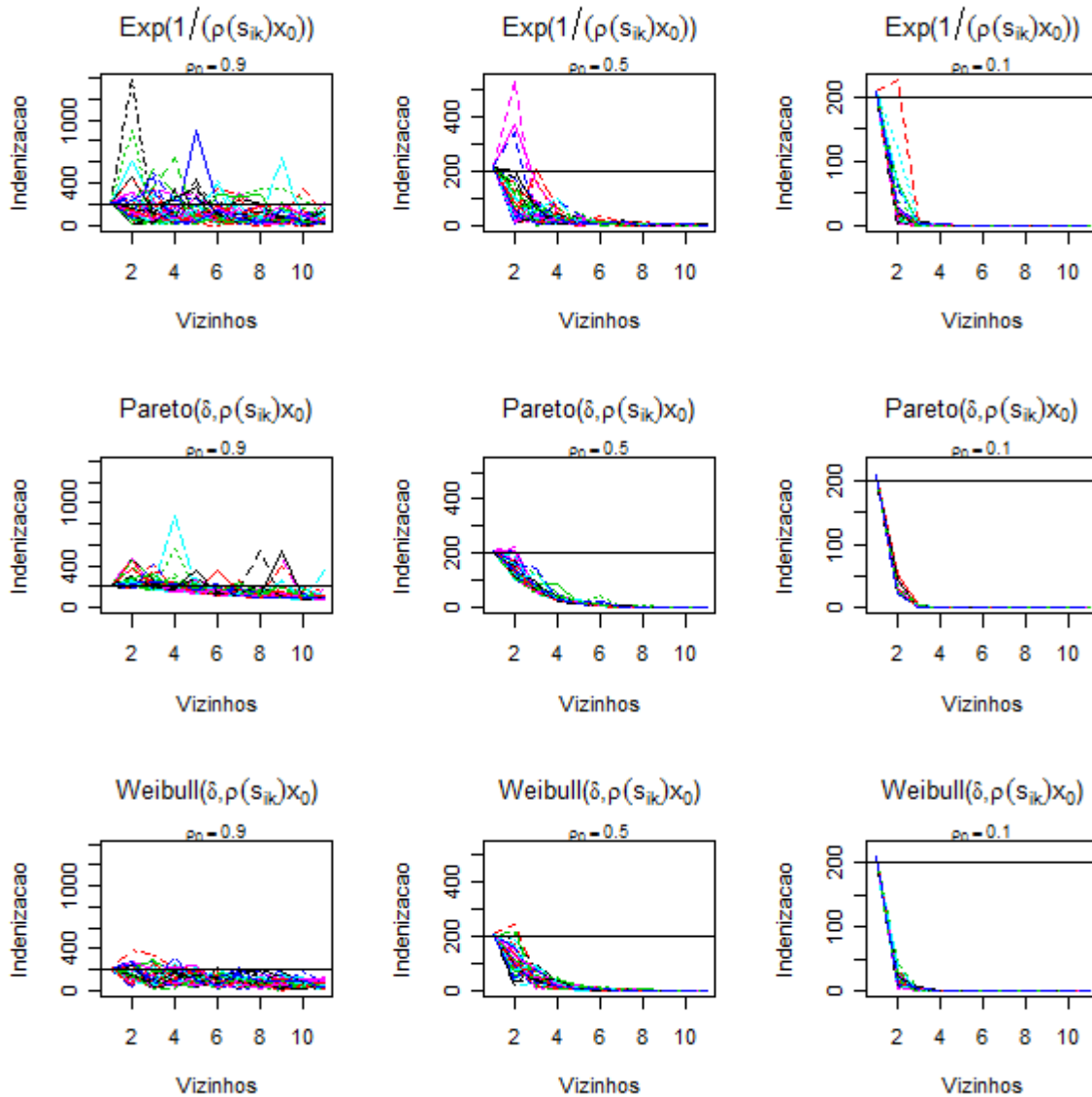


Figura 10 - Trajetória com  $X_0 \sim \text{Exponencial}\left(\frac{1}{200}\right)$ .

Os resultados das trajetórias das indenizações vizinhas utilizando duas outras distribuições para o valor da primeira indenização são iguais ao apresentado na Figura 10. Isso se deve ao fato de que somente foi gerado um valor para a primeira indenização. Mesmo utilizando a distribuição Pareto e Weibull, esse único valor simulado provavelmente não seria muito diferente.

### 5.3 Modelo 3

O terceiro modelo sugerido nesse trabalho é dado considerando o processo de risco  $\{U(t), t \geq 0\}$ :

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad , t \geq 0$$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$$

$$N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t)$$

onde  $u$  é o capital inicial,  $c$  é o prêmio cobrado por unidade de tempo,  $S(t)$  é a soma agregada de indenizações e  $N_1(t)$  é o número de evento até o tempo  $t$ . A variável  $Y_i$  corresponde à soma das indenizações do  $i$ -ésimo evento e será definida por:

$$Y_i = X_{i0} + \sum_{k=1}^{N_2} X_{ik} \quad , \text{ onde}$$

$$N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$$

$$\lambda = \lambda_1(1 + \lambda_2)$$

$X_{i0}$  Tem distribuição  $F_X(x)$

$$X_{ik} = \rho_0^k X_o$$

$$0 < \rho_0 < 1$$

O parâmetro  $\rho_0$  representa a correlação espacial do cenário. Os valores das indenizações das apólices vizinhas irão decair a partir da primeira apólice pois a correlação é sempre menor que um. Quanto mais próximo de um a correlação for, mais parecidos as demais indenizações serão do valor da primeira apólice. Do mesmo modo, quando a correlação é próxima de zero, o valor das indenizações vizinhas cairá rapidamente.

A Figura 11 mostra o comportamento do valor das indenizações  $X_{ik} = \rho_0^k X_o$  quando a primeira indenização de  $x_0 = 200$ , o número de vizinhos  $N_2 = 10$ . Variamos o valor da correlação espacial  $\rho_0 = 0.4$ ,  $\rho_0 = 0.6$  e  $\rho_0 = 0.8$ .

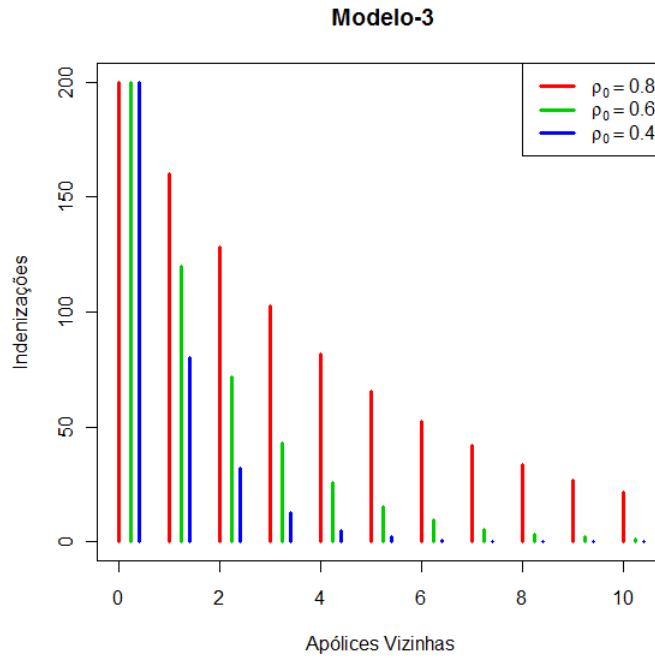


Figura 11 - Decaimento das indenizações no Modelo 3 com diferentes correlações espaciais.

Nesse modelo não precisamos definir a distribuição das apólices vizinhas, podendo assim somente variar  $X_{i0}$ .

## 6. Resultados

### 6.1 Parte 1: A Desigualdade de Lundberg e o Coeficiente de ajuste R

#### 6.1.1 Modelo 1

Como já apresentado, a desigualdade de Lundberg é dada por:

$$\psi(u) \leq \exp(-Ru)$$

O parâmetro  $R$  é o coeficiente de ajuste encontrado resolvendo-se a equação 16. Reparem que ela tem o mesmo formato do caso Clássico, com pequenas modificações de parâmetros.

$$\lambda_1 + cR - \lambda_1 M_Y(R) = 0 \quad 16$$

O parâmetro  $\lambda_1$  é o número médio de eventos,  $c$  é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo e  $M_Y(R)$  representa a Função Geradora de Momentos da variável  $Y$  avaliada em  $R$ .

O interesse agora seria encontrar a nova função geradora de momentos da variável  $Y$  em função da função geradora de momentos das indenizações individuais  $X$ .

$$\begin{aligned} M_Y(R) &= M_X(R) \cdot M_{N_2}(\log(M_X(R))) \\ M_Y(R) &= M_X(R) \cdot \exp\{\lambda_2 \cdot (e^{\log M_X(R)} - 1)\} \\ M_Y(R) &= M_X(R) \cdot \exp\{\lambda_2 \cdot (M_X(R) - 1)\} \end{aligned}$$

Para cálculos posteriores, foi considerada a distribuição exponencial com parâmetro  $\alpha$  para as indenizações individuais  $Y$ . A função geradora de momentos é dada por:

$$M_Y(R) = \frac{\alpha}{\alpha - R} \cdot e^{\lambda_2 \left( \frac{\alpha}{\alpha - R} - 1 \right)}$$

Para encontrar  $R$  foi substituída a função acima na equação 16:

$$\lambda_1 + cR - \lambda_1 \left[ \frac{\alpha}{\alpha - R} \cdot e^{\lambda_2 \left( \frac{\alpha}{\alpha - R} - 1 \right)} \right] = 0$$

Definimos:

$$f(x) = x \cdot e^{\lambda_2(x-1)}$$

Onde:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha - R}$$

Será feita a expansão de Taylor de segunda ordem de  $f(x)$  avaliada no ponto  $x_0 = 1$ . Segundo Dickson and Waters (1992),  $R \approx 0,02$  é um valor inicial razoável para o coeficiente de ajuste em casos que se deseja fazer uma expansão, o que implica um  $x \approx 1$ .

Assim, as raízes são:

$$R' = 0$$

$$R'' = a - \frac{\lambda_1}{c} \left( 1 - \frac{\lambda_2^2}{2} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{4c} \sqrt{\lambda_1^2 (2 - \lambda_2^2)^2 + 8ac\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 + 2)} \quad \mathbf{1}$$

$$R''' = a - \frac{\lambda_1}{c} \left( 1 - \frac{\lambda_2^2}{2} \right) \frac{1}{2} - \frac{1}{4c} \sqrt{\lambda_1^2 (2 - \lambda_2^2)^2 + 8ac\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 + 2)}$$

A primeira raiz é trivial, a segunda é positiva e a terceira é negativa. Assim, usaremos a segunda raiz encontrada pela expansão.

### 6.1.1.1 Agregação das indenizações por evento e a Desigualdade de Lundberg

O intuito desse estudo será a análise da influência da agregação das indenizações por evento na desigualdade de Lundberg.

Seja a desigualdade dada por:

$$\psi(u) \leq \exp(-Ru)$$

Observa-se que o nível da cota superior é afetado pelo valor de  $R$ , ou seja, quanto menor o valor de coeficiente, maior será a cota. Do mesmo modo que quanto maior o coeficiente, menor se torna a cota. Isso implica que iremos avaliar o comportamento do coeficiente de ajuste a partir da variação do número médio de eventos, fixando o número médio de indenizações. A Figura 12 apresenta os resultados dessas variações.

Foi assumido que os eventos seguem um processo de Poisson com parâmetro  $\lambda_1$  e o número de indenizações por evento segue uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda_2$ . Já o valor das indenizações seguirá uma distribuição exponencial com parâmetro  $\alpha$  e um fator de carregamento  $\theta$ .

