

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA
JUNHO DE 2010

*Estudo de Testes Estatísticos para o
Vetor de Médias em Controle de
Processos Multivariados sob
Amostragem Dupla*

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aluna: Grazielle Umbelina Alves Ferreira

Orientadora: Profa. Dra. Sueli Aparecida Mingoti

GRAZIELE UMBELINA ALVES FERREIRA

*Estudo de Testes Estatísticos para o Vetor de Médias em
Controle de Processos Multivariados sob Amostragem Dupla*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientadora: Profa. Dra. Sueli Aparecida Mingoti

Belo Horizonte, Junho de 2010
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Minas Gerais

Ah!
Se o mundo inteiro
Me pudesse ouvir
Tenho muito pra contar
Dizer que aprendi...
(Tim Maia)

Agradecimentos

A caminhada foi longa, mas ao final do percurso, não poderia deixar de olhar para trás e agradecer a todos que contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Agradeço, primeiramente a Deus pelo dom da vida, pela força divina que sempre guiou meus passos, por me presentear a cada manhã com a determinação que me fez seguir perseverante... sempre! Obrigada por colocar pessoas maravilhosas no meu caminho.

Aos meus pais, grandes encorajadores e intercessores, que me deram bons exemplos e me ensinaram que com dignidade, honestidade e humildade se consegue chegar a qualquer lugar. Obrigada pela luta incessante ao contribuir de forma incondicional pela minha formação pessoal e profissional, sempre reforçando a ideia de que o conhecimento é o maior que podiam me deixar, por isso ninguém nunca vai tirar de mim. Obrigada pelo incentivo constante e pela valorização do meu esforço. Exemplos de força e coragem, foram sempre o meu porto seguro e acreditaram continuamente no meu sucesso.

À minha orientadora, Profa. Sueli, por todo o conhecimento transmitido através do seu dom de ensinar. Obrigada pelo empenho na pesquisa e pela dedicada, sábia e competente orientação. Agradeço o voto de confiança!

Aos amigos, que compartilharam momentos de tensão e descontração. Obrigada por tornarem minha caminhada mais amena, pela convivência harmoniosa, pela troca de experiências e conhecimentos, pelas risadas e brincadeiras inesquecíveis...

Ao Diêgo, pelo companheirismo e paciência, pelo carinho e pela torcida! Obrigada por me mostrar a importância de se ter pensamento positivo e por ter sido sempre o meu refúgio nos momentos mais difíceis, me proporcionando momentos agradáveis.

À Profa. Emília, que me acompanhou durante grande dessa jornada e que tornou o meu dia-a-dia mais divertido, num ambiente de trabalho descontraído e prazeroso. Agradeço a grande contribuição para o meu crescimento pessoal e profissional. Obrigada pela amizade, carinho, pelos ensinamentos e por nossas longas conversas.

Fica aqui a minha gratidão a todos que estiveram comigo. Obrigada por, cada um à sua forma, contribuírem para a realização de mais um sonho!

Resumo

O presente estudo aborda um método alternativo para a determinação dos limites de controle da carta T^2 de Hotelling proposta por Costa e Machado (2008) para o caso de amostragem dupla em processos normais p -variados com matriz de covariâncias conhecida. O novo método é menos complexo que a integração numérica e pode ser utilizado para obtenção dos limites de controle em situações nas quais mais de duas características de qualidade são monitoradas simultaneamente. Além disso, o teste T^2 de Hotelling foi também estendido para situações nas quais a matriz de covariâncias teórica não é conhecida, mas estimada por meio dos dados amostrais observados, situação não abordada no artigo de Costa e Machado (2008). Paralelamente, introduziu-se uma extensão para o procedimento da amostragem dupla do teste estatístico multivariado de Hayter e Tsui (1994) utilizado para comparação do vetor de médias em amostragem aleatória simples. Devido à complexidade computacional a extensão do teste de Hayter e Tsui foi implementada apenas para o caso em que a matriz de covariâncias populacional é conhecida. A avaliação do poder dos testes foi realizada via simulações Monte Carlo considerando-se vários cenários distintos com valores de correlação baixas e altas entre as variáveis. De um modo geral, a comparação dos testes permitiu inferir que a extensão do teste de Hayter e Tsui apresentou um maior poder para situações em que o tamanho amostral era o mesmo em ambas as etapas de inspeção. Por outro lado, T^2 de Hotelling apresentou-se mais poderoso nos casos em que a correlação entre as variáveis era mais forte. A comparação entre as estimativas de poder do teste T^2 de Hotelling considerando-se a matriz de covariâncias conhecida e desconhecida mostrou que o poder do teste decresce quando a matriz de covariâncias é estimada, sobretudo em casos em que os desvios em relação ao vetor de médias postulado na hipótese nula e os tamanhos amostrais são menores. De um modo geral, observou-se que em vários dos casos apresentados, o poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui s foi elevado, mesmo para pequenas amostras.

Palavras-chave: Controle de Qualidade Multivariado; T^2 de Hotelling; Hayter e Tsui, Monte Carlo, Amostragem Dupla.

Abstract

In this dissertation we present an alternative method to determine Hotelling's T^2 control chart limits for the double sampling and normal process with known covariance matrix proposed by Costa and Machado (2008). The new procedure is less complex than the numeric integration and can be used in situations which more than two quality characteristics are available. Parallel, an extension of the Hayter and Tsui's test (1994) used to compare vector mean under random sampling was proposed for double sampling. Due the computation complexity, the extension of Hayter and Tsui was implemented only for the case where the covariance matrix is known. The evaluation of the tests was performed by using Monte Carlo simulation considering several settings with high and low correlation among the variables. In general, the results of the simulations pointed out that the extension of Hayter and Tsui's test presented larger power values in situations where the samples size were the same in both stages of inspection. On the other hand, Hotelling's T^2 performed better when the correlations among the variables were higher. The comparison between the power estimates of Hotelling's T^2 tests under the assumption of known and unknown covariance matrices showed that the power of the test decreases when the covariance matrix is estimated, particularly for situations where the shifts from the mean vector postulated under the null hypothesis and the sample sizes were smaller. In general, the results showed that in many situations the power of Hotelling's T^2 and Hayter and Tsui tests were large, even for small samples.

Key Words: *Multivariate Quality Control; Hotelling's T^2 ; Hayter and Tsui; Monte Carlo;; Double Sampling.*

Sumário

Capítulo 1: Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.2 Organização	3
Capítulo 2: Metodologia	5
2.1 Controle Estatístico de Qualidade	5
2.2 Aspectos da Construção de Gráficos de Controle.....	8
2.3 Controle de Qualidade Multivariado	11
2.3.1 Distribuição Normal Multivariada	11
2.3.2 Teste T^2 de Hotelling com Amostragem Aleatória Simples.....	16
2.3.2.1 Exemplo de Aplicação	19
2.3.3 Teste Hayter e Tsui com Amostragem Simples	20
2.3.3.1 Exemplo de Aplicação	24
2.3.4 Amostragem Dupla	26
2.3.5 Teste T^2 de Hotelling com Amostragem Dupla: Caso de Matriz de Covariâncias Conhecida	26
2.3.5.1 Exemplo de Aplicação	30
2.3.6 Teste T^2 de Hotelling com Amostragem Dupla: Caso de Matriz de Covariâncias Desconhecida	32
2.3.7 Teste Hayter e Tsui com Amostragem Dupla: Caso de Matriz de Covariâncias Conhecida	34
2.3.7.1 Exemplo de Aplicação	38
2.3.8 Teste de Hayter e Tsui com Amostragem Dupla: Caso de Matriz de Covariâncias Desconhecida	40
Capítulo 3: Determinação das Distribuições das Estatísticas de Teste em Amostragem Dupla via Simulação	41
3.1 Teste T^2 de Hotelling: Matriz de Covariâncias Conhecida.....	41
3.2 Teste T^2 de Hotelling: Matriz de Covariâncias Desconhecida	46
3.3 Teste Hayter e Tsui: Matriz de Covariâncias Conhecida.....	49

Capítulo 4: Avaliação da Qualidade dos Testes Propostos via simulações de Monte Carlo	
– Matriz de Covariâncias Conhecida	52
4.1 Estratégias e Modelos Simulados.....	52
4.2 Modelos sob a Hipótese Nula.....	53
4.2 Modelos sob a Hipótese Alternativa	54
4.2.1. Resultados para o Caso Bivariado ($p = 2$).....	55
4.2.2. Resultados para o caso de três variáveis ($p = 3$)	71
Capítulo 5: Avaliação da Qualidade do Teste T^2 de Hotelling via simulações de Monte Carlo	
– Matriz de Covariâncias Desconhecida.....	77
Capítulo 6: Considerações Finais e Trabalhos Futuros.....	82
Anexo A	86
Anexo B	95
Anexo C	100
Anexo D	116
Referências Bibliográficas	120

Lista de Figuras

Figura 1: Ilustração do gráfico de controle univariado para a média.....	7
Figura 2: Gráfico da função de densidade da distribuição normal bivariada com $\rho = 0$	15
Figura 3: Gráfico da função de densidade da distribuição normal bivariada com $\rho = 0,5$	15
Figura 4: Gráfico da função de densidade da distribuição normal bivariada com $\rho = 0,9$	15
Figura 5: Gráfico de Controle T^2 de Hotelling	17
Figura 6: Plano de Inspeção em Amostragem Dupla para o teste T^2 de Hotelling.	28
Figura 7: Plano de Inspeção em Amostragem Dupla para o teste Hayter e Tsui.....	36

Lista de Tabelas

Tabela 1: Exemplo de aplicação do teste T^2 de Hotelling em Amostragem Dupla.....	32
Tabela 2: Exemplo de aplicação do teste de Hayter e Tsui em Amostragem Dupla.	39
Tabela 3: Estimativas dos limites do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling em amostragem dupla via procedimento de simulação.....	43
Tabela 4: Estimativas dos limites críticos do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling em amostragem dupla via simulação de Monte Carlo	45
Tabela 5: Comparação entre as estimativas dos limites críticos do teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla no controle multivariado do vetor de médias considerando a matriz de covariâncias conhecida e desconhecida	48
Tabela 6: Estimativas dos limites críticos do teste Hayter e Tsui sob o procedimento de amostragem dupla considerando a matriz de correlação teórica P conhecida.	50
Tabela 7: Estimativas do nível de significância e ARL para o caso bivariado	53
Tabela 8: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$	56
Tabela 9: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=0,250$	58
Tabela 10: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$	60
Tabela 11: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=1,000$	62
Tabela 12: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,0$ e $k_2=0,5$	67
Tabela 13: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,5$ e $k_2=-0,5$	69
Tabela 14: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=3$, $\alpha_I = 0,00$	73
Tabela 15: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=3$, $\alpha_I = 0,01$	74
Tabela 16: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=3$, $\alpha_I = 0,025$	75

Tabela 17: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=3$, $\alpha_I = 0,04$	76
Tabela 18: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling para os casos em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$	78
Tabela 19: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling para os casos em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$	79
Tabela 20: Comparação entre as estimativas de poder global do teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla nas situações em que a matriz de covariâncias teórica Σ é conhecida e desconhecida	81
Tabela B1: Limites Críticos para o teste T^2 de Hotelling: Σ conhecida ($p=2$).....	96
Tabela B2: Limites Críticos para o teste Hayter e Tsui: Σ conhecida ($p=2$).....	97
Tabela B3: Limites Críticos para o teste T^2 de Hotelling: Σ conhecida ($p=3$).....	98
Tabela B4: Limites Críticos para o teste Hayter e Tsui: Σ conhecida ($p=3$).....	98
Tabela B5: Limites Críticos para o teste T^2 de Hotelling: Σ desconhecida ($p=2$).....	99
Tabela C1: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$	101
Tabela C2: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,250$	103
Tabela C3: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$	105
Tabela C4: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=1,000$	107
Tabela C5: Estimativas de ARL para T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,0$ e $k_2=0,5$	109
Tabela C6: Estimativas de ARL para T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,5$ e $k_2=-0,5$	111
Tabela C7: Estimativas de ARL para os testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é conhecida e $p=3$	113
Tabela C8: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$	114
Tabela C9: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$	115

Lista de Quadros

Quadro 1: Algoritmo de Hayter e Tsui para obtenção de $C_{R,\alpha}$ sob a suposição de distribuição normal p -variada.	22
Quadro 2: Algoritmo de Hayter e Tsui para estimação não-paramétrica de $C_{R,\alpha}$	23
Quadro 3: Algoritmo de obtenção do limite crítico CL_2 na segunda fase de inspeção considerando-se a matriz de covariâncias $\Sigma_{p \times p}$ conhecida.	42
Quadro 4: Procedimento de aplicação do teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla para o caso em que a matriz de covariâncias teórica é conhecida.	45
Quadro 5: Algoritmo de obtenção do limite crítico CL_2 do teste T^2 de Hotelling na segunda fase de inspeção considerando-se a matriz de covariâncias $\Sigma_{p \times p}$ desconhecida.	47
Quadro 6: Algoritmo de Hayter e Tsui para obtenção dos limites críticos do teste sob amostragem dupla considerando a suposição de distribuição normal p -variada com matriz de correlação \mathbf{P} teórica conhecida.	49
Quadro 7: Procedimento de aplicação do teste Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que a matriz de covariâncias teórica é conhecida.	51
Quadro D1: Algoritmo do teste T^2 de Hotelling para Σ conhecida.	117
Quadro D2: Algoritmo do teste T^2 de Hotelling para Σ desconhecida.	118
Quadro D3: Algoritmo do teste Hayter e Tsui para Σ conhecida.	119

Capítulo 1: Introdução

A qualidade tem se tornado um dos principais fatores determinantes da seleção por um produto ou serviço fornecido por companhias e organizações diante da competitividade no mercado. Embora seja um instrumento estratégico para tornar um empreendimento competitivo e até mesmo garantir a sua sobrevivência no mercado, não existe uma definição universal sobre o termo. De forma geral, tanto do ponto de vista do cliente quanto do produtor, a qualidade pode ser vista como o atendimento rigoroso de padrões ou especificações de conformidade (Crosby, 1995), adequação ao uso (Juran, 1999), cumprimento das exigências e expectativas dos consumidores (Deming, 2000), relação custo/benefício, valor agregado ou simplesmente fazer certo da primeira vez.

Todas essas características determinam a excelência de um produto ou serviço no mercado e, conseqüentemente, garantem a satisfação do consumidor. O reconhecimento desse princípio despertou a necessidade de estudos e, dessa forma, o controle de qualidade vem se destacando como uma metodologia útil para compreender, monitorar e melhorar continuamente o processo de produção. Recentemente, devido ao aumento da competitividade no mercado, essa técnica tornou-se condição básica para manutenção da qualidade de bens e serviços em diversas companhias e organizações.

O Controle Estatístico de Processo (CEP) é uma das ferramentas de auxílio do controle de qualidade com enfoque estatístico. Fundamentado na aplicação de testes de hipóteses e gráficos de controle a um conjunto de variáveis que determinarão a qualidade de um item, proporciona a estabilidade, melhoria contínua do processo de produção e a otimização dos recursos disponíveis. Shewhart (1926), conhecido por ser o pioneiro em desenvolver gráficos de controle, destacou-se também por reconhecer a necessidade de considerar problemas de controle multivariado.

Adicionalmente, a primeira abordagem sobre controle multivariado destacou-se por permitir o controle de médias de várias características de qualidade correlacionadas através de uma análise simultânea ao longo do tempo realizada via gráfico de controle T^2 de Hotelling (Hotelling, 1947). No entanto, o gráfico T^2 é um pouco lento para detectar pequenos a moderados deslocamentos no vetor de médias do processo que está sendo monitorado. Por

essa razão, vários foram os métodos desenvolvidos com o intuito de formular testes estatísticos que tivessem a capacidade de captar pequenos a moderados desvios do vetor de médias original mais rapidamente. Dentro dessa linha têm-se basicamente duas classes de procedimentos. A primeira engloba a elaboração de novos testes estatísticos que proporcionem maior poder, pelo menos em algumas situações, que o teste T^2 de Hotelling, como o teste de Hayter e Tsui (1994) e o gráfico de controle Média Móvel Multivariada Ponderada Exponencialmente – MEWMA, *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*, (Lowry, et al, 1992). A segunda refere-se a mudanças no plano de amostragem de coleta de dados e a reelaboração dos testes estatísticos utilizados na amostragem aleatória simples, como é o caso da amostragem dupla proposta para melhorar o poder dos testes estatísticos para comparação de médias sem a necessidade de aumentar o tamanho amostral ou, alternativamente, reduzir o tamanho amostral sem reduzir a eficiência estatística (He e Grigoryan, 2005).

Embora existam várias publicações sobre a amostragem dupla em processos univariados, o mesmo não ocorre no caso de processos multivariados. Costa e Machado (2008) propuseram a utilização da amostragem dupla com o teste estatístico T^2 de Hotelling no controle de qualidade para o vetor de médias em processos multivariados. No entanto, no artigo desses autores apenas o caso de processos bivariados foi tratado e o poder do teste foi avaliado apenas para algumas situações específicas, considerando-se a matriz de covariâncias entre as variáveis envolvidas no processo como conhecida. Além disso, caso uma alteração no vetor de médias seja detectada, o procedimento proposto não identifica quais são as variáveis que apresentaram médias distintas em relação aos parâmetros postulados do processo.

Nesse sentido, é importante estender o teste proposto por Costa e Machado (2008) para o caso em que o número de características de qualidade p é maior que 2, como também propor o desenvolvimento de um novo teste que permita o controle simultâneo rápido e eficaz de várias variáveis, mantendo três importantes propriedades: controle da taxa de erro global, facilidade na identificação das possíveis variáveis que causam deslocamentos no vetor de médias do processo e a quantificação numérica da alteração.

1.1 Objetivos

A principal proposta desta dissertação é a realização de estudos sobre o comportamento dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob o procedimento de amostragem dupla. Dentro dessa perspectiva, os seguintes objetivos específicos que foram cumpridos:

(a) Estender o teste T^2 de Hotelling proposto por Costa e Machado (2008) para o caso em que o número de variáveis é maior que 2 ($p > 2$), quando a matriz de covariâncias populacional entre as variáveis é conhecida;

(b) Avaliar o comportamento do teste em (a) para várias situações distintas nas quais há ou não afastamento do vetor de médias postulado na hipótese nula, considerando-se a distribuição normal multivariada;

(c) Adaptar o teste proposto por Hayter e Tsui (1994) sob amostragem aleatória simples, para o caso em que é utilizada a amostragem dupla e compará-lo com os resultados do teste T^2 de Hotelling para amostragem dupla proposto por Costa e Machado (2008) no caso bivariado com a matriz de covariâncias populacional conhecida;

(d) Estender a adaptação do teste de Hayter e Tsui proposta no item (c), para os casos em que $p > 2$ e compará-la com o T^2 de Hotelling;

(e) Estender e avaliar o teste T^2 de Hotelling para o caso em que a matriz de covariâncias teórica é desconhecida.

A avaliação da qualidade dos testes considerados nesta dissertação foi realizada através da estimação do tamanho e poder dos testes, via simulação de Monte Carlo utilizando-se o *software R Project for Statistical Computing*, versão 2.9.1, linguagem de programação gratuita em ambiente de computação estatística e gráfica. Trata-se de uma linguagem comum e de simples entendimento, com ampla disponibilidade de pacotes, e está disponível no endereço eletrônico <http://www.r-project.org/>.

1.2 Organização

O conteúdo deste texto de dissertação está organizado em seis capítulos e três anexos. No presente Capítulo 1, apresentou-se a introdução com o referencial teórico, a justificativa e os objetivos do projeto de dissertação. Nos Capítulos 2 e 3 apresentam-se os conceitos gerais e a metodologia utilizada. São abordadas as técnicas de controle estatístico univariado e

multivariado, sob o procedimento de amostragem simples e dupla. Nos Capítulos 4 e 5, são explicitados os resultados obtidos via simulação Monte Carlo que proporcionam uma avaliação das metodologias introduzidas no Capítulo 3 para o caso de matrizes de covariâncias conhecida e desconhecida, respectivamente. O Capítulo 6 finalmente apresenta as considerações finais do estudo e as sugestões para trabalhos futuros. O Anexo A constitui-se do desenvolvimento da estatística T^2 de Hotelling quando é aplicada com amostragem dupla. O Anexo B contém os limites críticos utilizados nos testes para todos os cenários abordados. O Anexo C encontram-se os valores de *ARL* encontrados nos estudos de simulação e no Anexo D são encontrados os algoritmos que podem auxiliar o usuário na utilização das metodologias introduzidas nesta dissertação.

Capítulo 2: Metodologia

Esse capítulo apresenta alguns procedimentos utilizados em Controle Estatístico de Qualidade. São discutidos alguns métodos de monitoramento do vetor de médias no caso multivariado e sua abordagem sob amostragem dupla, temas que são tratados nesta dissertação.

2.1 Controle Estatístico de Qualidade

O Controle Estatístico de Qualidade é um conjunto de técnicas e procedimentos que conduzem à inspeção, identificação, monitoramento, intervenção e aprimoramento de características de qualidade na produção de bens e serviços. A sua aplicação em diversos empreendimentos permite o seu engajamento em um programa de melhoria contínua. Dessa forma, tem-se a informação sobre o estado de equilíbrio do sistema e de sua capacidade de gerar itens que atendam às especificações. Essas características permitem aos gestores do processo verificar se o sistema se comporta de maneira esperada ou imprevisível e auxiliam na otimização e alocação de recursos e investimentos. Segundo Montgomery (2004), o Controle Estatístico de Processo (CEP) é uma ferramenta primordial para obtenção da estabilidade em um processo de produção ou serviços e melhoria do desempenho do mesmo, de modo a reduzir sua variabilidade.

Walter A. Shewhart (1924) foi o primeiro a reconhecer e discutir a impossibilidade de se produzirem itens idênticos em um sistema de produção. Ele argumentava que existem efeitos aleatórios que são impossíveis de serem controlados devido à variabilidade natural do processo que, por sua vez, pode ser considerada desprezível e aceitável. Em contrapartida, um sistema que não se comporta de maneira previsível e com variabilidade natural controlada encontra-se sob efeito de perturbações, comumente denominadas “causas especiais”, que interferem negativamente nos efeitos do processo. Nesse caso, são necessárias intervenções para o cumprimento de ajustes que conduzirão à estabilidade do processo no que se refere aos parâmetros que precisam ser controlados.

Baseado nessas idéias, Shewhart (1926) foi o pioneiro a abordar gráficos de controle. Os primeiros dispositivos utilizados, além de apresentarem resultados satisfatórios, tinham a vantagem de simplicidade na construção e aplicação. A ampla operacionalidade conduziu a fácil aceitação da técnica e conduziu a uma disseminação em sua utilização e, ainda hoje, vários estudiosos do tema buscam aprimoramento dos procedimentos estatísticos que possibilitem um controle estatístico rápido e eficaz. Os gráficos de controle são construídos com base nas seguintes hipóteses nula e alternativa: H_0 : O processo está sob controle estatístico versus H_1 : O processo não está sob controle estatístico. Assim, um gráfico de controle permite inferir através de um recurso visual sobre o estado de controle estatístico de um processo. O procedimento consiste em se definir uma estatística de teste $T(x)$ e construir-se a região de rejeição da hipótese nula respectiva a um nível de significância α , $0 < \alpha < 1$, baseada nos limites críticos. Um gráfico de controle nada mais é do que uma representação visual na qual se tem demarcada as regiões de rejeição e não-rejeição de H_0 através dos limites determinados. Se os pontos definidos pelas estatísticas $T(x)$ estiverem dentro dos limites de controle não se rejeita a hipótese nula e conclui-se que não há nenhum desvio no processo. Por outro lado, se algum ponto encontrar-se fora desses limites, rejeita-se a hipótese nula de que o processo está sob controle estatístico e procura-se identificar as possíveis causas que levaram a suspeita de que haja alguma irregularidade no processo.

Como ilustração suponha que a característica de qualidade X tenha distribuição normal com parâmetros μ e Σ^2 , sendo Σ^2 conhecido. Sejam $H_0: \mu = \mu_0$ versus $H_1: \mu \neq \mu_0$, em que μ_0 é o valor pré-especificado para μ e equivale à situação do processo estar sob controle estatístico. Dada uma amostra aleatória de tamanho n de X , seja $T(x) = \bar{X}_n$ a média amostral. Nesse caso, a hipótese nula será rejeitada se $\bar{X}_n < \mu_0 - k\sigma/\sqrt{n}$ ou $\bar{X}_n > \mu_0 + k\sigma/\sqrt{n}$, onde k é tal que $P(Z \leq -k) = \alpha/2$, sendo Z a variável correspondente à distribuição normal padronizada, e α , $0 < \alpha < 1$, é o nível de significância do teste. O gráfico de controle terá três linhas ou limites como indicado na Figura 1, ou seja, o limite inferior de controle (LIC) definido como $\mu_0 - k\sigma/\sqrt{n}$, o limite superior de controle (LSC) definido como $\mu_0 + k\sigma/\sqrt{n}$ e o limite médio (LM), μ_0 . Se o valor da estatística de teste \bar{X}_n estiver entre os limites $\mu_0 \pm k\sigma/\sqrt{n}$, diz-se que o processo está sob controle estatístico, caso contrário, H_0 é rejeitada e suspeita-se então que a média do processo não é igual à média postulada em H_0 .

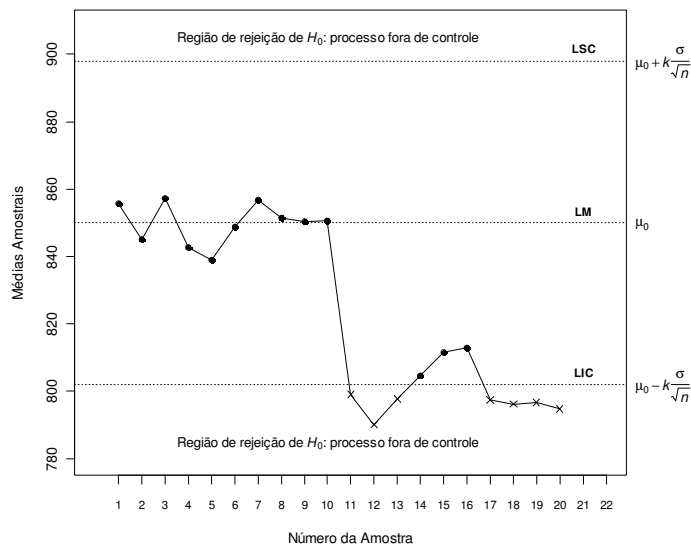


Figura 1: Ilustração do gráfico de controle univariado para a média

Os limites de controle foram propostos por Shewhart com $k = 3$, que corresponde a um nível de significância igual a 0,0027 na distribuição normal. Dessa forma, a partir deles fica determinada a região de ação do gráfico de controle, constituída das áreas abaixo do LIC e acima do LSC. Dependendo das condições e do nível de exigência, o pesquisador pode aumentar ou diminuir o valor da constante k , isto é, do nível de significância do teste.

A hipótese nula será considerada verdadeira sempre que o valor da estatística $T(x)$ obtido estiver entre os limites do gráfico. Dessa forma, considera-se que o processo esteja sob controle e estável, produzindo itens com características previsíveis e oscilações controladas em relação aos parâmetros indicados na hipótese nula. Por outro lado, quando um ou mais pontos não estiverem dentro dos limites de controle, é plausível acreditar que se esteja diante de um sistema desajustado, submetido a fatores de interferência que podem ser identificados, comumente denominados de “causas assinaláveis”. Nesse caso, a hipótese nula é rejeitada sendo provavelmente necessária adoção de medidas de correção no processo.

Em gráficos de controle a hipótese nula é testada ao longo do tempo. Amostras de tamanho n são retiradas do processo de interesse a cada intervalo de tempo h , sendo H_0 testada em cada amostra. Nesse contexto, um outro fator que requer atenção é a visualização do comportamento dos dados amostrais através da estatística de teste $T(x)$ dentro dos limites de controle. Caso os dados se comportem de maneira sistemática ou não-aleatória, há um indício de que o processo esteja com algum desajuste, mesmo que todos os valores das estatísticas $T(x)$ estejam dentro dos limites.

2.2 Aspectos da Construção de Gráficos de Controle

As cartas ou gráficos de controle constituem uma das sete ferramentas do CEP. Seus principais objetivos incluem a estimação dos parâmetros envolvidos no processo e o monitoramento e acompanhamento do mesmo. Dessa forma, busca basicamente a investigação e identificação de causas atribuíveis a um desequilíbrio no processo e que, se eliminadas, contribuirão para reduzir a variabilidade em prol de melhoria contínua. Sua popularidade e aceitação se devem primordialmente na eficácia na detecção de causas assinaláveis, fornecimento de informações de diagnóstico, ajustes necessários e sobre a capacidade do processo, além de ser uma técnica comprovada para obtenção da melhoria da produtividade de bens e serviços.

A construção dos gráficos de controle envolve duas fases. A primeira constitui-se de um estudo do processo focado na coleta de amostras para estimação dos parâmetros de interesse. Nessa etapa procura-se conhecer os aspectos que interferem nas características da qualidade, como desvios e tendências, e a identificação de pontos amostrais que podem estar sob influência de efeitos não-aleatórios, isto é, causas assinaláveis. Em seguida, o gráfico é reconstruído apenas com os pontos amostrais livres de causas assinaláveis e os limites de controle estimados a partir dessa nova amostra são os considerados finais, ou seja, aqueles que serão utilizados na segunda fase (Montgomery, 2004). É importante que as estimativas dos parâmetros de interesse sejam obtidas apenas através de amostras isentas de efeitos não-aleatórios, uma vez que observações extraídas no período de instabilidade retornariam valores diferentes dos ideais.

A segunda etapa envolvida em controle de qualidade consiste em se considerar o gráfico de controle e as estimativas dos parâmetros obtidas obtidos na fase anterior como as condições reais e, então diz-se que o processo está sob controle. Nesta fase, amostras são coletadas do processo sendo a estatística $T(x)$ calculada para cada amostra e plotada no gráfico. Se alguma amostra resulta num valor que pertence à região de rejeição de H_0 , infere-se que o processo não está sob controle estatístico. É importante deixar claro que o uso efetivo de qualquer gráfico de controle exigirá coleta constante de informações e revisão periódica dos limites de controle.

No procedimento de construção do gráfico, deve-se ainda estudar o seu poder em detectar alterações nos parâmetros do processo estabelecidos em H_0 . Os valores do tamanho amostral n e do intervalo de amostragem h podem ser determinados de acordo com o nível de significância do teste e o poder mínimo estabelecido para o mesmo. Além disso, outros

fatores podem ser levados em consideração como disponibilidade de tempo e custo para a coleta de dados e fluxo de produção, entre outros. É necessária a adoção de um procedimento de coleta de dados que promova a otimização da relação tempo/custo envolvidos no controle estatístico. A eficácia de um gráfico de controle, por sua vez, é medida pela rapidez com que esse dispositivo detecta alterações em um sistema. Essa sensibilidade de detectar desvios nos parâmetros monitorados é, em geral, avaliada pelo número esperado de amostras coletadas até que o gráfico sinalize pela primeira vez a ocorrência de uma perturbação. É denominado como Comprimento Médio da Seqüência (*ARL*, *Average Run Length*, traduzido como NMA: Número Médio de Amostras por alguns autores como Costa et. al., 2008) e representa o número médio de amostras necessárias até que o gráfico de controle indique a ocorrência de uma situação em que o processo está fora de controle estatístico. Seja $T(x)$ a estatística de teste. O *ARL* é expresso como:

$$ARL = \frac{1}{P[\text{valor de } T(x) \text{ não esteja contido dentro dos limites de controle}]} \quad (2.1)$$

Consideremos como sendo Y o número de amostras aleatórias observadas até que o processo indique a ocorrência de um alarme. Quando as amostras são independentes, a variável aleatória Y tem distribuição Geométrica com parâmetro p , $0 < p < 1$, que é a probabilidade de que seja observado um valor $T(x)$ fora dos limites de controle especificados no gráfico.

Assim, denotemos como $Y \sim \text{Geométrica}(p)$. A esperança e variância dessa variável aleatória são dadas, respectivamente, por $E(Y) = \frac{1}{p}$ e $Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$. O *ARL* é dado pelo valor esperado de Y . Sendo assim, quando o processo está sob controle estatístico (*ARL* sob H_0), o valor de *ARL* é dado por:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (2.2)$$

em que α é o nível de significância do teste, $0 < \alpha < 1$. Nesse caso, essa quantidade representa o número médio de observações até a ocorrência de um “alarme falso”, ou seja, dizer-se que o processo está fora de controle quando na verdade ele está sob controle.

Quando, por sua vez, o processo está fora de controle, (ARL sob H_1), o valor de ARL é inversamente proporcional ao poder do teste, ou seja:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}, \quad (2.3)$$

sendo β , $0 < \beta < 1$, a probabilidade do erro tipo II do teste, isto é:

$$\beta = P[T(x) \in \text{região de não-rejeição de } H_0 \mid H_1 \text{ é verdadeira}] \quad (2.4)$$

Nesse caso, o valor de ARL representa o número médio de observações até a ocorrência de um “alarme verdadeiro”.

Conseqüentemente, o poder associado ao teste é dado por:

$$1 - \beta = P[T(x) \in \text{região de rejeição de } H_0 \mid H_1 \text{ é verdadeira}] \quad (2.5)$$

O poder do teste se refere à primeira amostra observada após a mudança de parâmetros. No entanto, o processo de inspeção em controle estatístico é realizado ao longo do tempo, e, por isso, tem-se a oportunidade de avaliar o poder com base nas m primeiras amostras coletadas, calculado como: $P(Y = m) = (1 - \beta)\beta^{m-1}$, $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Em controle de qualidade o valor α em porcentagem é chamado de percentual de alarmes falsos, ou seja, o percentual de vezes que a hipótese nula é rejeitada erroneamente (erro tipo I). Em contrapartida, o alarme verdadeiro ocorre quando a hipótese nula é rejeitada corretamente, ou seja, quando H_1 é verdadeira. Assim, $(1 - \beta)100\%$ é a porcentagem de alarmes verdadeiros.

A análise conjunta dos valores de ARL indica a eficácia da carta de controle. Dessa forma, uma carta de controle é considerada adequada quando possui uma baixa porcentagem de alarmes falsos e uma alta porcentagem de alarmes verdadeiros.

2.3 Controle de Qualidade Multivariado

Em um processo univariado, os gráficos de controle de Shewhart são utilizados para monitorar a média do processo. No entanto, em um processo em que várias características da qualidade necessitam ser monitoradas simultaneamente, é comum, ao se extrair várias medidas de um mesmo componente, que se obtenha variáveis correlacionadas devido à própria natureza do processo. Nesse sentido, ignorar a correlação existente entre as variáveis pode ocasionar dificuldade do procedimento em detectar deslocamentos no vetor de médias e conduzir a decisões errôneas. Esse problema se torna ainda mais grave na medida em que crescem o número de variáveis envolvidas na análise (Montgomery, 2004).

Adicionalmente, a utilização de vários testes univariados independentes inflaciona a taxa nominal de erro tipo I, α , de forma que a realização de m testes individuais considerando um nível de significância α em cada um deles resultaria em uma probabilidade conjunta do erro tipo I, α_{Total} , que dada por $\alpha_{Total} = 1 - (1 - \alpha)^m$. Essa alternativa torna-se mais inapropriada quando o número m de características avaliadas é grande.

Nesse contexto, tem-se evidenciado o surgimento e aprimoramento de testes estatísticos que levem em consideração o controle estatístico simultâneo dos parâmetros das distribuições das características da qualidade relacionadas. No caso do controle do vetor de médias, destacam-se os testes T^2 de Hotelling (1947) e Hayter e Tsui (1994) que serão discutidos nas Seções 2.3.2 a 2.3.7. Como a construção desses testes depende da suposição de normalidade multivariada, esta distribuição será apresentada na Seção 2.3.1 a seguir.

2.3.1 Distribuição Normal Multivariada

A distribuição normal multivariada é uma generalização da distribuição normal univariada, e trata de situações em que se têm duas ou mais variáveis que são medidas no mesmo elemento amostral.