Adotaremos os seguintes valores:

- $\alpha = 1/200 = 0.005$
- $\theta = 0.1$
- $\lambda_2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} - 1$
- $c = (1 + \theta) \frac{\lambda}{\alpha}$
- $u = 2000$

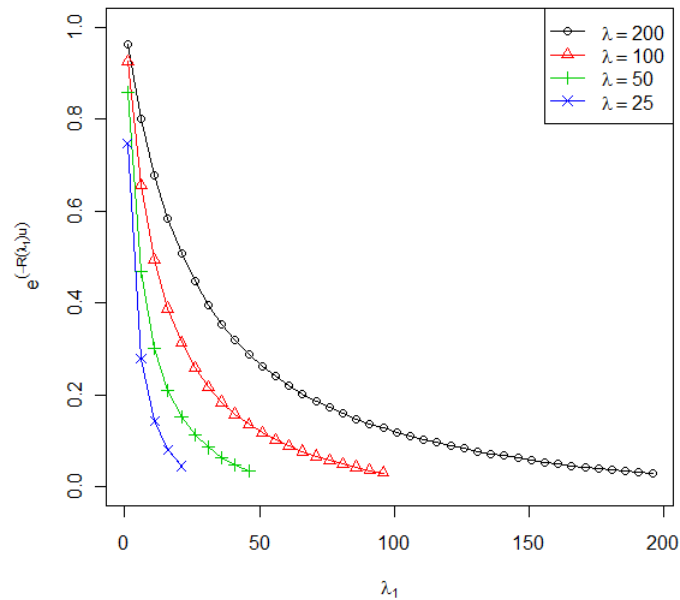


Figura 12 - Influência do número médio de eventos na Desigualdade de Lundberg.

Por termos fixado o número total de indenizações  $\lambda$ , ao diminuir o número de eventos  $\lambda_1$ , o número de apólices afetadas por cada evento aumenta de acordo com a equação 11. Fixemos o número médio de indenizações  $\lambda = 200$  (curva preta). Ao diminuir o número médio de eventos  $\lambda_1$  de 100 para 50 o limite superior da probabilidade de ruína aumenta de 0.2 para 0.3. Pode-se observar o mesmo comportamento quando adotamos diferentes valores de  $\lambda$ .

Assim, dado um valor médio de indenizações fixo  $\lambda$ , quanto menor o número médio de eventos  $\lambda_1$ , menor será o valor do Coeficiente de Ajuste  $R$ , e, conseqüentemente, maior o valor da cota superior. Isso caracteriza um aumento no risco de ocorrer ruína, obrigando a seguradora a adotar um valor de capital inicial maior.

Outra maneira de interpretar esse resultado seria que, ao adotar esse método, a seguradora estaria assumindo uma postura mais conservadora, no sentido de preferir um capital inicial maior ao sugerido pelo Modelo Clássico.

### 6.1.1.2 O valor médio das indenizações e a Desigualdade de Lundberg

O valor das indenizações individuais segue uma distribuição exponencial de parâmetro  $\alpha$ . Já foi estudado anteriormente que a probabilidade de uma seguradora entrar em ruína aumenta com valores de indenizações altos. Os parâmetros utilizados foram:

- $\lambda = 200$
- $\theta = 0.1$
- $\lambda_2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} - 1$
- $c = (1 + \theta) \frac{\lambda}{\alpha}$
- $u = 2000$

Essa seção terá como objetivo avaliar a influência da variação do parâmetro  $\alpha$  na cota superior de ruína.

A Figura 13 apresenta o resultado esperado.

Temos que, ao aumentar o parâmetro  $\alpha$  (inverso do valor médio das indenizações), o coeficiente R aumenta, reduzindo a cota superior. Isso significa que quanto maior é o valor médio das indenizações, maior é a probabilidade de entrar em ruína.



Ao fixar um valor de  $\alpha$ , observamos o mesmo comportamento descrito anteriormente, ou seja, quanto maior é o numero de indenizações por evento, maior é a probabilidade da seguradora entrar em ruína.

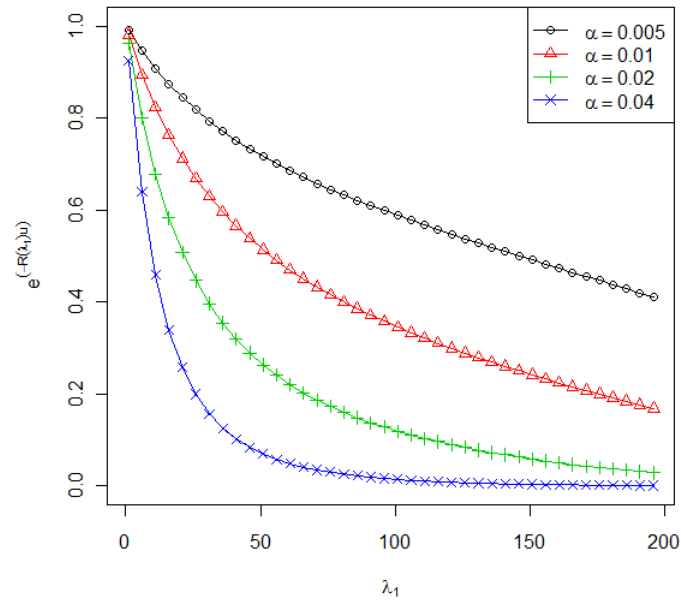


Figura 13 - Influência do valor médio de indenizações na Desigualdade de Lundberg.

### 6.1.2 Modelo 2

Para encontrar o coeficiente de ajuste  $R$ , é preciso resolver a equação abaixo:

$$\lambda_1 + cR - \lambda_1 M_Y(R) = 0$$

Lembremos que a variável  $Y$  é definida como:

$$Y_i = X_{i0} + \sum_{k=0}^{N_2} X_{ik}$$

O parâmetro  $\lambda_1$  é o número médio de eventos,  $c$  é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo e  $M_Y(R)$  representa a Função Geradora de Momentos da variável  $Y$  avaliada em  $R$ .

Observe que a constante  $\lambda_2$  está relacionado com o número médio de evento  $\lambda_1$  e com o número médio de indenizações  $\lambda$  :

$$\lambda = \lambda_1 (1 + \lambda_2)$$

Somente por motivos de ilustração, adotaremos a distribuição da variável  $X_{ik} | X_{i0}$  dado como:

$$X_{ik} | X_{i0} \sim Normal(\rho(s_{ik})x_{i0}, \beta x_{i0})$$

onde:

$$M_{X_k | X_{i0}}(t) = e^{t\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{\rho(s_{ik})x_{i0}t} \cdot e^{-\frac{\beta x_{i0} t^2}{2}} \quad \text{para } t > 0$$

A função geradora de momentos da variável  $Y$  é dada por:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E_{X_0} \left\{ E_{N_2} \left[ E_Y(e^{tY} | X_0, N_2) \right] \right\} \\ &= \int \sum_{x_0, n_2} E_Y(e^{tY} | X_0 = x_0, N_2 = n_2) f_{x_0}(x_0) \cdot P(N_2 = n_2) \cdot dx_0 \\ &= \int \sum_{x_0, n_2} E_Y \left( e^{tX_0} \cdot e^{t \sum_{k=1}^{n_2} X_{1k}} \right) f_{x_0}(x_0) \cdot P(N_2 = n_2) \cdot dx_0 \\ &= E_{X_0} \left[ M_{X_0}(t) \cdot M_{N_2}(\ln M_{X_k}(t)) \right] = M_{X_0}(t) \cdot E_{X_0} \left( M_{N_2}(\ln M_{X_k}(t)) \right) \end{aligned}$$

Dada a função geradora de momentos da Variável  $X_{ik} | X_{i0}$ , obtem-se, a partir de cálculos, a função geradora de momentos da variável  $Y$ .

$$M_Y(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t - t \sum_{i=1}^{\lambda_2} \rho(s_i) - \frac{t^2 \beta \lambda_2}{2}} \quad \text{onde,}$$

$$\frac{-1}{\beta \lambda_2} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\lambda_2} \rho(s_i) \right) - \sqrt{\frac{1}{\beta^2 \lambda_2^2} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\lambda_2} \rho(s_i) \right)^2 + \frac{2\alpha}{\beta \lambda_2}} > t > \frac{-1}{\beta \lambda_2} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\lambda_2} \rho(s_i) \right) + \sqrt{\frac{1}{\beta^2 \lambda_2^2} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\lambda_2} \rho(s_i) \right)^2 + \frac{2\alpha}{\beta \lambda_2}}$$

Após os cálculos obtemos:

$$R' = 0$$

$$R'' = - \left[ \frac{\lambda_1}{2c} + \frac{\left( 1 + \sum_{i=1}^{\lambda_2} \rho(s_i) \right)}{\lambda_2 \beta} \right] + \sqrt{\left[ \frac{\lambda_1}{2c} - \frac{\left( 1 + \sum_{i=1}^{\lambda_2} \rho(s_i) \right)}{\lambda_2 \beta} \right]^2 + \frac{2\alpha}{\lambda_2 \beta}}$$

2

$$R''' = - \left[ \frac{\lambda_1}{2c} + \frac{\left( 1 + \sum_{i=1}^{\lambda_2} \rho(s_i) \right)}{\lambda_2 \beta} \right] - \sqrt{\left[ \frac{\lambda_1}{2c} - \frac{\left( 1 + \sum_{i=1}^{\lambda_2} \rho(s_i) \right)}{\lambda_2 \beta} \right]^2 + \frac{2\alpha}{\lambda_2 \beta}}$$

Assim como no Modelo 1, a primeira raiz é trivial, a segunda é positiva e a terceira é negativa. Usaremos a segunda raiz encontrada.

O Modelo 2 pode ser considerado semelhante ao Modelo 1, porém acrescido da dependência espacial do valor das indenizações. Essa dependência advém de uma distribuição condicional do valor das indenizações de apólices que sofreram perdas de um mesmo evento, dado uma primeira indenização.

### 6..1.2.1 Agregação das indenizações por evento e a Desigualdade de Lundberg

Vamos agora avaliar o comportamento do coeficiente de ajuste a partir da variação do número médio de eventos fixando o número médio de indenizações. A Figura 14 apresenta os resultados dessas variações.

Como no modelo anterior assumimos que os eventos seguem um processo de Poisson com parâmetro  $\lambda_1$  e o número de indenizações por evento segue uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda_2$ . Ainda temos que o valor das indenizações seguirá uma distribuição exponencial com parâmetro  $\alpha$ , um fator de carregamento  $\theta$  e um coeficiente de dependência espacial  $\rho_0$ . Continuamos assumindo que a distribuição condicional das indenizações das apólices vizinhas é normal com média  $\rho(s_{ik})x_{i0}$  e variância  $\beta x_{i0}$ .

Adotaremos os seguintes valores:

- $\alpha = 1/200 = 0.005$
- $\theta = 0.1$
- $\lambda_2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} - 1$
- $c = (1 + \theta) \frac{\lambda}{\alpha}$
- $\rho_0 = 0.7$
- $u = 200$

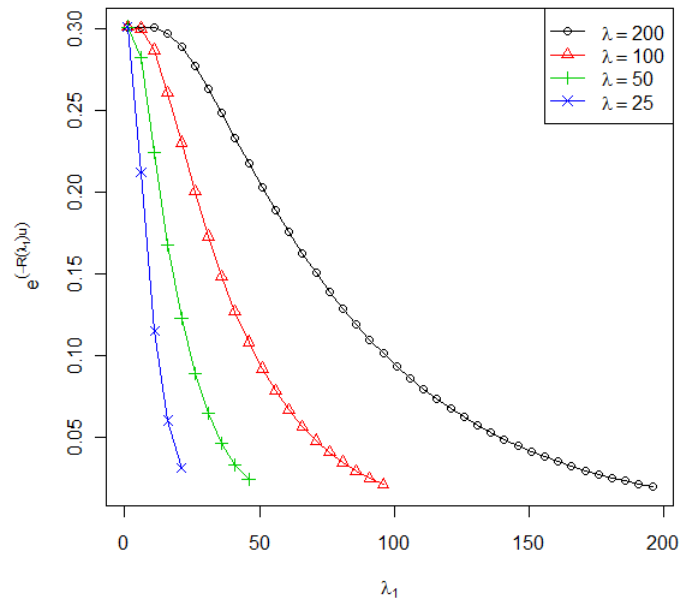


Figura 14 - Influência do número médio de eventos

O comportamento é o mesmo apresentado na análise com o Modelo 1. Pode-se observar que ao variarmos o valor de  $\lambda$ , ocorrerá o mesmo efeito.