A função de densidade de uma variável aleatória X , proveniente de uma distribuição normal univariada com média μ e variância Σ^2 , que se denota por $X \sim N(\mu, \Sigma^2)$, é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad (2.6)$$

sendo $-\infty < x < \infty$, $\mu \in (-\infty, \infty)$, $\Sigma > 0$. Dessa forma, a função é composta por apenas dois parâmetros, média e desvio-padrão. Observa-se na função densidade de X a presença de simetria e uma curva em forma de sino.

A extensão desse caso é constituída por uma situação em que p variáveis são observadas em um mesmo elemento amostral e, assim, obtém-se um vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ composto pelas p características de qualidade avaliadas. Assume-se que as p variáveis são provenientes de uma distribuição normal p -variada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^T$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_{p \times p}$ e denota-se por $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ se a função de densidade de \mathbf{X} for dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (2.7)$$

para todos $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^p$, em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$, $-\infty < x_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, p$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{R}^p$, $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz simétrica $p \times p$ positiva definida, e neste caso sua matriz inversa $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ existe e pode ser calculada. A quantidade $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ representa a distância de *Mahalanobis* do vetor \mathbf{X} em relação ao vetor $\boldsymbol{\mu}$ (Mingoti, 2005).

A distribuição normal bivariada é um caso particular da distribuição multivariada em que se tem $p = 2$. Como ilustração, suponha que X_1 e X_2 sejam duas variáveis aleatórias, tal que $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ provenientes de uma distribuição normal bivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, dados respectivamente por:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

onde σ_{ii} representa a variância da variável X_i e σ_{ij} a covariância entre as variáveis X_i e X_j , $i \neq j$. A correlação entre X_1 e X_2 , dada por ρ_{12} ou simplesmente ρ é dada por:

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{\sigma_{22}}} \quad (2.8)$$

Dessa forma, a matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ pode ser reescrita como:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} \\ \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

cujo determinante será expresso como:

$$|\Sigma| = \sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2) \quad (2.10)$$

A matriz inversa de Σ , presente no termo exponencial da função de densidade do vetor \mathbf{X} , será tal que:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{|\Sigma|} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} \\ -\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} & \sigma_{11} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Portanto, a forma quadrática presente no termo exponencial da função de densidade de \mathbf{X} , a saber, $(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$, pode ser expandido como:

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 \right] \quad (2.12)$$

Essa é a equação de uma elipse centrada em $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$, cujo maior eixo está associado à variável que apresenta maior variabilidade. Dessa forma, a função de densidade da distribuição normal bivariada pode ser reescrita como:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.13)$$

em que $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{R}^2$, $\Sigma_{ii} \in \mathfrak{R}_+^2$, $\sqrt{\sigma_{ii}} > 0$ e $|\rho_{12}| < 1$.

Assim, através da função de densidade normal bivariada, pode-se inferir que a correlação entre as variáveis interfere diretamente na forma da distribuição. As Figuras 2, 3 e 4 apresentam alguns gráficos da função de densidade para os valores de correlações 0, 0,5 e 0,9.

Na Figura 2 percebe-se que as curvas de nível da função são evidenciadas pela forma geométrica circular, indicando ausência de correlação entre X_1 e X_2 . Nesse caso, se todas as variáveis têm a mesma variância, tem-se uma estrutura que é chamada de “estrutura de covariância esférica” (Mingoti, 2005).

Quando a correlação é acrescida para 0,5 (Figura 3), aumenta-se a concentração de massa em torno de uma reta imaginária e as curvas de nível da função tomam o formato de uma elipse. Ao atingir 0,9 percebe-se que essa relação é ainda mais evidente (Figura 4).

Densidade da Distribuição Normal Bivariada

$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_{11} = 10, \sigma_{22} = 10, \sigma_{12} = 0, \rho = 0$

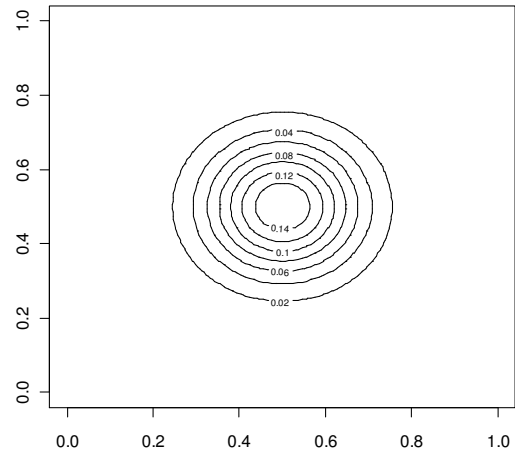
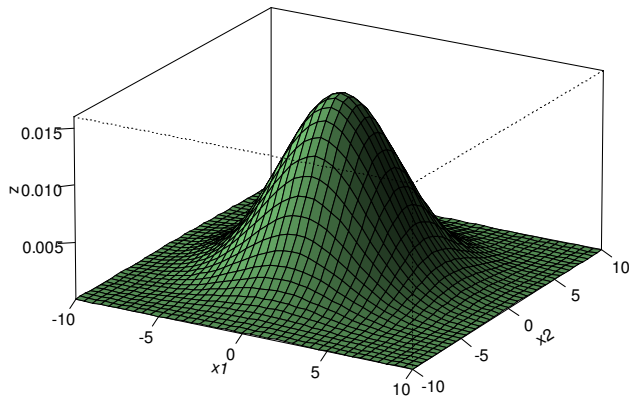


Figura 2: Gráfico da função de densidade da distribuição normal bivariada com $\rho = 0$

Densidade da Distribuição Normal Bivariada

$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_{11} = 10, \sigma_{22} = 10, \sigma_{12} = 15, \rho = 0.5$

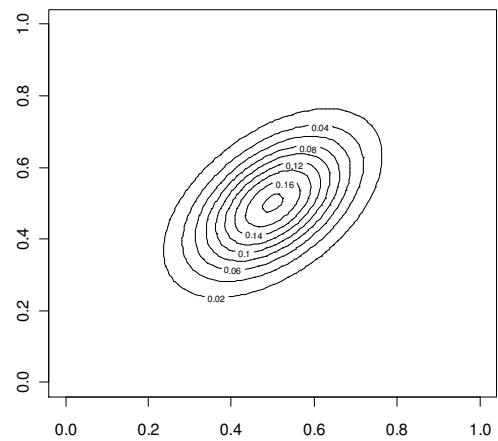
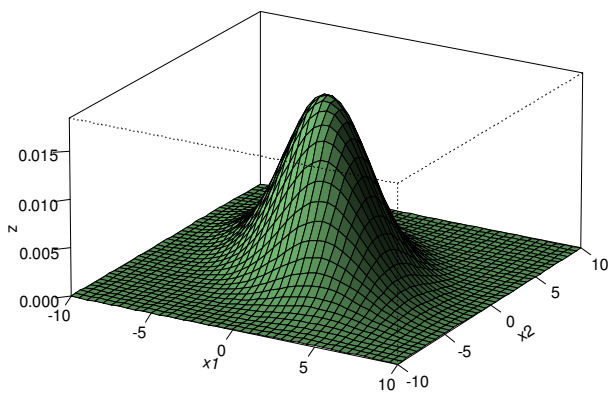


Figura 3: Gráfico da função de densidade da distribuição normal bivariada com $\rho = 0,5$

Densidade da Distribuição Normal Bivariada

$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_{11} = 10, \sigma_{22} = 10, \sigma_{12} = 9, \rho = 0.9$

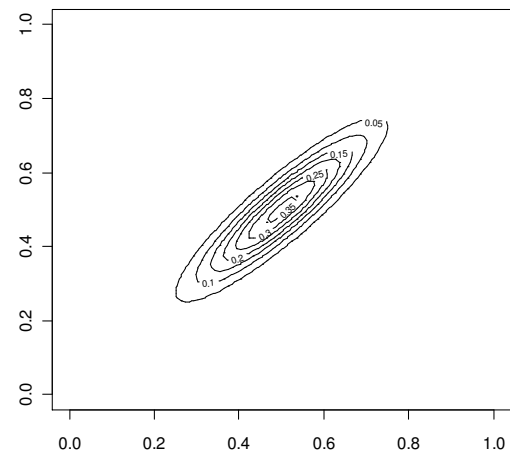
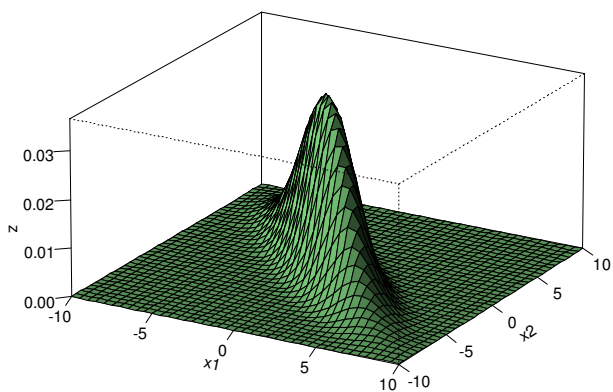


Figura 4: Gráfico da função de densidade da distribuição normal bivariada com $\rho = 0,9$

A distribuição normal p -variada é pré-requisito para a aplicação de testes estatísticos multivariados que serão apresentados nesta dissertação.

2.3.2 Teste T^2 de Hotelling com Amostragem Aleatória Simples

Em 1947 Hotelling introduziu o primeiro teste estatístico multivariado para o vetor de médias em que a estrutura de correlação das variáveis é levada em consideração na formulação matemática do teste. Baseado na distribuição normal p -variada, é hoje bastante utilizado em controle estatístico de processos multivariados. O procedimento abordado por Hotelling e posteriormente, por outros autores para avaliação do vetor de médias, permite o controle simultâneo das médias de várias características de qualidade correlacionadas e é mais sensível para detectar desvios que são fracamente detectados por gráficos de controle das variáveis individuais (He e Grigoryan, 2005).

Para descrição do teste, considere $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ um vetor aleatório com distribuição normal multivariada com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\Sigma_{p \times p}$, onde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^T$ e Σ é uma matriz positiva definida. Suponha que se deseje testar a hipótese nula $H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ versus a hipótese alternativa $H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$, onde $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})^T$ é pré-estabelecido. Seja $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ uma amostra aleatória do vetor \mathbf{X} , sendo $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})^T$, $i = 1, 2, \dots, n$, a i -ésima unidade amostral e $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)^T$ o vetor de médias amostral de modo que \bar{X}_j representa a média da j -ésima variável, para $j = 1, 2, \dots, p$. Se a matriz de covariâncias $\Sigma_{p \times p}$ é conhecida, a estatística de teste T^2 é definida por:

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.14)$$

Sob H_0 , T^2 tem distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade (Anderson, 2003). Assim, a hipótese nula será rejeitada para valores de T^2 maiores que o ponto crítico $\chi_{p,\alpha}^2$, sendo α o nível de significância do teste de forma que $P(T^2 \geq \chi_{p,\alpha}^2) = \alpha$.

A estatística T^2 de Hotelling para testar tais hipóteses é uma generalização da distribuição t-Student para várias dimensões (Johnson e Wichern, 2002). As regiões de rejeição e não rejeição de H_0 podem ser representadas graficamente como no caso de controle univariado. O gráfico é chamado de T^2 de Hotelling, ou apenas T^2 , e está ilustrado na Figura 5.

Os valores amostrais da estatística T^2 são plotados. O limite inferior de controle é zero e o limite superior de controle, ou simplesmente limite de controle (LC) é dado pela constante de rejeição de H_0 ($\chi^2_{p,\alpha}$). Valores acima de LC sugerem que o processo esteja fora de controle estatístico no que se refere ao vetor de médias.

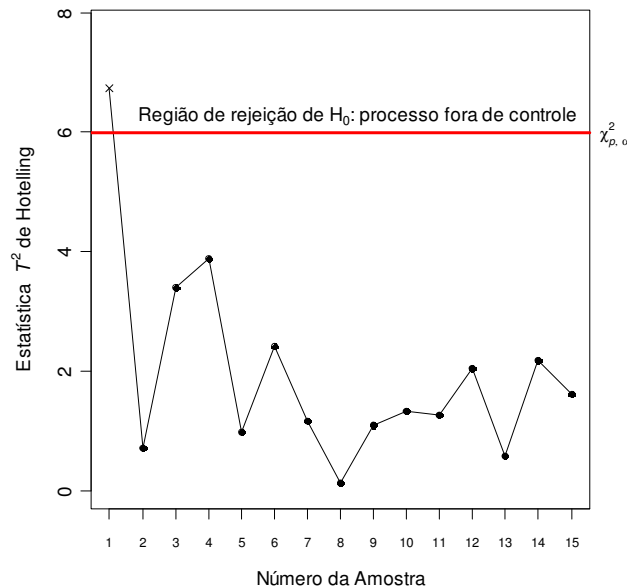


Figura 5: Gráfico de Controle T^2 de Hotelling

Se todos os pontos amostrais da estatística T^2 estiverem abaixo do LC, não se rejeita a hipótese nula H_0 e assume-se que o processo está sob controle estatístico. Caso contrário, H_0 é rejeitada e, então, procura-se identificar as possíveis perturbações existentes no processo. Dessa forma, a função do gráfico de controle é identificar situações em que é necessário intervir-se no processo em busca de causas assinaláveis.

O gráfico de controle associado ao teste T^2 é uma extensão dos gráficos de controle de Shewhart univariados. Uma de suas restrições é o fato de que quando o teste sinaliza uma rejeição de H_0 não se tem a informação imediata de quais médias são diferentes dos valores postulados em H_0 . Isso significa que, caso haja rejeição da hipótese nula, um estudo adicional é necessário para detectar qual ou quais as variáveis estão possivelmente sob interferência de causas assinaláveis. Muitos autores têm discutido formas de identificar as variáveis geradoras da rejeição de H_0 . Algumas técnicas sugeridas são: uso de p gráficos univariados para identificar a variável ou grupo de variáveis que têm média diferente do valor postulado em H_0 (Alt, 1985 ; Doganaksoy, Faltin e Tucker, et al. 1991), a utilização de componentes principais

(Souza e Rigão, 2005), a decomposição da estatística T^2 (Montgomery, 2004) e, mais recentemente o uso de estatísticas qui-quadrado através de um método chamado de *step-down* (Sullivan, et. al, 2007).

Na prática, são constantes as situações em que a matriz de covariâncias populacional não é conhecida e precisa ser estimada. Nesse caso, a estatística T^2 de Hotelling será dada por:

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.15)$$

em que $\bar{\mathbf{X}}$ e \mathbf{S} representam, respectivamente, o vetor de médias e a matriz de covariâncias amostrais, sendo \mathbf{S} , de dimensão $p \times p$, constituída pelos elementos s_{ii} que representam a variância amostral da variável aleatória i , e s_{ij} denota a covariância amostral entre as variáveis i e j , $i \neq j$, sendo $i, j = 1, 2, \dots, p$. Esses valores são calculados da seguinte forma:

$$s_{ii} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{ik} - \bar{X}_i)^2$$

$$s_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{ik} - \bar{X}_i)(X_{jk} - \bar{X}_j), \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, p$$

em que \bar{X}_i e \bar{X}_j são as médias amostrais das variáveis X_i e X_j , $i \neq j$.

Sob a hipótese nula, a estatística

$$F = \frac{n-p}{p(n-1)} T^2 \quad (2.16)$$

tem distribuição F de Fisher-Snedecor com $(p, n-p)$ graus de liberdade como é mostrado em Hotelling (1947). Portanto, para um nível de significância α , $0 < \alpha < 1$, rejeita-se a hipótese nula se o valor observado da estatística F for maior que o valor crítico $F_{(p,n-p),1-\alpha}$ obtido a partir da tabela da distribuição F, ou seja,

$$T^2 > \frac{p(n-1)}{n-p} F_{(p,n-p),1-\alpha} \quad (2.17)$$

Nessa situação, o limite superior de controle (LC) do gráfico T^2 será dado por $\frac{p(n-1)}{n-p} F_{(p,n-p),1-\alpha}$, sendo o limite inferior igual a zero.

Embora a estatística T^2 seja ótima para detectar grandes desvios no vetor de médias, o mesmo não ocorre para pequenos deslocamentos ou quando eles ocorrem em apenas um grupo dentre todas as variáveis analisadas (Kalgonda e Kulkarni, 2004).

2.3.2.1 Exemplo de Aplicação

Suponha que o vetor $\boldsymbol{\mu}_0$ e a matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$ e de correlação \mathbf{P} , associados às variáveis aleatórias X_1 e X_2 que representam, respectivamente, as medidas de comprimento e dureza de uma madeira utilizada em um processo de produção, sejam dados por (Hayter e Tsui, 1994):

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 265 \\ 470 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 10 & 6,6 \\ 6,6 & 12,1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

Suponha que uma amostra aleatória de $n = 10$ itens sejam gerados através do *software R 2.9.1* sob $H_1: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1 = (270 \ 470)^T$, resultando no vetor de médias e nas matrizes de covariâncias e correlação amostrais dados por:

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 269,369 \\ 469,389 \end{pmatrix}; \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 6,978 & 4,566 \\ 4,566 & 13,815 \end{pmatrix}; \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,465 \\ 0,465 & 1 \end{pmatrix}$$

Para a aplicação do teste T^2 , considere $\alpha = 0,05$. Supondo a matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_{p \times p}$ conhecida, a estatística T^2 será:

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

$$T^2 = 10 \times \begin{pmatrix} 269,369 - 265 \\ 469,389 - 470 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 10 & 6,6 \\ 6,6 & 12,1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 269,369 - 265 \\ 469,389 - 470 \end{pmatrix}$$

$$T^2 = 34,858$$

A constante que delimita a região de rejeição do teste é o percentil referente à probabilidade acumulada igual a $(1-\alpha)$ da distribuição qui-quadrado com $p = 2$ graus de liberdade, ou seja, $\chi^2_{2;0,95} = 5,992$. Portanto, como $T^2 > 5,992$, rejeita-se H_0 .

Suponha agora que a matriz de covariâncias Σ fosse desconhecida. O teste seria construído através da matriz de covariâncias amostral S . Nesse caso,

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

$$T^2 = 10 \times \begin{pmatrix} 269,452 - 265 \\ 469,634 - 470 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6,978 & 4,566 \\ 4,566 & 13,815 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 269,452 - 265 \\ 469,634 - 470 \end{pmatrix}$$

$$T^2 = 38,475$$

A constante que delimita a região de rejeição de H_0 seria dada por $\frac{p(n-1)}{n-p} F_{(p,n-p),1-\alpha}$, tal que $F_{(p,n-p),1-\alpha}$ é o percentil $(1-\alpha)$, $\alpha = 0,05$, da distribuição F com p e $(n-p)$ graus de liberdade. Como o valor $F_{(2,8);0,95} = 4,459$, então, $\frac{2(10-1)}{10-2} F_{(2,8);0,95} = 10,033$.

Portanto, rejeita-se a hipótese nula de que o vetor de médias é igual ao vetor postulado $\boldsymbol{\mu}_0$, sugerindo que algum fator não-aleatório esteja causando deslocamento na média de alguma, ou mesmo ambas as características de qualidade testadas.

2.3.3 Teste Hayter e Tsui com Amostragem Simples

Com a intenção de propor um novo teste para o controle estatístico do vetor de médias que mantivesse o erro global α no valor inicialmente especificado e permitisse a identificação e quantificação de variáveis responsáveis pela rejeição de H_0 , Hayter e Tsui (1994) introduziram um teste que proporciona um poder similar ao T^2 de Hotelling no caso de amostragem aleatória simples. O teste de Hayter e Tsui apresenta melhor comportamento que o T^2 em alguns casos e inferior em outros na detecção de alterações no vetor de médias.

Para descrever o procedimento proposto pelos autores, consideremos as características de qualidade dadas pelo vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$, tal que $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Considere ainda a matriz de correlação, $\mathbf{P}_{p,p}$, obtida a partir da matriz de covariâncias teórica $\Sigma_{p,p}$, em que os elementos da diagonal principal são iguais a um e os elementos fora da diagonal

principal os elementos são dados por $\rho_{ij} = \sigma_{ij} / \sigma_i \sigma_j$, $i \neq j$, e definem a correlação entre duas variáveis X_i e X_j , sendo $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{ii}}$ e $\sigma_j = \sqrt{\sigma_{jj}}$ respectivamente os desvios-padrão das variáveis X_i e X_j , $i \neq j$. Deseja-se testar a hipótese $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$, em que $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})^T$ é o vetor pré-estabelecido. Suponha que se tenha uma amostra aleatória de tamanho n do vetor \mathbf{X} . Seja $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)^T$ o vetor de médias amostral. Segundo Hayter e Tsui (1994), para cada média populacional μ_j , $j=1, 2, \dots, p$, os limites de confiança de $(1-\alpha)100\%$, $0 < \alpha < 1$, são obtidos de forma que:

$$P \left(\left| \frac{\bar{X}_j - \mu_{0j}}{\sigma_j / \sqrt{n}} \right| \leq C_{\mathbf{R},\alpha}, \forall j=1 \leq j \leq p \right) = 1 - \alpha \quad (2.18)$$

supondo que a matriz $\boldsymbol{\Sigma}_{p \times p}$ conhecida, onde α é o nível de significância do teste, $0 < \alpha < 1$. A escolha da constante $C_{\mathbf{R},\alpha}$ está associada à matriz de correlação teórica $\mathbf{P}_{p \times p}$, ou seja, a estrutura de correlação entre os elementos do vetor aleatório \mathbf{X} afeta os intervalos de confiança simultâneos através do ponto crítico $C_{\mathbf{R},\alpha}$. Sendo assim, a partir da equação (2.18), infere-se que o intervalo de confiança para a média populacional μ_j pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left(\bar{X}_j - \sigma_j C_{\mathbf{R},\alpha} / \sqrt{n} \ ; \ \bar{X}_j + \sigma_j C_{\mathbf{R},\alpha} / \sqrt{n} \right), \forall j=1, 2, \dots, p \quad (2.19)$$

Portanto, a hipótese nula H_0 não é rejeitada quando todos os intervalos construídos contiverem os correspondentes valores de μ_{0j} postulados em H_0 ou, equivalentemente, quando:

$$M = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{\bar{X}_j - \mu_{0j}}{\sigma_j / \sqrt{n}} \right| \leq C_{\mathbf{R},\alpha} \quad (2.38)$$

onde \bar{X}_j é a média amostral da variável X_j , $j=1, 2, \dots, p$.

Na construção do gráfico de controle para o vetor de médias, para cada amostra de tamanho n , a estatística M é plotada no gráfico. O limite superior de controle (LSC) é dado pelo ponto crítico $C_{R,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ e o limite inferior é igual a zero.

Nesse teste é possível identificar-se quais são as variáveis responsáveis pela rejeição de H_0 através do reconhecimento dos intervalos de confiança que não contiveram os valores de μ_{0j} , ou, equivalentemente, as características da qualidade que apresentarem valores médios amostrais padronizados em valor absoluto acima do limite crítico $C_{R,\alpha}$. Adicionalmente, o pesquisador pode detectar facilmente qual foi o deslocamento na média de cada variável monitorada, caso ocorra, via observação dos intervalos de confiança construídos.

Para o caso bivariado e em situações em que $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ são conhecidos, a constante crítica $C_{R,\alpha}$ pode ser obtida por tabelas construídas por Bechhofer e Dunnett, 1988. No entanto, em outras situações em que $p > 2$, não há tabelas que forneçam os valores da distribuição da estatística M devido a sua complexidade. Nesses casos, é necessária a utilização de recursos computacionais para obtenção de constante $C_{R,\alpha}$, sendo esta obtida via simulação. No Quadro 1 apresenta-se o algoritmo proposto por Hayter e Tsui (1994) para obtenção de $C_{R,\alpha}$.

Quadro 1: Algoritmo de Hayter e Tsui para obtenção de $C_{R,\alpha}$ sob a suposição de distribuição normal p -variada.

- (1) Gerar um grande número N de vetores de uma distribuição normal p -variada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias $P_{p \times p}$, denotados por:

$$Z^i = (Z_1^i, Z_2^i, \dots, Z_p^i), i = 1, \dots, N$$

- (2) Calcular a estatística M^i para cada um dos vetores gerados, dada por:

$$M^i = \max_{1 \leq j \leq p} |Z_j^i|, \forall i = 1, \dots, N$$

- (3) Encontrar a ordenada correspondente ao $(1 - \alpha)$ é-simo percentil da amostra $\{M^1, \dots, M^N\}$ e utilizá-lo como estimativa para o ponto crítico $C_{R,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Quando a matriz $\boldsymbol{\Sigma}_{p \times p}$ é desconhecida, o desvio-padrão Σ_j é estimado pelo desvio-padrão amostral s_j , $j = 1, 2, \dots, p$, e a estatística M é dada por:

$$M = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{\bar{X}_j - \mu_{0j}}{s_j / \sqrt{n}} \right| \quad (2.21)$$

Nesse caso, o valor de $C_{R,\alpha}$ é obtido pelo mesmo procedimento descrito no Quadro 1 utilizando-se a matriz de correlação amostral $\mathbf{R}_{p \times p}$ no lugar da matriz teórica $\mathbf{P}_{p \times p}$.

Quando se tem uma amostra grande é possível obter-se o valor de $C_{R,\alpha}$ através da construção da distribuição empírica da estatística M a partir dos próprios n valores amostrais do vetor \mathbf{X} . Esse método chamado de não-paramétrico por Hayter e Tsui (1994) está apresentado no Quadro 2. Alguns estudos sobre o procedimento para determinação da constante $C_{R,\alpha}$ são apresentados em Mingoti e Glória (2005; 2006).

Quadro 2: Algoritmo de Hayter e Tsui para estimação não-paramétrica de $C_{R,\alpha}$.

- (1) Calcular o vetor de médias amostral \bar{X} e a matriz de covariâncias amostral S a partir da amostra de tamanho n ;
- (2) Calcular a estatística M^i para cada um dos vetores amostrais, isto é,

$$M^i = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{s_j} \right|, \forall i = 1, \dots, n,$$

sendo X_{ij} , \bar{X}_j e s_j respectivamente, a i -ésima observação amostral de X_j , a média e variância amostrais da j -ésima variável;

- (3) Encontrar a ordenada correspondente ao $(1 - \alpha)$ -ésimo percentil da amostra $\{M^1, \dots, M^N\}$ e utilizá-lo como estimativa para o ponto crítico $C_{R,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Na Seção 2.3.5.1 apresenta-se um exemplo de aplicação do algoritmo de Hayter e Tsui em amostragem aleatória simples para o caso em que a matriz de covariâncias teórica Σ é conhecida.

Esses autores mostraram no artigo original por meio de simulação que o teste baseado na estatística M não é uniformemente mais poderoso que o teste T^2 de Hotelling e vice-versa, utilizando-se diferentes combinações de desvios no vetor de médias (Hayter e Tsui, 1994).

2.3.3.1 Exemplo de Aplicação

Considere os dados apresentados no Exemplo 2.3.2.1 (página 19) em que as variáveis X_1 e X_2 representam, respectivamente as medidas de comprimento e dureza da uma madeira utilizada em um processo de produção (Hayter e Tsui, 1994):

Considerando um nível de significância fixo $\alpha = 0,05$, o ponto crítico encontrado por Hayter e Tsui foi $C_{R,\alpha} = 2,199$, de acordo com o algoritmo do Quadro 1 (página 22) utilizando $N = 100\ 000$. Para a aplicação do teste, considere a amostra de $n = 10$ gerada sob a hipótese alternativa, de acordo com os dados do exemplo citado:

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 269,369 \\ 469,389 \end{pmatrix}; \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 6,978 & 4,566 \\ 4,566 & 13,815 \end{pmatrix}; \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,465 \\ 0,465 & 1 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, supondo a matriz de covariâncias $\Sigma_{p \times p}$ conhecida, a estatística M será:

$$M = \max \left\{ \left| \frac{269,369 - 265}{\sqrt{10} / \sqrt{10}} \right|, \left| \frac{469,389 - 470}{\sqrt{12,1} / \sqrt{10}} \right| \right\}$$

$$M = \max \{ 4,369 ; 0,555 \}$$

$$M = 4,369$$

Portanto, como $M > C_{R,\alpha} = 2,199$, rejeita-se a hipótese nula de que o vetor de médias é igual ao vetor postulado $\boldsymbol{\mu}_0$, sendo possível perceber que a rejeição se deu devido à variável X_1 .

Se a matriz $\Sigma_{p \times p}$ é desconhecida, a estatística M pode ser calculada com base na matriz de covariâncias amostral \mathbf{S} sendo a constante $C_{R,\alpha}$ obtida usando o procedimento descrito no Quadro 1 substituindo-se a matriz de correlação teórica \mathbf{P} pela matriz de correlação amostral \mathbf{R} . Neste caso o novo valor de $C_{R,\alpha}$ será igual a 2,149 utilizando-se $N = 100\ 000$. Sendo assim, o valor da estatística de teste M dada por:

$$M = \max \left\{ \left| \frac{269,369 - 265}{\sqrt{6,978} / \sqrt{10}} \right|, \left| \frac{469,389 - 470}{\sqrt{13,815} / \sqrt{10}} \right| \right\}$$

$$M = \max \{ | 5,230 | ; | 0,520 | \}$$

$$M = 5,230$$

Logo, como $M > C_{R,\alpha} = 2,149$, rejeita-se a hipótese nula. Em ambos os casos, com a matriz Σ conhecida ou não, conclui-se que a primeira variável foi a responsável pela rejeição de H_0 . É importante notar que essa identificação não foi possível diretamente no teste T^2 de Hotelling visto no Exemplo 2.3.2.1 (página 19).

Adicionalmente, os intervalos de confiança para a verdadeira média de cada variável serão dados por:

Caso 1: Σ conhecida

$$\left(269,369 - \frac{\sqrt{10} \times 2,199}{\sqrt{10}} ; 269,369 + \frac{\sqrt{10} \times 2,199}{\sqrt{10}} \right) = (267,170 ; 271,568)$$

$$\left(469,389 - \frac{\sqrt{12,1} \times 2,199}{\sqrt{10}} ; 469,389 + \frac{\sqrt{12,1} \times 2,199}{\sqrt{10}} \right) = (466,970 ; 471,808)$$

Caso 2: Para Σ desconhecida

$$\left(269,369 - \frac{\sqrt{6,978} \times 2,149}{\sqrt{10}} ; 269,369 + \frac{\sqrt{6,978} \times 2,149}{\sqrt{10}} \right) = (267,574 ; 271,164)$$

$$\left(469,389 - \frac{\sqrt{13,815} \times 2,149}{\sqrt{10}} ; 469,389 + \frac{\sqrt{13,815} \times 2,149}{\sqrt{10}} \right) = (466,863 ; 471,915)$$

Além disso, em ambos os casos, pode-se ter que uma estimativa do deslocamento ocorrido na primeira componente do vetor de médias é $\bar{X}_1 - \mu_{01} = 269,369 - 265 = 4,369$.

Embora o teste de Hayter e Tsui não seja mais poderoso do que o teste T^2 de Hotelling em todas as situações, a utilização da estatística M apresenta maior praticidade operacional por permitir ao pesquisador a identificação das características de qualidade afetadas por possíveis causas assinaláveis.

Algumas referências adicionais sobre o teste Hayter e Tsui (1994) são Rocon (2005), Glória (2006) e Colenghi (2008).

2.3.4 Amostragem Dupla

O uso do plano de amostragem dupla em gráficos de controle para a média foi proposto por Daudin (1992). Sua utilização visa à redução do número de itens a serem coletados e analisados durante a inspeção do processo e envolve duas etapas de decisão. Suponha que se tenha uma amostra aleatória de tamanho n constituída de duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2 , respectivamente, sendo $n = n_1 + n_2$. A estratégia de execução baseia-se em analisar inicialmente, a amostra aleatória de tamanho n_1 do processo e calcular a estatística de teste. Se a informação obtida através desses n_1 itens não permitir tirar qualquer conclusão sobre o estado processo em termos da rejeição ou não de H_0 , o procedimento de decisão vai para a segunda fase em que os n_2 itens referentes à segunda amostra são inspecionados e a estatística de teste é recalculada, considerando-se a amostra conjunta de $n = n_1 + n_2$ itens. Nessa fase, rejeita-se a hipótese nula se o valor observado da estatística de teste for maior que o limite crítico associado ao teste dessa etapa.

2.3.5 Teste T^2 de Hotelling com Amostragem Dupla: Caso de Matriz de Covariâncias Conhecida

Suponha que o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ tenha distribuição normal multivariada com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$, sendo $\boldsymbol{\Sigma}$ conhecida. Com o intuito de aumentar o poder do teste T^2 , Costa e Machado (2008) propuseram a aplicação do teste T^2 de Hotelling com a utilização de amostragem dupla para testar a hipótese nula $H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ versus a hipótese alternativa $H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$.

No caso do teste T^2 de Hotelling, denotemos os limites da primeira fase de inspeção por w e CL_1 e a estatística de teste associada a essa etapa de T_1^2 , que representa a estatística T^2 de Hotelling calculada com base apenas na amostra aleatória de tamanho n_1 , ou seja:

$$T_1^2 = n_1 (\bar{\mathbf{X}}_{n_1} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_{n_1} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.22)$$

sendo $\bar{\mathbf{X}}_{n_1}$ o vetor de médias amostral da amostra de tamanho n_1 . A hipótese nula será rejeitada se $T_1^2 > CL_1$, sendo CL_1 o valor tal que $P(T_1^2 > CL_1) = \alpha_1$, $0 < \alpha_1 < 1$, sendo essa

probabilidade calculada sob H_0 . Em contrapartida, não se rejeitará H_0 se $T_1^2 \leq w$, sendo w o valor tal que $P(T_1^2 \leq w) = \alpha^*$, $0 < \alpha^* < 1$, probabilidade também calculada sob H_0 . A probabilidade α^* associada a esse último evento representa a probabilidade de que o processo de decisão sobre H_0 termine na primeira etapa de inspeção. O processo de decisão vai para a segunda etapa de inspeção se $w < T_1^2 \leq CL_1$. Esse evento tem uma probabilidade igual a $1 - \alpha_1 - \alpha^*$. Assim, denotemos por p_0 a probabilidade de que o processo de decisão sobre H_0 não se estenda para a segunda etapa de inspeção, sendo interrompido pela rejeição ou não da hipótese nula, isto é,

$$p_0 = \alpha_1 + \alpha^* \quad (2.23)$$

Sob a hipótese nula T_1^2 tem distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade. Assim, os limites críticos, w e CL_1 podem ser obtidos diretamente da distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade, ou, alternativamente, relacionando-os à distribuição normal bivariada como foi proposto por Costa e Machado (2008) e determinados através de integração numérica para $p = 2$. Assim, no momento em que (p_0, α_1) estão especificados, automaticamente tem-se os valores de w e CL_1 . Por exemplo, usando a distribuição qui-quadrado com $p = 2$ graus de liberdade, basta buscar os valores tais que:

$$P(\chi_2^2 \leq w | H_0) = \alpha^* \quad (2.24)$$

$$P(\chi_2^2 \leq CL_1 | H_0) = 1 - \alpha_1 \quad (2.25)$$

Quando o processo de decisão vai para a segunda etapa, as restantes n_2 observações amostrais são inspecionadas e a estatística de teste T^2 é então recalculada, obtida com base na amostra total de tamanho $n = n_1 + n_2$, isto é:

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.26)$$

em que $\bar{\mathbf{X}}_n$ representa o vetor de médias amostral da amostra conjunta de tamanho $n_1 + n_2 = n$. Desse modo, o procedimento de amostragem envolve cinco parâmetros previamente definidos: dois tamanhos de amostra n_1 e n_2 e três limites críticos, sendo dois deles associados

à primeira etapa e o outro à segunda etapa de inspeção. Um diagrama do procedimento é apresentado na Figura 6.