### 6.1.2.2 O valor médio de indenizações e a Desigualdade de Lundberg

É importante lembrar que o valor das indenizações individuais segue uma distribuição exponencial de parâmetro  $\alpha$ . Estudamos anteriormente que a probabilidade de uma seguradora entrar em ruína aumenta com valores de indenizações altos. Os parâmetros utilizados foram:

- $\lambda = 200$
- $\theta = 0.1$

- $\lambda_2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} - 1$
- $c = (1 + \theta) \frac{\lambda}{\alpha}$
- $\rho_0 = 0.7$
- $u = 200$

A Figura 15 apresenta o resultado desse modelo.

Obtivemos as mesmas conclusões que o método anterior. Ao aumentar o parâmetro  $\alpha$  (inverso do valor médio das indenizações), o coeficiente  $R$  aumenta, reduzindo a cota superior. Assim, quanto maior é o valor médio das indenizações, maior é o risco da seguradora entrar em ruína.

Fixando o valor de  $\alpha$ , observamos que a probabilidade de entrar em ruína aumenta com o decréscimo do número médio de evento  $\lambda_1$ .

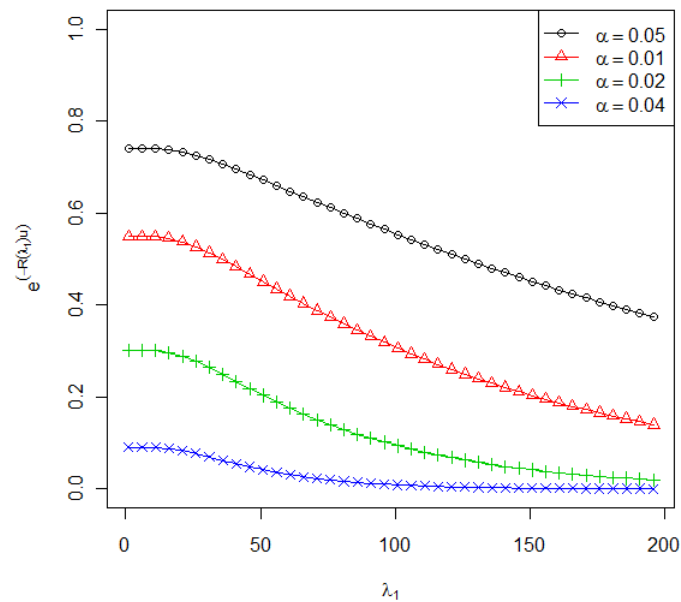


Figura 15 - Influência do valor médio de indenizações na Desigualdade de Lundberg.

### 6.1.2.3 Coeficiente de correlação espacial e a Desigualdade de Lundberg

O coeficiente de correlação espacial determinará o quanto as apólices do cenário estão agregadas (correlacionadas). Como já mencionado, coeficientes próximos de um correspondem a distâncias pequenas entre as localidades das apólices. Esse coeficiente será menor se as apólices se encontrarem afastadas.

Podemos observar na Figura 16 que quanto maior é o coeficiente, menor se tornará o valor de  $R$ , caracterizando um cenário com maior risco de ruína. Isso pode ser melhor interpretado fazendo-se uma analogia com a situação em que se tem fazendas sendo afetadas por uma geada. Nessa situação, as perdas ocorridas nas fazendas que se localizam próximas ao foco do evento terão magnitudes elevadas e semelhantes entre si. Em contrapartida, fazendas que se localizam mais afastadas do foco do evento terão perdas menores em função dessa distância.

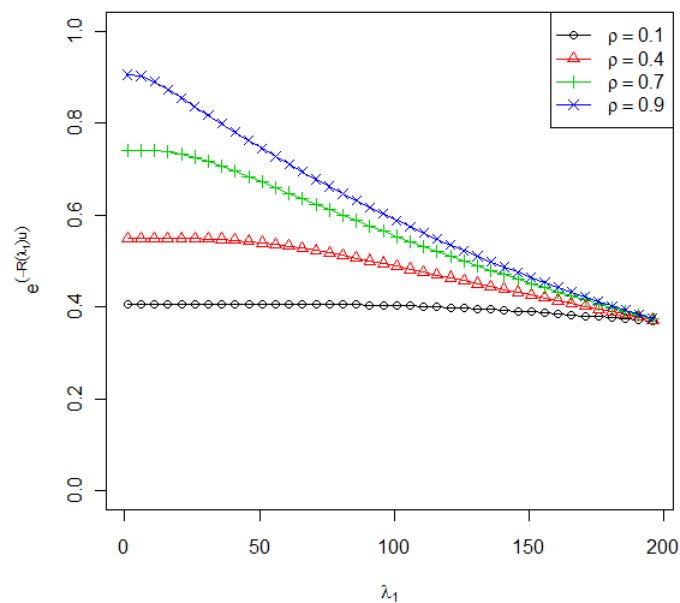


Figura 16 - Influência do valor do coeficiente de correlação espacial

### 6.1.3 Modelo Clássico, Modelo 1 e Modelo 2

Iremos agora comparar o comportamento dos três modelos fixando alguns parâmetros.

- $\lambda = 200$
- $\theta = 0.1$
- $\lambda_2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} - 1$
- $c = (1 + \theta) \frac{\lambda}{\alpha}$
- $\rho_0 = 0.95$

Para tal proposta, iremos variar o número médio de eventos de 25 para 195. Esses números foram escolhidos de forma possibilitar a análise em dois cenários bastante diferentes. O primeiro apresenta poucos eventos, sendo que cada um afeta muitas apólices. Já o segundo cenário possui muitos eventos, mas cada qual causando poucas indenizações.

As Figura 17 e Figura 18 apresentam grandes diferenças entre os três modelos. O Modelo Clássico possui um nível de cota superior menor do que os outros dois modelos. Além disso, é possível observar que o Modelo 1 é mais conservador, uma vez que possui uma cota superior mais elevada.



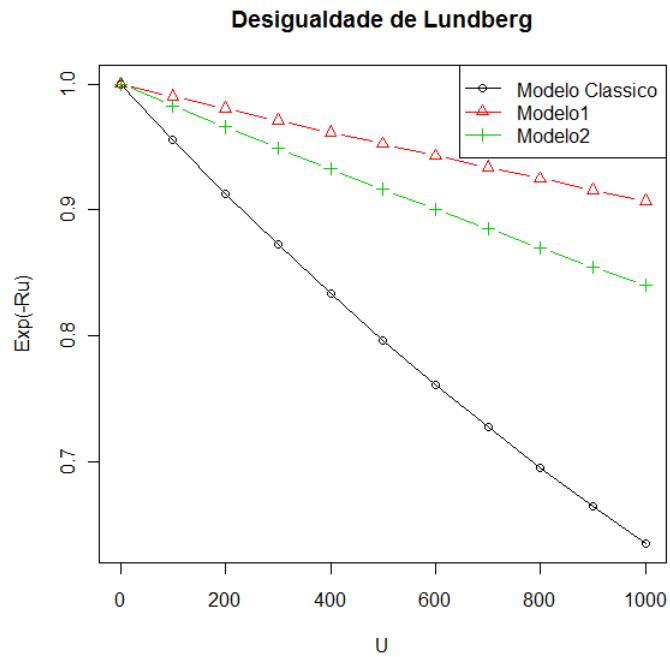


Figura 17 - Comparação de Modelos com  $\lambda_1 = 25$ .

Ao analisarmos as diferenças entre as duas figuras, observamos que ao aumentar o número médio de eventos, ou seja, aproximar os dois modelos para o Modelo Clássico, essas cotas se aproximam.

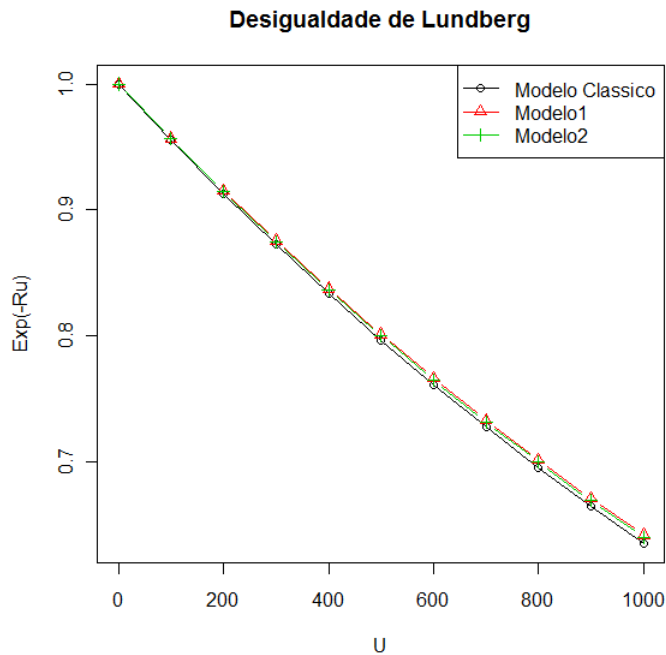


Figura 18 - Comparação de Modelos com  $\lambda_1 = 195$ .

## 6.2 Parte2: Aproximação da Probabilidade de Ruína

Essa seção será destinada à análise comparativa dos modelos propostos anteriormente em relação à aproximação da probabilidade de ruína. Isso será feito a partir de suposições sobre a distribuição dos eventos, da distribuição do valor da primeira indenização e da distribuição da indenização das apólices vizinhas (distribuições condicionais). Teremos no total cinco modelos incluindo o Modelo Clássico. Os parâmetros utilizados serão escolhidos com base em artigos e livros que utilizaram simulações de ruína. Veja por exemplo Dickson and Waters(1992).

### 6.2.1 Momentos do Modelo 2

Calculamos abaixo os três primeiros momentos da variável  $Y$  no Modelo 2. Para facilitar a notação,  $X_{i0}$  será chamado de  $X_0$  e  $X_{ik}$  será chamado de  $X_k$ .

Lembremos que  $Y$  é definido como:

$$Y_i = X_{i0} + \sum_{k=1}^{N_2} X_{ik}, \text{ onde}$$

$$N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$$

$$\lambda = \lambda_1(1 + \lambda_2)$$

$X_{i0}$  Tem distribuição  $F_X(x)$

$X_{ik} | X_{i0}$  São iid com distribuição  $F_{X_k | X_{i0}}(x)$ .

Seja a função geradora de momentos de  $Y$  dada por:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E_{X_0} \left\{ E_{N_2} \left[ E_Y \left( e^{tY} | X_0, N_2 \right) \right] \right\} \\ &= \int \sum_{x_0, n_2} E_Y \left( e^{tY} | X_0 = x_0, N_2 = n_2 \right) f_{x_0}(x_0) \cdot P(N_2 = n_2) \cdot dx_0 \\ &= \int \sum_{x_0, n_2} E_Y \left( e^{tX_0} \cdot e^{t \sum_{k=1}^{n_2} X_{1k}} \right) f_{x_0}(x_0) \cdot P(N_2 = n_2) \cdot dx_0 \\ &= E_{X_0} \left[ M_{X_0}(t) \cdot M_{N_2} \left( \ln M_{X_k}(t) \right) \right] = M_{X_0}(t) \cdot E_{X_0} \left( M_{N_2} \left( \ln M_{X_k}(t) \right) \right) \end{aligned}$$

Para encontrar a aproximação da probabilidade da ruína, devemos encontrar os três primeiros momentos.

$$E(Y) = M'_Y(0) = E(X_0) + \lambda_2 \cdot E(X_k) \quad 17$$

$$E(Y^2) = M''_Y(0) = E(X_0^2) + 2E(X_0)\lambda_2 \cdot E(X_k) + \lambda_2 E(X_k^2) + \lambda_2^2 E^2(X_k) \quad 18$$

$$E(Y^3) = M_y'''(0) = E(X_0^3) + 3E(X_0^2)\lambda_2 E(X_k) + 3E(X_0)\lambda_2 E(X_k^2) + 3E(X_0)\lambda_2^2 E^2(X_k) + \lambda_2 E(X_k^3) + 3\lambda_2^2 E(X_k)E(X_k^2) + \lambda_2^3 E(X_k^3)$$

19

### 6.2.1 Momentos do Modelo 3

Temos no Modelo 3 que:

$$Y_i = X_{i0} + \sum_{k=1}^{N_2} X_{ik}, \text{ onde}$$

$$N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$$

$$\lambda = \lambda_1(1 + \lambda_2)$$

$X_{i0}$  Tem distribuição  $F_X(x)$

$$X_{ik} = \rho_0^k X_o$$

$$0 < \rho_0 < 1$$

Podemos escrever da seguinte forma:

$$Y_i = X_0 + \rho_0 X_0 + \rho_0^2 X_0 + \rho_0^3 X_0 + \dots + \rho_0^{N_2} X_0 = X_0 (1 + \rho_0 + \rho_0^2 + \dots + \rho_0^{N_2}) \\ = X_0 \left( \frac{1 - \rho_0^{N_2+1}}{1 - \rho_0} \right)$$

Os momentos serão:

$$E(Y) = \frac{E(X_0)}{(1 - \rho_0)} [1 - E(\rho_0^{N_2+1})] = \frac{E(X_0)}{(1 - \rho_0)} [1 - \rho_0 E(\rho_0^{N_2})] = \frac{E(X_0)}{(1 - \rho_0)} [1 - \rho_0 M_{N_2}(\log \rho_0)] \\ = \frac{E(X_0)}{(1 - \rho_0)} [1 - \rho_0 e^{\lambda_2(\rho_0-1)}]$$

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \frac{E(X_0^2)}{(1-\rho_0)^2} \left\{ \left[ 1 - E(\rho_0^{N_2+1}) \right]^2 \right\} = \frac{E(X_0^2)}{(1-\rho_0)^2} \left\{ 1 - 2\rho_0 E(\rho_0^{N_2}) + \rho_0^2 E(\rho_0^{2N_2}) \right\} \\
&= \frac{E(X_0^2)}{(1-\rho_0)^2} \left\{ 1 - 2\rho_0 M_{N_2}(\log \rho_0) + \rho_0^2 M_{N_2}(\log(\rho_0^2)) \right\} = \frac{E(X_0^2)}{(1-\rho_0)^2} \left\{ 1 - 2\rho_0 e^{\lambda_2(\rho_0-1)} + \rho_0^2 e^{\lambda_2(\rho_0^2-1)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y^3) &= \frac{E(X_0^3)}{(1-\rho_0)^3} \left\{ \left[ 1 - E(\rho_0^{N_2+1}) \right]^3 \right\} = \frac{E(X_0^3)}{(1-\rho_0)^3} \left\{ 1 - 3\rho_0 E(\rho_0^{N_2}) + 3\rho_0^2 E(\rho_0^{2N_2}) - \rho_0^3 E(\rho_0^{3N_2}) \right\} \\
&= \frac{E(X_0^3)}{(1-\rho_0)^3} \left\{ 1 - 3\rho_0 M_{N_2}(\log \rho_0) + 3\rho_0^2 M_{N_2}(\log(\rho_0^2)) - \rho_0^3 M_{N_2}(\log(\rho_0^3)) \right\} \\
&= \frac{E(X_0^3)}{(1-\rho_0)^3} \left\{ 1 - 3\rho_0 e^{\lambda_2(\rho_0-1)} + 3\rho_0^2 e^{\lambda_2(\rho_0^2-1)} - \rho_0^3 e^{\lambda_2(\rho_0^3-1)} \right\}
\end{aligned}$$

### 6.2.3 Escolha das Distribuições

- Modelo 1:
  - $X_0$  e  $X_k$  iid com distribuição  $F_X(x) = 1 - e^{-ax} \rightarrow x \geq 0$ .
- Modelo 2.1:
  - $X_0$  com distribuição *Exponencial*( $\alpha$ ), *Pareto*( $\delta, \gamma$ ) ou *Weibull*( $\delta, \gamma$ )
  - $X_k | X_0$  iid com distribuição *Exponencial* $\left(\frac{1}{\rho(s_{ik})x_0}\right)$ .
- Modelo 2.2:
  - $X_0$  com distribuição *Exponencial*( $\alpha$ ), *Pareto*( $\delta, \gamma$ ) ou *Weibull*( $\delta, \gamma$ )
  - $X_k | X_0$  iid com distribuição *Pareto*( $\delta, \rho(s_{ik})x_0$ ).
- Modelo 2.3:
  - $X_0$  com distribuição *Exponencial*( $\alpha$ ), *Pareto*( $\delta, \gamma$ ) ou *Weibull*( $\delta, \gamma$ )

- $X_k | X_0$  iid com distribuição *Weibull* $(\delta, \rho(s_{ik})x_0)$ .
- Modelo 3:
  - $X_0$  com distribuição *Exponencial* $(\alpha)$ , *Pareto* $(\delta, \gamma)$  ou *Weibull* $(\delta, \gamma)$

Utilizamos as seguintes parametrizações das distribuições Pareto e Weibull respectivamente:

Quando X é Pareto:  $f(x, \delta, \gamma) = \frac{\delta \gamma^\delta}{x^{\delta+1}}, x \geq \gamma$

Quando X é Weibull:  $f(x, \delta, \gamma) = \frac{\delta}{\gamma} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\delta}, x \geq 0$

## 7. Análises

Nós podemos comparar o comportamento dos modelos fixando alguns parâmetros. Seja  $\lambda = 200$ ,  $\theta = 0.1$ . Adicionalmente, seja  $\lambda_2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} - 1$ ,  $c = (1 + \theta) \frac{\lambda}{\alpha}$ .

O valor da primeira indenização será escolhido de uma das três distribuições:

- $X_0 \sim \text{Exponencial}(200)$
- $X_0 \sim \text{Pareto}(4, 200)e$
- $X_0 \sim \text{Weibull}(0.9, 200)$

Escolhemos esses parâmetros de forma a aproximar os três primeiros momentos das distribuições.

Para o valor das indenizações das apólices vizinhas usamos as distribuições:

- $X_k | X_0 \sim \text{Exponencial}\left(\frac{1}{\rho(s_{ik})x_0}\right)$
- $X_k | X_0 \sim \text{Pareto}(4, \rho(s_{ik})x_0)e$
- $X_k | X_0 \sim \text{Weibull}(0.9, \rho(s_{ik})x_0)$

Nós variamos o número médio de eventos de  $\lambda_1 = 25$  para  $\lambda_1 = 195$ . A escolha desse parâmetro permite a análise do comportamento dos modelos quando eles se aproximam de um cenário cuja configuração é aquela prevista pelo Modelo Clássico. O primeiro apresenta poucos eventos, sendo que cada um afeta muitas apólices. Já o segundo valor corresponde à ocorrência de muitos eventos, mas cada qual causando poucas indenizações.

Ainda sobre os parâmetros, variamos as correlações espaciais  $\rho_0$  de 0.9 para 0.1. O primeiro valor implica em grande correlação espacial entre as apólices podendo ser identificada como um aglomerado no espaço. O segundo valor é bem mais baixo e representa um cenário cuja correlação espacial entre as apólices é fraca, ou seja, elas se encontram espaçadas.

## 7.1 Primeira indenização : $X_0 \sim \text{Exponencial}(\alpha)$

No Gráfico-1 da **Erro! Fonte de referência não encontrada.** nós podemos ver uma grande diferença entre o Modelo 1, o Modelo 2.1, o Modelo 2.2, o Modelo 2.3 e o Modelo 3 em relação ao Modelo Clássico que apresentou probabilidades bem inferiores. Esse gráfico tem alto valor de  $\rho_0$  referente a um cenário cuja configuração espacial implica em apólices muito próximas. Assim, na ocorrência de um evento, facilmente esperaríamos muitas apólices afetadas, já que elas estão muito próximas. Esse parâmetro poderia justificar o fato de que alguns modelos apresentarem uma probabilidade de ruína maior que o Modelo Clássico, pois esse último não engloba em seu cálculo a correlação espacial entre as apólices.

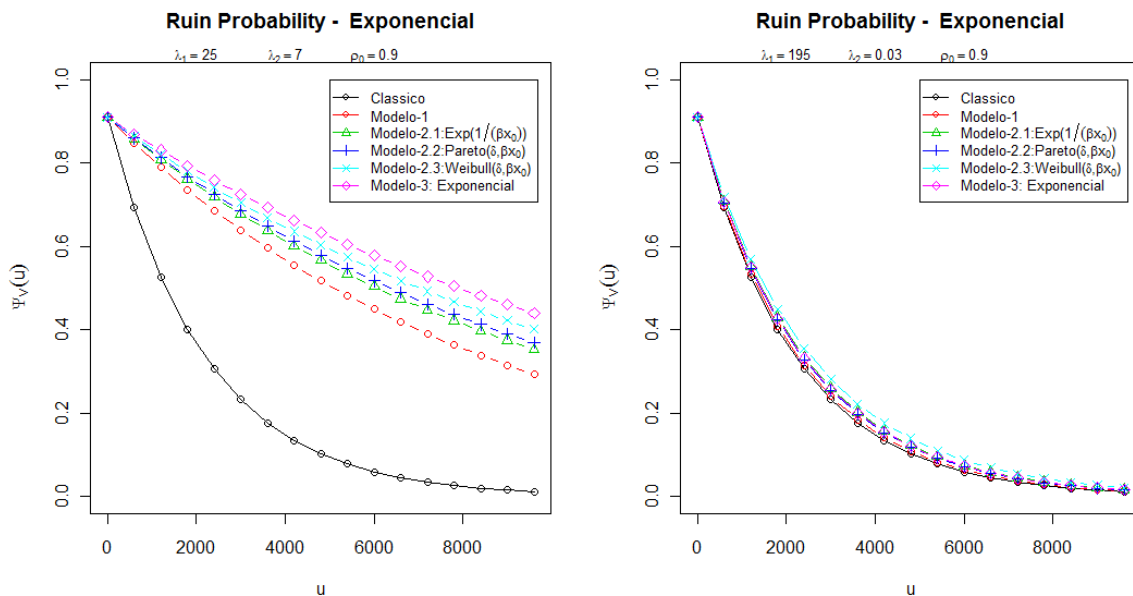


Figura 19 - Comparação de Modelos Exponenciais com correlação espacial  $\rho_0 = 0,9$  - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1:  $\lambda_1 = 25$  . Gráfico- 2:  $\lambda_1 = 195$  .