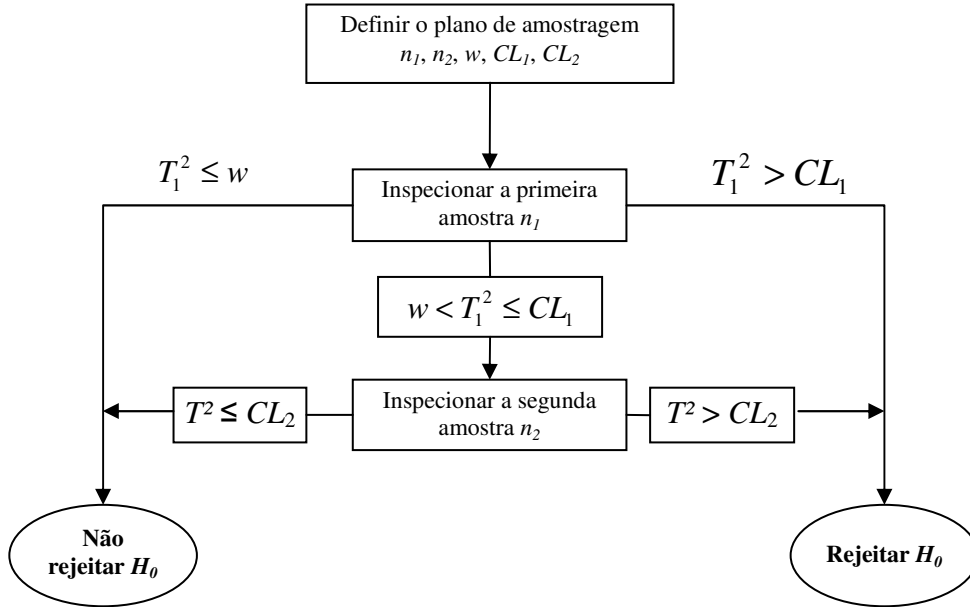


Figura 6: Plano de Inspeção em Amostragem Dupla para o teste T^2 de Hotelling.

Em Costa e Machado (2008) a distribuição da estatística de teste T^2 relacionada ao segundo estágio da amostragem dupla foi obtida para $p = 2$, a partir da decomposição da estatística T^2 como uma combinação linear de duas variáveis aleatórias normais ortogonais em que se define $T^2 = n(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) = g_1^2(n, \boldsymbol{\mu}) + g_2^2(n, \boldsymbol{\mu})$, onde:

$$g_1(n, \boldsymbol{\mu}) = h_1(\bar{\mathbf{x}}) \cos \varphi - h_2(\bar{\mathbf{y}}) \sin \varphi, \quad (2.27)$$

$$g_2(n, \boldsymbol{\mu}) = -h_1(\bar{\mathbf{x}}) \sin \varphi + h_2(\bar{\mathbf{y}}) \cos \varphi, \quad (2.28)$$

em que, de acordo com a notação definida em Costa e Machado (2008), $\bar{\mathbf{X}}_n^T = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, $h_1(\bar{\mathbf{x}}) = \sqrt{n} \sigma_y (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_x) / \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}$, $h_2(\bar{\mathbf{y}}) = \sqrt{n} \sigma_x (\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_y) / \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}$, $\sin 2\varphi = \sigma_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$ e $|\boldsymbol{\Sigma}| = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 > 0$. A notação adotada por Costa e Machado (2008) foi tal que a primeira e segunda variáveis analisadas no item sob inspeção, denotadas neste texto de dissertação por X_1 e X_2 , respectivamente, foram chamadas simplesmente X e Y . Esses autores demonstraram

ainda que $g(n, \boldsymbol{\mu}) = [g_1(n, \boldsymbol{\mu}), g_2(n, \boldsymbol{\mu})]^T$ tem distribuição normal bivariada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias identidade $\boldsymbol{\Sigma}_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A decomposição da estatística T^2 para o caso de amostragem dupla não está apresentada no artigo de Costa e Machado (2008) e é mostrada nesta dissertação em detalhes no Apêndice A.

Para obtenção dos limites de controle w , CL_1 e CL_2 , Costa e Machado (2008) utilizaram integração com coordenadas polares. Para compreender o procedimento, considere um disco centrado na origem de raio a . Então $(x, y) \in D(0, a)$ se, e somente se, a estatística $T^2 < a^2$. Neste caso tem-se que:

$$P(T^2 < a^2) = \iint_{D(0, a)} f_{N(0, \boldsymbol{\Sigma})}(x, y) dy dx = 1 - \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right), \quad (2.29)$$

onde $f_{N(0, \boldsymbol{\Sigma})}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp[-0,5(x^2 + y^2)]$, que representa a função de densidade da distribuição normal bivariada em que as variáveis associadas x e y são independentes.

Consideremos então, o $D_1(0, a)$ e $D_2(0, a)$ as regiões de integração em coordenadas polares associadas, respectivamente, à primeira e segunda etapas do processo de inspeção. A probabilidade de que o procedimento de amostragem dupla termine na primeira etapa de inspeção é a probabilidade de que se rejeite ou não a hipótese nula na primeira fase, ou seja, a probabilidade complementar de que a estatística de teste associada a essa etapa esteja entre os limites críticos ($w < T_1^2 \leq CL_1$), ou seja:

$$p_0 = 1 - P(w < T_1^2 \leq CL_1) = 1 - \{P[(x, y) \in D_1(0, CL_1)] - P[(x, y) \in D_1(0, w)]\} \quad (2.30)$$

Fazendo correspondência com o resultado apresentado na equação (2.29), obtém-se que:

$$p_0 = 1 - \left[\exp\left(-\frac{w}{2}\right) - \exp\left(-\frac{CL_1}{2}\right) \right] \quad (2.31)$$

O valor médio do tamanho de amostra n para se tomar uma decisão sobre H_0 é dado por \bar{n} definido como:

$$\bar{n} = n_1 + n_2(1 - p_0) \quad (2.32)$$

No caso específico do teste T^2 de Hotelling, \bar{n} será expresso por:

$$\bar{n} = n_1 + n_2 \left[\exp\left(-\frac{w}{2}\right) - \exp\left(-\frac{CL_1}{2}\right) \right] \quad (2.33)$$

Além disso, as probabilidades dos erros tipo I associados a primeira e segunda fases do processo de inspeção dupla são apresentados em Costa e Machado (2008), respectivamente por:

$$\alpha_1 = \iint_{\notin D_1(0, CL_1)} \iint_{\notin D_2(C, R)} f_{N(0, \Sigma)}(x, y) dx dy \quad (2.34)$$

$$\alpha_2 = \iint_{\in D_1(\sqrt{w}, \sqrt{CL_1})} f_{N(0, \Sigma)}(x, y) \left[\iint_{\notin D_2(C, R)} f_{N(0, \Sigma)}(x, y) du dv \right] dx dy \quad (2.35)$$

tal que $C = \left(-x\sqrt{n_1/n_2}; -y\sqrt{n_1/n_2}\right)$ e $R = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)}{n_2} CL_2}$, sendo α_2 , $0 < \alpha_2 < 1$, pré-especificado e tal que $P(T^2 > CL_2 | H_0) = \alpha_2$.

No exemplo apresentado no artigo de Costa e Machado (2008) assim como nas decisões sobre a qualidade do teste proposto, a integral múltipla (2.35) foi resolvida para $p=2$ através de integração numérica, segundo os autores, utilizando a sub-rotina DT2ODQ disponível na biblioteca IMSL na biblioteca do *software* FORTRAN e o valor da constante crítica CL_2 determinado.

Nesta dissertação pretende-se tornar o teste T^2 proposto por Costa e Machado (2008) sob o procedimento de amostragem dupla mais aplicável para situações em que se tem, inclusive, $p > 2$ e matriz de covariâncias Σ desconhecida. Desse modo, optou-se por determinar as constantes w e CL_1 utilizando-se a distribuição qui-quadrado correspondente e a constante crítica CL_2 através de simulações. Os detalhes são apresentados no Capítulo 3.

2.3.5.1 Exemplo de Aplicação

Considere duas características correlacionadas, força de resistência (Psi) e diâmetro ($\times 10^{-2}$ polegadas) de uma fibra têxtil (Montgomery, 2004). Seja H_0 dada por:

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 115,59 \\ 1,06 \end{pmatrix}, \text{ sendo } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{pmatrix}$$

e a correlação entre as duas variáveis igual a 0,782.

Foram geradas, no *software R 2.9.1*, $m = 5$ amostras aleatórias, de tamanho $n = 20$, sendo $n_1 = n_2 = 10$, de uma distribuição normal bivariada utilizando os parâmetros $\boldsymbol{\mu}_0$ e $\boldsymbol{\Sigma}$. Após fixar, as probabilidades do erro tipo I associados à primeira e segunda etapas da amostragem dupla, respectivamente por $\alpha_1 = 0,01$ e $\alpha_2 = 0,04$, que manterão uma taxa de erro global do processo $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,05$ e a probabilidade de não ter que ir para a segunda fase de inspeção como $p_0 = 0,60$, os valores dos limites de não-rejeição e de rejeição de H_0 , w e CL_1 , foram obtidos diretamente do percentil da distribuição qui-quadrado com $p = 2$ graus de liberdade, isto é, através das equações:

$$P(\chi_2^2 \leq w | H_0) = \alpha^* = p_0 - \alpha_1 = 0,6 - 0,01 = 0,59$$

$$P(\chi_2^2 \leq CL_1 | H_0) = 1 - \alpha_1 = 1 - 0,01 = 0,99$$

Sendo assim, $w = 1,783$ e $CL_1 = 9,210$. Através de um procedimento de simulação que será melhor detalhado na Seção 3.1 (página 41), obteve-se que o valor da constante de rejeição igual a $CL_2 = 5,894$.

Dessa forma, é possível decidir se o procedimento de decisão termina na primeira fase de inspeção ou se prossegue para a segunda etapa sendo necessária a avaliação da segunda amostra e, então, concluir sobre a hipótese H_0 de controle estatístico do processo. Os resultados amostrais e as respectivas conclusões estão apresentados na Tabela 1. As linhas constituem cada uma das 10 observações de cada uma das $m = 5$ amostras geradas, que, por sua vez, estão distribuídas nas colunas da tabela.

Tabela 1: Exemplo de aplicação do teste T^2 de Hotelling em Amostragem Dupla.

Observação Amostral	Variável	Amostra									
		1		2		3		4		5	
		Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2
1	x	116,427	115,390	114,504	-	114,342	-	114,837	-	116,481	113,911
	y	1,185	1,069	0,379	-	0,853	-	-0,239	-	1,308	0,351
2	x	114,923	114,470	114,256	-	117,072	-	116,423	-	113,904	116,242
	y	0,186	0,407	0,839	-	2,379	-	1,529	-	0,464	2,720
3	x	116,057	115,998	116,055	-	116,511	-	115,618	-	115,533	114,492
	y	0,432	0,867	1,838	-	1,361	-	1,876	-	1,641	-1,023
4	x	115,958	114,300	115,423	-	116,136	-	117,306	-	117,236	116,075
	y	0,431	0,485	0,947	-	1,299	-	2,379	-	2,068	1,609
5	x	115,468	116,163	117,783	-	115,510	-	114,990	-	114,859	116,033
	y	1,081	1,732	1,434	-	-0,279	-	0,932	-	0,986	1,716
6	x	116,348	115,666	115,211	-	112,707	-	116,245	-	114,423	117,661
	y	1,201	1,124	0,378	-	-0,082	-	1,471	-	-0,024	1,948
7	x	115,654	115,430	114,906	-	116,420	-	115,174	-	115,129	115,026
	y	1,136	0,856	0,718	-	1,700	-	1,274	-	2,103	1,487
8	x	113,894	113,740	116,224	-	115,256	-	115,176	-	116,325	115,561
	y	0,307	-0,087	1,748	-	0,145	-	0,390	-	2,076	1,348
9	x	113,538	113,947	115,708	-	115,037	-	116,632	-	116,388	114,304
	y	-0,966	0,557	0,617	-	0,864	-	1,031	-	1,169	0,577
10	x	116,031	114,713	116,193	-	116,556	-	116,908	-	114,965	114,473
	y	1,824	0,745	1,224	-	1,986	-	3,139	-	1,629	1,222
Estatística	T_1^2	2,559 (2)		0,167 (1)		0,017 (1)		1,250 (1)		3,292 (2)	
	T^2	2,845		-		-		-		5,819	

Limites Críticos: $w = 1,783$; $CL_1 = 9,210$; $CL_2 = 5,894$.

(1) O processo de amostragem é interrompido;

(2) A amostragem vai para a segunda fase de inspeção.

Das 5 amostras inspecionadas, 2 delas, a primeira e a última, retornaram estatísticas no intervalo $1,783 < T_1^2 \leq 9,210$. Sendo assim, o procedimento de decisão foi para a segunda fase de inspeção. Nessa etapa, nenhuma das duas estatísticas T^2 foi maior do que o limite crítico CL_2 e, portanto, não se rejeitou a hipótese nula de que o vetor de médias populacional era igual a μ_0 , ou, ainda que o processo estivesse sob controle estatístico.

2.3.6 Teste T^2 de Hotelling com Amostragem Dupla: Caso de Matriz de Covariâncias Desconhecida

Em Costa e Machado (2008) apenas o caso em que Σ é conhecida e $p = 2$ foi tratado. No entanto, existem situações em que não se conhece a matriz de covariâncias teórica Σ do processo, e então é necessário estimá-la através da matriz de covariâncias amostral S , cujos elementos foram definidos na Seção 2.3.2, página 16. O processo de decisão sobre H_0 é análogo ao da Seção 2.3.5, que aborda a situação em que a matriz de covariâncias Σ é

conhecida, mas é preciso realizar alguns ajustes na estimação dos parâmetros da distribuição da estatística de teste.

Nesse caso, durante a primeira etapa de inspeção obtém-se $\bar{\mathbf{X}}_{n_1}$ e \mathbf{S}_{n_1} , que representam, respectivamente, o vetor de médias e a matriz de covariâncias amostrais calculados a partir dos n_1 itens da amostra aleatória de tamanho n_1 coletada do processo e a estatística T_1^2 é tal que:

$$T_1^2 = n_1 (\bar{\mathbf{X}}_{n_1} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{S}_{n_1}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_{n_1} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.36)$$

Assim, os limites críticos associados à primeira etapa do procedimento de decisão sobre H_0 , w e CL_1 , podem ser obtidos através da distribuição F, tal que:

$$P \left[\frac{p(n_1 - 1)}{n_1 - p} F_{(p, n_1 - p), \alpha^*} \leq w \mid H_0 \right] = \alpha^* \quad (2.37)$$

$$P \left[\frac{p(n_1 - 1)}{n_1 - p} F_{(p, n_1 - p), 1 - \alpha_1} \leq CL_1 \mid H_0 \right] = 1 - \alpha_1 \quad (2.38)$$

em que α^* é a probabilidade de não rejeitar a hipótese nula H_0 e α_1 é a probabilidade de se concluir erroneamente que o processo está fora de controle (erro tipo I) na primeira etapa de inspeção.

Se $w < T_1^2 \leq CL_1$, a decisão sobre H_0 vai para a segunda fase de inspeção. O vetor de médias e a matriz de covariâncias amostral são então recalculados com base na amostra conjunta de tamanho $n = n_1 + n_2$ e denotados, respectivamente por $\bar{\mathbf{X}}_n$ e \mathbf{S}_n . A estatística de teste associada à segunda fase T^2 é então dada por:

$$T^2 = n (\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{S}_n^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.39)$$

Finalmente, não se rejeita a hipótese nula se $T^2 \leq CL_2$ e conclui-se que o processo está sob controle. Caso contrário, rejeita-se H_0 e procura-se identificar as possíveis perturbações que podem ter ocorrido nos parâmetros do processo.

Estimar a matriz de covariâncias em amostragem dupla nem sempre é uma boa alternativa, pois, em geral, as amostras são pequenas e a estimativa de \mathbf{S} não é tão confiável

caso não seja possível utilizar amostras de tamanhos maiores. O ideal é que se realize um estudo prévio para estimação dos parâmetros associados às variáveis sob controle antes de se realizar o monitoramento propriamente dito, como discutido na Seção 2.2.

A extensão do teste T^2 de Hotelling para o caso em que Σ é desconhecida é um dos produtos desta dissertação. O detalhamento da determinação do limite crítico CL_2 associado à segunda fase de inspeção do processo sob o procedimento de amostragem dupla e seu respectivo algoritmo é apresentado na Seção 3.2, página 46.

2.3.7 Teste Hayter e Tsui com Amostragem Dupla: Caso de Matriz de Covariâncias Conhecida

A adaptação do teste do vetor de médias Hayter e Tsui (1994) em amostragem dupla é uma das propostas desta dissertação e é apresentada nesta Seção.

Para descrição do procedimento, considere um processo em que as matrizes de covariâncias e correlação teóricas $\Sigma_{p \times p}$ e $\mathbf{P}_{p \times p}$ sejam conhecidas, assim como o valor postulado do vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})^T$. Sejam duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2 , tal que a amostra conjunta tenha tamanho $n = n_1 + n_2$. No processo de decisão de amostragem dupla, primeiramente se observa a amostra aleatória de tamanho n_1 . Para padronizar a notação empregada, consideremos $\bar{\mathbf{X}}_1 = (\bar{X}_{11}, \bar{X}_{12}, \dots, \bar{X}_{1p})^T$ como sendo o vetor de médias obtido nessa etapa de inspeção. O primeiro índice subscrito de cada componente do vetor de médias representa o estágio de inspeção de amostragem e o segundo refere-se a cada uma das j variáveis monitoradas, $j = 1, 2, \dots, p$. Dessa forma, na aplicação do teste que está sendo proposto neste dissertação assume-se que o vetor $\bar{\mathbf{X}}_1$ é proveniente de uma população com distribuição normal p -variada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^T$ e matriz de covariâncias Σ/n_1 . Consideremos a estatística M_1 associada à primeira etapa do processo de inspeção. Então:

$$M_1 = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{\bar{X}_{1j} - \mu_{0j}}{\sigma_j / \sqrt{n_1}} \right|, \quad \forall j = 1, 2, \dots, p \quad (2.40)$$

onde $\sigma_j = \sqrt{\sigma_{jj}}$ é o desvio-padrão da variável X_j , $j = 1, 2, \dots, p$.

Analogamente ao teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla, a adaptação para o teste de Hayter e Tsui (1994) será tal que a hipótese nula H_0 não é rejeitada se $M_I \leq w$. Por outro lado, rejeita-se H_0 se $M_I > CL_I$, sendo w e CL_I determinados sob H_0 na primeira fase de inspeção.

Entretanto, se na primeira etapa de inspeção a informação contida na primeira amostra não permitir concluir sobre a rejeição ou não da hipótese nula, a inspeção parte para a segunda fase e as n_2 observações restantes são analisadas constituindo uma amostra conjunta $n = n_1 + n_2$. Denotemos então por $\bar{\mathbf{X}}_2$ o vetor aleatório correspondente ao vetor de médias associado à amostra de tamanho n_2 , tal que $\bar{\mathbf{X}}_2 = (\bar{X}_{21}, \bar{X}_{22}, \dots, \bar{X}_{2p})^T$. Dessa forma, o vetor de médias correspondente à segunda etapa do procedimento de amostragem dupla é dado por $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)^T$ e pode ser reescrito como:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{n_1 \bar{\mathbf{X}}_1 + n_2 \bar{\mathbf{X}}_2}{n_1 + n_2} \quad (2.41)$$

A estatística de teste M associada a essa fase do processo, baseada na amostra de tamanho n será:

$$M = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{\bar{X}_j - \mu_{0j}}{\sigma_j / \sqrt{n}} \right|, \quad \forall j = 1, 2, \dots, p \quad (2.42)$$

onde \bar{X}_j é a média amostral da variável j calculada com base nas n observações amostrais, $j = 1, 2, \dots, p$.

Finalmente, a hipótese nula H_0 não será rejeitada se $M \leq CL_2$, e então, conclui-se que o processo está sob controle estatístico. Caso contrário, rejeita-se H_0 e identificam-se as possíveis variáveis causadoras da rejeição de H_0 .

A descrição do procedimento de aplicação do teste de Hayter e Tsui sob amostragem dupla é apresentada no diagrama da Figura 7.

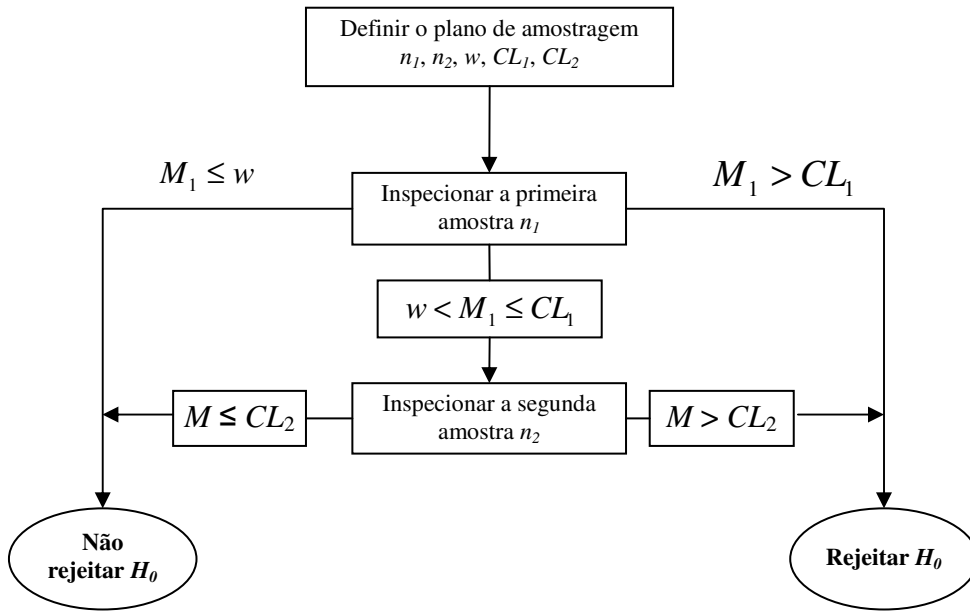


Figura 7: Plano de Inspeção em Amostragem Dupla para o teste Hayter e Tsui

Para obtenção dos limites críticos, consideremos a Proposição 1.

Proposição 1: A distribuição condicional de $(\bar{\mathbf{X}} | \bar{\mathbf{X}}_1)$ é normal p -variada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}_1} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}_1\bar{\mathbf{X}}_1}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_1 - \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}_1})$ e matriz de covariâncias $\frac{n_2}{n} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}}$.

Notação: $(\bar{\mathbf{X}} | \bar{\mathbf{X}}_1) \sim N_p \left(\boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}_1} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}_1\bar{\mathbf{X}}_1}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_1 - \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}_1}); \frac{n_2}{n} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}} \right)$.

Demonstração. O vetor de médias da amostra conjunta $\bar{\mathbf{X}}$ será dado por:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{n_1 \bar{\mathbf{X}}_1 + n_2 \bar{\mathbf{X}}_2}{n_1 + n_2}$$

Considere então o vetor aleatório $\mathbf{Y} = (\bar{\mathbf{X}} \quad \bar{\mathbf{X}}_1)^T$. Sua matriz de covariâncias é dada por:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}_1} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}_1\bar{\mathbf{X}}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}_1\bar{\mathbf{X}}_1} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

tal que $\Sigma_{\bar{X}\bar{X}} = \frac{\Sigma}{n}$ e $\Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}_1} = \frac{\Sigma}{n_1}$ são, respectivamente, as matrizes de covariâncias do vetor de médias global (da amostra conjunta) e o associado somente à primeira amostra de tamanho n_1 .

Além disso, $\Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}} = \Sigma_{\bar{X}\bar{X}_1} = \text{cov}(\bar{X}, \bar{X}_1) = \text{cov}\left(\frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n}, \bar{X}_1\right)$ e, então

$$\Sigma_{\bar{X}\bar{X}_1} = \frac{n_1}{n} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}_1} + \frac{n_2}{n} \text{cov}(\bar{X}_2, \bar{X}_1) \quad (2.44)$$

mas $\text{cov}(\bar{X}_2, \bar{X}_1) = 0$, uma vez que as duas amostras são independentes. Então,

$$\Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}} = \Sigma_{\bar{X}\bar{X}_1} = \text{cov}(\bar{X}, \bar{X}_1) = \frac{n_1}{n} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}_1} = \frac{n_1}{n} \frac{\Sigma}{n_1} = \frac{\Sigma}{n} = \Sigma_{\bar{X}\bar{X}} \quad (2.45)$$

Dessa forma, utilizando-se o Teorema para a distribuição condicional da normal multivariada pode-se mostrar que $(\bar{X} | \bar{X}_1)$ tem distribuição normal p -variada com média $\mu_{\bar{X}} + \Sigma_{\bar{X}\bar{X}_1} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}_1}^{-1} (\bar{X}_1 - \mu_{\bar{X}_1})$ e matriz de covariâncias $\Sigma_{\bar{X}\bar{X}} - \Sigma_{\bar{X}\bar{X}_1} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}_1}^{-1} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}}$ (Johnson e Wichern, 2002).

Assim, pode-se escrever a matriz de covariâncias da distribuição de $(\bar{X} | \bar{X}_1)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\bar{X}\bar{X}} - \Sigma_{\bar{X}\bar{X}_1} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}_1}^{-1} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}} &= \Sigma_{\bar{X}\bar{X}} - \frac{n_1}{n} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}_1} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}_1}^{-1} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}} \\ &= \Sigma_{\bar{X}\bar{X}} - \frac{n_1}{n} \mathbf{I}_{p \times p} \frac{n_1}{n} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}} = \Sigma_{\bar{X}\bar{X}} - \frac{n_1}{n} \Sigma_{\bar{X}\bar{X}} \\ &= \frac{(n - n_1)}{n} \Sigma_{\bar{X}\bar{X}} \\ &= \frac{n_2}{n} \Sigma_{\bar{X}\bar{X}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\bar{X} | \bar{X}_1) \sim N_p\left(\mu_{\bar{X}} + \Sigma_{\bar{X}\bar{X}_1} \Sigma_{\bar{X}_1\bar{X}_1}^{-1} (\bar{X}_1 - \mu_{\bar{X}_1}), \frac{n_2}{n} \Sigma_{\bar{X}\bar{X}}\right)$$

sendo a matriz de correlação de $(\bar{\mathbf{X}} | \bar{\mathbf{X}}_1)$ dada por:

$$\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}|\bar{\mathbf{X}}_1} = \frac{n_2}{n} \begin{bmatrix} \sigma_{11}/n & \sigma_{12}/n & \cdots & \sigma_{1p}/n \\ & \sigma_{22}/n & \cdots & \sigma_{2p}/n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_{pp}/n \end{bmatrix}$$

Dessa forma, a partir da Proposição 1 pode-se inferir ainda que:

$$corr_{i \neq j}(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = \frac{\left(\frac{\sigma_{ij}}{n}\right)\left(\frac{n_2}{n}\right)}{\left(\frac{\sigma_{ii}}{n} \frac{n_2}{n}\right)^{1/2} \left(\frac{\sigma_{jj}}{n} \frac{n_2}{n}\right)^{1/2}} = \frac{\left(\frac{\sigma_{ij}}{n}\right)\left(\frac{n_2}{n}\right)}{\left(\frac{n_2}{n}\right)\left(\frac{\sigma_{ii}}{n}\right)^{1/2} \left(\frac{\sigma_{jj}}{n}\right)^{1/2}} = \frac{\frac{\sigma_{ij}}{n}}{\left(\frac{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}{n}\right)^{1/2}} = \frac{\sigma_{ij}}{\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj}\right)^{1/2}}$$

$$corr_{i \neq j}(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = \rho_{\bar{X}_i, \bar{X}_j} = \rho_{X_i X_j} = \mathbf{P}_{p \times p} \quad (2.46)$$

Assim conclui-se que em ambas as etapas de inspeção da amostragem dupla, os valores críticos para rejeição de H_0 no teste de Hayter e Tsui adaptado são obtidos através da matriz teórica de correlação de \mathbf{X} . A descrição do algoritmo será apresentada no Quadro 6, na Seção 3.3, página 49.

A seguir, apresenta-se um exemplo para ilustrar o teste de Hayter e Tsui proposto nesta dissertação para amostragem dupla para o caso em que a matriz de covariâncias teórica Σ é conhecida.

2.3.7.1 Exemplo de Aplicação

Considere o processo abordado no Exemplo 2.3.5.1, página 30, referente à aplicação do teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla. Considere ainda a amostra de tamanho n_1 como a apresentada anteriormente na Tabela 1 e o valor de $p_0 = 0,60$. Os limites críticos obtidos para um nível de significância $\alpha_1 = 0,01$, $\alpha^* = 1 - p_0 - \alpha_1 = 0,59$ e $\alpha_2 = 0,04$, sendo $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,05$. Através do procedimento de simulação detalhado na Seção 3.3, de

acordo com o algoritmo do Quadro 6 (página 49) implementado com $N = 100000$, obteve-se os limites críticos: $w = 1,057$, $CL_1 = 2,761$ e $CL_2 = 2,246$. Os resultados do teste estão disponíveis na Tabela 2.

Tabela 2: Exemplo de aplicação do teste de Hayter e Tsui em Amostragem Dupla.

Observação Amostral	Variável	Amostra									
		1		2		3		4		5	
		Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2
1	x	116,427	115,390	114,504	-	114,342	-	114,837	115,958	116,481	-
	y	1,185	1,069	0,379	-	0,853	-	-0,239	1,773	1,308	-
2	x	114,923	114,470	114,256	-	117,072	-	116,423	116,438	113,904	-
	y	0,186	0,407	0,839	-	2,379	-	1,529	1,417	0,464	-
3	x	116,057	115,998	116,055	-	116,511	-	115,618	116,628	115,533	-
	y	0,432	0,867	1,838	-	1,361	-	1,876	1,430	1,641	-
4	x	115,958	114,300	115,423	-	116,136	-	117,306	113,514	117,236	-
	y	0,431	0,485	0,947	-	1,299	-	2,379	-0,919	2,068	-
5	x	115,468	116,163	117,783	-	115,510	-	114,990	115,476	114,859	-
	y	1,081	1,732	1,434	-	-0,279	-	0,932	1,215	0,986	-
6	x	116,348	115,666	115,211	-	112,707	-	116,245	116,397	114,423	-
	y	1,201	1,124	0,378	-	-0,082	-	1,471	2,570	-0,024	-
7	x	115,654	115,430	114,906	-	116,420	-	115,174	115,407	115,129	-
	y	1,136	0,856	0,718	-	1,700	-	1,274	0,912	2,103	-
8	x	113,894	113,740	116,224	-	115,256	-	115,176	115,020	116,325	-
	y	0,307	-0,087	1,748	-	0,145	-	0,390	0,410	2,076	-
9	x	113,538	113,947	115,708	-	115,037	-	116,632	115,452	116,388	-
	y	-0,966	0,557	0,617	-	0,864	-	1,031	1,672	1,169	-
10	x	116,031	114,713	116,193	-	116,556	-	116,908	115,956	114,965	-
	y	1,824	0,745	1,224	-	1,986	-	3,139	0,786	1,629	-
Estatística	M_I	1,313049 (2)		0,1658939 (1)		0,1298278 (1)		1,104223 (2)		0,9783693 (1)	
	M	1,529926		-		-		1,888613		-	

Limites críticos: $w = 1,057$, $CL_1 = 2,762$ e $CL_2 = 2,246$.

(1) O processo de amostragem é interrompido;

(2) A amostragem vai para a segunda fase de inspeção.

O teste de Hayter e Tsui (1994) adaptado nesta dissertação para o procedimento de amostragem dupla indicou que o processo deveria ir para a segunda fase de inspeção na 1ª e 4ª amostras inspecionadas. Embora não sejam essas as mesmas indicadas pelo teste de T^2 de Hotelling (no exemplo 2.3.5.1, página 30, foram as amostras 1 e 5), elas retornaram estatísticas dentro da região inconclusiva sobre H_0 na primeira fase de inspeção. Na segunda etapa, ambas as estatísticas M foram menores que o limite crítico CL_2 , levando a não rejeição da hipótese nula H_0 de que o processo está sob controle estatístico.

2.3.8 Teste de Hayter e Tsui com Amostragem Dupla: Caso de Matriz de Covariâncias Desconhecida

Se a matriz de covariâncias Σ , e, conseqüentemente a matriz de correlação teórica $\mathbf{P}_{p,p}$ são desconhecidas, pode-se pensar em fazer o teste a partir das matrizes de correlação amostrais \mathbf{R}_1 e \mathbf{R} referentes ao primeiro e segundo estágios de inspeção. No entanto, o algoritmo de obtenção dos limites críticos deverá ser processado duas vezes, já que neste caso, os limites (w, CL_1) serão provenientes da matriz de correlação amostral da primeira etapa da amostragem dupla \mathbf{R}_1 e o limite crítico da segunda fase CL_2 será proveniente da matriz de correlação amostral \mathbf{R} , proveniente da amostra de tamanho n . Devido à complexidade computacional encontrada na implementação do teste de Hayter e Tsui nessa situação, esse caso não será discutido nesta dissertação. A limitação encontrada refere-se ao alto custo computacional necessário para estimação do tamanho e poder do teste, e, conseqüentemente, validação do algoritmo. Para cada uma das N amostras geradas é preciso realizar a geração de um número grande amostras sob a hipótese nula para construção da distribuição empírica para determinação dos limites críticos.

Capítulo 3: Determinação das Distribuições das Estatísticas de Teste em Amostragem Dupla via Simulação

Neste capítulo serão apresentados os algoritmos de implementação e os resultados dos testes T^2 de Hotelling (1947) e Hayter e Tsui (1994) sob amostragem dupla apresentados no Capítulo 2. Para o teste T^2 de Hotelling os limites críticos do teste são obtidos através de um algoritmo de simulação proposto nesta dissertação e os resultados comparados com aqueles obtidos por Costa e Machado (2008) utilizando integração numérica. Para a realização das simulações, é utilizado o *software* R, versão 2.9.1, uma linguagem de programação gratuita em ambiente de computação estatística e gráfica disponível no endereço eletrônico <http://cran.r-project.org/>. Adicionalmente, serão apresentados os limites críticos do teste T^2 de Hotelling para o caso em que a matriz de covariâncias teórica não é conhecida, proposta do projeto de dissertação, o que configura uma extensão do trabalho apresentado por Costa et. al. (2008), o qual somente tratou o caso de matriz de covariâncias conhecida.

3.1 Teste T^2 de Hotelling: Matriz de Covariâncias Conhecida

A determinação da distribuição da estatística do teste T^2 de Hotelling para encontrar os limites críticos associados à primeira etapa do procedimento de amostragem dupla segue o mesmo esquema descrito na Seção 2.3.5, em que as constantes w e CL_1 , que determinam a região de ação do gráfico de controle T^2 são obtidas diretamente da distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade. No entanto, na segunda etapa do processo de decisão, também é necessário controlar o erro do tipo I que pode ser cometido na nova etapa, a saber, α_2 , que pode ser definido por:

$$\alpha_2 = P \left[\{ w < T_1^2 \leq CL_1 \} \cap \{ T^2 \geq CL_2 \} | H_0 \right] \quad (3.1)$$

sendo CL_2 a constante que determina a região de rejeição de H_0 na segunda etapa do processo de decisão.

Em Costa e Machado (2008) as equações para determinação do limite crítico CL_2 associado à segunda fase de inspeção para o caso em que $p = 2$ são resolvidas através de integração numérica como foi apresentado na Seção 2.3.5 (equação 2.31, página 22). No entanto, em situações em que $p > 2$, a determinação algébrica é mais complexa.

Nesta dissertação propõe-se o uso de simulação de Monte Carlo para determinação de CL_2 tornando o teste T^2 de Hotelling para amostragem dupla proposto por Costa e Machado (2008) mais aplicável, inclusive para $p > 2$. A equação (3.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= P_{H_0} \left[\left\{ w < T_1^2 \leq CL_1 \right\} \cap \left\{ T^2 > CL_2 \right\} \mid H_0 \right] \\ &= P_{H_0} \left[T^2 > CL_2 \mid \left\{ w < T_1^2 \leq CL_1 \right\} \right] \times P_{H_0} \left[w < T_1^2 \leq CL_1 \right] \\ &= P_{H_0} \left[T^2 > CL_2 \mid \left\{ w < T_1^2 \leq CL_1 \right\} \right] \times [1 - p_0]\end{aligned}$$

Desse modo,

$$P_{H_0} \left[T^2 > CL_2 \mid \left\{ w < T_1^2 \leq CL_1 \right\} \right] = \frac{\alpha_2}{1 - p_0} \quad (3.2)$$

Como w , CL_1 , α_2 e $(1-p_0)$ são conhecidos para encontrar CL_2 basta simular a distribuição condicional de T^2 dado T_1^2 , sendo CL_2 determinado pela construção da distribuição empírica de T^2 dado T_1^2 . O processo de construção dessa distribuição de determinação de CL_2 é apresentado no Quadro 3.