No primeiro gráfico cada evento é considerado muito devastador, pois dado o número médio de apólices afetadas fixado em  $\lambda$ , quanto menor o parâmetro  $\lambda_1$  (número médio de eventos), maior será o parâmetro  $\lambda_2$  (número médio de apólices afetadas por evento). Assim em casos de poucos eventos, mas de intensidade devastadora, o Modelo Clássico subestima o risco de uma seguradora entrar em ruína. No segundo gráfico da Figura 19 forçamos uma configuração igual ao Modelo Clássico. Isso significa que cada evento afeta em média uma apólice e essas são consideradas ao longo do tempo uma por uma (não em blocos). Podemos também pensar que agora os eventos são menos devastadores, mas em contrapartida, o número de ocorrências será maior. Nessa situação, percebemos que todos os modelos se aproximam da probabilidade de ruína dada pelo Modelo Clássico. Esse resultado mostra que em situações com muitos eventos, mas com menor intensidade, o Modelo Clássico apresenta o mesmo comportamento dos outros modelos sugeridos.

No Gráfico-1 e Gráfico-2 da Figura 22 trabalhamos com um cenário com uma configuração espacial contrária aos dois primeiros gráficos. Nela as apólices se encontram distantes umas das outras. Quando ocorre um evento, espera-se que poucas apólices sejam afetadas devido à grande distância entre elas. No Gráfico-1 percebemos que somente o Modelo 1 e o Modelo 2.1 se destacaram. Eles apresentam valores mais elevados para a probabilidade de ruína. O Modelo 1 apresenta exatamente os mesmos valores comparados ao Gráfico-1, pois ele não leva em consideração a correlação espacial do cenário. O Modelo 2.1 utiliza a distribuição exponencial para as indenizações dos vizinhos com média igual ao valor da primeira indenização no centro do evento. O Modelo 2.2, o Modelo 2.3 e o Modelo 3 estão um pouco acima da curva da probabilidade do Modelo Clássico. Podemos considerar que esses dois modelos sofrem maior influência da configuração espacial do que pelo comportamento dos eventos. No Gráfico-2 da Figura 20 o comportamento de todos os modelos se aproxima ao do Modelo Clássico. Assim, quando temos um cenário com baixa correlação espacial e com eventos afetando poucas apólices, todos os modelos são adequados.

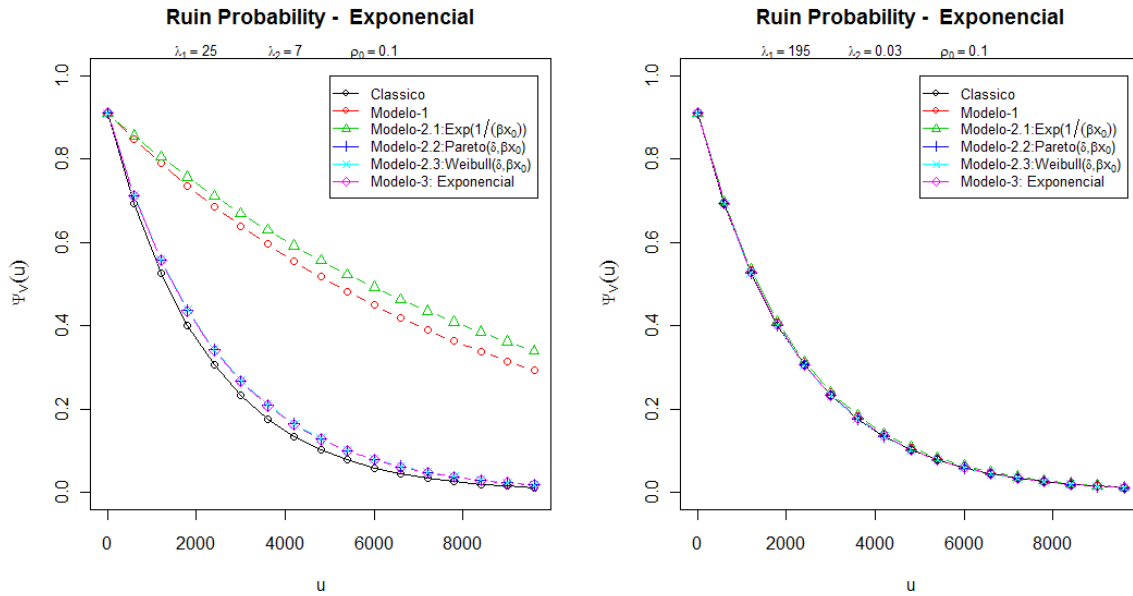


Figura 20 - Comparação de Modelos Exponenciais com correlação espacial  $\rho_0 = 0.1$  - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1:  $\lambda_1 = 25$  . Gráfico- 2:  $\lambda_1 = 195$  .

## 7.2 Primeira indenização : $X_0 \sim \text{Pareto}(\delta, \gamma)$

Na Figura 21 podemos observar o comportamento da probabilidade da ruína variando o número médio de eventos quando a distribuição da primeira indenização é Pareto. Como no primeiro gráfico da Figura 19, o Modelo 1, o Modelo 2.1, o Modelo 2.2, o Modelo 2.3 e o Modelo 3 ficaram bastante acima do Modelo Clássico. Esse é o cenário com forte correlação espacial e grande aglomeração das indenizações. No Gráfico-2 as curvas tiveram uma aproximação significativa em direção ao Modelo Clássico, mas ainda se encontram em regiões mais elevadas. Podemos pensar que, mesmo forçando as indenizações a chegarem individualmente no tempo (aumentando o número médio de eventos e diminuindo o número de vizinhos afetados por eventos), os modelos continuam sendo influenciados pelo efeito da alta correlação espacial.

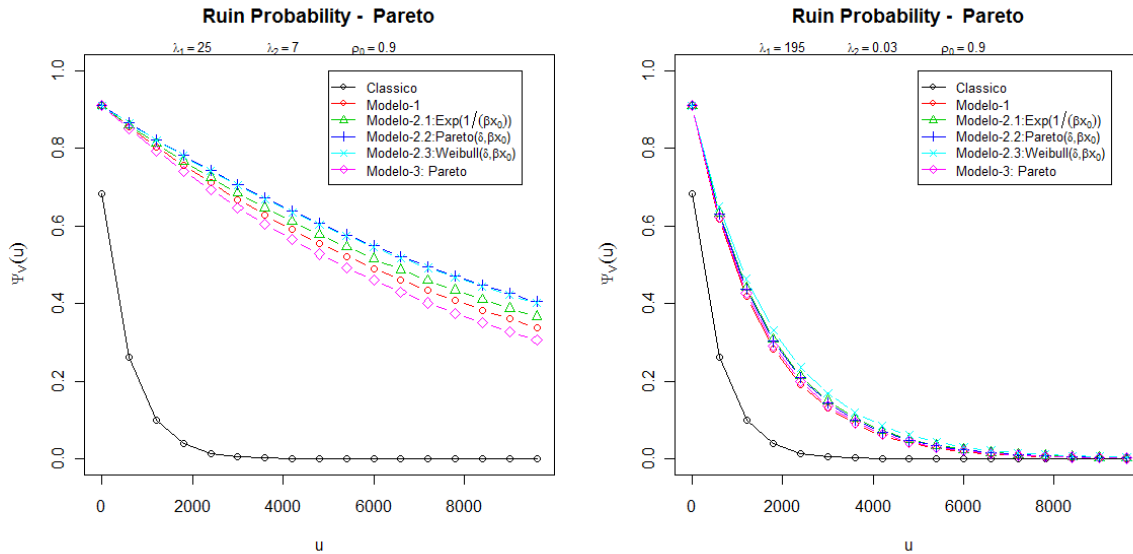


Figura 21 - Comparação de Modelos Pareto com correlação espacial  $\rho_0 = 0,9$  - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1:  $\lambda_1 = 25$  . Gráfico- 2:  $\lambda_1 = 195$  .

No Gráfico-1 da Figura 22, o Modelo 2.1, o Modelo 2.2 e o Modelo 2.3 tiveram um decaimento em relação ao Gráfico-1 da Figura 21. Como já mencionado, o Modelo 1 não sofre influência da correlação espacial. Ainda observamos que o Modelo 2.1 está acima dos outros modelos, que nesse gráfico apresentam menores resultados. Esse é o mesmo comportamento que já observamos no Gráfico-3 da Figura 20. O Modelo 2.1 é mais afetado pela mudança na configuração espacial do que pela severidade dos eventos. Já os modelos que assumem distribuição condicional Pareto ou Weibull e o Modelo 3 apresentam resultados muito semelhantes e sofrem maior influência do número de vizinhos do que pelo valor do coeficiente espacial. Por esse motivo eles tiveram uma queda em sua curva. No Gráfico-2 os modelos coincidem e se aproximam da curva do Modelo Clássico. Eles ainda estão em uma região mais elevada, mas isso é devido à utilização da distribuição de Pareto para a primeira indenização.

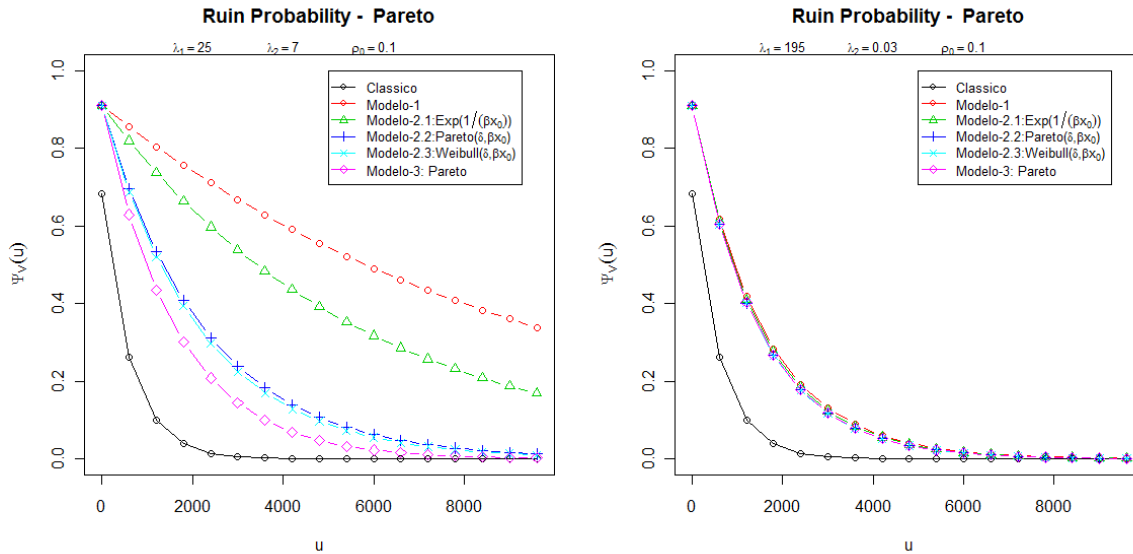


Figura 22 - Comparação de Modelos Pareto com correlação espacial  $\rho_0 = 0.1$  - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1:  $\lambda_1 = 25$ . Gráfico- 2:  $\lambda_1 = 195$ .

## 7.2 Primeira indenização : $X_0 \sim Weibull(\delta, \gamma)$

Na Figura 23 e Figura 24 adotamos que a distribuição da primeira indenização é Weibull. Os resultados são bastante parecidos com aqueles obtidos quando usamos a distribuição Pareto, principalmente quando analisamos o primeiro gráfico.

No Gráfico-1 da Figura 23 todos os modelos ficaram acima do Modelo Clássico. No Gráfico-2 os modelos se tornam parecido e se aproximam um pouco do Modelo Clássico, ou seja, quando as indenizações acontecem individualmente, a probabilidade de ruína diminui. As curvas dos modelos sugeridos nesse trabalho ainda estão em uma região mais elevada, mas isso é devido à utilização da distribuição de Weibull para a primeira indenização.