Quadro 3: Algoritmo de obtenção do limite crítico CL_2 na segunda fase de inspeção considerando-se a matriz de covariâncias $\Sigma_{p \times p}$ conhecida.

- (1) Gera-se de uma amostra aleatória de tamanho n_1 de uma distribuição normal p -variada com os parâmetros μ e Σ como os especificados na hipótese nula. Calcula-se o valor de $T_1^2 = n_1(\bar{\mathbf{X}}_{n_1} - \mu_0)^T \Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_{n_1} - \mu_0)$.
- (2) Gera-se uma amostra aleatória de tamanho n_2 de uma distribuição normal p -variada com os parâmetros como os especificados na hipótese nula. Une-se essa amostra com aquela gerada no passo anterior e calcula-se $T^2 = n(\bar{\mathbf{X}}_n - \mu_0)^T \Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_n - \mu_0)$, sendo $n_1 + n_2 = n$.
- (3) Os passos (1) e (2) são repetidos um grande número de vezes N . Sendo assim, tem-se N valores do par (T_1^2, T^2) . Então, guardam-se os valores dos pares nos quais $w < T_1^2 \leq CL_1$. Suponha que se tenha M valores dentre os N nos quais isso ocorreu. Nesse caso, contabiliza-se o valor de T^2 correspondente a cada um desses pares e constrói-se a distribuição empírica utilizando-se esses M valores e encontra-se a ordenada correspondente à probabilidade $1 - \frac{\alpha_2}{1 - p_0}$.

Esse procedimento de determinação de CL_2 via simulação é mais acessível do ponto de vista prático, pois pode ser empregado para qualquer número de variáveis enquanto que a solução via integração numérica é restrita à utilização de *softwares* que realizam integração numérica e seus resultados são muito dependentes da precisão escolhida pelo usuário na implementação da integração numérica.

Com o intuito de avaliar a qualidade desse novo algoritmo proposto em relação aos resultados obtidos via integração numérica por Costa e Machado (2008), os valores de CL_2 foram determinados pelo algoritmo do Quadro 3 e comparados com os valores apresentados no artigo desses autores para o caso em que $\mu_0 = (0 \ 0)^T$ e $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Na Tabela 3 têm-se os valores apresentados no artigo e os correspondentes resultados obtidos via simulação utilizando $N = 300\ 000$. Os tamanhos amostrais utilizados na primeira e segunda fase de inspeção foram, respectivamente, $n_1 = 2$ e $n_2 = 6$. Além disso, $\bar{n} = 4$, $p_0 = 0,6$ e $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,005$. As constantes (w, CL_1, CL_2) são determinadas para vários valores de α_1 . Os valores de w e CL_1 são comuns a ambos os procedimentos. O valor de α^* representa a probabilidade de que o processo de inspeção termine na primeira etapa do procedimento de amostragem dupla com a não rejeição da hipótese nula. Ele é utilizado para a obtenção do limite crítico w . O valor de p_0 é a probabilidade de que o processo de decisão vá para a segunda fase de inspeção e é igual a $(\alpha_1 - \alpha^*)$.

Tabela 3: Estimativas dos limites do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling em amostragem dupla via procedimento de simulação.

Estatísticas		α_1					
		0,000	0,001	0,002	0,0025	0,003	0,004
w		2,197	2,191	2,185	2,182	2,179	2,173
CL_1		∞	13,816	12,429	11,983	11,618	11,0423
Costa e Machado (2008)	CL_2	9,914	10,342	10,927	11,284	11,737	13,089
Solução via Simulação Monte Carlo	α^*	0,6666667	0,6656667	0,6646667	0,6641667	0,6636667	0,6626667
	M	99879	100376	99812	100179	99950	100143
	CL_2	9,91	10,321	10,877	11,422	11,775	13,057

α^* : Probabilidade da análise não evoluir para a segunda fase da amostragem dupla pela não-rejeição de H_0 .

M : Número de pares (T_1^2, T^2) nos quais $w < T_1^2 \leq CL_1$.

$p_0 = 0,6$: Probabilidade de se rejeitar ou não a hipótese nula na primeira etapa de inspeção.

Pela Tabela 3 percebe-se que a solução obtida pelo algoritmo de simulação produz soluções muito próximas da solução via integração numérica proposta por Costa e Machado (2008). Sendo assim, obtém-se a validação do algoritmo, que tem a vantagem adicional de ser aplicável em situações em que $p > 2$. A aproximação pode ser melhorada com o aumento do número de amostras simuladas N .

Na Tabela 4 apresentam-se os valores de CL_2 , obtidos pelo algoritmo do Quadro 3, quando $\boldsymbol{\mu}_0 = (0 \ 0)^T$; $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 \\ 0,9 & 1 \end{pmatrix}$.

Considerando a segunda etapa do processo de inspeção CL_2 é obtido analogamente através da probabilidade $1 - \frac{\alpha_2}{1 - p_0}$ na cauda direita da distribuição, como mostrado na equação (3.2). O valor de M representa o número de pares selecionados para serem avaliados na segunda etapa do algoritmo (Passo 3). É importante ter controle para que esse valor não seja pequeno, já que o objetivo é estimar limites críticos relacionados a valores de α pequenos, ou seja, da cauda superior da distribuição. Note que a estimativa $(1 - M / N)$ deve ser aproximadamente igual a $p_0 = 0,6$.

Da Tabela 4, observa-se que o valor do limite crítico para a estatística T^2 na segunda fase de inspeção do processo não foi muito influenciado pela mudança da matriz de covariâncias.

Como já era esperado, a probabilidade α^* de não se rejeitar a hipótese nula na primeira fase de inspeção diminui na medida em que se aumenta o erro tipo I na primeira fase, mantendo-se fixo o valor de p_0 .

Tabela 4: Estimativas dos limites críticos do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling em amostragem dupla via simulação de Monte Carlo

Estatísticas		α_I					
		0,000	0,001	0,002	0,0025	0,003	0,004
w		2,197225	2,191234	2,185260	2,182281	2,179305	2,173367
CL_1		∞	13,81551	12,42922	11,98293	11,61829	11,04292
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	M	99879	100376	99812	100179	99950	100143
	CL_2	9,909561	10,32138	10,87672	11,42203	11,77445	13,05688
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	M	99929	99599	100018	99598	100342	99854
	CL_2	9,844357	10,37651	10,79605	11,43895	11,81822	13,01766
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 \\ 0,9 & 1 \end{pmatrix}$	M	100068	99758	100200	100150	99934	99523
	CL_2	10,04094	10,36290	10,97908	11,27660	11,67231	13,09693
α^*		0,6666667	0,6656667	0,6646667	0,6641667	0,6636667	0,6626667

α^* : Probabilidade da análise não evoluir para a segunda fase da amostragem dupla pela não-rejeição de H_0 .

M : Número de pares (T_1^2, T_2^2) nos quais $w < T_1^2 \leq CL_1$.

$p_0 = 0,6$: probabilidade de não ser necessária a segunda etapa de inspeção, pela rejeição ou não de H_0 .

Determinados os limites que compõem a carta de controle do teste T^2 de Hotelling para o caso em que a matriz de covariâncias teórica é conhecida, prossegue-se com o procedimento de análise com a aplicação do teste propriamente do dito. Os passos de execução são detalhados no Quadro 4.

Quadro 4: Procedimento de aplicação do teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla para o caso em que a matriz de covariâncias teórica é conhecida.

<p>(1) Duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2, respectivamente, são extraídas do processo e a estatística $T_I^2 = n_1(\bar{\mathbf{X}}_{n_1} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_{n_1} - \boldsymbol{\mu}_0)$ é calculada com base na amostra de tamanho n_1;</p> <p>(2) Se $T_I^2 \leq w$, não se rejeita a hipótese nula de que $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ e diz-se que o processo está sob controle estatístico;</p> <p>(3) Se T_I^2 cair na região de rejeição, ou seja, se $T_I^2 > CL_1$, rejeita-se a hipótese nula e conclui-se que o processo pode estar sob o efeito de causas assinaláveis;</p> <p>(4) Por outro lado, se $w < T_I^2 \leq CL_1$, a análise do processo deve ir para a segunda fase de inspeção em que amostra de tamanho n_2 é observada e a estatística $T^2 = n(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}_0)$ é calculada com base na amostra conjunta $n = n_1 + n_2$.</p> <p>(5) Se $T^2 \leq CL_2$, não se rejeita a hipótese nula e diz-se que o processo está sob controle estatístico. Caso contrário, rejeita-se a hipótese de que o vetor de médias é igual ao vetor de médias postulado e conclui-se que o processo pode estar submetido a causas assinaláveis que estão provocando deslocamentos no vetor de médias.</p>
--

Fixados os parâmetros da carta de controle T^2 de Hotelling e determinados os limites críticos do teste, pode-se proceder com a sua aplicação. Dessa forma, compara-se os valores das estatísticas de teste T_1^2 e T^2 respectivas a primeira e segunda etapas do procedimento de inspeção, respectivamente com os limites críticos associados à cada uma das fases para tomada de decisão.

3.2 Teste T^2 de Hotelling: Matriz de Covariâncias Desconhecida

Um segundo estudo foi efetuado para avaliar a influência da estimação da matriz de covariâncias teórica no valor do ponto crítico CL_2 associado à segunda etapa do procedimento de amostragem dupla. Os limites críticos da primeira fase, w e CL_1 são obtidos da forma como foi apresentado na Seção 2.3.6 (página 32), de forma que essas constantes que determinam a região de ação do gráfico de controle T^2 na primeira etapa de inspeção são obtidos diretamente a partir da distribuição F . No entanto, para a determinação do ponto crítico associado à segunda etapa, se a matriz de covariâncias não é conhecida, também se pode obter sua estimativa através da distribuição empírica das estatísticas (T_1^2, T^2) calculadas a partir das amostras de tamanhos n_1 e $n = n_1 + n_2$, associadas às duas fases de inspeção. No entanto, para a obtenção dessas estatísticas, utiliza-se as matrizes de covariâncias amostrais S_1 e S associadas a cada uma das respectivas fases, e não mais com base na matriz teórica Σ como descrito na Seção 2.3.6. Com essas adaptações, o algoritmo de simulação para obtenção do limite crítico CL_2 é construído como descrito no Quadro 5.

Quadro 5: Algoritmo de obtenção do limite crítico CL_2 do teste T^2 de Hotelling na segunda fase de inspeção considerando-se a matriz de covariâncias $\Sigma_{p \times p}$ desconhecida.

- (1) Gera-se de uma amostra aleatória de tamanho n_1 de uma distribuição normal p -variada com os parâmetros μ e Σ como os especificados na hipótese nula, e obtém-se S_1 , a matriz de covariâncias amostral com base nessa amostra de tamanho n_1 . Calcula-se o valor de $T_1^2 = n_1(\bar{X}_{n_1} - \mu_0)^T S_1^{-1}(\bar{X}_{n_1} - \mu_0)$.
- (2) Gera-se uma amostra aleatória de tamanho n_2 de uma distribuição normal p -variada com os parâmetros μ e Σ como os especificados na hipótese nula. Une-se essa amostra com aquela gerada no passo anterior e obtém-se o vetor de médias \bar{X}_n a matriz de covariâncias amostral S com base na amostra de tamanho $n = n_1 + n_2$. Calcula-se $T^2 = n(\bar{X}_n - \mu_0)^T S_n^{-1}(\bar{X}_n - \mu_0)$.
- (3) Os passos (1) e (2) são repetidos um grande número de vezes N . Sendo assim, têm-se N valores do par (T_1^2, T^2) . Então, guardam-se os valores dos pares nos quais $w < T_1^2 \leq CL_1$. Suponha que se tenha M valores dentre os N nos quais isso ocorreu. Nesse caso, contabiliza-se o valor de T^2 correspondente a cada um desses pares e constrói-se a distribuição empírica utilizando-se esses M valores e encontra-se a ordenada correspondente à probabilidade $1 - \frac{\alpha_2}{1 - p_0}$.

Como ilustração, utilizou-se um valor do erro tipo I global $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,05$ e optou-se por analisar $N = 150\ 000$ repetições do algoritmo com o intuito de reduzir o custo computacional. As amostras foram geradas da distribuição normal com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Considerou-se $n_1 = n_2 = 10$ e $\bar{n} = 14$, $p_0 = 0,60$. A Tabela 5 permite a comparação das estimativas considerando a matriz de covariâncias teórica Σ conhecida e desconhecida para vários valores de α_1 .

Tabela 5: Comparação entre as estimativas dos limites críticos do teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla no controle multivariado do vetor de médias considerando a matriz de covariâncias conhecida e desconhecida

Estatísticas		α_1					
		0,00	0,01	0,02	0,025	0,03	0,04
Σ conhecida	w	1,832581	1,783196	1,735001	1,711332	1,68794	1,641961
	CL_1	∞	9,21034	7,824046	7,377759	7,013116	6,437752
	M	60 154	60 336	59 879	60 066	59 995	59 563
	CL_2	5,652346	5,893558	6,283364	6,573012	6,83471	7,969588
Σ desconhecida	w	2,316901	2,247255	2,179701	2,146673	2,114128	2,050434
	CL_1	∞	19,4605	14,93233	13,63380	12,62530	11,12461
	M	60 349	60 024	59 818	59 773	59 831	59 867
	CL_2	7,067583	7,629375	8,344142	8,762957	9,30499	10,98681
α^*		0,600	0,590	0,580	0,575	0,570	0,560

α^* : Probabilidade da análise não evoluir para a segunda fase da amostragem dupla pela não-rejeição de H_0 .

M : Número de pares (T_1^2, T^2) nos quais $w < T_1^2 \leq CL_1$.

$p_0 = 0,6$: probabilidade de não ser necessária a segunda etapa de inspeção, pela rejeição ou não da hipótese nula.

Comparando-se os limites críticos w , CL_1 e CL_2 obtidos considerando-se a matriz de covariâncias teórica conhecida e desconhecida, observa-se que no segundo caso obtêm-se limites relativamente mais amplos.

A aplicação do teste é realizada de modo similar ao apresentado no Quadro 4 com os limites críticos do teste associados e alterando-se nas estatísticas de teste as matrizes de covariâncias Σ_1 e Σ pelas suas respectivas estimativas, as matriz de covariâncias amostrais da fase 1 e fase 2, S_1 e S , respectivamente. A utilização do teste para o caso em que a matriz de covariâncias teórica é desconhecida envolve maior custo computacional e pode retornar estimativas mais imprecisas quando as amostras das fases 1 e 2 têm tamanhos pequenos. Um procedimento mais apropriado consiste na realização de um estudo prévio para determinação dos parâmetros do processo, através das questões discutidas na Seção 2.2 (página 8), que permitiria estimar com mais precisão a matriz de covariâncias do processo, de modo a poder considerar essa estimativa “quase” como se fosse a matriz teórica do processo.

3.3 Teste Hayter e Tsui: Matriz de Covariâncias Conhecida

A carta de controle para o teste de Hayter e Tsui sob o procedimento de amostragem dupla proposta nesta dissertação (ver Seção 2.3.7, página 34) trata-se de uma metodologia alternativa ao teste T^2 de Hotelling. Apresenta as vantagens de permitir ao usuário identificar as variáveis responsáveis pela rejeição da hipótese nula e quantificar o possível deslocamento ocorrido no vetor de médias. Além disso, pode ser aplicado para um número maior de variáveis ($p > 2$) sem aumento da complexidade matemática.

No caso em que a matriz de covariâncias é conhecida, foi mostrado na Seção 2.3.7 que a obtenção dos limites críticos em ambas as fases do procedimento de amostragem dupla depende apenas da geração de uma sequência de amostras sob a hipótese nula, uma vez que os pontos críticos são obtidos através da mesma matriz de correlação teórica \mathbf{P} . A descrição do algoritmo para obtenção dos limites críticos da carta de controle Hayter e Tsui sob amostragem dupla é apresentada no Quadro 6.

Quadro 6: Algoritmo de Hayter e Tsui para obtenção dos limites críticos do teste sob amostragem dupla considerando a suposição de distribuição normal p -variada com matriz de correlação \mathbf{P} teórica conhecida.

- (1) Gerar um grande número N de vetores de uma distribuição normal p -variada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias $\mathbf{P}_{p,p}$, denotados por:

$$Z^i = (Z_1^i, Z_2^i, \dots, Z_p^i), i = 1, \dots, N$$

- (2) Calcular a estatística M^i para cada um dos vetores gerados, dada por:

$$M^i = \max_{1 \leq j \leq p} |Z_j^i|, \forall i = 1, \dots, N$$

- (3) Encontrar a ordenada correspondente ao α^* α -simo percentil da amostra $\{M^1, \dots, M^N\}$ e utilizá-la como estimativa para o ponto crítico w , $0 < \alpha^* < 1$.

- (4) Encontrar a ordenada correspondente ao $(1 - \alpha_1)$ α_1 -simo percentil da amostra $\{M^1, \dots, M^N\}$ e utilizá-la como estimativa para o ponto crítico CL_1 , $0 < \alpha_1 < 1$.

Encontrar a ordenada correspondente ao $(1 - \alpha_2)$ α_2 -simo percentil da amostra $\{M^1, \dots, M^N\}$ e utilizá-la como estimativa para o ponto crítico CL_2 , $0 < \alpha_2 < 1$.

Como ilustração do procedimento, foram realizadas simulações através de sequências de tamanho $N = 100\ 000$, utilizando-se tamanhos amostrais $n_1 = n_2 = 10$, valor médio inspecionado $\bar{n} = 14$, probabilidade de avanço para a segunda fase de inspeção $p_0 = 0,6$ e um nível de significância global igual a $\alpha = 0,05$, considerando vários valores do nível de

significância associados à primeira etapa do processo de inspeção α_1 . Amostras provenientes de uma distribuição normal bivariada foram geradas a partir do vetor de médias nulo e matriz de correlação teórica $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0,781 \\ 0,781 & 1 \end{pmatrix}$ (Montgomery, 2004) utilizada nos exemplos 2.3.3.1 e 2.3.6.1 (páginas 24 e 38, respectivamente). Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6: Estimativas dos limites críticos do teste Hayter e Tsui sob o procedimento de amostragem dupla considerando a matriz de correlação teórica \mathbf{P} conhecida.

Limites Críticos	α_1					
	0,00	0,01	0,02	0,025	0,03	0,04
w	1,074003	1,055474	1,038908	1,032216	1,018454	1,005336
CL_1	∞	2,770017	2,512799	2,418631	2,364781	2,244247
CL_2	2,164337	2,241388	2,364888	2,418631	2,525046	2,749573
α^*	0,600	0,590	0,580	0,575	0,570	0,560

$p_0 = 0,6$: probabilidade de não ser necessária a segunda etapa de inspeção, pela rejeição ou não da hipótese nula.

Com esses valores fica determinada a carta de controle do teste Hayter e Tsui sob amostragem dupla considerando-se os tamanhos amostrais e probabilidades previamente definidas. A extensão para o caso em que $p > 2$ é automático, bastando fazer a geração das amostras de acordo com os parâmetros postulados sob a hipótese nula para obtenção dos limites críticos.

A aplicação do teste, baseada na Proposição 1 (página 36) segue os passos descritos no procedimento apresentado no Quadro 7.

Quadro 7: Procedimento de aplicação do teste Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que a matriz de covariâncias teórica é conhecida

(1) Duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2 são extraídas do processo. A estatística

$$M_1 = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{\bar{X}_{1j} - \mu_{0j}}{\sigma_j / \sqrt{n_1}} \right|, \forall j = 1, 2, \dots, p \text{ é calculada, tal que } \bar{X}_{1j} \text{ é a média amostral da variável } X_j \text{ obtida}$$

com base nas n_1 observações e σ_j é o desvio-padrão teórico da variável j ;

(2) Se $M_1 \leq w$, não se rejeita a hipótese nula de que $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ e diz-se que o processo está sob controle estatístico;

(3) Se M_1 estiver na região de rejeição, ou seja, se $M_1 > CL_1$, rejeita-se a hipótese nula e conclui-se que o processo pode estar sob o efeito de causas assinaláveis;

(4) Por outro lado, se $w < M_1 \leq CL_1$, então a análise da hipótese nula vai para a segunda fase de inspeção em que as n_2 observações são analisadas e unidas às observações da primeira amostra. A estatística

$$M = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \left(\bar{X}_j - \mu_{0j} \right) / \sqrt{\frac{n_2}{n} \frac{\sigma_j^2}{n}} \right|, \forall j = 1, 2, \dots, p \text{ é calculada, tal que } \bar{X}_j \text{ é a média amostral da}$$

variável X_j obtida com base na amostra conjunta $n = n_1 + n_2$.

(5) Se $M \leq CL_2$, não se rejeita a hipótese nula e diz-se que o processo está sob controle estatístico. Caso contrário, rejeita-se a hipótese de que o vetor de médias é igual ao vetor de médias postulado e conclui-se que o processo pode estar submetido a causas assinaláveis que estão provocando deslocamentos no vetor de médias.

Nota: os valores de w , CL_1 e CL_2 são obtidos por meio de simulação usando amostras da distribuição normal multivariada com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias \mathbf{P} .

Caso a hipótese nula seja rejeitada, é possível perceber qual variável ou grupo de variáveis levou à rejeição de H_0 . Adicionalmente, pode-se inferir sobre o possível deslocamento provocado no vetor de médias e construir intervalos de confiança para cada uma das variáveis, do mesmo modo em que é realizado na aplicação do teste sob amostragem simples introduzido por Hayter e Tsui (1994) e discutido na Seção 2.3.3, no Capítulo 2, página 20.

Capítulo 4: Avaliação da Qualidade dos Testes Propostos via simulações de Monte Carlo – Matriz de Covariâncias Conhecida

4.1 Estratégias e Modelos Simulados

Os procedimentos introduzidos foram construídos e avaliados através de formulações técnicas e do uso de simulações, respectivamente. A avaliação da qualidade das metodologias propostas tem por objetivo verificar o comportamento dos testes adaptados em diversos cenários através de estimativas de poder e *ARL* (*Average Run Length*) utilizando simulações de Monte Carlo. A sequência de procedimentos baseia-se nas seguintes estratégias:

(a) Modelos normais p -variados são pré-fixados em termos de $\boldsymbol{\mu}_0$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ (sob a hipótese nula) e em termos de $\boldsymbol{\mu}_1$ ($\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_0$) e $\boldsymbol{\Sigma}$ (sob a hipótese alternativa) e os testes de T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla são avaliados e comparados;

(b) Amostras de tamanho n_1 e n_2 , $n = n_1 + n_2$ são geradas dos modelos postulados em (a) um número $N = 100\ 000$ vezes sob H_0 com o intuito de se estimar o tamanho e o poder do teste de acordo com diferentes repartições de n_1 e n_2 .

(c) O procedimento descrito em (b) é repetido $k = 25$ vezes, sendo possível então calcular-se o tamanho médio e o poder médio dos testes nas várias situações que serão simuladas.

Em todos os cenários considerados para avaliação dos testes, o nível de significância nominal global dos testes foi $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,05$, utilizando diferentes decomposições do nível de significância nominal para cada uma das etapas da análise em amostragem dupla (fases 1 e 2).

Nas simulações foi utilizado o *software R*, versão 2.9.1. É gratuito e está disponível através do site: <http://www.r-project.org/>.

4.2 Modelos sob a Hipótese Nula

Os modelos gerados sob a hipótese nula levaram a obtenção dos limites críticos de cada teste. As estatísticas de teste são obtidas da forma apresentada nas Seções 2.3.5 e 2.3.7. Dessa forma, amostras são geradas sob a hipótese nula e os valores numéricos das estatísticas de teste associadas são comparadas aos limites críticos de cada teste para cada amostra. A proporção de amostras que levaram a rejeição da hipótese nula é então utilizada como estimativa para o nível de significância.

Para cada teste, foram contabilizadas em quantas das 100 000 amostras a hipótese nula foi rejeitada obtendo então, uma estimativa da proporção de rejeição de H_0 . Nas amostras geradas sob a hipótese nula, a proporção de rejeição estima o nível de significância real do teste. Foram geradas 25 sequências de 100 000 amostras e, no final, tem-se o valor médio das probabilidades de rejeição de um processo sob controle. Ao todo, portanto, foram geradas 2500000 amostras sob H_0 .

Como ilustração, apresenta-se na Tabela 7 um exemplo das estimativas dos níveis de significância e ARL obtidos para validação do algoritmo implementado para determinação dos limites críticos do teste sob a hipótese nula.

Tabela 7: Estimativas do nível de significância e ARL para o caso bivariado

Estimativas	T^2 de Hotelling	Hayter e Tsui
α_1	0,0100284	0,0098724
α_2	0,0393148	0,0430608
α	0,0493432	0,0529332
ARL_1	112,24	128,80
ARL_2	24,44	19,04

Parâmetros do modelo: $\Sigma = \mathbf{I}$, $n_1=2$, $n_2=6$, $\bar{n} = 4$, $\alpha_1=0,01$, $\alpha_2=0,04$, $p_0 = 0,6$.

De modo geral, os resultados obtidos permitiram inferir que os níveis de significância fixados a priori foram mantidos durante a simulação, havendo um controle dos erros tipo I associados à primeira e segunda etapas da amostragem dupla.

4.2 Modelos sob a Hipótese Alternativa

A avaliação e comparação do desempenho dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui adaptados para o procedimento de amostragem dupla em presença de desvios no vetor de médias foi verificada em diversas situações. A seleção dos cenários de simulação foi realizada de modo a contemplar a avaliação dos testes em relação a mudanças de estruturas de variabilidade e correlação. Adicionalmente, os deslocamentos no vetor de médias foram escolhidos com o intuito de analisar se o poder de cada um dos testes sob amostragem dupla era dependente da estrutura de deslocamento e não somente da distância do vetor de médias sob a hipótese alternativa em relação ao postulado na hipótese nula. Essa abordagem é fundamentalmente importante, tendo em vista o fato de que tem-se a indicação no artigo de Hayter e Tsui (1994) que, para amostragem simples, o desempenho do teste é dependente do deslocamento do vetor de médias, mas, por outro lado, para o teste T^2 de Hotelling, sabe-se que o seu comportamento é dependente apenas da distância de Mahalanobis entre os vetores de médias da hipótese nula e alternativa. Dessa forma, optou-se por avaliar o comportamento dos testes em cenários que apresentassem pequenos deslocamentos no vetor de médias em relação ao vetor μ_0 postulado na hipótese nula, fato que ocasionaria uma maior dificuldade dos testes em rejeitar H_0 e situações em que a distância entre ambos os vetores fosse maior, circunstância em que se espera um maior poder de detecção dos desvios pelos testes.

Para a realização dessa avaliação utilizou-se cenários distintos caracterizados pelas suas respectivas distâncias de Mahalanobis e desvios fixos no vetor de médias previamente determinados. Para cada cenário foram atribuídos três valores de correlação (0,0; 0,5 e 0,8), sendo cada um deles composto por duas matrizes de covariâncias com diferentes estruturas de variabilidade. Em aplicações práticas, a escolha do tamanho amostral e do nível de significância apresenta alguma flexibilidade. Sendo assim, em cada situação considerada, utilizou-se diferentes tamanhos de amostra e diferentes decomposições entre as fases de inspeção para avaliar o efeito do aumento do tamanho amostral no poder dos testes, para quatro repartições do nível de significância global entre as etapas 1 e 2. Para cada caso simulado, foram obtidas as estimativas de poder e de número médio de amostras obtidas até a ocorrência do primeiro alarme (*ARL*) em cada uma das fases de aplicação do teste.

4.2.1. Resultados para o Caso Bivariado ($p = 2$)

As Tabelas

Tabela 8 a 11, das páginas 56 a 63 contêm a proporção média de rejeição da hipótese nula, representada pelo vetor de médias nulo $\boldsymbol{\mu}_0 = [0 \ 0]^T$, calculada a partir de 25 sequências de amostras de diferentes tamanhos geradas sob a hipótese alternativa para os testes de T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla de acordo com os cenários determinados pelas distâncias de Mahalanobis (d), a saber, 0,125; 0,250; 0,500 e 1,000.

Os valores do vetor de médias sob a hipótese alternativa são representados pelas constantes k_i , $i = 1, 2, \dots, p$, tal que $\boldsymbol{\mu}_1 = [k_1 \ \dots \ k_p]^T$. As estimativas dos valores de ARL , o número médio de amostras necessárias até a indicação da primeira rejeição da hipótese nula, encontram-se no Anexo B.

Tabela 8: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$						$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
0,125	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$	2	6	4	0,00000	0,11640	0,11640	0,00000	0,11919	0,11919	0,01625	0,09617	0,11242	0,01560	0,09877	0,11437
			4	4	6	0,00000	0,13066	0,13066	0,00000	0,28959	0,28959	0,02346	0,10443	0,12790	0,02208	0,25408	0,27617
			5	15	10	0,00000	0,22203	0,22203	0,00000	0,21737	0,21737	0,02733	0,18792	0,21525	0,02567	0,18893	0,21460
			10	10	14	0,00000	0,26282	0,26282	0,00000	0,41956	0,41956	0,05028	0,20654	0,25682	0,04313	0,36430	0,40743
			15	15	21	0,00000	0,37472	0,37472	0,00000	0,52916	0,52916	0,07834	0,29070	0,36904	0,06420	0,45000	0,51420
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	0,00000	0,11577	0,11577	0,00000	0,11895	0,11895	0,01620	0,09724	0,11344	0,01557	0,09858	0,11415
			4	4	6	0,00000	0,13094	0,13094	0,00000	0,29008	0,29008	0,02333	0,10394	0,12726	0,02200	0,25433	0,27633
			5	15	10	0,00000	0,22254	0,22254	0,00000	0,21730	0,21730	0,02733	0,18770	0,21503	0,02576	0,18877	0,21453
			10	10	14	0,00000	0,26115	0,26115	0,00000	0,41973	0,41973	0,05017	0,20577	0,25594	0,04301	0,36407	0,40709
			15	15	21	0,00000	0,37517	0,37517	0,00000	0,52933	0,52933	0,07845	0,28746	0,36592	0,06449	0,45039	0,51488
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,31$	2	6	4	0,00000	0,11566	0,11566	0,00000	0,10425	0,10425	0,01632	0,09763	0,11395	0,01496	0,08531	0,10027
			4	4	6	0,00000	0,12988	0,12988	0,00000	0,25800	0,25800	0,02322	0,10601	0,12923	0,01988	0,22483	0,24471
			5	15	10	0,00000	0,22177	0,22177	0,00000	0,18446	0,18446	0,02727	0,18900	0,21627	0,02238	0,16018	0,18256
			10	10	14	0,00000	0,26224	0,26224	0,00000	0,40647	0,40647	0,05017	0,20851	0,25868	0,04179	0,34991	0,39170
			15	15	21	0,00000	0,37434	0,37434	0,00000	0,47039	0,47039	0,07806	0,29060	0,36866	0,05775	0,40079	0,45854
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	2	6	4	0,00000	0,11614	0,11614	0,00000	0,10419	0,10419	0,01600	0,09797	0,11398	0,01474	0,08531	0,10005
			4	4	6	0,00000	0,13206	0,13206	0,00000	0,25844	0,25844	0,02332	0,10368	0,12700	0,02005	0,22447	0,24452
			5	15	10	0,00000	0,22334	0,22334	0,00000	0,18412	0,18412	0,02730	0,18907	0,21638	0,02239	0,16041	0,18280
			10	10	14	0,00000	0,26143	0,26143	0,00000	0,37243	0,37243	0,05024	0,20744	0,25768	0,03898	0,32102	0,36001
			15	15	21	0,00000	0,37546	0,37546	0,00000	0,47048	0,47048	0,07808	0,28945	0,36752	0,05761	0,40089	0,45850
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,21$	2	6	4	0,00000	0,11551	0,11551	0,00000	0,07690	0,07690	0,01611	0,09756	0,11367	0,01198	0,06376	0,07574
4			4	6	0,00000	0,13027	0,13027	0,00000	0,20524	0,20524	0,02357	0,10425	0,12782	0,01436	0,17639	0,19075	
5			15	10	0,00000	0,22448	0,22448	0,00000	0,11894	0,11894	0,02738	0,18920	0,21658	0,01591	0,09996	0,11587	
10			10	14	0,00000	0,26301	0,26301	0,00000	0,26081	0,26081	0,05007	0,20896	0,25903	0,02254	0,22509	0,24762	
15			15	21	0,00000	0,37672	0,37672	0,00000	0,31771	0,31771	0,07820	0,28758	0,36578	0,02966	0,27537	0,30503	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	2	6	4	0,00000	0,11583	0,11583	0,00000	0,07691	0,07691	0,01621	0,09698	0,11319	0,01208	0,06383	0,07591	
		4	4	6	0,00000	0,13191	0,13191	0,00000	0,20492	0,20492	0,02331	0,10605	0,12936	0,01438	0,17639	0,19078	
		5	15	10	0,00000	0,22251	0,22251	0,00000	0,11897	0,11897	0,02735	0,18910	0,21645	0,01574	0,09985	0,11559	
		10	10	14	0,00000	0,26200	0,26200	0,00000	0,26035	0,26035	0,05016	0,20783	0,25799	0,02266	0,22460	0,24726	
		15	15	21	0,00000	0,37708	0,37708	0,00000	0,31807	0,31807	0,07828	0,29038	0,36866	0,02974	0,27534	0,30508	

Tabela 8: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$ (continuação)

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$						$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
0,125	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$	2	6	4	0,03708	0,06894	0,10602	0,03549	0,07343	0,10892	0,05667	0,03430	0,09096	0,05508	0,04213	0,09721
			4	4	6	0,05052	0,06906	0,11958	0,04677	0,19860	0,24537	0,07414	0,03428	0,10841	0,07150	0,13085	0,20235
			5	15	10	0,05765	0,14194	0,19958	0,05453	0,14464	0,19917	0,08377	0,08151	0,16528	0,07943	0,08991	0,16935
			10	10	14	0,09641	0,14377	0,24018	0,08810	0,29372	0,38182	0,13340	0,07856	0,21196	0,12384	0,20607	0,32992
			15	15	21	0,14013	0,20667	0,34680	0,12274	0,36874	0,49147	0,18724	0,11956	0,30680	0,16704	0,26623	0,43326
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	0,03729	0,06813	0,10542	0,03552	0,07308	0,10859	0,05666	0,03397	0,09063	0,05528	0,04213	0,09741
			4	4	6	0,05044	0,07033	0,12078	0,04672	0,19805	0,24477	0,07474	0,03313	0,10787	0,07197	0,13063	0,20260
			5	15	10	0,05741	0,14036	0,19777	0,05452	0,14441	0,19893	0,08384	0,08308	0,16692	0,07973	0,08984	0,16957
			10	10	14	0,09616	0,14480	0,24097	0,08781	0,29408	0,38190	0,13321	0,07873	0,21194	0,12364	0,20664	0,33029
			15	15	21	0,13988	0,20522	0,34510	0,12238	0,36850	0,49088	0,18657	0,11795	0,30452	0,16682	0,26609	0,43291
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,31$	2	6	4	0,03705	0,06788	0,10494	0,03339	0,06299	0,09638	0,05673	0,03446	0,09118	0,05235	0,03671	0,08905
			4	4	6	0,05042	0,07115	0,12157	0,04291	0,17608	0,21899	0,07438	0,03333	0,10771	0,06501	0,11217	0,17718
			5	15	10	0,05738	0,14310	0,20048	0,04591	0,12128	0,16718	0,08357	0,08256	0,16614	0,07181	0,07673	0,14854
			10	10	14	0,09600	0,14552	0,24153	0,08525	0,27688	0,36213	0,13313	0,07755	0,21068	0,12288	0,18947	0,31235
			15	15	21	0,13998	0,20931	0,34929	0,11112	0,32758	0,43870	0,18651	0,11848	0,30499	0,14818	0,23367	0,38185
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	2	6	4	0,03729	0,06853	0,10581	0,03348	0,06314	0,09663	0,05636	0,03341	0,08977	0,05222	0,03661	0,08883
			4	4	6	0,05032	0,07055	0,12087	0,04290	0,17591	0,21881	0,07443	0,03366	0,10809	0,06511	0,11214	0,17725
			5	15	10	0,05745	0,14055	0,19799	0,04608	0,12127	0,16735	0,08378	0,08241	0,16619	0,07215	0,07677	0,14892
			10	10	14	0,09613	0,14592	0,24204	0,07632	0,25687	0,33319	0,13373	0,07784	0,21157	0,10889	0,17838	0,28726
			15	15	21	0,14013	0,20740	0,34753	0,11111	0,32762	0,43873	0,18646	0,11937	0,30582	0,14833	0,23378	0,38210
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,21$	2	6	4	0,03716	0,06844	0,10560	0,02948	0,04511	0,07459	0,05675	0,03433	0,09109	0,04452	0,02311	0,06763
			4	4	6	0,05059	0,07070	0,12129	0,03424	0,13310	0,16734	0,07425	0,03320	0,10745	0,05359	0,07860	0,13219
			5	15	10	0,05760	0,14096	0,19856	0,03740	0,07361	0,11102	0,08392	0,08310	0,16702	0,05544	0,04183	0,09727
			10	10	14	0,09589	0,14524	0,24113	0,04996	0,17544	0,22540	0,13315	0,07705	0,21020	0,07572	0,11414	0,18986
15			15	21	0,14011	0,20747	0,34759	0,06556	0,21982	0,28539	0,18697	0,11694	0,30391	0,09076	0,14183	0,23259	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	2	6	4	0,05057	0,03831	0,08888	0,03422	0,13343	0,16764	0,05629	0,03395	0,09024	0,04410	0,02293	0,06704	
		4	4	6	0,05057	0,03831	0,08888	0,03422	0,13343	0,16764	0,07441	0,03749	0,11189	0,05360	0,15460	0,20820	
		5	15	10	0,10567	0,28902	0,39469	0,13910	0,34217	0,48127	0,08382	0,08275	0,16657	0,05537	0,04157	0,09694	
		10	10	14	0,09621	0,14523	0,24144	0,04976	0,17519	0,22496	0,13311	0,07772	0,21083	0,07528	0,11378	0,18906	
		15	15	21	0,14051	0,20750	0,34801	0,06551	0,22011	0,28562	0,18694	0,11879	0,30572	0,09096	0,14204	0,23301	