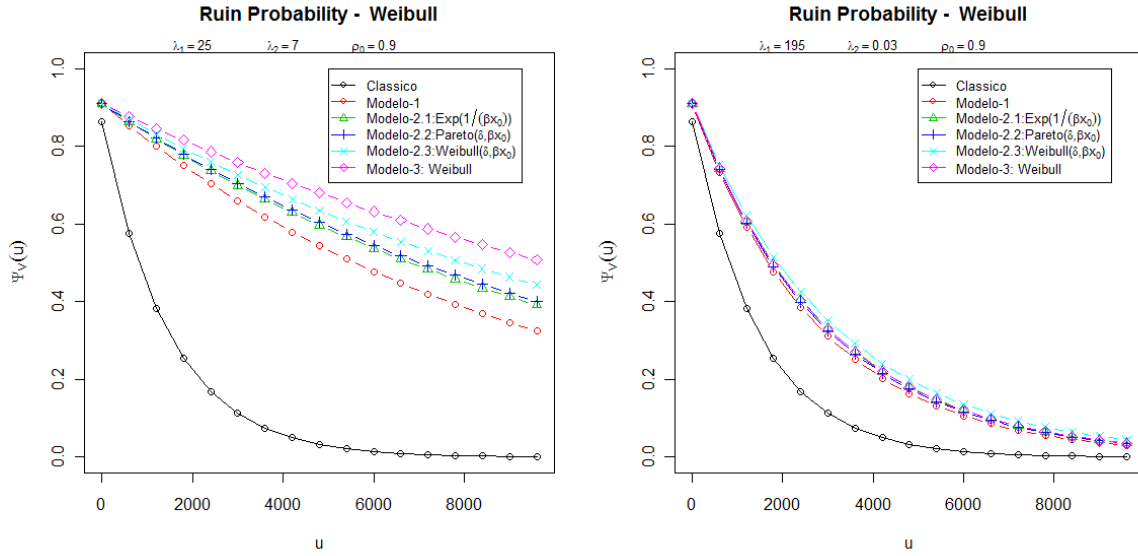


Figura 23 - Comparação de Modelos Weibull com correlação espacial  $\rho_0 = 0.9$  - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1:  $\lambda_1 = 25$ . Gráfico- 2:  $\lambda_1 = 195$ .

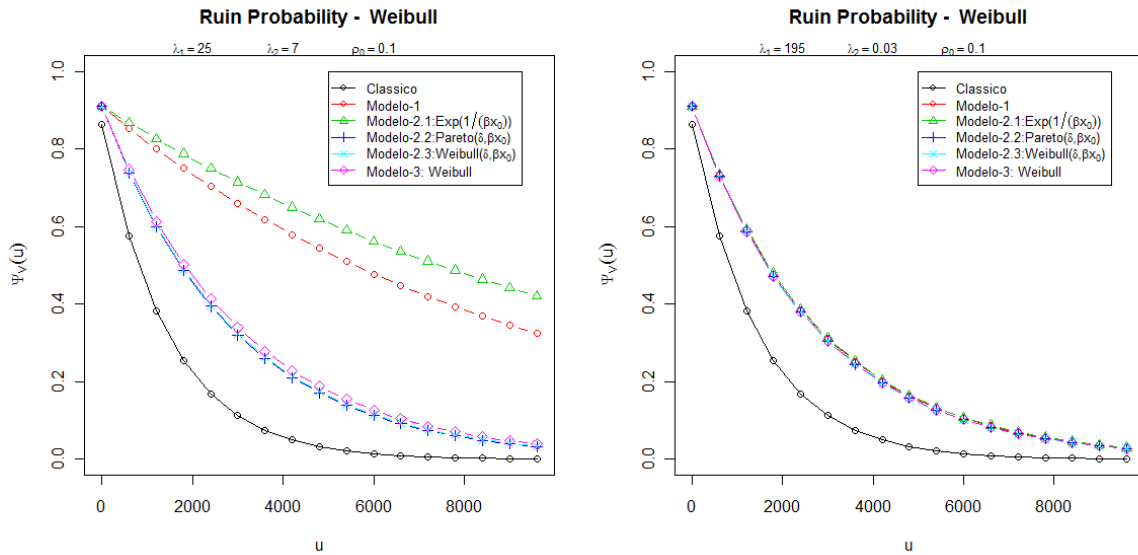


Figura 24 - Comparação de Modelos Weibull com correlação espacial  $\rho_0 = 0.1$  - Aproximação da Probabilidade de Ruína. Gráfico- 1:  $\lambda_1 = 25$ . Gráfico- 2:  $\lambda_1 = 195$ .

Somente no Gráfico-1 da Figura 24 podemos reparar alguma diferença em relação á utilização da distribuição Weibull. Observamos no cenário com baixa correlação espacial, poucos eventos e com muitos vizinhos afetados por cada evento, o Modelo 2.1 está acima do Modelo 1. Os outros modelos obtiveram resultados menores e muito parecidos. O Gráfico-2 apresentou os mesmos resultados que o Gráfico-2 da Figura 22.

## 8. Conclusão

A ruína caracteriza a ausência de capital de uma seguradora. Em algum momento, finito ou não, a seguradora não terá capital suficiente para pagar todas as indenizações. No Modelo Clássico, as ocorrências das indenizações são independentes e identicamente distribuídas. Assim como sua ocorrência, seu valor também possui essas propriedades. Todas as apólices serão contabilizadas no instante em que sofreram os danos.

Sabe-se que as indenizações são causadas por diversos eventos. Assim, cada evento afeta um determinado número de apólices, tornando os valores das respectivas indenizações interligados. A cada evento ocorrente serão afetadas mais apólices, e assim, no decorrer do tempo, ainda teremos o mesmo número de apólices consideradas no Modelo Clássico.

Todo modelo estatístico nada mais é do que uma representação da realidade. Portanto, ao adotarmos um modelo para análise de uma situação qualquer, devemos estar cientes de suas limitações. Ao adotarmos dependência espacial para análise do processo de ruína, procurou-se adicionar mais realidade ao Modelo Clássico. No entanto, de maneira alguma procurou-se esgotar com este trabalho a discussão sobre o assunto.

No Modelo 1 sugerimos que as indenizações entrem em blocos. Cada bloco corresponde a um evento, sendo que esses contem todas as apólices que foram afetadas. Assim, concluiu-se que as seguradoras devem ser mais conservadoras, adotando um capital inicial maior que aquele sugerido pelo Modelo Clássico. Nesse sentido, quanto mais as indenizações forem agregadas (poucos eventos, mas cada um afetando muitas apólices) maior será a probabilidade de ruína.

No Modelo 2, fizemos uma adaptação do primeiro, acrescentando dependência espacial. Assim, quanto mais próximas do foco do evento estão as apólices afetadas, maior será seu valor de indenização. Do mesmo modo, quanto mais distante, menores serão os danos causados pelo evento. Assim como no modelo anterior, obtivemos

resultados que obrigam a seguradora a tomar medidas que previnam o risco de ruína. Nesse caso, será mais prudente adotar também um capital inicial maior que o sugerido pelo Modelo Clássico.

Concluimos que o Modelo Clássico, ao ignorar a dependência entre os tempos de ocorrências entre os sinistros, a dependência dos valores das indenizações causadas por um mesmo evento e o cenário em que se encontram as apólices, subestima o risco da seguradora entrar em ruína.

Acreditamos que esse trabalho apresentou idéias e resultados importantes na área de seguro, podendo ser de grande utilidade para companhias de seguros agrícolas. Esperamos que nosso trabalho ajude e inspire novos estudos sobre a Teoria da Ruína.



## 9. Apêndice

Esse apêndice contém as principais demonstrações do trabalho.

### 1. Um processo $S(t)$ é chamado de Processo de Poisson Composto se:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

onde  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo de Poisson homogêneo e  $\{X_i\}_{i \geq 0}$  é uma variável aleatória contínua positiva independente e identicamente distribuída e independente de  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ .

- $E(S(t)) = E(N)E(X) = \lambda t p_1$

**Prova da esperança:**

$$\begin{aligned} E(S(t)) &= E \left[ E \left( \sum_{i=1}^N X_i \mid N \right) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} E \left( \sum_{i=1}^N X_{.xi} \mid N = k \right) P(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} E \left( \sum_{i=1}^k X_i \right) P(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k E(X) P(N = k) = E(X) \sum_{k=1}^{\infty} k P(N = k) = E(X) E(N) = p_1 \lambda t \end{aligned}$$

- $V(S(t)) = E(N)V(X) + V(N)E^2(X) = \lambda t(p_2 - p_1^2) + \lambda t p_1^2 = \lambda t p_2$

**Prova da variância:**

$$V(S(t)) = E(S(t)^2) - E^2(S(t))$$

Calculando  $E(S(t)^2)$ :

$$\begin{aligned}
E(S(t)^2) &= E\left\{E\left[\left(\sum_{i=1}^N X_{.xi}\right)^2 \mid N\right]\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^k X_{.xi}\right)^2 \mid N=k\right]P(N=k) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^k X_{.xi}\right)^2\right]P(N=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[V\left(\sum_{i=1}^k X_{.xi}\right) + E^2\left(\sum_{i=1}^k X_{.xi}\right)\right]P(N=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kV(X)P(N=k) + \sum_{k=1}^{\infty} k^2E^2(X)P(N=k) \\
&= V(X)E(N) + E(X)E(N^2) = (p_2 - p_1^2)\lambda t + p_1^2(\lambda t + \lambda^2 t^2)
\end{aligned}$$

Substituindo na equação da variância temos:

$$V(S(t)) = E(S(t)^2) - E^2(S(t)) = (p_2 - p_1^2)\lambda t + p_1^2(\lambda t + \lambda^2 t^2) - p_1^2 \lambda^2 t^2 = p_2 \lambda t$$

- $M_{S(t)}(r) = M_N[\log(M_X(r))]$

**Prova da função geradora de momentos:**

$$\begin{aligned}
M_{S(t)}(r) &= E(e^{S(t)r}) = E(e^{(X_1+\dots+X_N)r}) = E\left[E(e^{(X_1+\dots+X_N)r} \mid N=n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{(X_1+\dots+X_N)r} \mid N=n)P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{(X_1+\dots+X_n)r})P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{Xr})^n P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} M_X(r)^n P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n \log M_X(r)} P(N=n) \\
&= M_N[\log(M_X(r))]
\end{aligned}$$

**2. O coeficiente de ajuste R é encontrado a partir da equação:**

$$\lambda + cR - \lambda M_X(R) = 0$$

O parâmetro  $\lambda$  representa o número médio de sinistros,  $c$  é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo e  $M_X(R)$  representa a Função Geradora de Momentos da variável  $X$  avaliada em  $R$ .

Essa equação possui uma única raiz real positiva que satisfaz a igualdade, independentemente da distribuição de sinistro.

**Prova:**

Defina  $h(R)$  como:

$$h(R) = \lambda + cR - \lambda M_x(R)$$

Temos  $h(0) = \lambda + c \cdot 0 - \lambda M_x(0) = 0$ . Isso mostra que existe uma raiz trivial igual a zero.

Calculando a derivada encontramos:

$$h'(R) = c - \lambda M'_x(R)$$

$$h'(0) = c - \lambda M'_x(0) = c - \lambda E(X) = c - \lambda p_1 > 0$$

Provamos que  $h(R)$  é estritamente positiva no ponto zero, pois a derivada da função avaliada nesse ponto é positiva.

$$h''(R) = -\lambda M''_x(R) = -\lambda E(X^2 e^{xR}) < 0$$

Como a segunda derivada é negativa, a função é côncava tendo a segunda raiz positiva em  $R$ .

### 3. A desigualdade de Lundberg é dada por:

$$\psi(u) \leq \exp(-Ru)$$

onde  $u$  é a reserva inicial da seguradora,  $R$  é o coeficiente de ajuste.