Tabela 9: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=0,250$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$						$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
0,250	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	0,00000	0,18642	0,18642	0,00000	0,19363	0,19363	0,02323	0,15685	0,18008	0,02281	0,16380	0,18662
			4	4	6	0,00000	0,22052	0,22052	0,00000	0,40989	0,40989	0,04019	0,17518	0,21537	0,04025	0,35566	0,39592
			5	15	10	0,00000	0,38809	0,38809	0,00000	0,39599	0,39599	0,05016	0,33085	0,38101	0,05122	0,34404	0,39526
			10	10	14	0,00000	0,48059	0,48059	0,00000	0,63669	0,63669	0,11084	0,36149	0,47234	0,11348	0,51629	0,62977
			15	15	21	0,00000	0,65817	0,65817	0,00000	0,77528	0,77528	0,18757	0,46430	0,65187	0,19488	0,57496	0,76983
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	0,00000	0,18547	0,18547	0,00000	0,19368	0,19368	0,02325	0,15872	0,18197	0,02275	0,16409	0,18683
			4	4	6	0,00000	0,22029	0,22029	0,00000	0,40968	0,40968	0,04025	0,17401	0,21426	0,04018	0,35595	0,39614
			5	15	10	0,00000	0,38884	0,38884	0,00000	0,39671	0,39671	0,05010	0,33120	0,38129	0,05128	0,34469	0,39598
			10	10	14	0,00000	0,47946	0,47946	0,00000	0,63668	0,63668	0,11121	0,36066	0,47188	0,11367	0,51545	0,62912
			15	15	21	0,00000	0,65723	0,65723	0,00000	0,77490	0,77490	0,18739	0,46049	0,64789	0,19477	0,57429	0,76906
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,43$	2	6	4	0,00000	0,18558	0,18558	0,00000	0,15919	0,15919	0,02326	0,15894	0,18220	0,01999	0,13258	0,15257
			4	4	6	0,00000	0,22037	0,22037	0,00000	0,35678	0,35678	0,04032	0,17649	0,21682	0,03215	0,30804	0,34020
			5	15	10	0,00000	0,38880	0,38880	0,00000	0,32310	0,32310	0,05039	0,33271	0,38310	0,03863	0,28252	0,32114
			10	10	14	0,00000	0,48044	0,48044	0,00000	0,60137	0,60137	0,11110	0,36354	0,47465	0,08730	0,50042	0,58772
			15	15	21	0,00000	0,65724	0,65724	0,00000	0,70246	0,70246	0,18728	0,46371	0,65099	0,13502	0,55972	0,69475
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,87$	2	6	4	0,00000	0,18669	0,18669	0,00000	0,15944	0,15944	0,02333	0,15942	0,18275	0,02007	0,13289	0,15296
			4	4	6	0,00000	0,22274	0,22274	0,00000	0,35633	0,35633	0,04053	0,17391	0,21444	0,03226	0,30887	0,34114
			5	15	10	0,00000	0,38963	0,38963	0,00000	0,32312	0,32312	0,05035	0,33195	0,38230	0,03856	0,28239	0,32095
			10	10	14	0,00000	0,47915	0,47915	0,00000	0,56320	0,56320	0,11097	0,36294	0,47391	0,08256	0,47084	0,55340
			15	15	21	0,00000	0,65723	0,65723	0,00000	0,70218	0,70218	0,18748	0,46380	0,65128	0,13524	0,55963	0,69488
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,30$	2	6	4	0,00000	0,18597	0,18597	0,00000	0,10428	0,10428	0,02335	0,15874	0,18210	0,01431	0,08724	0,10155
			4	4	6	0,00000	0,22011	0,22011	0,00000	0,26088	0,26088	0,04032	0,17534	0,21565	0,01949	0,22436	0,24384
			5	15	10	0,00000	0,39005	0,39005	0,00000	0,19208	0,19208	0,05031	0,33220	0,38251	0,02258	0,16313	0,18571
			10	10	14	0,00000	0,48031	0,48031	0,00000	0,38143	0,38143	0,11119	0,36505	0,47625	0,03897	0,32809	0,36706
15			15	21	0,00000	0,65923	0,65923	0,00000	0,48801	0,48801	0,18735	0,46122	0,64858	0,05792	0,41591	0,47383	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,60$	2	6	4	0,00000	0,18599	0,18599	0,00000	0,10387	0,10387	0,02349	0,15845	0,18194	0,01449	0,08714	0,10163	
		4	4	6	0,00000	0,22276	0,22276	0,00000	0,26086	0,26086	0,04041	0,17634	0,21676	0,01956	0,22509	0,24465	
		5	15	10	0,00000	0,38884	0,38884	0,00000	0,19171	0,19171	0,05018	0,33253	0,38271	0,02237	0,16379	0,18617	
		10	10	14	0,00000	0,47950	0,47950	0,00000	0,38092	0,38092	0,11031	0,36387	0,47418	0,03884	0,32754	0,36638	
		15	15	21	0,00000	0,65944	0,65944	0,00000	0,48763	0,48763	0,18723	0,46429	0,65152	0,05779	0,41619	0,47397	

Tabela 9: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=0,250$ (continuação)

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$						$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
0,250	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	0,05027	0,11761	0,16788	0,04855	0,12811	0,17667	0,07415	0,06561	0,13976	0,07276	0,08313	0,15588
			4	4	6	0,07973	0,11973	0,19946	0,07720	0,28655	0,36375	0,11314	0,06426	0,17740	0,11210	0,20148	0,31358
			5	15	10	0,09611	0,26558	0,36170	0,09581	0,28426	0,38007	0,13320	0,17703	0,31023	0,13153	0,21047	0,34199
			10	10	14	0,18789	0,26011	0,44801	0,19140	0,42115	0,61255	0,24309	0,15566	0,39875	0,24583	0,32424	0,57006
			15	15	21	0,28895	0,33866	0,62761	0,29572	0,46509	0,76081	0,35655	0,22036	0,57691	0,36042	0,36808	0,72850
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	0,05022	0,11711	0,16733	0,04838	0,12824	0,17661	0,07455	0,06517	0,13972	0,07299	0,08273	0,15572
			4	4	6	0,08019	0,12116	0,20134	0,07744	0,28580	0,36324	0,11314	0,06242	0,17556	0,11198	0,20192	0,31390
			5	15	10	0,09613	0,26407	0,36019	0,09584	0,28458	0,38042	0,13352	0,17987	0,31340	0,13175	0,21117	0,34292
			10	10	14	0,18773	0,26162	0,44935	0,19168	0,42070	0,61238	0,24256	0,15881	0,40137	0,24529	0,32384	0,56913
			15	15	21	0,28891	0,33746	0,62638	0,29540	0,46538	0,76078	0,35659	0,21786	0,57445	0,36029	0,36856	0,72885
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,43$	2	6	4	0,05040	0,11707	0,16747	0,04292	0,10237	0,14529	0,07456	0,06569	0,14025	0,06521	0,06409	0,12931
			4	4	6	0,08005	0,12273	0,20277	0,06402	0,24748	0,31150	0,11315	0,06275	0,17589	0,09347	0,16693	0,26040
			5	15	10	0,09589	0,26721	0,36309	0,07280	0,22682	0,29961	0,13350	0,17911	0,31261	0,10809	0,16011	0,26820
			10	10	14	0,18778	0,26254	0,45032	0,15687	0,40395	0,56082	0,24275	0,15725	0,40000	0,21154	0,29485	0,50639
			15	15	21	0,28893	0,34090	0,62983	0,22451	0,45668	0,68119	0,35706	0,21886	0,57592	0,28124	0,35069	0,63194
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,87$	2	6	4	0,05059	0,11748	0,16807	0,04313	0,10228	0,14541	0,07435	0,06453	0,13888	0,06509	0,06400	0,12910
			4	4	6	0,07994	0,12204	0,20198	0,06406	0,24675	0,31081	0,11318	0,06279	0,17597	0,09312	0,16636	0,25948
			5	15	10	0,09630	0,26371	0,36001	0,07322	0,22675	0,29997	0,13361	0,17921	0,31282	0,10832	0,16001	0,26833
			10	10	14	0,18756	0,26273	0,45029	0,14303	0,38384	0,52687	0,24270	0,15733	0,40003	0,19129	0,28448	0,47577
			15	15	21	0,28939	0,33859	0,62799	0,22471	0,45639	0,68109	0,35688	0,21927	0,57615	0,28074	0,35059	0,63134
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,30$	2	6	4	0,05018	0,11686	0,16704	0,03404	0,06387	0,09791	0,07448	0,06577	0,14025	0,05074	0,03452	0,08526
			4	4	6	0,07998	0,12248	0,20246	0,04436	0,17284	0,21720	0,11277	0,06274	0,17551	0,06763	0,10603	0,17367
			5	15	10	0,09597	0,26452	0,36049	0,05014	0,12554	0,17569	0,13314	0,17956	0,31270	0,07252	0,07795	0,15047
			10	10	14	0,18740	0,26267	0,45008	0,07934	0,26032	0,33965	0,24271	0,15664	0,39936	0,11467	0,17822	0,29289
15			15	21	0,28980	0,33922	0,62902	0,11454	0,33645	0,45099	0,35679	0,21683	0,57362	0,15103	0,23315	0,38419	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,60$	2	6	4	0,05073	0,11565	0,16639	0,03443	0,06342	0,09784	0,07447	0,06553	0,14000	0,05092	0,03456	0,08548	
		4	4	6	0,08021	0,12167	0,20188	0,04439	0,17243	0,21682	0,11297	0,06209	0,17506	0,06775	0,10593	0,17368	
		5	15	10	0,09614	0,26714	0,36328	0,05013	0,12578	0,17591	0,13321	0,17995	0,31316	0,07255	0,07802	0,15057	
		10	10	14	0,18762	0,26300	0,45061	0,07935	0,26008	0,33943	0,24290	0,15712	0,40002	0,11448	0,17759	0,29207	
		15	15	21	0,28942	0,33910	0,62853	0,11451	0,33693	0,45144	0,35627	0,21900	0,57527	0,15102	0,23268	0,38370	

Tabela 10: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$						$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
0,500	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	0,00000	0,32486	0,32486	0,00000	0,31342	0,31342	0,04035	0,27679	0,31714	0,03565	0,26784	0,30349
			4	4	6	0,00000	0,40383	0,40383	0,00000	0,58523	0,58523	0,08443	0,31211	0,39653	0,06986	0,50267	0,57253
			5	15	10	0,00000	0,62904	0,62904	0,00000	0,60617	0,60617	0,11046	0,51759	0,62805	0,09033	0,51706	0,60739
			10	10	14	0,00000	0,78379	0,78379	0,00000	0,84484	0,84484	0,27360	0,50491	0,77850	0,20638	0,63526	0,84164
			15	15	21	0,00000	0,92058	0,92058	0,00000	0,93836	0,93836	0,45246	0,46655	0,91900	0,34475	0,59253	0,93729
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	0,00000	0,32341	0,32341	0,00000	0,31319	0,31319	0,04054	0,27829	0,31883	0,03569	0,26757	0,30327
			4	4	6	0,00000	0,40351	0,40351	0,00000	0,58556	0,58556	0,08435	0,31029	0,39464	0,06990	0,50254	0,57244
			5	15	10	0,00000	0,62878	0,62878	0,00000	0,60632	0,60632	0,11126	0,51690	0,62816	0,09086	0,51652	0,60738
			10	10	14	0,00000	0,78364	0,78364	0,00000	0,84568	0,84568	0,27318	0,50585	0,77903	0,20637	0,63623	0,84259
			15	15	21	0,00000	0,92053	0,92053	0,00000	0,93845	0,93845	0,45266	0,46558	0,91824	0,34472	0,59285	0,93757
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	2	6	4	0,00000	0,32405	0,32405	0,00000	0,27207	0,27207	0,04058	0,27909	0,31967	0,03228	0,23088	0,26316
			4	4	6	0,00000	0,40349	0,40349	0,00000	0,52844	0,52844	0,08466	0,31413	0,39878	0,06395	0,45001	0,51396
			5	15	10	0,00000	0,62855	0,62855	0,00000	0,55090	0,55090	0,11078	0,51842	0,62920	0,08158	0,47163	0,55320
			10	10	14	0,00000	0,78375	0,78375	0,00000	0,83309	0,83309	0,27317	0,50729	0,78046	0,21012	0,61811	0,82822
			15	15	21	0,00000	0,92007	0,92007	0,00000	0,91473	0,91473	0,45260	0,46647	0,91907	0,33903	0,57501	0,91404
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,23$	2	6	4	0,00000	0,32522	0,32522	0,00000	0,27261	0,27261	0,04025	0,27940	0,31965	0,03216	0,23054	0,26270
			4	4	6	0,00000	0,40707	0,40707	0,00000	0,52851	0,52851	0,08421	0,31008	0,39430	0,06354	0,44938	0,51292
			5	15	10	0,00000	0,62888	0,62888	0,00000	0,55083	0,55083	0,11100	0,51796	0,62897	0,08142	0,47134	0,55276
			10	10	14	0,00000	0,78293	0,78293	0,00000	0,80409	0,80409	0,27317	0,50620	0,77937	0,20123	0,59958	0,80081
			15	15	21	0,00000	0,92037	0,92037	0,00000	0,91490	0,91490	0,45296	0,46611	0,91907	0,33949	0,57464	0,91413
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	2	6	4	0,00000	0,32377	0,32377	0,00000	0,16128	0,16128	0,04022	0,27890	0,31912	0,01943	0,13722	0,15665
4			4	6	0,00000	0,40436	0,40436	0,00000	0,36837	0,36837	0,08466	0,31147	0,39613	0,03176	0,31669	0,34844	
5			15	10	0,00000	0,62979	0,62979	0,00000	0,33948	0,33948	0,11111	0,51784	0,62895	0,03885	0,29180	0,33065	
10			10	14	0,00000	0,78375	0,78375	0,00000	0,59092	0,59092	0,27350	0,50657	0,78006	0,08205	0,49462	0,57667	
15			15	21	0,00000	0,92118	0,92118	0,00000	0,74316	0,74316	0,45311	0,46517	0,91828	0,13471	0,59794	0,73265	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,85$	2	6	4	0,00000	0,32314	0,32314	0,00000	0,16019	0,16019	0,04041	0,27861	0,31902	0,01951	0,13745	0,15696	
		4	4	6	0,00000	0,40705	0,40705	0,00000	0,36805	0,36805	0,08431	0,31360	0,39792	0,03156	0,31650	0,34807	
		5	15	10	0,00000	0,62891	0,62891	0,00000	0,33912	0,33912	0,11103	0,51830	0,62933	0,03897	0,29218	0,33115	
		10	10	14	0,00000	0,78343	0,78343	0,00000	0,59167	0,59167	0,27296	0,50704	0,78000	0,08181	0,49467	0,57648	
		15	15	21	0,00000	0,92115	0,92115	0,00000	0,74278	0,74278	0,45240	0,46678	0,91918	0,13424	0,59841	0,73264	

Tabela 10: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$ (continuação)

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$						$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
0,500	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	0,07995	0,21950	0,29945	0,07221	0,21452	0,28673	0,11299	0,14108	0,25407	0,10493	0,14534	0,25027
			4	4	6	0,14927	0,22155	0,37082	0,12780	0,41023	0,53804	0,19791	0,13081	0,32872	0,17790	0,30062	0,47852
			5	15	10	0,18745	0,43220	0,61966	0,16158	0,43243	0,59401	0,24259	0,33643	0,57902	0,21439	0,33676	0,55115
			10	10	14	0,39360	0,36687	0,76046	0,32966	0,50375	0,83341	0,46665	0,24752	0,71418	0,40722	0,39498	0,80220
			15	15	21	0,58281	0,32807	0,91088	0,49129	0,44460	0,93589	0,65403	0,23450	0,88854	0,57450	0,34840	0,92289
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	0,08004	0,21828	0,29832	0,07234	0,21435	0,28669	0,11269	0,14067	0,25335	0,10488	0,14556	0,25045
			4	4	6	0,14956	0,22438	0,37394	0,12792	0,41032	0,53824	0,19766	0,12762	0,32528	0,17798	0,29980	0,47778
			5	15	10	0,18751	0,43023	0,61774	0,16147	0,43200	0,59346	0,24296	0,33905	0,58201	0,21459	0,33741	0,55201
			10	10	14	0,39296	0,36819	0,76115	0,32928	0,50340	0,83268	0,46642	0,25035	0,71678	0,40739	0,39462	0,80200
			15	15	21	0,58328	0,32711	0,91039	0,49140	0,44433	0,93574	0,65408	0,23330	0,88737	0,57435	0,34874	0,92308
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	2	6	4	0,08018	0,21852	0,29869	0,06408	0,18668	0,25076	0,11267	0,14060	0,25327	0,09319	0,12882	0,22201
			4	4	6	0,14921	0,22523	0,37444	0,11454	0,36723	0,48177	0,19771	0,12864	0,32634	0,15651	0,26610	0,42262
			5	15	10	0,18742	0,43329	0,62071	0,13830	0,39904	0,53734	0,24305	0,33759	0,58064	0,19034	0,31372	0,50406
			10	10	14	0,39342	0,36881	0,76223	0,32299	0,49126	0,81425	0,46717	0,24893	0,71610	0,39883	0,38018	0,77901
			15	15	21	0,58369	0,32850	0,91219	0,47200	0,44059	0,91259	0,65381	0,23412	0,88793	0,54054	0,35413	0,89467
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,23$	2	6	4	0,08019	0,21942	0,29961	0,06396	0,18673	0,25068	0,11327	0,13916	0,25243	0,09352	0,12911	0,22263
			4	4	6	0,14896	0,22453	0,37349	0,11443	0,36766	0,48209	0,19810	0,12849	0,32659	0,15652	0,26533	0,42185
			5	15	10	0,18703	0,43127	0,61830	0,13804	0,39895	0,53699	0,24310	0,33857	0,58168	0,19047	0,31417	0,50464
			10	10	14	0,39311	0,36852	0,76164	0,30219	0,48495	0,78713	0,46633	0,24962	0,71595	0,37138	0,38086	0,75224
			15	15	21	0,58266	0,32834	0,91100	0,47099	0,44093	0,91192	0,65423	0,23397	0,88819	0,54051	0,35431	0,89482
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	2	6	4	0,08010	0,21896	0,29906	0,04415	0,10400	0,14815	0,11298	0,14035	0,25334	0,06400	0,06139	0,12540
			4	4	6	0,14966	0,22455	0,37421	0,06664	0,24904	0,31568	0,19808	0,12814	0,32622	0,09725	0,16114	0,25839
			5	15	10	0,18718	0,43128	0,61845	0,07922	0,23570	0,31492	0,24270	0,33909	0,58179	0,11009	0,16361	0,27370
			10	10	14	0,39247	0,36902	0,76149	0,14786	0,39859	0,54645	0,46583	0,24861	0,71443	0,20037	0,28957	0,48995
15			15	21	0,58335	0,32822	0,91157	0,22910	0,48349	0,71259	0,65376	0,23327	0,88703	0,28411	0,36050	0,64462	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,85$	2	6	4	0,07991	0,21643	0,29634	0,04410	0,10376	0,14785	0,11312	0,14002	0,25314	0,06420	0,06144	0,12564	
		4	4	6	0,14906	0,22400	0,37306	0,06648	0,24879	0,31527	0,19834	0,12712	0,32546	0,09733	0,16148	0,25881	
		5	15	10	0,18746	0,43279	0,62026	0,07936	0,23585	0,31521	0,24296	0,33882	0,58178	0,11046	0,16344	0,27390	
		10	10	14	0,39210	0,36867	0,76077	0,14758	0,39803	0,54561	0,46631	0,24953	0,71584	0,20039	0,28963	0,49001	
		15	15	21	0,58332	0,32828	0,91160	0,22902	0,48365	0,71268	0,65395	0,23424	0,88818	0,28392	0,36095	0,64487	

Tabela 11: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=1,000$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$						$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
1,000	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	0,00000	0,54718	0,54718	0,00000	0,55467	0,55467	0,08457	0,45955	0,54413	0,08591	0,46626	0,55217
			4	4	6	0,00000	0,69946	0,69946	0,00000	0,82931	0,82931	0,20421	0,48765	0,69186	0,21457	0,61035	0,82492
			5	15	10	0,00000	0,84844	0,84844	0,00000	0,84792	0,84792	0,27383	0,57923	0,85306	0,29059	0,56389	0,85447
			10	10	14	0,00000	0,97215	0,97215	0,00000	0,97948	0,97948	0,61476	0,35708	0,97184	0,63879	0,34133	0,98012
			15	15	21	0,00000	0,99646	0,99646	0,00000	0,99697	0,99697	0,83781	0,15873	0,99654	0,85654	0,14051	0,99705
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 2,00$	2	6	4	0,00000	0,54725	0,54725	0,00000	0,55550	0,55550	0,08423	0,46136	0,54559	0,08589	0,46635	0,55225
			4	4	6	0,00000	0,69878	0,69878	0,00000	0,82843	0,82843	0,20356	0,48709	0,69064	0,21395	0,61123	0,82517
			5	15	10	0,00000	0,84881	0,84881	0,00000	0,84846	0,84846	0,27367	0,57898	0,85265	0,29025	0,56403	0,85428
			10	10	14	0,00000	0,97216	0,97216	0,00000	0,97960	0,97960	0,61483	0,35705	0,97188	0,63869	0,34130	0,97999
			15	15	21	0,00000	0,99651	0,99651	0,00000	0,99706	0,99706	0,83793	0,15862	0,99655	0,85652	0,14056	0,99708
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,87$	2	6	4	0,00000	0,54694	0,54694	0,00000	0,47320	0,47320	0,08432	0,46179	0,54611	0,06354	0,40240	0,46594
			4	4	6	0,00000	0,69818	0,69818	0,00000	0,76515	0,76515	0,20405	0,48973	0,69378	0,15001	0,60580	0,75581
			5	15	10	0,00000	0,84899	0,84899	0,00000	0,79675	0,79675	0,27319	0,58068	0,85387	0,19989	0,60379	0,80368
			10	10	14	0,00000	0,97218	0,97218	0,00000	0,97327	0,97327	0,61436	0,35755	0,97191	0,49661	0,47665	0,97325
			15	15	21	0,00000	0,99654	0,99654	0,00000	0,99343	0,99343	0,83780	0,15875	0,99656	0,71415	0,27944	0,99359
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,73$	2	6	4	0,00000	0,54806	0,54806	0,00000	0,47418	0,47418	0,08437	0,46226	0,54663	0,06371	0,40210	0,46582
			4	4	6	0,00000	0,70158	0,70158	0,00000	0,76525	0,76525	0,20416	0,48577	0,68994	0,15039	0,60527	0,75566
			5	15	10	0,00000	0,84894	0,84894	0,00000	0,58848	0,58848	0,27353	0,57937	0,85290	0,08222	0,50082	0,58304
			10	10	14	0,00000	0,97204	0,97204	0,00000	0,85327	0,85327	0,61489	0,35696	0,97185	0,19895	0,64664	0,84560
			15	15	21	0,00000	0,99643	0,99643	0,00000	0,99335	0,99335	0,83770	0,15898	0,99668	0,71409	0,27960	0,99369
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,60$	2	6	4	0,00000	0,54765	0,54765	0,00000	0,27934	0,27934	0,08453	0,46122	0,54576	0,03171	0,24035	0,27206
			4	4	6	0,00000	0,69874	0,69874	0,00000	0,55731	0,55731	0,20355	0,48763	0,69119	0,06293	0,47317	0,53610
			5	15	10	0,00000	0,84906	0,84906	0,00000	0,58905	0,58905	0,27333	0,57960	0,85293	0,08219	0,50125	0,58344
			10	10	14	0,00000	0,97204	0,97204	0,00000	0,85324	0,85324	0,61458	0,35735	0,97194	0,19877	0,64683	0,84561
15			15	21	0,00000	0,99645	0,99645	0,00000	0,95412	0,95412	0,83784	0,15875	0,99660	0,33330	0,61954	0,95284	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,20$	2	6	4	0,00000	0,54755	0,54755	0,00000	0,27938	0,27938	0,08462	0,46111	0,54573	0,03188	0,24107	0,27295	
		4	4	6	0,00000	0,70110	0,70110	0,00000	0,55716	0,55716	0,20403	0,48963	0,69366	0,06342	0,47331	0,53673	
		5	15	10	0,00000	0,84908	0,84908	0,00000	0,79690	0,79690	0,27373	0,57931	0,85304	0,20030	0,60307	0,80337	
		10	10	14	0,00000	0,97180	0,97180	0,00000	0,96414	0,96414	0,61473	0,35689	0,97162	0,48470	0,48002	0,96472	
		15	15	21	0,00000	0,99646	0,99646	0,00000	0,95411	0,95411	0,83796	0,15864	0,99660	0,33314	0,61985	0,95299	

Tabela 11: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $d=1,000$ (continuação)

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$						$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
1,000	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	0,14917	0,38220	0,53137	0,14853	0,39685	0,54539	0,19806	0,28682	0,48488	0,19771	0,32075	0,51846
			4	4	6	0,31022	0,35496	0,66518	0,31418	0,49669	0,81087	0,37900	0,23477	0,61377	0,38625	0,39385	0,78009
			5	15	10	0,39348	0,46441	0,85789	0,40590	0,45360	0,85950	0,46678	0,38845	0,85522	0,47525	0,38640	0,86165
			10	10	14	0,73202	0,23726	0,96928	0,75095	0,22973	0,98068	0,78961	0,17057	0,96018	0,80408	0,17603	0,98011
			15	15	21	0,90537	0,09121	0,99657	0,91626	0,08108	0,99734	0,93285	0,06304	0,99589	0,93997	0,05751	0,99748
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 2,00$	2	6	4	0,14917	0,38133	0,53051	0,14837	0,39705	0,54542	0,19797	0,28654	0,48451	0,19770	0,32068	0,51838
			4	4	6	0,30984	0,35772	0,66756	0,31382	0,49720	0,81102	0,37889	0,23110	0,60999	0,38575	0,39472	0,78047
			5	15	10	0,39289	0,46470	0,85759	0,40541	0,45387	0,85928	0,46625	0,38960	0,85585	0,47435	0,38739	0,86174
			10	10	14	0,73281	0,23684	0,96966	0,75193	0,22892	0,98085	0,78949	0,17148	0,96097	0,80403	0,17622	0,98025
			15	15	21	0,90556	0,09103	0,99658	0,91647	0,08087	0,99734	0,93305	0,06273	0,99578	0,94014	0,05739	0,99753
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,87$	2	6	4	0,14922	0,38214	0,53135	0,11433	0,34061	0,45494	0,19728	0,28657	0,48386	0,15646	0,26223	0,41869
			4	4	6	0,30991	0,35873	0,66865	0,23530	0,49912	0,73441	0,37911	0,23180	0,61091	0,29778	0,38522	0,68299
			5	15	10	0,39269	0,46485	0,85754	0,29489	0,50995	0,80484	0,46607	0,38904	0,85511	0,37041	0,42816	0,79857
			10	10	14	0,73277	0,23706	0,96982	0,63156	0,34101	0,97256	0,78956	0,17101	0,96057	0,70488	0,26198	0,96686
			15	15	21	0,90523	0,09137	0,99660	0,81848	0,17573	0,99421	0,93234	0,06348	0,99582	0,86091	0,13275	0,99367
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,73$	2	6	4	0,14906	0,38230	0,53136	0,11411	0,34016	0,45427	0,19799	0,28474	0,48272	0,15681	0,26272	0,41953
			4	4	6	0,31009	0,35785	0,66794	0,23596	0,49772	0,73368	0,37845	0,23236	0,61081	0,29781	0,38492	0,68273
			5	15	10	0,39281	0,46461	0,85742	0,14832	0,42086	0,56919	0,46621	0,38948	0,85569	0,19455	0,32893	0,52348
			10	10	14	0,73234	0,23720	0,96954	0,30779	0,51799	0,82578	0,78929	0,17106	0,96035	0,38235	0,39804	0,78040
			15	15	21	0,90534	0,09124	0,99658	0,81896	0,17522	0,99418	0,93244	0,06337	0,99581	0,86157	0,13213	0,99370
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,60$	2	6	4	0,14918	0,38142	0,53060	0,06631	0,19225	0,25857	0,19773	0,28643	0,48415	0,09292	0,12627	0,21919
4			4	6	0,31026	0,35800	0,66826	0,11853	0,37920	0,49773	0,37919	0,23173	0,61092	0,16354	0,26272	0,42626	
5			15	10	0,39240	0,46485	0,85724	0,14789	0,42117	0,56906	0,46591	0,38976	0,85568	0,19454	0,32940	0,52394	
10			10	14	0,73237	0,23712	0,96948	0,30790	0,51796	0,82586	0,78987	0,17052	0,96038	0,38306	0,39736	0,78041	
15			15	21	0,90568	0,09088	0,99655	0,47337	0,47482	0,94819	0,93312	0,06273	0,99585	0,54183	0,37749	0,91931	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,20$	2	6	4	0,14908	0,38024	0,52932	0,06611	0,19152	0,25763	0,19816	0,28601	0,48417	0,09288	0,12645	0,21932	
		4	4	6	0,31049	0,35741	0,66790	0,11834	0,37945	0,49779	0,37897	0,23017	0,60915	0,16352	0,26261	0,42613	
		5	15	10	0,39339	0,46433	0,85772	0,29472	0,50984	0,80455	0,46683	0,38848	0,85531	0,37074	0,42790	0,79864	
		10	10	14	0,73248	0,23722	0,96970	0,60948	0,35456	0,96404	0,78942	0,17120	0,96063	0,67993	0,27843	0,95836	
		15	15	21	0,90530	0,09128	0,99658	0,47339	0,47456	0,94795	0,93272	0,06311	0,99583	0,54111	0,37789	0,91900	

Os resultados obtidos permitem inferir que, fixado o valor da correlação ρ entre as variáveis, os poderes globais de cada teste permanecem similares mediante a alterações na estrutura de variabilidade das variáveis, representada através da matriz de covariâncias Σ . Particularmente, o teste T^2 de Hotelling também apresentou valores de poder global similares nas situações que em que os valores de correlação foram alterados. O mesmo não se observou para o teste de Hayter e Tsui que teve seu poder global reduzido diante de situações nas quais a correlação entre as variáveis era maior.

A comparação das estimativas de poder considerando-se a decomposição do nível global de significância global α em α_1 e α_2 para as duas etapas da amostragem dupla permitiu inferir que obtém-se valores de poder total mais elevados em situações em que se atribui um erro α_1 menor para a primeira etapa. Consequentemente, se avaliarmos o poder apenas na primeira etapa, ele será menor nessas situações. Em situações práticas, essa decomposição dependerá da natureza do processo e o pesquisador deve avaliar a situação que melhor se adapta ao sistema de acordo com as consequências de cada decisão.

A análise da variação dos tamanhos amostrais indicou que o teste T^2 de Hotelling tem seu poder acrescido com o aumento do tamanho da amostra em cada uma das fases da amostragem dupla. Consequentemente a estimativa de poder global aumenta independentemente da decomposição do tamanho amostral n nas duas fases (n_1 e n_2). Em contrapartida, o teste de Hayter e Tsui apresenta um melhor desempenho em termos da avaliação do poder quando os tamanhos amostrais são iguais em ambas as fases ($n_1 = n_2$). As situações analisadas indicaram que dispondo de uma amostra de tamanho $n = 8$ por exemplo, é mais satisfatório utilizar uma divisão equilibrada de itens em ambas as etapas de análise, isto é, $n_1 = n_2 = 4$, do que realizar a decomposição tal que $n_1 = 2$ e $n_2 = 6$. Adicionalmente, em algumas situações, obteve-se inclusive um poder maior utilizando $n_1 = n_2 = 4$ do que com uma amostra maior, como por exemplo $n = 20$, mas com desbalanceamento na divisão do tamanho amostral, isto é, considerando $n_1 = 5$ e $n_2 = 15$, por exemplo.

Comparando-se ambos os testes, verifica-se que para situações em que a correlação entre as variáveis é nula, o teste de Hayter e Tsui tende a apresentar valores de poder mais elevados na segunda etapa dos testes em todos os cenários englobando os diferentes níveis de significância e combinações tamanhos de amostra. Para um valor de correlação $\rho = 0,5$, o teste de T^2 de Hotelling capta mais rapidamente, em relação ao Hayter e Tsui, o desvio no vetor de médias para situações em que a divisão da amostra nas duas etapas do teste foi feita de forma desbalanceada.

Diante dos resultados apresentados, evidencia-se a grande vantagem de se utilizar a amostragem dupla na aplicação dos testes, visto que, utilizando-se números médios de itens inspecionados \bar{n} relativamente pequenos, foi possível a ambos os testes captar pequenos desvios provocados no vetor de médias. Dessa forma, fixados os outros parâmetros e variando apenas os tamanhos amostrais, um plano amostral ideal seria aquele que atribuísse um mesmo número de itens inspecionados em ambas as etapas de inspeção.

A outra classe de cenários abordados corresponde às situações em que se mantêm fixos os deslocamentos nos vetores de médias, ao invés das distâncias de Mahalanobis. Foram avaliadas duas situações: no primeiro caso há um choque somente em uma das variáveis de forma que $k_1 = 0$ e $k_2 = 0,5$; na segunda situação há deslocamentos em ambas as variáveis, mas em sentidos opostos, tal que $k_1 = 0,5$ e $k_2 = -0,5$. Os resultados são apresentados nas Tabelas 12 e 13, páginas 67 a 70.

Os resultados obtidos permitem inferir que o poder teste T^2 de Hotelling é praticamente determinado pela distância de Mahalanobis. Na medida em que essa quantidade cresce, aumenta-se a capacidade do teste em detectar desvios no vetor de médias, mesmo fixando-se o valor do desvio nas variáveis. No caso do teste de Hayter e Tsui essa característica não é tão evidente. Observa-se uma tendência de valores de poder parecidos em situações em que as variâncias são as mesmas, variando-se o valor apenas da covariância.

Em ambos os casos, verifica-se que a estimativa de poder foi mais elevada nas situações em que o desvio no vetor de médias foi provocado nas duas variáveis, ainda que em direções opostas. Essa característica evidencia a capacidade de ambos os testes em captar desvios em um processo, mesmo que pequenos, ainda que utilizando tamanhos amostrais menores.