O parâmetro  $R$  só depende do processo de sinistros agregados e da taxa  $\lambda t$ , cujos parâmetros correspondem ao processo de Poisson composto na soma dos sinistros.

### Prova da Desigualdade de Lundberg:

Como nós estamos trabalhando com tempo contínuo e como a taxa de prêmio arrecadado é positiva, a ruína pode somente ocorrer no tempo de um sinistro. Vamos definir  $\psi_n(u)$  como a probabilidade de ruína antes ou até o  $n$ -ésimo sinistro. Então,  $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$ . Precisamos mostrar que  $\psi_n(u) \leq \exp(-Ru)$  vale para todos os valores de  $n$  e vamos provar isso por indução.

Vamos assumir que, para um valor particular valor de  $n \geq 1$ ,  $\psi_n(u) \leq \exp(-Ru)$ . Nós podemos encontrar uma expressão para  $\psi_{n+1}(u)$  considerando o tempo e o montante do primeiro sinistro.

Suponha que o primeiro sinistro ocorra no tempo  $t > 0$ , e que sua indenização é  $x$ . Temos então as seguintes possibilidades:

- 1- Ruína ocorreu no primeiro sinistro, ou seja,  $x > u + ct$  ou
- 2- Ruína não ocorreu no primeiro sinistro, assim o resultado da reserva de risco é positiva dado por  $u + ct - x$ . A ruína ocorrerá até os próximos  $n$  sinistros com um novo capital inicial.

Desde que  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  seja um processo de Poisson, a distribuição do tempo do primeiro sinistro (e também entres os sinistros) é exponencial com parâmetro  $\lambda$ .

Assim temos que:

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left( \int_{u+ct}^{+\infty} f_X(x) dx \right) dt + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left( \int_0^{u+ct} f_X(x) \psi_n(u + ct - x) dx \right) dt$$

onde a primeira integral representa a probabilidade do primeiro sinistro ocorrer até o tempo  $t$ , e que esse sinistro cause ruína. Note que temos usado o fato da indenização de qualquer sinistro ser independente do tempo em que o sinistro ocorre. A segunda integral representa a probabilidade do primeiro sinistro ocorrer até o tempo  $t$ ,

dele não causar ruína e da ruína ocorrer a partir de uma reserva  $u + ct - x$  até os próximos  $n$  sinistros.

Por suposição temos que  $\psi_n(z) \leq \exp(-Rz)$ , assim:

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left( \int_{u+ct}^{+\infty} f_X(x) dx \right) dt + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left( \int_0^{u+ct} f_X(x) e^{-R(u+ct-x)} dx \right) dt$$

Utilizando o fato de  $e^{-R(u+ct-x)} > 1$ , multiplicando esse fator dentro da primeira integral e unindo as duas integrais temos que:

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left( \int_0^{+\infty} f_X(x) e^{-R(u+ct-x)} dx \right) dt = e^{-Ru} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-t(\lambda+Rc)} \left( \int_0^{+\infty} e^{Rx} f_X(x) dx \right) dt$$

Substituindo a equação 4:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq e^{-Ru} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-t(\lambda+Rc)} \left( \int_0^{+\infty} e^{Rx} f_X(x) dx \right) dt = e^{-Ru} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-t(\lambda M_X(R))} \left( \int_0^{+\infty} e^{Rx} f_X(x) dx \right) dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-t(\lambda M_X(R))} M_X(R) dt = e^{-Ru} \end{aligned}$$

Para completar a prova por indução, nós vamos agora mostrar que o resultado é verdadeiro para  $n=1$ .

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= P(U(T_1) < 0) = P(u + cT_1 - X_1 < 0) = \int_0^{+\infty} \int_{u+ct}^{+\infty} f_T(t) f_X(x) dt dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left( \int_{u+ct}^{+\infty} f_X(x) dx \right) dt \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left( \int_{u+ct}^{+\infty} e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx \right) dt \leq \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left( \int_0^{+\infty} e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx \right) dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-t(\lambda+Rc)} \left( \int_0^{+\infty} e^{Rx} f_X(x) dx \right) dt \end{aligned}$$

Utilizando a mesma maneira e equação 4 temos que:

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &\leq e^{-Ru} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-t(\lambda+Rc)} \left( \int_0^{+\infty} e^{Rx} f_X(x) dx \right) dt = e^{-Ru} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-t(\lambda M_X(R))} \left( \int_0^{+\infty} e^{Rx} f_X(x) dx \right) dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-t(\lambda M_X(R))} M_X(R) dt = e^{-Ru}\end{aligned}$$

Isso completa a indução.

#### 4. A equação da probabilidade de ruína é dada por:

$$\frac{d\psi(u)}{du} = \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f_X(x) \psi(u-x) dx + \frac{\lambda}{c} [1 - F_X(u)]$$

#### Prova da equação da probabilidade de ruína:

Antes de resolver o problema, vamos pensar em uma situação bem mais simples idéia. Seja a equação para a probabilidade de ruína até o primeiro instante de tempo igual a 1 dada por:

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &= P[U(1) = U + 1].P(\text{ruína com } U + 1 | U(1) = U + 1) \\ &\quad + P[U(1) = U - 1].P(\text{ruína com } U - 1 | U(1) = U - 1)\end{aligned}$$

A equação acima é conhecida como uma equação diferencial. (GRIMMETT and WELSH,1986).

Para o cálculo de ruína iremos considerar o tempo como sendo  $dt$  no lugar de 1. Assim, a reserva da seguradora dependerá do número de sinistros que ocorrerem no intervalo de tempo contínuo  $[0, dt]$  e dos valores desses sinistros.

Os tempos nos quais os sinistros ocorrem segue um Processo Poisson com parâmetro  $\lambda$ . Dessa maneira, o número de sinistros que ocorre no intervalo  $[0, dt]$  é:

- 0 com probabilidade  $1 - \lambda dt + o(dt)$  ou
- 1 com probabilidade  $\lambda dt + o(dt)$  ou
- 2 com probabilidade  $o(dt)$

Sendo assim, se não existem sinistros em  $[0, dt]$ , a reserva resultante é  $u + cdt$  (a reserva inicial foi acrescida do valor do prêmio recebido em  $[0, dt]$ ). Porém, se um sinistro ocorre, a reserva resultante é  $u + cdt - x$ , onde  $x$  é o valor da indenização.

Se  $x \leq u + cdt$ , então a reserva da seguradora no tempo  $cdt$  é maior ou igual a zero. A probabilidade de ruína para a reserva resultante é  $\psi(u + cdt - x)$ . Se, no entanto,  $x > u + cdt$ , então a reserva cai para baixo de zero no tempo  $dt$ , e então a ruína ocorre no primeiro sinistro. Condicionando o número de sinistros em  $[0, dt]$ , nós temos que:

$$\psi(u) = (1 - \lambda dt)\psi(u + cdt) + \lambda dt \int_0^{u+cdt} f_x(x)\psi(u + cdt - x)dx + \lambda dt[1 - F_x(u + cdt)] + o(dt)$$

Nós integramos o segundo termo na parte direita da igualdade no intervalo  $[0, u+cdt]$  considerando todos os valores possíveis de  $x$  nesse intervalo. Para qualquer valor de  $x$ , nós interpretamos  $\lambda dt f_x(x)\psi(u + cdt - x)dx$  como representando a probabilidade de:

- Um sinistro em  $[0, dt]$ ,
- O valor da indenização começando em  $x$
- A ruína não aconteceu dada a existência de um sinistro de valor  $x$  em  $[0, dt]$

O terceiro termo representa a probabilidade de um sinistro ocorrer e do valor de sua indenização  $x$  ultrapassar  $u + cdt$ , isto é, causando a ruína.

Rearranjando a equação anterior temos que:

$$\frac{\psi(u + cdt) - \psi(u)}{cdt} = \frac{\lambda}{c}\psi(u + cdt) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{u+cdt} f_x(x)\psi(u + cdt - x)dx + \frac{\lambda}{c}[1 - F_x(u + cdt)] + \frac{o(dt)}{cdt}$$

Tirando o limite dos dois lados com  $cdt \rightarrow 0$  encontramos:

$$\frac{d\psi(u)}{du} = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f_X(x)\psi(u-x)dx + \frac{\lambda}{c}[1 - F_X(u)]$$

**5. O coeficiente de ajuste R do Modelo 1 é dado por:**

$$R' = 0$$

$$R'' = a - \frac{\lambda_1}{c} \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{2}\right) \frac{1}{2} + \frac{1}{4c} \sqrt{\lambda_1^2(2 - \lambda_2^2)^2 + 8ac\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 + 2)}$$

$$R''' = a - \frac{\lambda_1}{c} \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{2}\right) \frac{1}{2} - \frac{1}{4c} \sqrt{\lambda_1^2(2 - \lambda_2^2)^2 + 8ac\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 + 2)}$$

**Prova :**

Para encontrar o coeficiente de ajuste do Modelo 1 devemos resolver a equação:

$$\lambda_1 + cR - \lambda_1 M_Y(R) = 0$$

O parâmetro  $\lambda_1$  é o número médio de eventos,  $c$  é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo e  $M_Y(R)$  representa a Função Geradora de Momentos da variável  $Y$  avaliada em  $R$ .

Para cálculos posteriores, foi considerada a distribuição exponencial com parâmetro  $\alpha$  para as indenizações individuais  $Y$ . A função geradora de momentos é dada por:

$$M_Y(R) = \frac{\alpha}{\alpha - R} \cdot e^{\lambda_2 \left( \frac{\alpha}{\alpha - R} - 1 \right)}$$



Para encontrar  $R$  foi substituída a função acima na equação 16:

$$\lambda_1 + cR - \lambda_1 \left[ \frac{\alpha}{\alpha - R} \cdot e^{\lambda_2 \left( \frac{\alpha}{\alpha - R} - 1 \right)} \right] = 0$$

Definimos:

$$f(x) = x \cdot e^{\lambda_2(x-1)}$$

Onde:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha - R}$$

Será feita a expansão de Taylor de primeira ordem de  $f(x)$  avaliada no ponto  $x_0 = 1$ . Segundo Dickson and Waters (1992),  $R \approx 0,02$  é um valor inicial razoável para o coeficiente de ajuste em casos que se deseja fazer uma expansão, o que implica um  $x \approx 1$ .

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$f(x) \approx 1 + (1 + \lambda_2)(x-1)$$

$$f(x) \approx -\lambda_2 + x(\lambda_2 + 1)$$

Substituindo  $x$ :

$$f\left(\frac{\alpha}{\alpha - R}\right) \approx -\lambda_2 + \left(\frac{\alpha}{\alpha - R}\right)(\lambda_2 + 1)$$

Logo a equação para encontrar o coeficiente se torna:

$$\lambda_1 + cR - \lambda_1 \left[ -\lambda_2 + \left( \frac{\alpha}{\alpha - R} \right) (\lambda_2 + 1) \right] = 0$$

$$\lambda_1 + cR + \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\lambda_1 \alpha (\lambda_2 + 1)}{\alpha - R}$$

$$\lambda_1 \alpha + cR \alpha + \lambda_1 \lambda_2 \alpha - \lambda_1 R - cR^2 - \lambda_1 \lambda_2 R = \alpha \lambda_1 (\lambda_2 + 1)$$

$$cR^2 - R(c\alpha - \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2) = 0$$

$$R^2 - R \left( \alpha - \frac{\lambda_1 (\lambda_2 + 1)}{c} \right) = 0$$

$$R = \alpha - \frac{\lambda_1 (\lambda_2 + 1)}{c}$$

Aproximação de Segunda Ordem:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!}$$

$$f(x) \approx 1 + (1 + \lambda_2)(x-1) + \frac{\lambda_2(2 + \lambda_2)(x-1)^2}{2}$$

$$f(x) \approx 1 + (x-1) \left[ (1 + \lambda_2) + \frac{\lambda_2(2 + \lambda_2)(x-1)}{2} \right]$$

Substituindo x:

$$f\left(\frac{\alpha}{\alpha - R}\right) \approx 1 + \left(\frac{\alpha}{\alpha - R} - 1\right) \left[ (1 + \lambda_2) + \frac{\lambda_2(2 + \lambda_2) \left(\frac{\alpha}{\alpha - R} - 1\right)}{2} \right]$$

Com a aproximação de segunda ordem temos:

Para encontrar uma fórmula fechada do coeficiente de ajuste  $R$ , resolveu-se a equação seguinte:

$$\lambda_1 + cR - \lambda_1 \left\{ 1 + \left( \frac{\alpha}{\alpha - R} - 1 \right) \left[ (1 + \lambda_2) + \frac{\lambda_2(2 + \lambda_2) \left( \frac{\alpha}{\alpha - R} - 1 \right)}{2} \right] \right\} = 0$$

$$cR - \lambda_1 \left\{ \frac{R}{a - R} \left[ 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} (2 + \lambda_2) \frac{R}{a - R} \right] \right\} = 0$$

$$R \left\{ c - \frac{\lambda_1}{a - R} \left[ 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} (2 + \lambda_2) \frac{R}{a - R} \right] \right\} = 0$$

$$R' = 0$$

$$c - \frac{\lambda_1}{a - R} \left[ 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} (2 + \lambda_2) \frac{R}{a - R} \right] = 0$$

$$c = \frac{\lambda_1}{a - R} \left[ 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} (2 + \lambda_2) \frac{R}{a - R} \right]$$

$$c = \frac{\lambda_1(a - R)}{(a - R)^2} \left[ 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} (2 + \lambda_2) \frac{R}{a - R} \right]$$

$$c(a - R)^2 = \lambda_1(a - R) \left[ 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} (2 + \lambda_2) \frac{R}{a - R} \right]$$

$$c(a - R)^2 = \lambda_1(a - R) + \lambda_2 \lambda_1(a - R) + \frac{\lambda_2}{2} (2 + \lambda_2) \lambda_1 R$$

$$c(a^2 - 2aR + R^2) - \lambda_1 a + \lambda_1 R - \lambda_2 \lambda_1 a + \lambda_2 \lambda_1 R - \frac{\lambda_2}{2} (2 + \lambda_2) \lambda_1 R = 0$$

$$cR^2 + \left( -2ac + \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} (2 + \lambda_2) \lambda_1 \right) R + a^2 c - \lambda_1 a - \lambda_2 \lambda_1 a = 0$$

$$2cR^2 + (-4ac + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \lambda_1 - \lambda_2 (2 + \lambda_2) \lambda_1) R + 2a^2 c - 2\lambda_1 a - 2\lambda_2 \lambda_1 a = 0$$

$$2cR^2 + (-4ac + \lambda_1 (2 - \lambda_2^2)) R + 2a(ac - \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_1) = 0$$

$$R'' = \frac{4ac - \lambda_1(2 - \lambda_2^2)}{4c} + \frac{1}{4c} \sqrt{(-4ac + \lambda_1(2 - \lambda_2^2))^2 - 16ac(ac - \lambda_1 - \lambda_1\lambda_2)}$$

$$R'' = a - \frac{\lambda_1}{c} \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{2}\right) \frac{1}{2} + \frac{1}{4c} \sqrt{\lambda_1^2(2 - \lambda_2^2)^2 - 8ac\lambda_1(2 - \lambda_2^2) + 16ac\lambda_1(1 + \lambda_2)}$$

$$R'' = a - \frac{\lambda_1}{c} \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{2}\right) \frac{1}{2} + \frac{1}{4c} \sqrt{\lambda_1^2(2 - \lambda_2^2)^2 + 8ac\lambda_1(\lambda_2^2) + 16ac\lambda_1\lambda_2}$$

$$R'' = a - \frac{\lambda_1}{c} \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{2}\right) \frac{1}{2} + \frac{1}{4c} \sqrt{\lambda_1^2(2 - \lambda_2^2)^2 + 8ac\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 + 2)}$$

$$R''' = a - \frac{\lambda_1}{c} \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{2}\right) \frac{1}{2} - \frac{1}{4c} \sqrt{\lambda_1^2(2 - \lambda_2^2)^2 + 8ac\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 + 2)}$$

6. Os três primeiros momentos da variável Y no Modelo 2 são dados por:

$$E(Y) = M'_y(0) = E(X_0) + \lambda_2 \cdot E(X_k)$$

$$E(Y^2) = M''_y(0) = E(X_0^2) + 2E(X_0)\lambda_2 \cdot E(X_k) + \lambda_2 E(X_k^2) + \lambda_2^2 E^2(X_k)$$

$$E(Y^3) = M'''_y(0) = E(X_0^3) + 3E(X_0^2)\lambda_2 E(X_k) + 3E(X_0)\lambda_2 E(X_k^2) + 3E(X_0)\lambda_2^2 E^2(X_k) \\ + \lambda_2 E(X_k^3) + 3\lambda_2^2 E(X_k)E(X_k^2) + \lambda_2^3 E(X_k^3)$$

**Prova do cálculo dos três primeiros momentos da variável Y:**

Para encontrar a aproximação da probabilidade da ruína, devemos encontrar os três primeiros momentos.

Assim, primeiramente derivamos a função geradora de momentos três vezes:

$$M_y(t) = M_{X_0}(t)E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right)$$

$$M'_y(t) = M'_{X_0}(t)E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + M_{X_0}(t)\frac{d}{dt}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right)$$

$$\begin{aligned} M''_y(t) &= M''_{X_0}(t)E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + M'_{X_0}(t)\frac{d}{dt}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + M'_{X_0}(t)\frac{d}{dt}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + M_{X_0}(t)\frac{d^2}{dt^2}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \\ &= M''_{X_0}(t)E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + 2M'_{X_0}(t)\frac{d}{dt}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + M_{X_0}(t)\frac{d^2}{dt^2}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'''_y(t) &= M'''_{X_0}(t)E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + M''_{X_0}(t)\frac{d}{dt}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + 2M''_{X_0}(t)\frac{d}{dt}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + 2M'_{X_0}(t)\frac{d^2}{dt^2}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \\ &\quad + M'_{X_0}(t)\frac{d^2}{dt^2}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + M_{X_0}(t)\frac{d^3}{dt^3}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \\ &= M'''_{X_0}(t)E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + 3M''_{X_0}(t)\frac{d}{dt}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + 3M'_{X_0}(t)\frac{d^2}{dt^2}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + M_{X_0}(t)\frac{d^3}{dt^3}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \end{aligned}$$

Onde as derivadas da esperança são dadas por:

$$\frac{d}{dt}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) = \frac{d}{dt}\int_0^{\infty} e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)} f_{X_0}(x_0) dx_0 = \lambda_2 M'_{X_k}(t)E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) &= \lambda_2 M''_{X_k}(t)E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + \lambda_2 M'_{X_k}(t)\frac{d}{dt}E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \\ &= \lambda_2 M''_{X_k}(t)E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + \lambda_2^2 M'_{X_k}(t)^2 E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dt^3} E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) &= \lambda_2 M_{X_k}'''(t) E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + \lambda_2 M_{X_k}''(t) \frac{d}{dt} E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \\
&\quad + 2\lambda_2^2 M_{X_k}'(t) M_{X_k}''(t) E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + \lambda_2^2 M_{X_k}'(t)^2 \frac{d}{dt} E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \\
&= \lambda_2 M_{X_k}'''(t) E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + \lambda_2^2 M_{X_k}'(t) M_{X_k}''(t) E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \\
&\quad + 2\lambda_2^2 M_{X_k}'(t) M_{X_k}''(t) E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + \lambda_2^3 M_{X_k}'(t)^3 E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) \\
&= \lambda_2 M_{X_k}'''(t) E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + 3\lambda_2^2 M_{X_k}'(t) M_{X_k}''(t) E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right) + \lambda_2^3 M_{X_k}'(t)^3 E\left(e^{\lambda_2(M_{X_k}(t)-1)}\right)
\end{aligned}$$

Substituindo  $t=0$  encontramos:

$$E(Y) = M_y'(0) = E(X_0) + \lambda_2 \cdot E(X_k)$$

$$E(Y^2) = M_y''(0) = E(X_0^2) + 2E(X_0)\lambda_2 \cdot E(X_k) + \lambda_2 E(X_k^2) + \lambda_2^2 E^2(X_k)$$

$$\begin{aligned}
E(Y^3) = M_y'''(0) &= E(X_0^3) + 3E(X_0^2)\lambda_2 E(X_k) + 3E(X_0)\lambda_2 E(X_k^2) + 3E(X_0)\lambda_2^2 E^2(X_k) \\
&\quad + \lambda_2 E(X_k^3) + 3\lambda_2^2 E(X_k)E(X_k^2) + \lambda_2^3 E(X_k^3)
\end{aligned}$$

## 10. Referências:

Ammeter H. (1948). *A Generalization of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic probabilities*, Skand. Aktuar Tidskr., 171-198.

Asmussen S. (2000). *Ruin Probabilities*. World Scientific, Singapore.

Albrecher H. (1998). *Dependent Risk and Ruin Probabilities in Insurance*, International Institute for Applied Systems Analysis, A-2361 Lanxerbrugg, Austria

Albrecher H. , Teugels.J.L (2006) *Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory*, Journal of Applied Probability, Volume 43, Number 1 (2006), 257-273.

Bratley P., B.L. Fox, L.E. Shrage (1987). *A Guide to Simulation*, Springer-Verlag, New York

Burnecki K., Härdle W. and Weron R. (2001). *An Introduction to Simulation of Risk Processes*, Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods, 50-370 Wrocław, Poland.

Cai J.(2002).*Ruin Probabilities with Dependent Rates of Interest*. Journal of Applied Probability, 39, 312–323

Centeno L. (2000). *Teoria do Risco*, CEMAPRE ISEG, Rua do Quelhas, 6, 1200-781 Lisboa .

Centeno L. (2003). *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*, 1nd ed. Portugal.

De Vylder F. (1978). *A Practical Solution to the Problem of Ultimate Ruin probability*. Scandinavian Actuarial Journal, 114–119.

Dickson D. C. and Waters H.R.,(1992). *Ruin Theory*. Institute of Actuaries

Grandell J. (1991). *Aspects of risk Theory*, Springer, New York

Grandell J. (2000). Simple Approximations of Ruin Probability. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26, 157–173.

Karlin S. & Taylor, H. M. (1975). *A first course in stochastic processes*, 2nd ed. New York: Academic, Inc.

Lemos, Silvia Regina Ribeiro (2008). *Probabilidade de Ruína no Mercado de Seguros: Fundamentos Teóricos e alguns resultados de Simulação*. Dissertação (Mestrado em Estatística)- Departamento de Estatística, Universidade Federal de Pernambuco.

Müller A. and Pflug G.(2001). *Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments*. *Insurance: Mathematics and Economics* Volume 28, Issue 3, 20 June 2001, Pages 381-392

Ramsay, C. M. (1992). *A Practical Algorithm for Aproximating the Probability of Ruin*. *Transactions of the Society of Actuaries*, 44, 443–461.

Shiryayev, A., N. (1996). *Probability*, 2nd. ed. New York: Springer

Shiryayev, A., N. (1999). *Essentials of stochastic finance*, Advanced Series on Statistical Science Applied Probability 3nd. ed. Singapore: World Scientific.



Souza S. (2002). *Seguros Contabilidade, atuaria e auditoria*, Saraiva, São Paulo.

Reis, A. D. E. (2001). *Teoria da Ruína*. ISEG

Wasan, M. T. (1975). *An Introduction to Stochastic Processes*. Kingston: Queen's University, SBN, Broch.