Na análise dos tamanhos amostrais, o padrão observado é o mesmo para os cenários determinados pela distância de Mahalanobis. Fixando todos os parâmetros e variando apenas o tamanho amostral, o poder do teste T^2 de Hotelling aumenta quando se tem mais itens inspecionados. Para o teste de Hayter e Tsui, há ainda a influência da decomposição do tamanho amostral havendo uma tendência de valores de poder maiores em situações em que tamanhos de amostra iguais foram atribuídos em ambas as etapas de análise do processo.

A comparação entre os testes indica que em situações em a correlação é nula, ambos os testes apresentam desempenho similar, exceto quando a decomposição dos tamanhos de amostra é equilibrada entre ambas as fases, caso em que o teste de Hayter e Tsui apresentou ligeiramente um melhor desempenho na detecção de alterações no vetor de médias.

Nestes cenários, também observaram-se valores de poder maiores para ambos os testes quando a repartição dos níveis de significâncias para as duas etapas de análise do processo é realizada de forma em que menores valores de α_1 são atribuídos à primeira etapa, mantendo fixa a taxa de erro global.

Entre os panoramas, observou-se valores maiores de poder para o caso em que há deslocamento em ambas as variáveis ($k_1 = 0,5$ e $k_2 = -0,5$), mesmo que ele ocorra em sentidos opostos, fato já esperado por esse cenário apresentar maiores distâncias de Mahalanobis.

Tabela 12: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,0$ e $k_2=0,5$

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias/Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$						$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
$k_1 = 0,0$ $k_2 = 0,5$	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,2500	2	6	4	0,00000	0,18629	0,18629	0,00000	0,19331	0,19331	0,02340	0,15726	0,18066	0,02278	0,16393	0,18671
			4	4	6	0,00000	0,22050	0,22050	0,00000	0,40962	0,40962	0,04044	0,17533	0,21577	0,04040	0,35614	0,39654
			5	15	10	0,00000	0,38849	0,38849	0,00000	0,39649	0,39649	0,05041	0,33136	0,38176	0,05144	0,34476	0,39620
			10	10	14	0,00000	0,48043	0,48043	0,00000	0,63707	0,63707	0,11072	0,36163	0,47234	0,11330	0,51587	0,62917
			15	15	21	0,00000	0,65793	0,65793	0,00000	0,77506	0,77506	0,18714	0,46455	0,65169	0,19432	0,57500	0,76932
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,0625	2	6	4	0,00000	0,08121	0,08121	0,00000	0,08655	0,08655	0,01290	0,06773	0,08064	0,01263	0,07102	0,08365
			4	4	6	0,00000	0,08854	0,08854	0,00000	0,22850	0,22850	0,01610	0,07057	0,08667	0,01589	0,20064	0,21653
			5	15	10	0,00000	0,13472	0,13472	0,00000	0,13987	0,13987	0,01793	0,11121	0,12914	0,01794	0,11988	0,13782
			10	10	14	0,00000	0,14907	0,14907	0,00000	0,29555	0,29555	0,02717	0,11949	0,14666	0,02636	0,25756	0,28393
			15	15	21	0,00000	0,20551	0,20551	0,00000	0,36532	0,36532	0,03809	0,16174	0,19984	0,03732	0,31353	0,35084
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,3333	2	6	4	0,00000	0,23268	0,23268	0,00000	0,19681	0,19681	0,02859	0,20074	0,22933	0,02376	0,16552	0,18928
			4	4	6	0,00000	0,28174	0,28174	0,00000	0,41739	0,41739	0,05376	0,22465	0,27841	0,04184	0,36015	0,40199
			5	15	10	0,00000	0,48268	0,48268	0,00000	0,40834	0,40834	0,06838	0,41000	0,47837	0,05135	0,35560	0,40696
			10	10	14	0,00000	0,60345	0,60345	0,00000	0,69933	0,69933	0,16040	0,43785	0,59825	0,12420	0,56460	0,68880
			15	15	21	0,00000	0,78346	0,78346	0,00000	0,80225	0,80225	0,27381	0,50584	0,77965	0,19903	0,59918	0,79820
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,0833	2	6	4	0,00000	0,09340	0,09340	0,00000	0,08649	0,08649	0,01408	0,07822	0,09229	0,01334	0,07040	0,08373
			4	4	6	0,00000	0,10373	0,10373	0,00000	0,22461	0,22461	0,01846	0,08128	0,09974	0,01654	0,19514	0,21168
			5	15	10	0,00000	0,16406	0,16406	0,00000	0,13769	0,13769	0,02077	0,13761	0,15838	0,01784	0,11946	0,13730
			10	10	14	0,00000	0,18595	0,18595	0,00000	0,29843	0,29843	0,03415	0,14967	0,18382	0,02773	0,25924	0,28696
			15	15	21	0,00000	0,26266	0,26266	0,00000	0,36897	0,36897	0,05031	0,20649	0,25680	0,03823	0,31824	0,35646
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	0,6944	2	6	4	0,00000	0,42058	0,42058	0,00000	0,20723	0,20723	0,05614	0,36091	0,41706	0,02390	0,17766	0,20155
			4	4	6	0,00000	0,53455	0,53455	0,00000	0,44563	0,44563	0,12703	0,39880	0,52583	0,04281	0,38265	0,42546
			5	15	10	0,00000	0,74294	0,74294	0,00000	0,44573	0,44573	0,16902	0,57626	0,74528	0,05411	0,38348	0,43760
			10	10	14	0,00000	0,90026	0,90026	0,00000	0,71805	0,71805	0,41321	0,48569	0,89890	0,12346	0,58200	0,70546
15			15	21	0,00000	0,97683	0,97683	0,00000	0,86307	0,86307	0,63859	0,33756	0,97615	0,20715	0,64909	0,85625	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	0,1736	2	6	4	0,00000	0,14264	0,14264	0,00000	0,08731	0,08731	0,01905	0,12110	0,14015	0,01303	0,07284	0,08587	
		4	4	6	0,00000	0,16586	0,16586	0,00000	0,22685	0,22685	0,02954	0,13256	0,16209	0,01620	0,19523	0,21143	
		5	15	10	0,00000	0,29011	0,29011	0,00000	0,14709	0,14709	0,03566	0,24793	0,28359	0,01837	0,12424	0,14262	
		10	10	14	0,00000	0,34991	0,34991	0,00000	0,30878	0,30878	0,07129	0,27443	0,34572	0,02847	0,26615	0,29462	
		15	15	21	0,00000	0,49889	0,49889	0,00000	0,38669	0,38669	0,11637	0,37413	0,49050	0,03974	0,33305	0,37279	

Tabela 12: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,0$ e $k_2=0,5$ (continuação)

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias/Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$						$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
$k_1 = 0,0$ $k_2 = 0,5$	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,2500	2	6	4	0,05050	0,11778	0,16828	0,04866	0,12840	0,17706	0,07433	0,06582	0,14016	0,07275	0,08306	0,15582
			4	4	6	0,07993	0,11962	0,19956	0,07769	0,28598	0,36367	0,11289	0,06418	0,17707	0,11189	0,20203	0,31392
			5	15	10	0,09598	0,26535	0,36133	0,09572	0,28402	0,37974	0,13338	0,17753	0,31091	0,13150	0,21095	0,34244
			10	10	14	0,18798	0,26041	0,44839	0,19164	0,42119	0,61283	0,24225	0,15585	0,39810	0,24542	0,32419	0,56962
			15	15	21	0,28894	0,33813	0,62707	0,29548	0,46493	0,76040	0,35687	0,21995	0,57682	0,36068	0,36835	0,72904
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,0625	2	6	4	0,03109	0,04565	0,07674	0,02983	0,05165	0,08148	0,04796	0,02115	0,06911	0,04726	0,02854	0,07580
			4	4	6	0,03705	0,04681	0,08386	0,03547	0,15399	0,18946	0,05667	0,02046	0,07714	0,05599	0,09798	0,15397
			5	15	10	0,04022	0,07842	0,11864	0,03969	0,08923	0,12892	0,06135	0,04149	0,10283	0,05991	0,05293	0,11283
			10	10	14	0,05727	0,08144	0,13871	0,05692	0,20488	0,26180	0,08361	0,04051	0,12411	0,08287	0,13812	0,22099
			15	15	21	0,07612	0,11160	0,18772	0,07496	0,25427	0,32923	0,10800	0,05781	0,16581	0,10545	0,17556	0,28100
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,3333	2	6	4	0,05996	0,15089	0,21085	0,04989	0,13007	0,17996	0,08688	0,08956	0,17645	0,07411	0,08461	0,15871
			4	4	6	0,10179	0,15739	0,25917	0,08007	0,29019	0,37026	0,14006	0,08434	0,22440	0,11331	0,20211	0,31542
			5	15	10	0,12517	0,33657	0,46175	0,09342	0,29222	0,38564	0,16900	0,24106	0,41006	0,13482	0,21575	0,35057
			10	10	14	0,25507	0,31891	0,57398	0,21061	0,45520	0,66580	0,31853	0,20113	0,51966	0,27341	0,34194	0,61536
			15	15	21	0,39302	0,36987	0,76288	0,30769	0,48211	0,78979	0,46649	0,24979	0,71628	0,37178	0,37952	0,75130
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,0833	2	6	4	0,03302	0,05324	0,08626	0,03041	0,05119	0,08160	0,05104	0,02460	0,07564	0,04833	0,02854	0,07688
			4	4	6	0,04146	0,05431	0,09577	0,03668	0,15055	0,18723	0,06260	0,02503	0,08763	0,05651	0,09432	0,15083
			5	15	10	0,04581	0,09856	0,14437	0,03816	0,08729	0,12545	0,06850	0,05399	0,12249	0,06067	0,05261	0,11328
			10	10	14	0,06988	0,10262	0,17250	0,05714	0,20415	0,26128	0,09981	0,05202	0,15183	0,08403	0,13693	0,22096
			15	15	21	0,09627	0,14505	0,24132	0,07865	0,25813	0,33678	0,13288	0,07802	0,21090	0,10838	0,17673	0,28511
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	0,6944	2	6	4	0,10543	0,29103	0,39647	0,05237	0,13748	0,18986	0,14479	0,20187	0,34666	0,07484	0,08531	0,16015
			4	4	6	0,20959	0,29133	0,50092	0,08531	0,30385	0,38916	0,26858	0,17585	0,44443	0,12238	0,20271	0,32509
			5	15	10	0,26662	0,47808	0,74469	0,10483	0,31697	0,42181	0,33151	0,39361	0,72513	0,14183	0,23212	0,37395
			10	10	14	0,54443	0,34450	0,88892	0,20823	0,47036	0,67859	0,61646	0,24305	0,85951	0,27127	0,35049	0,62176
15			15	21	0,75240	0,22234	0,97474	0,32524	0,51782	0,84306	0,80724	0,15948	0,96672	0,38901	0,39988	0,78889	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	0,1736	2	6	4	0,04213	0,08573	0,12786	0,03118	0,05219	0,08337	0,06363	0,04558	0,10921	0,04697	0,02720	0,07417	
		4	4	6	0,06137	0,09007	0,15144	0,03797	0,14887	0,18684	0,08913	0,04349	0,13262	0,05902	0,08929	0,14831	
		5	15	10	0,07167	0,19272	0,26439	0,04197	0,09336	0,13533	0,10211	0,12007	0,22218	0,06163	0,05522	0,11685	
		10	10	14	0,12977	0,19462	0,32439	0,06082	0,20940	0,27022	0,17456	0,10908	0,28364	0,09030	0,13865	0,22896	
		15	15	21	0,19640	0,27078	0,46718	0,08353	0,26824	0,35177	0,25264	0,16382	0,41646	0,11350	0,17817	0,29166	

Tabela 13: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,5$ e $k_2=-0,5$

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias/Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$						$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
$k_1 = 0,5$ $k_2 = -0,5$	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,5000	2	6	4	0,00000	0,32428	0,32428	0,00000	0,31311	0,31311	0,04036	0,27696	0,31732	0,03563	0,26801	0,30364
			4	4	6	0,00000	0,40454	0,40454	0,00000	0,58573	0,58573	0,08424	0,31175	0,39599	0,06974	0,50258	0,57231
			5	15	10	0,00000	0,62912	0,62912	0,00000	0,60667	0,60667	0,11107	0,51752	0,62859	0,09065	0,51734	0,60800
			10	10	14	0,00000	0,78370	0,78370	0,00000	0,84501	0,84501	0,27336	0,50523	0,77860	0,20660	0,63549	0,84209
			15	15	21	0,00000	0,92041	0,92041	0,00000	0,93834	0,93834	0,45273	0,46636	0,91909	0,34521	0,59240	0,93761
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,3125	2	6	4	0,00000	0,22064	0,22064	0,00000	0,22212	0,22212	0,02744	0,18924	0,21668	0,02570	0,18833	0,21404
			4	4	6	0,00000	0,26695	0,26695	0,00000	0,45697	0,45697	0,05027	0,20980	0,26007	0,04614	0,39736	0,44350
			5	15	10	0,00000	0,46093	0,46093	0,00000	0,45093	0,45093	0,06341	0,39090	0,45431	0,05870	0,39055	0,44926
			10	10	14	0,00000	0,57422	0,57422	0,00000	0,70163	0,70163	0,14738	0,41902	0,56640	0,12819	0,56573	0,69391
			15	15	21	0,00000	0,75678	0,75678	0,00000	0,83332	0,83332	0,25091	0,49877	0,74968	0,21662	0,61171	0,82833
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	1,000	2	6	4	0,00000	0,54726	0,54726	0,00000	0,37256	0,37256	0,08459	0,46225	0,54684	0,03837	0,31875	0,35712
			4	4	6	0,00000	0,69829	0,69829	0,00000	0,69003	0,69003	0,20395	0,48978	0,69373	0,07473	0,59791	0,67264
			5	15	10	0,00000	0,84881	0,84881	0,00000	0,72463	0,72463	0,27378	0,57924	0,85302	0,09449	0,63317	0,72766
			10	10	14	0,00000	0,97201	0,97201	0,00000	0,95589	0,95589	0,61558	0,35651	0,97209	0,23977	0,71478	0,95454
			15	15	21	0,00000	0,99645	0,99645	0,00000	0,98739	0,98739	0,83819	0,15841	0,99661	0,38323	0,60444	0,98767
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,5833	2	6	4	0,00000	0,36746	0,36746	0,00000	0,24768	0,24768	0,04695	0,31600	0,36295	0,02745	0,20856	0,23601
			4	4	6	0,00000	0,46452	0,46452	0,00000	0,51733	0,51733	0,10181	0,35092	0,45273	0,04897	0,44983	0,49880
			5	15	10	0,00000	0,68412	0,68412	0,00000	0,52319	0,52319	0,13506	0,54991	0,68496	0,06005	0,45994	0,51999
			10	10	14	0,00000	0,84298	0,84298	0,00000	0,80165	0,80165	0,33367	0,50669	0,84037	0,13756	0,65653	0,79408
			15	15	21	0,00000	0,95285	0,95285	0,00000	0,91750	0,91750	0,53683	0,41520	0,95202	0,22851	0,68640	0,91491
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	2,5000	2	6	4	0,00000	0,84869	0,84869	0,00000	0,43689	0,43689	0,27284	0,58031	0,85315	0,04048	0,37935	0,41983
			4	4	6	0,00000	0,97788	0,97788	0,00000	0,81280	0,81280	0,61490	0,36218	0,97708	0,07883	0,70683	0,78566
			5	15	10	0,00000	0,98845	0,98845	0,00000	0,85916	0,85916	0,74352	0,24559	0,98911	0,10220	0,75776	0,85996
			10	10	14	0,00000	0,99994	0,99994	0,00000	0,99365	0,99365	0,98189	0,01805	0,99994	0,24056	0,75297	0,99353
15			15	21	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	0,99975	0,99975	0,99931	0,00069	1,00000	0,40857	0,59122	0,99979	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	1,4236	2	6	4	0,00000	0,67448	0,67448	0,00000	0,27502	0,27502	0,13094	0,54596	0,67691	0,02862	0,23571	0,26433	
		4	4	6	0,00000	0,84844	0,84844	0,00000	0,59518	0,59518	0,32339	0,52026	0,84365	0,05144	0,51391	0,56535	
		5	15	10	0,00000	0,92604	0,92604	0,00000	0,62769	0,62769	0,42544	0,50326	0,92870	0,06495	0,54809	0,61305	
		10	10	14	0,00000	0,99519	0,99519	0,00000	0,91231	0,91231	0,81234	0,18296	0,99530	0,14553	0,75712	0,90265	
		15	15	21	0,00000	0,99972	0,99972	0,00000	0,98367	0,98367	0,95740	0,04233	0,99973	0,24064	0,74251	0,98316	

Tabela13: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,5$ e $k_2=-0,5$ (continuação)

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias/Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$						$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$					
						T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui			T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
$k_1 = 0,5$ $k_2 = -0,5$	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,5000	2	6	4	0,08036	0,21924	0,29960	0,07251	0,21490	0,28741	0,11303	0,14087	0,25390	0,10537	0,14511	0,25048
			4	4	6	0,14960	0,22116	0,37076	0,12794	0,40985	0,53779	0,19747	0,13101	0,32848	0,17758	0,30071	0,47829
			5	15	10	0,18824	0,43148	0,61972	0,16245	0,43176	0,59422	0,24267	0,33638	0,57905	0,21420	0,33666	0,55086
			10	10	14	0,39359	0,36663	0,76022	0,32967	0,50337	0,83304	0,46606	0,24787	0,71393	0,40693	0,39511	0,80205
			15	15	21	0,58383	0,32750	0,91133	0,49217	0,44380	0,93596	0,65379	0,23485	0,88864	0,57394	0,34924	0,92317
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,3125	2	6	4	0,05742	0,14278	0,20020	0,05411	0,14772	0,20183	0,08361	0,08342	0,16702	0,08040	0,09618	0,17658
			4	4	6	0,09614	0,14807	0,24421	0,08803	0,32019	0,40822	0,13322	0,07802	0,21124	0,12642	0,22735	0,35377
			5	15	10	0,11763	0,31789	0,43552	0,10968	0,32250	0,43218	0,15947	0,22733	0,38680	0,14972	0,23818	0,38790
			10	10	14	0,23754	0,30686	0,54440	0,21781	0,46042	0,67824	0,29946	0,19305	0,49251	0,27903	0,35436	0,63338
			15	15	21	0,36714	0,36317	0,73031	0,33213	0,48824	0,82038	0,43972	0,24402	0,68374	0,40481	0,38526	0,79008
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	1,000	2	6	4	0,14880	0,38175	0,53055	0,07695	0,25578	0,33273	0,19769	0,28693	0,48463	0,11302	0,17081	0,28383
			4	4	6	0,31027	0,35819	0,66846	0,13894	0,49283	0,63177	0,37913	0,23176	0,61089	0,19352	0,35494	0,54846
			5	15	10	0,39313	0,46449	0,85762	0,16766	0,54169	0,70935	0,46605	0,38932	0,85537	0,23569	0,42370	0,65939
			10	10	14	0,73264	0,23729	0,96993	0,39225	0,55530	0,94755	0,78966	0,17087	0,96053	0,49648	0,42524	0,92172
			15	15	21	0,90523	0,09143	0,99666	0,56645	0,42156	0,98800	0,93274	0,06306	0,99580	0,65903	0,32347	0,98251
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,5833	2	6	4	0,09065	0,25107	0,34173	0,05648	0,16414	0,22062	0,12623	0,16463	0,29086	0,08455	0,10516	0,18971
			4	4	6	0,17494	0,25440	0,42935	0,09447	0,36503	0,45950	0,22787	0,15005	0,37792	0,13420	0,25274	0,38693
			5	15	10	0,22067	0,45845	0,67912	0,11035	0,37920	0,48956	0,28134	0,36895	0,65029	0,16042	0,27642	0,43684
			10	10	14	0,45943	0,36692	0,82635	0,22993	0,54070	0,77064	0,53405	0,25370	0,78775	0,30110	0,41358	0,71468
			15	15	21	0,66398	0,28416	0,94814	0,36475	0,54458	0,90932	0,72821	0,20483	0,93304	0,44401	0,43125	0,87526
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	2,5000	2	6	4	0,39291	0,46454	0,85745	0,08570	0,29838	0,38408	0,46643	0,38939	0,85582	0,12108	0,18679	0,30787
			4	4	6	0,73245	0,24179	0,97424	0,15388	0,57271	0,72659	0,78970	0,17422	0,96392	0,21669	0,39292	0,60961
			5	15	10	0,83722	0,15286	0,99008	0,19266	0,65858	0,85123	0,87846	0,11226	0,99072	0,25785	0,52572	0,78357
			10	10	14	0,99219	0,00775	0,99994	0,40022	0,59118	0,99140	0,99530	0,00465	0,99995	0,51434	0,46351	0,97786
15			15	21	0,99980	0,00020	1,00000	0,62762	0,37221	0,99983	0,99990	0,00010	1,00000	0,73142	0,26798	0,99940	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	1,4236	2	6	4	0,21506	0,45486	0,66992	0,06218	0,18136	0,24354	0,27428	0,36519	0,63947	0,08921	0,11015	0,19936	
		4	4	6	0,44909	0,37676	0,82584	0,10379	0,40726	0,51105	0,52289	0,25770	0,78059	0,14947	0,26729	0,41676	
		5	15	10	0,55622	0,37635	0,93257	0,12820	0,45158	0,57978	0,62898	0,30661	0,93558	0,17451	0,32041	0,49492	
		10	10	14	0,88779	0,10748	0,99526	0,25113	0,62475	0,87588	0,91919	0,07481	0,99400	0,33256	0,47136	0,80391	
		15	15	21	0,97964	0,02012	0,99976	0,39175	0,58773	0,97948	0,98724	0,01251	0,99976	0,47617	0,47191	0,94807	

4.2.2. Resultados para o caso de três variáveis ($p = 3$)

Nesta dissertação, ambos os testes foram também estendidos para processos com distribuição normal em que o número de variáveis aleatórias era $p=3$. Como ilustração, os algoritmos foram aplicados em dois cenários, caracterizados pelo deslocamento no vetor de médias. Em cada situação, foi abordado um caso em que há ausência de correlação considerando a matriz de covariâncias identidade e outros dois casos com correlações fracas, intermediárias e fortes, com diferentes estruturas de variabilidade. Em cada uma dessas combinações avaliou-se o poder dos testes para três composições de tamanhos de amostra. Os resultados são apresentados nas Tabelas 14 a 17 das páginas 73 a 76.

As estimativas de poder de ambos os testes em amostragem dupla obtidos nas simulações para $p=3$ apresentaram o mesmo padrão do caso bivariado. Como esperado, o teste T^2 de Hotelling tem maior capacidade de detectar desvios no vetor de médias quando se aumenta o número de observações inspecionadas. Por outro lado, o teste de Hayter e Tsui é fortemente influenciado pelo balanceamento das observações em ambas as fases de inspeção da amostragem dupla, e apresentou, em todos os casos avaliados, poder mais alto para situações em que $n_1 = n_2 = 10$ e $\bar{n} = 14$ do que $n_1 = 5$, $n_2 = 10$ e $\bar{n} = 10$, evidenciando ainda mais a influência do plano de amostragem no poder do teste.

Dentro de cada cenário, nota-se que o poder do teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla é fundamentalmente influenciado pela distância entre o vetor de médias sob a hipótese nula e hipótese alternativa, representada pela distância de Mahalanobis. No caso do Hayter e Tsui, essa característica não foi observada nos resultados obtidos, sendo que a proporção de amostras que levaram à rejeição da hipótese nula, nesses casos, foi afetada pelo aumento do valor da correlação entre as variáveis e pelo choque provocado no vetor de médias.

Para situações em que três variáveis são avaliadas ($p=3$), sob amostragem dupla, observou-se que, mesmo diante de valores de correlação mais elevados, o teste de Hayter e Tsui apresentou melhor desempenho em termos de poder do que o teste T^2 de Hotelling. Essa conclusão, reflete para o caso de amostragem dupla, as considerações já existentes na literatura de que o poder do teste de Hayter e Tsui é fortemente influenciado pelo desvio do vetor de médias. Mesmo em situações em que a distância de Mahalanobis foi extremamente baixa ($d=0,031$), isto é, os vetores sob a hipótese nula e alternativa foram bastante próximos, o teste de Hayter e Tsui conseguiu captar o impacto provocado na média das variáveis melhor que o T^2 de Hotelling, sobretudo nas situações em que o plano amostral utilizado foi tal que se utilizou o mesmo número de observações em ambas as etapas ($n_1 = n_2$).

As estimativas de poder observado foram progressivas na medida em que se provocou um aumento as distâncias entre μ_0 e μ_1 .

Essas características de cada obtidas por meio desses estudos de simulação evidenciam o ganho de se utilizar o teste de Hayter e Tsui sob amostragem dupla, tendo em vista que, por meio de um método operacionalmente simples e utilizando-se uma amostra pequena, é possível detectar desvios no vetor de médias.

Tabela 14: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=3$, $\alpha_1 = 0,00$

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias	Matriz de Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$					
				n_1	n_2	\bar{n}	T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
							Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,125	5	5	7	0,00000	0,12937	0,12937	0,00000	0,28386	0,28386
				5	10	9	0,00000	0,16732	0,16732	0,00000	0,22075	0,22075
				10	10	14	0,00000	0,22468	0,22468	0,00000	0,39422	0,39422
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,138	5	5	7	0,00000	0,13983	0,13983	0,00000	0,25822	0,25822
				5	10	9	0,00000	0,17927	0,17927	0,00000	0,20371	0,20371
				10	10	14	0,00000	0,24371	0,24371	0,00000	0,36217	0,36217
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,031	5	5	7	0,00000	0,06832	0,06832	0,00000	0,17070	0,17070
				5	10	9	0,00000	0,07647	0,07647	0,00000	0,10554	0,10554
				10	10	14	0,00000	0,08736	0,08736	0,00000	0,19368	0,19368
$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,500	5	5	7	0,00000	0,41780	0,41780	0,00000	0,57900	0,57900
				5	10	9	0,00000	0,54066	0,54066	0,00000	0,56938	0,56938
				10	10	14	0,00000	0,72875	0,72875	0,00000	0,80734	0,80734
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,553	5	5	7	0,00000	0,45844	0,45844	0,00000	0,53021	0,53021
				5	10	9	0,00000	0,58244	0,58244	0,00000	0,52270	0,52270
				10	10	14	0,00000	0,77177	0,77177	0,00000	0,76586	0,76586
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,123	5	5	7	0,00000	0,12955	0,12955	0,00000	0,23019	0,23019
				5	10	9	0,00000	0,16600	0,16600	0,00000	0,17168	0,17168
				10	10	14	0,00000	0,22122	0,22122	0,00000	0,31137	0,31137

Tabela 15: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=3$, $\alpha_1=0,01$

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias	Matriz de Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$					
				n_1	n_2	\bar{n}	T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
							Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,125	5	5	7	0,02309	0,10405	0,12713	0,02151	0,25127	0,27278
				5	10	9	0,02318	0,13842	0,16160	0,02098	0,19308	0,21406
				10	10	14	0,04068	0,17836	0,21904	0,03457	0,34638	0,38095
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,138	5	5	7	0,02470	0,11196	0,13666	0,02126	0,22764	0,24890
				5	10	9	0,02468	0,14951	0,17418	0,02103	0,17471	0,19573
				10	10	14	0,04490	0,19563	0,24053	0,03451	0,31429	0,34880
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,031	5	5	7	0,01286	0,05412	0,06698	0,01194	0,14977	0,16171
				5	10	9	0,01281	0,06235	0,07516	0,01192	0,08912	0,10104
				10	10	14	0,01601	0,07047	0,08647	0,01364	0,16846	0,18210
$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,500	5	5	7	0,08837	0,32314	0,41151	0,07252	0,49832	0,57084
				5	10	9	0,08787	0,44480	0,53267	0,07027	0,49512	0,56539
				10	10	14	0,22324	0,49808	0,72132	0,16853	0,63645	0,80498
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,553	5	5	7	0,10033	0,35097	0,45130	0,06940	0,45405	0,52346
				5	10	9	0,09981	0,47501	0,57482	0,06845	0,44588	0,51433
				10	10	14	0,25552	0,51275	0,76827	0,15802	0,60095	0,75897
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,123	5	5	7	0,02280	0,10353	0,12633	0,01804	0,20327	0,22130
				5	10	9	0,02293	0,13748	0,16041	0,01793	0,14638	0,16431
				10	10	14	0,04029	0,17709	0,21738	0,02747	0,27088	0,29835

Tabela 16: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=3$, $\alpha_1=0,025$

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias	Matriz de Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$					
				n_1	n_2	\bar{n}	T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
							Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,125	5	5	7	0,05012	0,07028	0,12040	0,04772	0,20210	0,24981
				5	10	9	0,05012	0,09837	0,14849	0,04698	0,14916	0,19615
				10	10	14	0,08044	0,12499	0,20542	0,06971	0,28285	0,35256
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,138	5	5	7	0,05330	0,07603	0,12932	0,04637	0,18136	0,22773
				5	10	9	0,05308	0,10798	0,16106	0,04559	0,13340	0,17899
				10	10	14	0,08735	0,13747	0,22481	0,07055	0,25487	0,32542
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,031	5	5	7	0,03069	0,03515	0,06584	0,02874	0,11614	0,14488
				5	10	9	0,03051	0,04082	0,07133	0,02825	0,06366	0,09191
				10	10	14	0,03650	0,04602	0,08252	0,03261	0,13112	0,16373
$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,500	5	5	7	0,15502	0,23413	0,38915	0,13423	0,41435	0,54858
				5	10	9	0,15476	0,35278	0,50754	0,13319	0,41075	0,54394
				10	10	14	0,33331	0,36821	0,70151	0,26917	0,52391	0,79308
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,553	5	5	7	0,17141	0,25587	0,42728	0,12525	0,37357	0,49881
				5	10	9	0,17215	0,38106	0,55321	0,12392	0,36536	0,48928
				10	10	14	0,37259	0,37776	0,75034	0,25631	0,48914	0,74544
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,123	5	5	7	0,04967	0,06983	0,11950	0,04021	0,16039	0,20060
				5	10	9	0,04993	0,09739	0,14732	0,03970	0,11007	0,14978
				10	10	14	0,07947	0,12306	0,20253	0,05758	0,21727	0,27485

Tabela 17: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para os casos em que Σ é conhecida e $p=3$, $\alpha_1=0,04$

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias	Matriz de Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$					
				n_1	n_2	\bar{n}	T^2 de Hotelling			Hayter e Tsui		
							Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,125	5	5	7	0,07404	0,03380	0,10785	0,07053	0,13648	0,20701
				5	10	9	0,07443	0,05121	0,12564	0,07082	0,09246	0,16328
				10	10	14	0,11385	0,06388	0,17773	0,10486	0,19899	0,30385
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,138	5	5	7	0,07801	0,03585	0,11386	0,06883	0,12111	0,18995
				5	10	9	0,07846	0,05705	0,13551	0,06983	0,08400	0,15383
				10	10	14	0,12284	0,07187	0,19470	0,10190	0,17634	0,27823
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,031	5	5	7	0,04811	0,01475	0,06285	0,04525	0,07175	0,11700
				5	10	9	0,04808	0,01781	0,06590	0,04576	0,03558	0,08134
				10	10	14	0,05644	0,02089	0,07733	0,05100	0,08191	0,13291
$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,500	5	5	7	0,20438	0,13813	0,34251	0,18092	0,31445	0,49538
				5	10	9	0,20491	0,24300	0,44791	0,18079	0,30789	0,48868
				10	10	14	0,40400	0,24438	0,64838	0,35016	0,41199	0,76215
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,553	5	5	7	0,22517	0,15086	0,37602	0,17032	0,27660	0,44692
				5	10	9	0,22521	0,26867	0,49388	0,17183	0,27204	0,44388
				10	10	14	0,44484	0,25577	0,70061	0,32280	0,38144	0,70424
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,123	5	5	7	0,07361	0,03300	0,10661	0,06089	0,10465	0,16554
				5	10	9	0,07353	0,05056	0,12408	0,06137	0,06808	0,12945
				10	10	14	0,11281	0,06501	0,17782	0,08467	0,14735	0,23203

Capítulo 5: Avaliação da Qualidade do Teste T^2 de Hotelling via simulações de Monte Carlo – Matriz de Covariâncias Desconhecida

Em situações práticas é comum termos circunstâncias em que a matriz de covariâncias do processo desconhecida. No artigo de Costa et. al. (2008) apenas casos em que a matriz de covariâncias era conhecida foram abordadas. Por esse motivo, o teste T^2 de Hotelling foi estendido para esse tipo de situação no caso de amostragem dupla. O objetivo deste capítulo é avaliar o impacto da estimação da matriz de covariâncias no poder do teste T^2 de Hotelling em amostragem dupla comparando os resultados com aqueles obtidos no caso em que a estrutura de variabilidade do processo é conhecida a priori. De forma geral, no caso de amostragem simples, é conhecido que a estimação da matriz de covariâncias provoca redução no poder do teste.

Para esse propósito, foram selecionados dois dos cenários abordados no caso bivariado em que a matriz de covariâncias teórica era conhecida, tais que as distâncias de Mahalanobis eram dadas por $d = 0,125$ e $d = 0,500$. Os limites críticos para esse teste foram obtidos através do algoritmo descrito no Quadro 5, página 47, na Seção 3.2 e encontram-se no Anexo B. A aplicação do teste baseou-se no procedimento descrito na Seção 2.3.6. A matriz de covariâncias Σ foi estimada pela matriz de covariâncias amostral, S_1 na primeira fase e por S na segunda fase de amostragem dupla (página 32).

Os resultados que contêm as estimativas de poder são apresentados nas Tabelas 18 e 19, páginas 78 e 79.

Tabela 18: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling para os casos em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			T^2 de Hotelling											
						$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$			$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$			$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
0,125	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$	4	4	6	0,00000	0,01393	0,01393	0,00000	0,00898	0,00898	0,00000	0,00288	0,00288	0,00000	0,00017	0,00017
			5	15	10	0,00000	0,10456	0,10456	0,00000	0,09724	0,09724	0,00000	0,07648	0,07648	0,00000	0,03958	0,03959
			10	10	14	0,00000	0,17906	0,17906	0,00100	0,15705	0,15805	0,00983	0,11103	0,12085	0,02490	0,04799	0,07289
			15	15	21	0,00000	0,31135	0,31135	0,01324	0,27905	0,29229	0,04806	0,19916	0,24722	0,08433	0,09888	0,18320
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,50$	4	4	6	0,00000	0,01420	0,01420	0,00000	0,00900	0,00900	0,00000	0,00296	0,00296	0,00000	0,00017	0,00017
			5	15	10	0,00000	0,10380	0,10380	0,00000	0,09651	0,09651	0,00000	0,07728	0,07728	0,04807	0,19913	0,24721
			10	10	14	0,00000	0,17851	0,17851	0,00105	0,15616	0,15721	0,00979	0,11075	0,12054	0,02483	0,04898	0,07381
			15	15	21	0,00000	0,31136	0,31136	0,01345	0,28017	0,29362	0,00001	0,03994	0,03995	0,08447	0,10165	0,18612
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,31$	4	4	6	0,00000	0,01429	0,01429	0,00000	0,00876	0,00876	0,00000	0,00277	0,00277	0,00000	0,00017	0,00017
			5	15	10	0,00000	0,10455	0,10455	0,00000	0,09652	0,09652	0,00000	0,07843	0,07843	0,00000	0,03902	0,03903
			10	10	14	0,00000	0,17832	0,17832	0,00106	0,15757	0,15863	0,00988	0,11037	0,12025	0,02499	0,04513	0,07013
			15	15	21	0,00000	0,31005	0,31005	0,01338	0,27593	0,28931	0,04800	0,20069	0,24869	0,08448	0,10256	0,18704
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	4	4	6	0,00000	0,01434	0,01434	0,00000	0,00869	0,00869	0,00000	0,00284	0,00284	0,00000	0,00017	0,00017
			5	15	10	0,00000	0,10419	0,10419	0,00000	0,09712	0,09712	0,00000	0,07643	0,07643	0,00000	0,03923	0,03924
			10	10	14	0,00000	0,17891	0,17891	0,00103	0,15792	0,15895	0,00987	0,11203	0,12189	0,02491	0,04889	0,07380
			15	15	21	0,00000	0,30980	0,30980	0,01348	0,27661	0,29009	0,04780	0,20144	0,24924	0,08445	0,09924	0,18369
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,21$	4	4	6	0,00000	0,01495	0,01495	0,00000	0,00878	0,00878	0,00000	0,00269	0,00269	0,00000	0,00017	0,00017
			5	15	10	0,00000	0,10313	0,10313	0,00000	0,09706	0,09706	0,00000	0,07741	0,07741	0,00000	0,03966	0,03967
			10	10	14	0,00000	0,17760	0,17760	0,00104	0,15933	0,16038	0,00993	0,11125	0,12118	0,02496	0,04677	0,07172
			15	15	21	0,00000	0,30939	0,30939	0,01338	0,27735	0,29073	0,04781	0,20131	0,24912	0,08434	0,09834	0,18268
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	4	4	6	0,00000	0,01393	0,01393	0,00000	0,00850	0,00850	0,00000	0,00278	0,00278	0,00000	0,00019	0,00019
			5	15	10	0,00000	0,10387	0,10387	0,00000	0,09641	0,09641	0,00000	0,07699	0,07699	0,00001	0,03948	0,03949
			10	10	14	0,00000	0,17619	0,17619	0,00106	0,15853	0,15959	0,00992	0,10991	0,11983	0,02502	0,04639	0,07141
			15	15	21	0,00000	0,31253	0,31253	0,01339	0,27823	0,29162	0,04827	0,20079	0,24906	0,08447	0,10024	0,18472

Tabela 19: Estimativas de poder dos testes T^2 de Hotelling para os casos em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			T^2 de Hotelling											
						$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$			$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$			$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$		
			n_1	n_2	\bar{n}	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder	Poder 1	Poder 2	Poder
0,500	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$	4	4	6	0,00000	0,10067	0,10067	0,00000	0,07450	0,07450	0,00000	0,03343	0,03343	0,00000	0,00401	0,00401
			5	15	10	0,00000	0,39343	0,39343	0,00000	0,39792	0,39792	0,00000	0,39007	0,39007	0,00010	0,32708	0,32718
			10	10	14	0,00000	0,69936	0,69936	0,02182	0,65451	0,67634	0,09972	0,52140	0,62112	0,18067	0,32281	0,50348
			15	15	21	0,00000	0,89582	0,89582	0,18294	0,70688	0,88982	0,35920	0,50889	0,86809	0,46847	0,34325	0,81171
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 1,00$	4	4	6	0,00000	0,10194	0,10194	0,00000	0,07468	0,07468	0,00000	0,03432	0,03432	0,00000	0,00418	0,00418
			5	15	10	0,00000	0,89571	0,89571	0,18285	0,70719	0,89004	0,35878	0,50912	0,86790	0,46866	0,34613	0,81478
			10	10	14	0,00000	0,69927	0,69927	0,02207	0,65342	0,67548	0,10015	0,52105	0,62120	0,18059	0,32670	0,50729
			15	15	21	0,00000	0,89571	0,89571	0,18278	0,70725	0,89004	0,35884	0,50913	0,86796	0,46907	0,34547	0,81454
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	4	4	6	0,00000	0,10163	0,10163	0,00000	0,07344	0,07344	0,00000	0,03297	0,03297	0,00000	0,00435	0,00435
			5	15	10	0,00000	0,39209	0,39209	0,00000	0,39688	0,39688	0,00000	0,39186	0,39186	0,00009	0,32458	0,32467
			10	10	14	0,00000	0,69858	0,69858	0,02200	0,65457	0,67656	0,10029	0,52001	0,62030	0,18042	0,31497	0,49539
			15	15	21	0,00000	0,89509	0,89509	0,18301	0,70510	0,88811	0,35885	0,51021	0,86906	0,46901	0,34623	0,81524
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,23$	4	4	6	0,00000	0,10278	0,10278	0,00000	0,07300	0,07300	0,00000	0,03367	0,03367	0,00000	0,00415	0,00415
			5	15	10	0,00000	0,39320	0,39320	0,00000	0,39832	0,39832	0,00000	0,39003	0,39003	0,00010	0,32575	0,32586
			10	10	14	0,00000	0,69905	0,69905	0,02199	0,65544	0,67744	0,10003	0,52342	0,62345	0,18046	0,32638	0,50684
			15	15	21	0,00000	0,89513	0,89513	0,18308	0,70570	0,88877	0,35836	0,51106	0,86942	0,46865	0,34414	0,81279
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	4	4	6	0,00000	0,10487	0,10487	0,00000	0,07364	0,07364	0,00000	0,03229	0,03229	0,00000	0,00440	0,00440
			5	15	10	0,00000	0,39197	0,39197	0,00000	0,39771	0,39771	0,00000	0,39153	0,39153	0,00009	0,32748	0,32757
			10	10	14	0,00000	0,69812	0,69812	0,02179	0,65693	0,67871	0,10029	0,52196	0,62224	0,18049	0,32018	0,50068
			15	15	21	0,00000	0,89495	0,89495	0,18327	0,70548	0,88874	0,35930	0,51008	0,86937	0,46874	0,34216	0,81090
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,85$	4	4	6	0,00000	0,10057	0,10057	0,00000	0,07241	0,07241	0,00000	0,03282	0,03282	0,00000	0,00451	0,00451
			5	15	10	0,00000	0,39197	0,39197	0,00000	0,39731	0,39731	0,00000	0,38975	0,38975	0,00009	0,32641	0,32650
			10	10	14	0,00000	0,69665	0,69665	0,02175	0,65599	0,67774	0,09976	0,52007	0,61983	0,18084	0,31827	0,49911
			15	15	21	0,00000	0,89617	0,89617	0,18310	0,70575	0,88885	0,35847	0,51047	0,86894	0,46877	0,34432	0,81309

Como esperado, em amostragem dupla a capacidade do teste T^2 de Hotelling em rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa é maior nas situações em que a matriz de covariâncias do processo Σ é conhecida. Por outro lado, percebe-se que a aproximação entre o poder do teste para situações em que a matriz é conhecida e desconhecida melhora na medida em que se aumenta o número de observações avaliadas.

De um modo geral, na comparação entre os cenários e internamente a eles, as conclusões para o caso em que a matriz de covariâncias é desconhecida são similares aos casos em que Σ é conhecida, ou seja, os desvios no vetor de médias do processo foram mais rapidamente detectados quando a distância entre o vetor de médias das hipóteses nula e alternativa e os tamanhos amostrais foram maiores.

A Tabela 20 permite a comparação do efeito da estimação da matriz de covariâncias teórica do processo no poder do teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla. De um modo geral, percebe-se que o teste tem seu poder reduzido quando a aplicação do teste ocorre com a utilização da matriz de covariâncias estimada através da amostra, sobretudo em situações em que o desvio em relação ao vetor de médias e os tamanhos amostrais são menores. Neste último ponto, é importante verificar, antes de se proceder com a aplicação do teste, se a amostra é suficiente para realizar obter uma boa estimativa de Σ . De um modo geral, recomenda-se a realização de um estudo prévio sobre os parâmetros envolvidos no processo, conforme discutido na Seção 2.2.

Tabela 20: Comparação entre as estimativas de poder global do teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla nas situações em que a matriz de covariâncias teórica Σ é conhecida e desconhecida

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanho de Amostra			Poder global do teste T^2 de Hotelling							
			n_1	n_2	\bar{n}	Σ conhecida				Σ desconhecida			
						$\alpha_j=0,00$	$\alpha_j=0,01$	$\alpha_j=0,025$	$\alpha_j=0,04$	$\alpha_j=0,00$	$\alpha_j=0,01$	$\alpha_j=0,025$	$\alpha_j=0,04$
0,125	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$	4	4	6	0,13066	0,1279	0,11958	0,10841	0,01393	0,00898	0,00288	0,00017
			5	15	10	0,22203	0,21525	0,19958	0,16528	0,10456	0,09724	0,07648	0,03959
			10	10	14	0,26282	0,25682	0,24018	0,21196	0,17906	0,15805	0,12085	0,07289
			15	15	21	0,37472	0,36904	0,3468	0,3068	0,31135	0,29229	0,24722	0,1832
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,50$	4	4	6	0,13094	0,12726	0,12078	0,10787	0,0142	0,009	0,00296	0,00017
			5	15	10	0,22254	0,21503	0,19777	0,16692	0,1038	0,09651	0,07728	0,24721
			10	10	14	0,26115	0,25594	0,24097	0,21194	0,17851	0,15721	0,12054	0,07381
			15	15	21	0,37517	0,36592	0,3451	0,30452	0,31136	0,29362	0,03995	0,18612
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,31$	4	4	6	0,12988	0,12923	0,12157	0,10771	0,01429	0,00876	0,00277	0,00017
			5	15	10	0,22177	0,21627	0,20048	0,16614	0,10455	0,09652	0,07843	0,03903
			10	10	14	0,26224	0,25868	0,24153	0,21068	0,17832	0,15863	0,12025	0,07013
			15	15	21	0,37434	0,36866	0,34929	0,30499	0,31005	0,28931	0,24869	0,18704
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	4	4	6	0,13206	0,127	0,12087	0,10809	0,01434	0,00869	0,00284	0,00017
			5	15	10	0,22334	0,21638	0,19799	0,16619	0,10419	0,09712	0,07643	0,03924
			10	10	14	0,26143	0,25768	0,24204	0,21157	0,17891	0,15895	0,12189	0,0738
			15	15	21	0,37546	0,36752	0,34753	0,30582	0,3098	0,29009	0,24924	0,18369
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,21$	4	4	6	0,13027	0,12782	0,12129	0,10745	0,01495	0,00878	0,00269	0,00017
			5	15	10	0,22448	0,21658	0,19856	0,16702	0,10313	0,09706	0,07741	0,03967
			10	10	14	0,26301	0,25903	0,24113	0,2102	0,1776	0,16038	0,12118	0,07172
			15	15	21	0,37672	0,36578	0,34759	0,30391	0,30939	0,29073	0,24912	0,18268
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	4	4	6	0,13191	0,12936	0,08888	0,11189	0,01393	0,0085	0,00278	0,00019
5			15	10	0,22251	0,21645	0,39469	0,16657	0,10387	0,09641	0,07699	0,03949	
10			10	14	0,262	0,25799	0,24144	0,21083	0,17619	0,15959	0,11983	0,07141	
15			15	21	0,37708	0,36866	0,34801	0,30572	0,31253	0,29162	0,24906	0,18472	
0,500	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$	4	4	6	0,40383	0,39653	0,37082	0,32872	0,10067	0,0745	0,03343	0,00401
			5	15	10	0,62904	0,62805	0,61966	0,57902	0,39343	0,39792	0,39007	0,32718
			10	10	14	0,78379	0,7785	0,76046	0,71418	0,69936	0,67634	0,62112	0,50348
			15	15	21	0,92058	0,9190	0,91088	0,88854	0,89582	0,88982	0,86809	0,81171
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 1,00$	4	4	6	0,40351	0,39464	0,37394	0,32528	0,10194	0,07468	0,03432	0,00418
			5	15	10	0,62878	0,62816	0,61774	0,58201	0,89571	0,89004	0,8679	0,81478
			10	10	14	0,78364	0,77903	0,76115	0,71678	0,69927	0,67548	0,6212	0,50729
			15	15	21	0,92053	0,91824	0,91039	0,88737	0,89571	0,89004	0,86796	0,81454
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	4	4	6	0,40349	0,39878	0,37444	0,32634	0,10163	0,07344	0,03297	0,00435
			5	15	10	0,62855	0,6292	0,62071	0,58064	0,39209	0,39688	0,39186	0,32467
			10	10	14	0,78375	0,78046	0,76223	0,7161	0,69858	0,67656	0,6203	0,49539
			15	15	21	0,92007	0,91907	0,91219	0,88793	0,89509	0,88811	0,86906	0,81524
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,23$	4	4	6	0,40707	0,3943	0,37349	0,32659	0,10278	0,073	0,03367	0,00415
			5	15	10	0,62888	0,62897	0,6183	0,58168	0,3932	0,39832	0,39003	0,32586
			10	10	14	0,78293	0,77937	0,76164	0,71595	0,69905	0,67744	0,62345	0,50684
			15	15	21	0,92037	0,91907	0,91100	0,88819	0,89513	0,88877	0,86942	0,81279
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	4	4	6	0,40436	0,39613	0,37421	0,32622	0,10487	0,07364	0,03229	0,0044
			5	15	10	0,62979	0,62895	0,61845	0,58179	0,39197	0,39771	0,39153	0,32757
			10	10	14	0,78375	0,78006	0,76149	0,71443	0,69812	0,67871	0,62224	0,50068
			15	15	21	0,92118	0,91828	0,91157	0,88703	0,89495	0,88874	0,86937	0,8109
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,85$	4	4	6	0,40705	0,39792	0,37306	0,32546	0,10057	0,07241	0,03282	0,00451
5			15	10	0,62891	0,62933	0,62026	0,58178	0,39197	0,39731	0,38975	0,3265	
10			10	14	0,78343	0,78000	0,76077	0,71584	0,69665	0,67774	0,61983	0,49911	
15			15	21	0,92115	0,91918	0,9116	0,88818	0,89617	0,88885	0,86894	0,81309	

Capítulo 6: Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação, propôs-se uma alternativa para a determinação dos limites críticos do teste T^2 de Hotelling para o vetor de médias populacional, introduzido por Costa e Machado (2008) para amostragem dupla nos casos em que a matriz de covariâncias é conhecida. Além disso, introduziu-se uma adaptação do teste de Hayter e Tsui (1994) para o caso de amostragem dupla e ambos os testes foram estendidos para situações em que o número de variáveis envolvidas no estudo era maior do que 2. Como em muitas situações de ordem prática a matriz de covariâncias é desconhecida, nesta dissertação foi introduzido e implementado teste T^2 de Hotelling para a situação na qual a matriz de covariâncias não é conhecida.

A abordagem da comparação entre as estimativas dos limites críticos obtidos via integração numérica por Costa e Machado (2008) e por simulações de Monte Carlo realizadas nesta dissertação permitiu verificar que ambos resultados foram próximos, levando a validação do algoritmo de obtenção do limite crítico CL_2 associado à segunda fase de inspeção do teste T^2 de Hotelling em amostragem dupla. A alternativa proposta nesta dissertação proporcionou um desempenho bastante satisfatório quando comparada à solução via integração numérica proposta por Costa e Machado (2008) para o caso bivariado. Adicionalmente, a solução apresentada neste estudo é computacionalmente mais simples do que a solução proposta por esses autores, já que não está restrita à utilização de *softwares* que realizam integração numérica e independentes da escolha de precisão, como é o caso de integração numérica. Além disso, o procedimento via simulação permite a extensão automática do teste estatístico T^2 de Hotelling para os casos em que se tem um número de variáveis maior que 2.

A adaptação do teste de Hayter e Tsui para o procedimento amostragem dupla também introduzida neste estudo, caracterizou-se, do mesmo modo, pela simplicidade operacional e apresentou um bom desempenho quando comparado ao T^2 de Hotelling para a situação em que a matriz de covariâncias populacional é conhecida. A comparação entre ambos testes sob amostragem dupla através de diversos cenários distintos permitiu identificar alguns padrões de comportamento que podem auxiliar na seleção de um dos testes para avaliação do estado

de controle estatístico de um processo. O teste de Hayter e Tsui apresentou-se sensível ao aumento da correlação e ao desbalanceamento do tamanhos das amostras, o que não ocorreu com o teste T^2 de Hotelling, no caso em que a matriz Σ é conhecida.

Para as situações em que mais de três variáveis são analisadas, observou-se, dentre os cenários avaliados, que o teste de Hayter e Tsui apresentou-se mais sensível em detectar pequenos desvios no processo do que o T^2 de Hotelling, ambos sob amostragem dupla. Mesmo diante de pequenas distâncias entre os vetores de médias sob as hipóteses nula e alternativa e pequenos tamanhos de amostra, as estimativas de poder demonstraram a capacidade do teste em captar as alterações provocadas no vetor de médias das variáveis. Essas características evidenciam o benefício econômico e computacional que podem ser obtidos ao se empregar o teste de Hayter e Tsui sob amostragem dupla na avaliação do vetor de médias de um processo multivariado. Dispondo de amostras de tamanhos pequenos e utilizando um método operacional de fácil implementação, mesmo se tratando de pequenos deslocamentos, é possível detectar alterações no processo.

A extensão do teste T^2 de Hotelling em amostragem dupla para a situação em que a matriz de covariâncias é desconhecida, embora seja operacionalmente de simples adaptação, apresentou menor poder de rejeição da hipótese nula em situações em que houve deslocamentos no vetor de médias. Dessa forma, sugere-se realizar o estudo da estrutura de variabilidade do processo previamente à aplicação do teste, já que na prática, o controle estatístico de um processo exigirá revisão periódica e estudos sobre os parâmetros das características de qualidade monitoradas.

A comparação do teste T^2 de Hotelling em situações em que matriz de covariâncias teórica do processo é conhecida e nos casos em que precisa ser estimada pelas observações amostrais, demonstrou que as estimativas de poder são mais elevadas no primeiro caso, principalmente nos cenários em que o tamanho amostral utilizado para a avaliação foi menor. De fato, é razoável afirmar que pequenos tamanhos de amostra não são confiáveis para obter estimativas adequadas da matriz de covariâncias populacional, e, conseqüentemente, provocarão dificuldade no desempenho do teste em termos de poder.

Inicialmente, houve a iniciativa de se adaptar também o teste de Hayter e Tsui para amostragem dupla em situações em que a matriz de covariâncias teórica não é conhecida. No entanto, limitações durante a implementação restringiram a apresentação de resultados. Nesse estudo observou-se alto custo computacional necessário para estimação do tamanho e poder do teste, e, conseqüentemente, validação do algoritmo.

Em relação ao tempo computacional necessário à execução dos algoritmos, é

importante destacar que o teste T^2 de Hotelling requer significativamente mais tempo para obtenção dos limites críticos do que o Hayter e Tsui. Isso se deve ao fato que, para a carta T^2 é necessário simular a distribuição condicional da estatística da segunda fase em relação a estatística obtida a partir da amostra da primeira etapa de análise. Para esse procedimento, é necessário em torno de 1,5 hora para obtenção dos limites. No caso do teste de Hayter e Tsui, esse procedimento é mais rápido, pois além de precisar gerar apenas uma sequência para determinação de todos os limites críticos com compõem a carta de controle, as operações envolvidas no cálculo da estatística são bastante simples, bastando apenas 2 minutos para execução do algoritmo. Em contrapartida, quando tratamos o caso em que a matriz de covariâncias é desconhecida, não se observa um aumento do custo computacional evidente no tempo necessário para estimação dos limites críticos do teste T^2 de Hotelling, já que o procedimento é bastante similar, bastando alterar alguns parâmetros no algoritmo. Por outro lado, o mesmo não se observou na tentativa de implementação dos algoritmos associados à carta de Hayter e Tsui. Para cada uma das N amostras geradas era preciso realizar uma nova geração de um número grande amostras sob a hipótese nula para construção da distribuição empírica para determinação dos limites críticos em cada interação aumentando significativamente o número de operações a serem executadas pelo algoritmo, e tais alterações inflacionariam o tempo de execução do mesmo.

O *software* R utilizado como linguagem de programação caracteriza-se pela simplicidade operacional e de linguagem, com boa aceitação e popularidade dentre os usuários. Apesar disso, apresenta a desvantagem de ser um *software* lento na execução de algoritmos. Por esse motivo, acredita-se que a implementação e utilização dos programas utilizados nesta dissertação em outras linguagens poderiam acarretar redução do custo computacional envolvido nas análises.

Em suma, como proposta para trabalhos futuros sugere-se realizar uma otimização do algoritmo para extensão da implementação do teste de Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que a matriz de covariâncias é desconhecida. Adicionalmente, seria interessante a realização de um estudo que permitisse uma comparação detalhada de ambos os testes submetidos a amostragem simples e dupla. No entanto, os resultados obtidos nesse estudo ressaltaram a vantagem de se utilizar a amostragem dupla, visto que, mesmo diante de uma amostra pequena, ambos os testes já conseguiram detectar deslocamentos pequenos no vetor de médias logo na primeira etapa de inspeção, utilizando-se diferentes valores do número médio de observações \bar{n} . Dessa forma, é possível aumentar o poder dos testes sem aumentar o tamanho amostral, ou, alternativamente, reduzir o tamanho amostral sem diminuir

a eficiência do teste em detectar pequenos a moderados deslocamentos no vetor de médias, utilizando métodos computacionalmente mais simples e que reduzirão o custo durante a avaliação do processo.

Anexo A

A estatística T^2 de Hotelling é apresentada em muitos textos na sua forma em que se utiliza amostragem simples. No entanto, ao introduzir a aplicação do teste em processos estatísticos bivariados sob o procedimento de amostragem dupla, Costa e Machado (2008), utilizaram a decomposição da estatística T^2 da segunda fase de inspeção como combinação linear de duas variáveis aleatórias normais ortogonais. Os detalhes dessa decomposição que não foram apresentados no artigo original foram desenvolvidos como parte desta dissertação e estão apresentados a seguir.

Desenvolvimento da estatística T^2 de Hotelling para o procedimento de Amostragem Dupla

Consideremos a estatística T_1^2 como sendo a estatística T^2 de Hotelling calculada no primeiro estágio da inspeção via amostragem dupla, com tamanho de amostra igual a n_1 :

$$T_1^2 = n_1(\bar{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)$$
$$T_1^2 = n_1 \left[\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} \right]' \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} \right]$$

$$T_1^2 = n_1 \begin{bmatrix} \bar{x} - \mu_x & \bar{y} - \mu_y \end{bmatrix} \frac{1}{|\Sigma|} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} - \mu_x \\ \bar{y} - \mu_y \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \frac{n_1}{|\Sigma|} \left[(\bar{x} - \mu_x) \sigma_y^2 - (\bar{y} - \mu_y) \sigma_{xy} \quad -(\bar{x} - \mu_x) \sigma_{xy} + (\bar{y} - \mu_y) \sigma_x^2 \right] \begin{bmatrix} \bar{x} - \mu_x \\ \bar{y} - \mu_y \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \frac{n_1}{|\Sigma|} \left[(\bar{x} - \mu_x)^2 \sigma_y^2 - (\bar{x} - \mu_x)(\bar{y} - \mu_y) \sigma_{xy} - (\bar{x} - \mu_x)(\bar{y} - \mu_y) \sigma_{xy} + (\bar{y} - \mu_y)^2 \sigma_x^2 \right]$$

$$T_1^2 = \frac{n_1}{|\Sigma|} \left[(\bar{x} - \mu_x)^2 \sigma_y^2 - 2(\bar{x} - \mu_x)(\bar{y} - \mu_y) \sigma_{xy} + (\bar{y} - \mu_y)^2 \sigma_x^2 \right]$$

$$T_1^2 = \frac{n_1 \sigma_y^2 (\bar{x} - \mu_x)^2}{|\Sigma|} - \frac{2n_1 \sigma_{xy} (\bar{x} - \mu_x)(\bar{y} - \mu_y)}{|\Sigma|} + \frac{n_1 \sigma_x^2 (\bar{y} - \mu_y)^2}{|\Sigma|}$$

$$T_1^2 = \left[\frac{\sqrt{n_1} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right]^2 - \frac{2n_1 \sigma_{xy} \sigma_x \sigma_y (\bar{x} - \mu_x)(\bar{y} - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y |\Sigma|} + \left[\frac{\sqrt{n_1} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right]^2$$

Sabe-se que:

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad e \quad |\Sigma| = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 > 0.$$

Consideremos ainda:

$$h_1(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n_1} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \quad e \quad h_2(\bar{y}) = \frac{\sqrt{n_1} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}}.$$

Então:

$$T_1^2 = h_1^2(\bar{x}) - 2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{\sqrt{n_1} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x) \sqrt{n_1} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|} \sqrt{|\Sigma|}} + h_2^2(\bar{y})$$

$$T_1^2 = h_1^2(\bar{x}) - 2 \sin \varphi \cos \varphi h_1(\bar{x})h_2(\bar{y}) + h_2^2(\bar{y}).$$

Seja agora:

$$g_1(n, \boldsymbol{\mu}) = h_1(\bar{x}) \cos \varphi - h_2(\bar{y}) \sin \varphi$$

$$g_2(n, \boldsymbol{\mu}) = -h_1(\bar{x}) \sin \varphi + h_2(\bar{y}) \cos \varphi$$

Desenvolvendo ambas as equações, tem-se:

$$g_1^2(n, \boldsymbol{\mu}) + g_2^2(n, \boldsymbol{\mu}) = [h_1(\bar{x}) \cos \varphi - h_2(\bar{y}) \sin \varphi]^2 + [-h_1(\bar{x}) \sin \varphi + h_2(\bar{y}) \cos \varphi]^2$$

$$g_1^2(n, \boldsymbol{\mu}) + g_2^2(n, \boldsymbol{\mu}) = h_1^2(\bar{x}) \cos^2 \varphi - 2h_1(\bar{x})h_2(\bar{y}) \cos \varphi \sin \varphi + h_2^2(\bar{y}) \sin^2 \varphi + h_1^2(\bar{x}) \sin^2 \varphi - 2h_1(\bar{x})h_2(\bar{y}) \cos \varphi \sin \varphi + h_2^2(\bar{y}) \cos^2 \varphi$$

$$g_1^2(n, \boldsymbol{\mu}) + g_2^2(n, \boldsymbol{\mu}) = h_1^2(\bar{x}) [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi] - 4h_1(\bar{x})h_2(\bar{y}) \cos \varphi \sin \varphi + h_2^2(\bar{y}) [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi]$$

$$g_1^2(n, \boldsymbol{\mu}) + g_2^2(n, \boldsymbol{\mu}) = h_1^2(\bar{x}) - 2 \sin 2\varphi + h_2^2(\bar{y})$$

$$g_1^2(n, \boldsymbol{\mu}) + g_2^2(n, \boldsymbol{\mu}) = T_1^2$$

Além disso, $g(n, \boldsymbol{\mu}) = [g_1(n, \boldsymbol{\mu}), g_2(n, \boldsymbol{\mu})] \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\varepsilon})$, onde $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

No entanto, considerando que o processo já está na segunda fase, tem-se:

$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n}$ e $\bar{y} = \frac{n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2}{n}$. Logo a estatística T^2 considerando a amostra $n = n_1 + n_2$ será dada por:

$$T^2 = \left[\frac{\sqrt{n} \sigma_y \left(\frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n} - \mu_x \right)}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \right]^2 - \frac{2n \sigma_{xy} \left(\frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n} - \mu_x \right) \left(\frac{n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2}{n} - \mu_y \right)}{|\boldsymbol{\Sigma}|} + \left[\frac{\sqrt{n} \sigma_x \left(\frac{n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2}{n} - \mu_y \right)}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \right]^2$$

$$\begin{aligned}
T^2 &= \left[\frac{\sqrt{n}\sigma_y}{\sqrt{|\Sigma|}} \left(\frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 - n_1\mu_x - n_2\mu_x}{n} \right) \right]^2 - \frac{2n\sigma_{xy}}{|\Sigma|} \left(\frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 - n_1\mu_x - n_2\mu_x}{n} \right) \left(\frac{n_1\bar{y}_1 + n_2\bar{y}_2 - n_1\mu_y - n_2\mu_y}{n} \right) + \left[\frac{\sqrt{n}\sigma_x}{\sqrt{|\Sigma|}} \left(\frac{n_1\bar{y}_1 + n_2\bar{y}_2 - n_1\mu_y - n_2\mu_y}{n} \right) \right]^2 \\
T^2 &= \left[\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \left(\frac{n_1(\bar{x}_1 - \mu_x) + n_2(\bar{x}_2 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right) \right]^2 - \frac{2n\sigma_{xy}}{\sqrt{|\Sigma|}} \left(\frac{n_1(\bar{x}_1 - \mu_x) + n_2(\bar{x}_2 - \mu_x)}{n} \right) \left(\frac{n_1(\bar{y}_1 - \mu_y) + n_2(\bar{y}_2 - \mu_y)}{n} \right) + \left[\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \left(\frac{n_1(\bar{y}_1 - \mu_y) + n_2(\bar{y}_2 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right) \right]^2 \\
T^2 &= \left[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{n_1}\sigma_y(\bar{x}_1 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right) + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{n_2}\sigma_y(\bar{x}_2 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right) \right]^2 - \frac{2\sigma_{xy}n}{|\Sigma|} \left[\frac{n_1^2(\bar{x}_1 - \mu_x)(\bar{y}_1 - \mu_y) + n_1n_2(\bar{x}_1 - \mu_x)(\bar{y}_2 - \mu_y) + n_1n_2(\bar{x}_2 - \mu_x)(\bar{y}_1 - \mu_y) + n_2^2(\bar{x}_2 - \mu_x)(\bar{y}_2 - \mu_y)}{n^2} \right] + \\
&\quad \left[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{n_1}\sigma_x(\bar{y}_1 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right) + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{n_2}\sigma_x(\bar{y}_2 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right) \right]^2 \\
T^2 &= \left[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n}} h_1(\bar{x}_1) + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n}} h_1(\bar{x}_2) \right]^2 - \frac{2\sigma_{xy}}{n} \left[n_1 \frac{\sqrt{n_1}\sigma_y(\bar{x}_1 - \mu_x)\sqrt{n_1}\sigma_x(\bar{y}_1 - \mu_y)}{\sigma_y\sigma_x\sqrt{|\Sigma|}\sqrt{|\Sigma|}} + \sqrt{n_1}\sqrt{n_2} \left(\frac{\sqrt{n_1}\sigma_y(\bar{x}_1 - \mu_x)\sqrt{n_2}\sigma_x(\bar{y}_2 - \mu_y)}{\sigma_y\sigma_x\sqrt{|\Sigma|}\sqrt{|\Sigma|}} \right) + n_2 \frac{\sqrt{n_2}\sigma_y(\bar{x}_2 - \mu_x)\sqrt{n_2}\sigma_x(\bar{y}_2 - \mu_y)}{\sigma_y\sigma_x\sqrt{|\Sigma|}\sqrt{|\Sigma|}} \right] + \\
&\quad \left[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n}} h_2(\bar{y}_1) + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n}} h_2(\bar{y}_2) \right]^2 \\
T^2 &= \left[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n}} h_1(\bar{x}_1) + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n}} h_1(\bar{x}_2) \right]^2 - \frac{2\sigma_{xy}}{n\sigma_y\sigma_x} \left[n_1 h_1(\bar{x}_1) h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_1}\sqrt{n_2} h_1(\bar{x}_1) h_2(\bar{y}_2) + n_2 h_1(\bar{x}_2) h_2(\bar{y}_2) \right] + \left[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n}} h_2(\bar{y}_1) + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n}} h_2(\bar{y}_2) \right]^2
\end{aligned}$$

Mas $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$. Então,

$$T^2 = \left[\frac{\sqrt{n_1}h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2}h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \right]^2 - \frac{4}{n_1 + n_2} \times \cos \varphi \sin \varphi \times \left\{ n_1 [h_1(\bar{x}_1)h_2(\bar{y}_1)] + \sqrt{n_1}\sqrt{n_2} [h_1(\bar{x}_1)h_2(\bar{y}_2) + h_1(\bar{x}_2)h_2(\bar{y}_1)] + n_2 [h_1(\bar{x}_2)h_2(\bar{y}_2)] \right\} + \left[\frac{\sqrt{n_1}h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2}h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \right]^2$$

De acordo com Costa e Machado (2008),

$$g(n, \boldsymbol{\mu}) = \frac{\sqrt{n_1}g(n_1, \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{n_2}g(n_2, \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{n_1 + n_2}}$$

$$g(n, \boldsymbol{\mu}) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1 + n_2}} [g_1(n_1, \boldsymbol{\mu}), g_2(n_1, \boldsymbol{\mu})] + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1 + n_2}} [g_1(n_2, \boldsymbol{\mu}), g_2(n_2, \boldsymbol{\mu})]$$

$$g(n, \boldsymbol{\mu}) = \left[\underbrace{\frac{\sqrt{n_1}g_1(n_1, \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{n_2}g_2(n_1, \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{n_1 + n_2}}}_{g_1^*(n, \boldsymbol{\mu})}, \underbrace{\frac{\sqrt{n_1}g_1(n_2, \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{n_2}g_2(n_2, \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{n_1 + n_2}}}_{g_2^*(n, \boldsymbol{\mu})} \right]$$

Ainda na segunda fase do processo,

$$h_1^*(\bar{x}) = h_1\left(\frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}\sigma_y}{\sqrt{|\Sigma|}} \left[\frac{n_1(\bar{x}_1 - \mu_x) + n_2(\bar{x}_2 - \mu_x)}{n} \right]$$

$$h_2^*(\bar{y}) = h_2\left(\frac{n_1\bar{y}_1 + n_2\bar{y}_2}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}\sigma_x}{\sqrt{|\Sigma|}} \left[\frac{n_1(\bar{y}_1 - \mu_y) + n_2(\bar{y}_2 - \mu_y)}{n} \right]$$

Então:

$$\begin{aligned}
g_1^*(n, \mu) &= \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1+n_2}} g_1(n_1, \mu) + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+n_2}} g_1(n_2, \mu) \\
g_1^*(n, \mu) &= \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1+n_2}} \left\{ \frac{\sqrt{n_1} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \cos \varphi - \frac{\sqrt{n_1} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \sin \varphi \right\} + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+n_2}} \left\{ \frac{\sqrt{n_2} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \cos \varphi - \frac{\sqrt{n_2} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \sin \varphi \right\} \\
g_1^*(n, \mu) &= \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1+n_2}} \left\{ \frac{\sqrt{n_1} \sigma_y}{\sqrt{|\Sigma|}} \frac{n_1(\bar{x}_1 - \mu_x) + n_2(\bar{x}_2 - \mu_x)}{n_1+n_2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{n_1} \sigma_x}{\sqrt{|\Sigma|}} \frac{n_1(\bar{y}_1 - \mu_y) + n_2(\bar{y}_2 - \mu_y)}{n_1+n_2} \sin \varphi \right\} + \\
&\quad \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+n_2}} \left\{ \frac{\sqrt{n_2} \sigma_y}{\sqrt{|\Sigma|}} \frac{n_1(\bar{x}_1 - \mu_x) + n_2(\bar{x}_2 - \mu_x)}{n_1+n_2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{n_2} \sigma_x}{\sqrt{|\Sigma|}} \frac{n_1(\bar{y}_1 - \mu_y) + n_2(\bar{y}_2 - \mu_y)}{n_1+n_2} \sin \varphi \right\} \\
g_1^*(n, \mu) &= \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1+n_2}} \left\{ \left[\frac{n_1}{n_1+n_2} \times \frac{\sqrt{n_1} \sigma_y (\bar{x}_1 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} + \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1+n_2} \times \frac{\sqrt{n_2} \sigma_y (\bar{x}_2 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right] \cos \varphi - \left[\frac{n_1}{n_1+n_2} \times \frac{\sqrt{n_1} \sigma_x (\bar{y}_1 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} + \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1+n_2} \times \frac{\sqrt{n_2} \sigma_x (\bar{y}_2 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right] \sin \varphi \right\} + \\
&\quad + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+n_2}} \left\{ \left[\frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1+n_2} \times \frac{\sqrt{n_1} \sigma_y (\bar{x}_1 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} + \frac{n_2}{n_1+n_2} \times \frac{\sqrt{n_2} \sigma_y (\bar{x}_2 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right] \cos \varphi - \left[\frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1+n_2} \times \frac{\sqrt{n_1} \sigma_x (\bar{y}_1 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} + \frac{n_2}{n_1+n_2} \times \frac{\sqrt{n_2} \sigma_x (\bar{y}_2 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right] \sin \varphi \right\} \\
g_1^*(n, \mu) &= \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1+n_2}} \left\{ \left[\frac{n_1}{n_1+n_2} h_1(\bar{x}_1) + \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1+n_2} h_1(\bar{x}_2) \right] \cos \varphi - \left[\frac{n_1}{n_1+n_2} h_2(\bar{y}_1) + \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1+n_2} h_2(\bar{y}_2) \right] \sin \varphi \right\} + \\
&\quad \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+n_2}} \left\{ \left[\frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1+n_2} h_1(\bar{x}_1) + \frac{n_2}{n_1+n_2} h_1(\bar{x}_2) \right] \cos \varphi - \left[\frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1+n_2} h_2(\bar{y}_1) + \frac{n_2}{n_1+n_2} h_2(\bar{y}_2) \right] \sin \varphi \right\}
\end{aligned}$$

$$g_1^*(n, \mu) = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \left\{ \frac{\sqrt{n_1} h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2} h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi - \frac{\sqrt{n_1} h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2} h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi \right\} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \left\{ \frac{\sqrt{n_1} h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2} h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi - \frac{\sqrt{n_1} h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2} h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi \right\}$$

Logo,

$$g_1^*(n, \mu) = \frac{\sqrt{n_1} h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2} h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi - \frac{\sqrt{n_1} h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2} h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi$$

Analogamente:

$$g_2^*(n, \mu) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1 + n_2}} g_2(n_1, \mu) + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1 + n_2}} g_2(n_2, \mu)$$

$$g_2^*(n, \mu) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1 + n_2}} \left\{ -\frac{\sqrt{n_1} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \sin \varphi + \frac{\sqrt{n_1} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \cos \varphi \right\} + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1 + n_2}} \left\{ -\frac{\sqrt{n_2} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \sin \varphi + \frac{\sqrt{n_2} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \cos \varphi \right\}$$

$$g_2^*(n, \mu) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1 + n_2}} \left\{ -\frac{\sqrt{n_1} \sigma_y}{\sqrt{|\Sigma|}} \frac{n_1(\bar{x}_1 - \mu_x) + n_2(\bar{x}_2 - \mu_x)}{n_1 + n_2} \sin \varphi + \frac{\sqrt{n_1} \sigma_x}{\sqrt{|\Sigma|}} \frac{n_1(\bar{y}_1 - \mu_y) + n_2(\bar{y}_2 - \mu_y)}{n_1 + n_2} \cos \varphi \right\} +$$

$$\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1 + n_2}} \left\{ -\frac{\sqrt{n_2} \sigma_y}{\sqrt{|\Sigma|}} \frac{n_1(\bar{x}_1 - \mu_x) + n_2(\bar{x}_2 - \mu_x)}{n_1 + n_2} \sin \varphi + \frac{\sqrt{n_2} \sigma_x}{\sqrt{|\Sigma|}} \frac{n_1(\bar{y}_1 - \mu_y) + n_2(\bar{y}_2 - \mu_y)}{n_1 + n_2} \cos \varphi \right\}$$

$$g_2^*(n, \mu) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1 + n_2}} \left\{ - \left[\frac{n_1}{n_1 + n_2} \times \frac{\sqrt{n_1} \sigma_y (\bar{x}_1 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} + \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1 + n_2} \times \frac{\sqrt{n_2} \sigma_y (\bar{x}_2 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right] \sin \varphi + \left[\frac{n_1}{n_1 + n_2} \times \frac{\sqrt{n_1} \sigma_x (\bar{y}_1 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} + \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1 + n_2} \times \frac{\sqrt{n_2} \sigma_x (\bar{y}_2 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right] \cos \varphi \right\} +$$

$$+ \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1 + n_2}} \left\{ - \left[\frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1 + n_2} \times \frac{\sqrt{n_1} \sigma_y (\bar{x}_1 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \times \frac{\sqrt{n_2} \sigma_y (\bar{x}_2 - \mu_x)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right] \sin \varphi + \left[\frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1 + n_2} \times \frac{\sqrt{n_1} \sigma_x (\bar{y}_1 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \times \frac{\sqrt{n_2} \sigma_x (\bar{y}_2 - \mu_y)}{\sqrt{|\Sigma|}} \right] \cos \varphi \right\}$$

$$g_2^*(n, \mu) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1 + n_2}} \left\{ - \left[\frac{n_1}{n_1 + n_2} h_1(\bar{x}_1) + \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1 + n_2} h_1(\bar{x}_2) \right] \sin \varphi + \left[\frac{n_1}{n_1 + n_2} h_2(\bar{y}_1) + \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1 + n_2} h_2(\bar{y}_2) \right] \cos \varphi \right\} +$$

$$\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1 + n_2}} \left\{ - \left[\frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1 + n_2} h_1(\bar{x}_1) + \frac{n_2}{n_1 + n_2} h_1(\bar{x}_2) \right] \sin \varphi + \left[\frac{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}}{n_1 + n_2} h_2(\bar{y}_1) + \frac{n_2}{n_1 + n_2} h_2(\bar{y}_2) \right] \cos \varphi \right\}$$

$$g_2^*(n, \mu) = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \left\{ - \frac{\sqrt{n_1} h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2} h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi + \frac{\sqrt{n_1} h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2} h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi \right\} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \left\{ - \frac{\sqrt{n_1} h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2} h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi + \frac{\sqrt{n_1} h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2} h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi \right\}$$

Logo,

$$g_2^*(n, \mu) = - \frac{\sqrt{n_1} h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2} h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi + \frac{\sqrt{n_1} h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2} h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi$$

Dessa forma:

$$[g_1^*(n, \mu)]^2 + [g_2^*(n, \mu)]^2 = \left[\frac{\sqrt{n_1} h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2} h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi - \frac{\sqrt{n_1} h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2} h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi \right]^2 + \left[- \frac{\sqrt{n_1} h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2} h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi + \frac{\sqrt{n_1} h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2} h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi \right]^2$$

$$\begin{aligned}
[g_1^*(n, \mu)]^2 + [g_2^*(n, \mu)]^2 &= \left\{ \left[\frac{\sqrt{n_1}h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2}h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi \right]^2 - 2 \times \frac{\sqrt{n_1}h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2}h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \frac{\sqrt{n_1}h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2}h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi \sin \varphi + \left[\frac{\sqrt{n_1}h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2}h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi \right]^2 \right\} + \\
&\quad \left\{ \left[-\frac{\sqrt{n_1}h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2}h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi \right]^2 - 2 \times \frac{\sqrt{n_1}h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2}h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \frac{\sqrt{n_1}h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2}h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \sin \varphi \cos \varphi + \left[\frac{\sqrt{n_1}h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2}h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi \right]^2 \right\} \\
[g_1^*(n, \mu)]^2 + [g_2^*(n, \mu)]^2 &= \left[\frac{\sqrt{n_1}h_1(\bar{x}_1) + \sqrt{n_2}h_1(\bar{x}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \right]^2 - \frac{4}{n_1 + n_2} \times \cos \varphi \sin \varphi \times \left\{ n_1 [h_1(\bar{x}_1)h_2(\bar{y}_1)] + \sqrt{n_1} \sqrt{n_2} [h_1(\bar{x}_1)h_2(\bar{y}_2) + h_1(\bar{x}_2)h_2(\bar{y}_1)] + n_2 [h_1(\bar{x}_2)h_2(\bar{y}_2)] \right\} + \\
&\quad \left[\frac{\sqrt{n_1}h_2(\bar{y}_1) + \sqrt{n_2}h_2(\bar{y}_2)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cos \varphi \right]^2 \\
[g_1^*(n, \mu)]^2 + [g_2^*(n, \mu)]^2 &= T^2
\end{aligned}$$

Anexo B

Limites Críticos dos Testes Estatísticos Multivariados T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui

Neste apêndice, são apresentados os limites críticos para cada um dos testes discutidos neste dissertação conforme descrito no Capítulo 3. Para os cenários em que a matriz de covariâncias é conhecida e desconhecida, os limites do teste T^2 de Hotelling foram obtidos através de $N = 300\ 000$ amostras geradas sob a hipótese nula de forma que ainda tivesse um número de amostras representativo M para encontrar o limite da segunda fase. Para o teste de Hayter e Tsui, adaptado para a situação em que a matriz de covariâncias teórica é conhecida, o número de iterações utilizado foi $N = 100\ 000$ pelo fato de nesse teste apenas uma sequência de amostras é necessária para encontrar os limites críticos em ambas as fases, de acordo com o resultado apresentado na Proposição 1, apresentada nas páginas 36 e 37. Para todos os testes, o nível de significância global fixado para encontrar os limites críticos foi $\alpha = 0,05$ e o vetor de médias sob a H_0 foi o vetor nulo.

Tabela B1: Limites Críticos para o teste T^2 de Hotelling: Σ conhecida ($p=2$)

Σ	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$			$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$			$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$		
	n_1	n_2	\bar{n}	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2	6	4	2,197225	∞	4,798944	2,138107	9,21034	5,192969	2,052583	7,377759	6,015657	1,970567	6,437752	7,799579
	4	4	6	1,386294	∞	5,788235	1,346689	9,21034	6,020718	1,288714	7,377759	6,710167	1,232372	6,437752	8,014663
	5	15	10	2,197225	∞	4,783909	2,138107	9,21034	5,19312	2,052583	7,377759	6,051283	1,970567	6,437752	7,88776
	10	10	14	1,832581	∞	5,652818	1,783196	9,21034	5,911432	1,711332	7,377759	6,591488	1,641961	6,437752	8,033766
	15	15	21	1,832581	∞	5,646128	1,783196	9,21034	5,885113	1,711332	7,377759	6,578749	1,641961	6,437752	7,954918
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	2	6	4	2,197225	∞	4,820388	2,138107	9,21034	5,156384	2,052583	7,377759	6,030578	1,970567	6,437752	7,818611
	4	4	6	1,386294	∞	5,791067	1,346689	9,21034	6,04414	1,288714	7,377759	6,664337	1,232372	6,437752	8,094822
	5	15	10	2,197225	∞	4,775996	2,138107	9,21034	5,198877	2,052583	7,377759	6,094754	1,970567	6,437752	7,818921
	10	10	14	1,832581	∞	5,674144	1,783196	9,21034	5,915625	1,711332	7,377759	6,568338	1,641961	6,437752	7,956501
	15	15	21	1,832581	∞	5,656767	1,783196	9,21034	5,938394	1,711332	7,377759	6,603564	1,641961	6,437752	8,010043
$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	2	6	4	2,197225	∞	4,813741	2,138107	9,21034	5,142934	2,052583	7,377759	6,035113	1,970567	6,437752	7,805184
	4	4	6	1,386294	∞	5,798061	1,346689	9,21034	5,991014	1,288714	7,377759	6,641769	1,232372	6,437752	8,075031
	5	15	10	2,197225	∞	4,799994	2,138107	9,21034	5,160853	2,052583	7,377759	6,008674	1,970567	6,437752	7,83932
	10	10	14	1,832581	∞	5,659649	1,783196	9,21034	5,912895	1,711332	7,377759	6,56829	1,641961	6,437752	8,027849
	15	15	21	1,832581	∞	5,664542	1,783196	9,21034	5,890141	1,711332	7,377759	6,530756	1,641961	6,437752	7,987064
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	2	6	4	2,197225	∞	4,791429	2,138107	9,21034	5,135596	2,052583	7,377759	6,014612	1,970567	6,437752	7,873186
	4	4	6	1,386294	∞	5,753673	1,346689	9,21034	6,043784	1,288714	7,377759	6,660133	1,232372	6,437752	8,068196
	5	15	10	2,197225	∞	4,770216	2,138107	9,21034	5,16793	2,052583	7,377759	6,090649	1,970567	6,437752	7,84633
	10	10	14	1,832581	∞	5,678009	1,783196	9,21034	5,889338	1,711332	7,377759	6,553406	1,641961	6,437752	7,992035
	15	15	21	1,832581	∞	5,653367	1,783196	9,21034	5,901305	1,711332	7,377759	6,561325	1,641961	6,437752	7,976976
$\begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$	2	6	4	2,197225	∞	4,813741	2,138107	9,21034	5,142934	2,052583	7,377759	6,035113	1,970567	6,437752	7,805184
	4	4	6	1,386294	∞	5,792308	1,346689	9,21034	6,026994	1,288714	7,377759	6,646912	1,232372	6,437752	8,079177
	5	15	10	2,197225	∞	4,743572	2,138107	9,21034	5,162989	2,052583	7,377759	6,080988	1,970567	6,437752	7,823679
	10	10	14	1,832581	∞	5,649738	1,783196	9,21034	5,861769	1,711332	7,377759	6,563983	1,641961	6,437752	8,020926
	15	15	21	1,832581	∞	5,621155	1,783196	9,21034	5,934993	1,711332	7,377759	6,558441	1,641961	6,437752	8,032549
$\begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$	2	6	4	2,197225	∞	4,813146	2,138107	9,21034	5,157345	2,052583	7,377759	6,080231	1,970567	6,437752	7,828763
	4	4	6	1,386294	∞	5,75612	1,346689	9,21034	5,99535	1,288714	7,377759	6,661818	1,232372	6,437752	8,111314
	5	15	10	2,197225	∞	4,785159	2,138107	9,21034	5,157528	2,052583	7,377759	6,018898	1,970567	6,437752	7,825126
	10	10	14	1,832581	∞	5,660241	1,783196	9,21034	5,875642	1,711332	7,377759	6,557475	1,641961	6,437752	7,999867
	15	15	21	1,832581	∞	5,629727	1,783196	9,21034	5,889074	1,711332	7,377759	6,559696	1,641961	6,437752	7,981506

Tabela B2: Limites Críticos para o teste Hayter e Tsui: Σ conhecida ($p=2$)

Correlação	Tamanhos Amostrais			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$			$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$			$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$		
	n_1	n_2	\bar{n}	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2
0,0	2	6	4	1,328954	∞	2,236628	1,312631	2,809496	2,335216	1,284623	2,504492	2,504492	1,256611	2,325380	2,803856
	4	4	6	1,053386	∞	2,246525	1,039062	2,805566	2,325604	1,017949	2,507577	2,507577	0,9893655	2,322605	2,799228
	5	15	10	1,332262	∞	2,23376	1,308201	2,799486	2,31416	1,284277	2,494919	2,494919	1,257172	2,326525	2,814411
	10	10	14	1,210575	∞	2,234777	1,196848	2,812169	2,320983	1,171250	2,493058	2,493058	1,147573	2,320247	2,802352
	15	15	21	1,207893	∞	2,232823	1,197987	2,812154	2,331629	1,170114	2,498584	2,498584	1,146687	2,328741	2,820160
0,5	2	6	4	1,281189	∞	2,208071	1,267116	2,782424	2,311236	1,236101	2,480132	2,480132	1,210632	2,298671	2,777022
	4	4	6	1,005603	∞	2,222138	0,9917643	2,782287	2,306035	0,9647217	2,479052	2,479052	0,941266	2,299436	2,786382
	5	15	10	1,285823	∞	2,223561	1,262578	2,790332	2,297001	1,237963	2,497169	2,497169	1,210064	2,299208	2,801746
	10	10	14	1,161313	∞	2,205227	1,142432	2,78419	2,296225	1,120185	2,476971	2,476971	1,096910	2,29659	2,786391
	15	15	21	1,164416	∞	2,217766	1,151122	2,795048	2,303066	1,118617	2,461533	2,461533	1,097171	2,296789	2,795508
0,8	2	6	4	1,187164	∞	2,158621	1,169429	2,757096	2,247534	1,139658	2,426842	2,426842	1,116125	2,260442	2,771858
	4	4	6	0,9041503	∞	2,145386	0,8884106	2,756869	2,242769	0,8615706	2,425008	2,425008	0,845246	2,236466	2,757224
	5	15	10	1,184729	∞	2,152015	1,167592	2,753012	2,245420	1,14065	2,420382	2,420382	1,112414	2,250221	2,757391
	10	10	14	1,063708	∞	2,148471	1,047825	2,75398	2,241314	1,021562	2,421784	2,421784	0,9953838	2,230526	2,732834
	15	15	21	1,075849	∞	2,155432	1,055312	2,762999	2,248695	1,020029	2,411171	2,411171	1,000446	2,250666	2,771375

Tabela B3: Limites Críticos para o teste T^2 de Hotelling: Σ conhecida ($p=3$)

Σ	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$			$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$			$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$		
	n_1	n_2	\bar{n}	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	5	5	7	2,946166	∞	7,442804	2,883114	11,34487	7,718430	2,790901	9,348404	8,458781	2,701338	8,311171	10,04703
	5	10	9	2,946166	∞	6,985420	2,883114	11,34487	7,392659	2,790901	9,348404	8,309671	2,701338	8,311171	10,16632
	10	10	14	2,946166	∞	7,397252	2,883114	11,34487	7,703600	2,790901	9,348404	8,445304	2,701338	8,311171	10,10987
$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	5	5	7	2,946166	∞	7,422593	2,883114	11,34487	7,714237	2,790901	9,348404	8,455232	2,701338	8,311171	10,10720
	5	10	9	2,946166	∞	7,024694	2,883114	11,34487	7,398499	2,790901	9,348404	8,280969	2,701338	8,311171	10,14536
	10	10	14	2,946166	∞	7,436565	2,883114	11,34487	7,672921	2,790901	9,348404	8,431518	2,701338	8,311171	10,08354
$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	5	5	7	2,946166	∞	7,412934	2,883114	11,34487	7,710445	2,790901	9,348404	8,45346	2,701338	8,311171	10,07287
	5	10	9	2,946166	∞	6,968737	2,883114	11,34487	7,368361	2,790901	9,348404	8,277237	2,701338	8,311171	10,16186
	10	10	14	2,946166	∞	7,425783	2,883114	11,34487	7,695042	2,790901	9,348404	8,461345	2,701338	8,311171	10,02317

Tabela B4: Limites Críticos para o teste Hayter e Tsui: Σ conhecida ($p=3$)

Matriz de Correlação	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$			$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$			$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$		
	n_1	n_2	\bar{n}	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	5	5	7	1,415258	∞	2,385988	1,401534	2,927963	2,463761	1,377682	2,629329	2,629329	1,35268	2,466713	2,925985
	5	10	9	1,420682	∞	2,395574	1,399035	2,940176	2,471559	1,377745	2,633549	2,633549	1,3551	2,468291	2,935229
	10	10	14	1,419462	∞	2,379498	1,397033	2,943437	2,481385	1,377661	2,653728	2,653728	1,350154	2,466156	2,946667
$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	5	5	7	1,320831	∞	2,348257	1,300187	2,900211	2,426376	1,274724	2,596207	2,596207	1,250695	2,424114	2,898425
	5	10	9	1,320663	∞	2,344429	1,301365	2,904189	2,430716	1,284291	2,602222	2,602222	1,252620	2,418888	2,896518
	10	10	14	1,316458	∞	2,334893	1,303738	2,906206	2,422560	1,277135	2,592599	2,592599	1,252927	2,418782	2,901814

Tabela B5: Limites Críticos para o teste T^2 de Hotelling: Σ desconhecida ($p=2$)

Σ	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00 ; \alpha_2 = 0,05$			$\alpha_1 = 0,01 ; \alpha_2 = 0,04$			$\alpha_1 = 0,025 ; \alpha_2 = 0,025$			$\alpha_1 = 0,04 ; \alpha_2 = 0,01$		
	n_1	n_2	\bar{n}	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2	w	CL_1	CL_2
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	4	4	6	15,38303	∞	11,78092	14,62432	48630,17	13,00629	13,56594	7777,467	15,98869	12,59386	3035,635	23,12348
	5	15	10	12,88781	∞	5,50942	12,35940	594,9972	6,186081	11,62152	234,9930	7,676217	10,94229	144,9887	10,70174
	10	10	14	4,361331	∞	7,053737	4,248578	32,59781	7,59451	4,085408	22,71787	8,709179	3,928872	18,55788	11,06934
	15	15	21	3,729865	∞	6,513068	3,6404	20,83391	6,873823	3,510377	15,65965	7,87282	3,385014	13,28425	9,910561
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	4	4	6	15,38303	∞	11,72617	14,62432	48630,17	13,00238	13,56594	7777,467	15,90202	12,59386	3035,635	23,02170
	5	15	10	12,88781	∞	5,553459	12,35940	594,9972	6,214224	11,62152	234,9930	7,633923	10,94229	144,9887	10,66877
	10	10	14	4,361331	∞	7,061393	4,248578	32,59781	7,609503	4,085408	22,71787	8,71578	3,928872	18,55788	11,00320
	15	15	21	3,729865	∞	6,504254	3,6404	20,83391	6,85587	3,510377	15,65965	7,8768	3,385014	13,28425	9,827465
$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	4	4	6	15,38303	∞	11,73582	14,62432	48630,17	13,05894	13,56594	7777,467	16,06309	12,59386	3035,635	22,8938
	5	15	10	12,88781	∞	5,521819	12,35940	594,9972	6,222576	11,62152	234,9930	7,5764	10,94229	144,9887	10,77855
	10	10	14	4,361331	∞	7,073572	4,248578	32,59781	7,581295	4,085408	22,71787	8,725288	3,928872	18,55788	11,24473
	15	15	21	3,729865	∞	6,528597	3,6404	20,83391	6,926757	3,510377	15,65965	7,839294	3,385014	13,28425	9,792848
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	4	4	6	15,38303	∞	11,71367	14,62432	48630,17	13,08809	13,56594	7777,467	15,98794	12,59386	3035,635	23,05316
	5	15	10	12,88781	∞	5,514493	12,35940	594,9972	6,183785	11,62152	234,9930	7,680108	10,94229	144,9887	10,74741
	10	10	14	4,361331	∞	7,069968	4,248578	32,59781	7,568519	4,085408	22,71787	8,670981	3,928872	18,55788	11,01050
	15	15	21	3,729865	∞	6,5368	3,6404	20,83391	6,91409	3,510377	15,65965	7,837394	3,385014	13,28425	9,893933
$\begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$	4	4	6	15,38303	∞	11,61313	14,62432	48630,17	13,05738	13,56594	7777,467	16,13934	12,59386	3035,635	22,88437
	5	15	10	12,88781	∞	5,576005	12,35940	594,9972	6,189245	11,62152	234,9930	7,634043	10,94229	144,9887	10,68445
	10	10	14	4,361331	∞	7,087867	4,248578	32,59781	7,534707	4,085408	22,71787	8,699111	3,928872	18,55788	11,14053
	15	15	21	3,729865	∞	6,546704	3,6404	20,83391	6,913063	3,510377	15,65965	7,836873	3,385014	13,28425	9,930023
$\begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$	4	4	6	15,38303	∞	11,77714	14,62432	48630,17	13,12666	13,56594	7777,467	16,08879	12,59386	3035,635	22,74358
	5	15	10	12,88781	∞	5,553977	12,35940	594,9972	6,218543	11,62152	234,9930	7,672714	10,94229	144,9887	10,71701
	10	10	14	4,361331	∞	7,118113	4,248578	32,59781	7,554912	4,085408	22,71787	8,735493	3,928872	18,55788	11,16917
	15	15	21	3,729865	∞	6,492507	3,6404	20,83391	6,895887	3,510377	15,65965	7,843	3,385014	13,28425	9,864394

Anexo C

Valores de *ARL* obtidos nas simulações

No processo de estimação do poder dos testes, para cada sequência de amostras simuladas, foi contabilizado o número de amostras geradas até que se observasse a primeira que retornasse uma estatística de teste fora dos limites de controle. Dessa forma, paralelamente ao poder dos testes, foram obtidos nas simulações os valores estimados de *ARL* em cada cenário abordado. Esses resultados representam uma medida alternativa ao poder dos testes e são apresentados nas Tabelas C1 a C8, páginas 101 a 115. Os valores denotados por ARL_1 e ARL_2 representam os valores de *ARL* médios, dentre as $k = 25$ sequências de tamanho $N = 100000$ em que o processo estava fora de controle.

Tabela C1: Estimativas de *ARL* para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$

Cenário (<i>d</i>)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00; \alpha_2 = 0,05$				$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,04$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
0,125	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$	2	6	4	NA	8,40	NA	7,28	66,28	9,84	66,16	10,36
			4	4	6	NA	10,44	NA	3,52	36,52	8,68	37,56	3,96
			5	15	10	NA	3,12	NA	3,48	42,44	6,08	30,60	5,28
			10	10	14	NA	3,80	NA	2,16	18,72	5,56	20,36	3,44
			15	15	21	NA	3,00	NA	1,96	10,52	3,36	14,40	2,00
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	NA	6,72	NA	6,44	59,08	8,44	44,68	8,52
			4	4	6	NA	7,00	NA	3,52	50,68	10,96	72,64	5,80
			5	15	10	NA	3,60	NA	3,64	32,28	7,16	31,32	5,92
			10	10	14	NA	3,96	NA	2,20	21,32	5,64	18,80	2,84
			15	15	21	NA	2,72	NA	1,84	6,84	3,16	16,92	2,12
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,31$	2	6	4	NA	8,12	NA	9,56	41,08	7,60	56,68	15,08
			4	4	6	NA	7,72	NA	4,12	40,00	6,16	37,84	3,52
			5	15	10	NA	4,40	NA	5,40	23,36	4,24	30,56	5,12
			10	10	14	NA	3,72	NA	2,20	20,36	6,32	23,76	2,16
			15	15	21	NA	2,12	NA	1,92	13,72	3,76	19,52	2,32
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	2	6	4	NA	7,32	NA	9,04	56,40	10,84	56,12	12,48
			4	4	6	NA	7,72	NA	4,80	52,16	10,60	68,48	4,48
			5	15	10	NA	6,28	NA	5,08	34,32	4,48	44,24	6,32
			10	10	14	NA	5,16	NA	2,72	15,48	5,56	21,44	3,28
			15	15	21	NA	3,20	NA	2,40	17,76	3,36	20,96	1,84
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,21$	2	6	4	NA	6,12	NA	12,20	55,48	10,84	75,48	13,80
4			4	6	NA	8,72	NA	4,32	36,72	9,68	47,44	6,36	
5			15	10	NA	4,64	NA	7,16	32,72	4,20	95,60	11,12	
10			10	14	NA	3,40	NA	4,28	19,40	5,48	40,72	4,24	
15			15	21	NA	2,32	NA	3,24	11,28	3,92	32,24	3,16	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	2	6	4	NA	10,40	NA	12,64	68,68	11,40	86,88	14,56	
		4	4	6	NA	7,88	NA	3,80	58,72	11,28	80,52	4,00	
		5	15	10	NA	4,96	NA	10,04	49,28	5,84	66,00	12,04	
		10	10	14	NA	4,72	NA	4,48	13,00	4,12	25,24	3,16	
		15	15	21	NA	2,52	NA	2,44	13,36	3,28	24,80	4,24	

Tabela C1: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$ (continuação)

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025; \alpha_2 = 0,025$				$\alpha_1 = 0,04; \alpha_2 = 0,01$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
0,125	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$	2	6	4	26,12	13,56	29,28	13,92	18,64	34,32	18,56	35,08
			4	4	6	17,92	14,96	25,44	5,04	15,64	31,20	14,64	8,08
			5	15	10	14,68	7,64	13,76	8,80	13,88	10,52	13,72	11,92
			10	10	14	7,80	8,52	8,32	3,68	5,80	11,88	6,68	5,36
			15	15	21	6,32	7,24	7,12	3,76	4,56	7,28	6,36	2,04
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	30,52	18,36	27,00	14,16	15,44	33,00	14,64	32,20
			4	4	6	15,20	13,96	16,16	5,00	11,00	38,92	8,48	6,64
			5	15	10	19,88	7,92	27,36	7,28	12,16	10,68	15,64	9,12
			10	10	14	11,88	6,92	9,04	3,56	5,96	11,12	7,56	6,00
			15	15	21	7,00	7,12	6,12	2,56	7,20	7,20	7,56	3,24
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,31$	2	6	4	25,84	13,52	27,92	13,88	15,72	28,08	25,84	31,64
			4	4	6	15,88	16,08	20,68	6,64	14,76	24,76	18,88	6,32
			5	15	10	25,32	7,80	28,88	6,48	9,68	9,28	10,60	9,12
			10	10	14	11,00	5,36	13,28	3,44	9,60	16,64	9,52	4,52
			15	15	21	6,56	4,20	7,56	2,56	6,20	8,12	8,92	4,08
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	2	6	4	24,16	12,60	28,16	14,92	21,52	26,44	20,44	24,88
			4	4	6	23,32	9,80	22,92	5,32	14,52	30,40	14,36	7,76
			5	15	10	15,08	7,76	20,80	8,76	12,64	9,56	16,84	10,68
			10	10	14	9,52	8,92	15,24	3,84	7,04	12,40	6,36	7,24
			15	15	21	6,20	4,28	10,40	3,04	5,28	9,32	4,76	4,64
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,21$	2	6	4	24,60	13,04	30,44	32,84	20,96	32,80	22,36	45,48
4			4	6	16,00	12,84	34,48	5,64	18,28	32,44	22,04	14,56	
5			15	10	14,12	7,08	22,64	11,24	17,64	11,36	22,76	29,80	
10			10	14	10,92	8,44	17,16	4,84	6,84	11,40	14,36	8,56	
15			15	21	7,28	4,12	21,60	4,00	5,72	8,20	10,28	10,44	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	2	6	4	12,88	25,44	22,52	6,92	21,56	26,28	33,60	39,96	
		4	4	6	12,88	25,44	22,52	6,92	11,52	28,92	17,28	4,88	
		5	15	10	9,84	3,60	8,24	2,92	15,20	11,84	19,40	29,16	
		10	10	14	11,32	8,72	21,56	6,00	6,88	20,44	12,60	11,96	
		15	15	21	8,76	4,56	14,84	4,60	5,76	6,68	16,04	5,64	

Tabela C2: Estimativas de *ARL* para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,250$

Cenário (<i>d</i>)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00; \alpha_2 = 0,05$				$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,04$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
0,250	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	NA	6,04	NA	6,96	60,96	6,40	59,68	6,40
			4	4	6	NA	5,00	NA	2,36	31,00	6,20	27,40	2,80
			5	15	10	NA	2,04	NA	2,16	20,08	2,08	17,36	2,64
			10	10	14	NA	2,16	NA	1,56	8,64	3,80	9,88	2,52
			15	15	21	NA	1,44	NA	1,28	4,36	2,40	3,88	1,88
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	NA	4,36	NA	5,04	36,08	7,12	42,72	6,08
			4	4	6	NA	4,96	NA	2,20	20,64	4,40	23,20	2,44
			5	15	10	NA	3,24	NA	3,08	19,60	2,96	18,36	3,48
			10	10	14	NA	1,92	NA	1,80	12,24	3,20	11,80	2,20
			15	15	21	NA	1,48	NA	1,08	4,72	2,04	4,48	1,80
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,43$	2	6	4	NA	5,56	NA	6,36	44,24	6,84	57,72	8,32
			4	4	6	NA	6,12	NA	3,36	21,16	4,44	32,40	3,28
			5	15	10	NA	2,60	NA	3,24	24,96	3,56	29,20	3,40
			10	10	14	NA	1,76	NA	1,60	9,88	3,92	12,28	2,64
			15	15	21	NA	1,84	NA	1,64	5,20	2,48	7,72	1,80
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,87$	2	6	4	NA	4,48	NA	4,08	49,48	5,64	47,48	8,76
			4	4	6	NA	4,56	NA	2,16	31,68	6,52	29,24	2,64
			5	15	10	NA	2,60	NA	3,24	15,40	2,92	23,88	3,96
			10	10	14	NA	2,52	NA	2,16	11,44	2,32	12,56	2,08
			15	15	21	NA	1,68	NA	1,48	4,96	2,00	7,84	1,84
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,30$	2	6	4	NA	6,00	NA	10,08	32,96	6,56	47,08	10,16
4			4	6	NA	5,80	NA	3,44	17,16	5,00	42,88	4,48	
5			15	10	NA	2,92	NA	6,44	18,24	3,16	40,60	4,72	
10			10	14	NA	1,92	NA	2,16	10,32	2,44	26,56	3,44	
15			15	21	NA	1,24	NA	1,60	3,84	2,76	10,24	2,52	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,60$	2	6	4	NA	5,16	NA	8,20	45,36	6,84	94,12	6,64	
		4	4	6	NA	5,08	NA	3,96	33,64	4,68	58,36	3,76	
		5	15	10	NA	2,44	NA	5,44	19,28	2,44	37,48	3,92	
		10	10	14	NA	2,24	NA	3,36	10,00	2,52	22,32	2,68	
		15	15	21	NA	1,60	NA	2,28	5,12	2,12	13,68	2,60	

Tabela C2: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,250$ (continuação)

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025; \alpha_2 = 0,025$				$\alpha_1 = 0,04; \alpha_2 = 0,01$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
0,250	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	21,00	6,56	20,08	7,56	15,08	15,00	16,52	12,80
			4	4	6	15,24	6,80	14,32	3,16	9,52	21,96	9,44	4,84
			5	15	10	10,44	4,08	11,48	3,12	9,12	5,68	8,76	4,08
			10	10	14	4,80	3,44	5,24	2,60	4,04	7,24	3,56	3,32
			15	15	21	4,00	2,84	3,76	1,96	3,08	5,52	2,96	3,72
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	19,04	11,00	19,12	7,28	17,00	12,72	14,20	10,92
			4	4	6	11,04	7,96	11,88	2,96	12,36	17,36	10,56	4,80
			5	15	10	8,04	3,88	10,04	4,28	5,28	7,32	5,36	5,80
			10	10	14	6,24	2,80	5,44	1,84	3,40	8,60	3,76	3,48
			15	15	21	3,64	2,44	2,88	2,36	2,52	5,28	2,72	2,68
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,43$	2	6	4	16,28	10,72	19,88	9,84	12,08	15,56	14,48	17,60
			4	4	6	12,84	8,88	17,80	4,48	9,36	13,92	11,56	5,28
			5	15	10	12,40	3,04	13,44	4,12	6,64	7,44	6,40	7,48
			10	10	14	4,64	4,28	6,24	2,48	3,64	5,92	3,80	3,64
			15	15	21	4,20	3,04	4,32	2,24	3,20	4,04	3,84	2,40
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,87$	2	6	4	22,24	7,80	20,48	9,00	18,44	16,04	18,24	14,68
			4	4	6	12,76	7,16	15,16	3,88	6,68	17,76	9,20	5,92
			5	15	10	11,80	3,88	13,84	4,04	7,80	5,88	10,40	6,16
			10	10	14	5,92	3,12	6,76	2,36	4,44	4,32	5,12	3,20
			15	15	21	3,32	3,64	5,40	2,28	2,72	3,40	3,84	2,60
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,30$	2	6	4	20,92	6,24	34,04	12,72	15,24	14,28	19,28	29,04
4			4	6	14,20	10,68	22,44	6,12	9,16	18,48	11,24	9,08	
5			15	10	9,64	4,00	19,60	8,32	5,76	7,96	12,28	14,48	
10			10	14	5,16	5,16	11,96	3,32	3,16	5,08	8,72	4,48	
15			15	21	2,44	2,68	9,12	2,76	2,04	5,64	7,80	4,68	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,60$	2	6	4	23,84	8,64	36,88	16,16	12,00	15,40	17,56	25,00	
		4	4	6	13,12	8,40	18,24	7,08	6,52	11,20	13,72	10,04	
		5	15	10	10,32	4,32	17,56	8,16	9,96	5,12	12,12	14,96	
		10	10	14	6,44	3,92	12,00	4,00	4,40	5,20	7,88	5,96	
		15	15	21	2,76	2,68	8,04	2,84	3,12	4,32	7,92	4,92	

Tabela C3: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00; \alpha_2 = 0,05$				$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,04$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
0,500	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	NA	3,56	NA	3,36	28,32	4,16	27,72	3,80
			4	4	6	NA	2,12	NA	1,56	12,12	3,32	12,96	1,80
			5	15	10	NA	1,32	NA	1,56	7,24	2,28	8,96	2,44
			10	10	14	NA	1,20	NA	1,32	2,96	2,12	3,52	1,56
			15	15	21	NA	1,04	NA	1,00	2,52	2,08	4,16	1,52
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	NA	2,44	NA	2,76	24,64	3,44	21,04	3,24
			4	4	6	NA	2,84	NA	1,88	15,80	3,68	20,92	2,00
			5	15	10	NA	1,76	NA	1,84	6,76	1,68	7,84	1,88
			10	10	14	NA	1,40	NA	1,20	3,48	1,60	4,92	1,56
			15	15	21	NA	1,16	NA	1,12	1,88	2,16	3,08	1,56
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	2	6	4	NA	4,08	NA	5,40	29,64	3,04	31,28	4,84
			4	4	6	NA	3,40	NA	1,88	18,56	2,80	22,36	2,44
			5	15	10	NA	1,64	NA	1,80	8,88	2,44	10,88	2,40
			10	10	14	NA	1,40	NA	1,16	4,96	2,20	5,16	1,84
			15	15	21	NA	1,12	NA	1,08	1,92	2,88	2,40	2,08
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,23$	2	6	4	NA	3,04	NA	4,08	32,40	3,88	38,64	5,12
			4	4	6	NA	2,48	NA	2,04	13,04	3,12	12,96	2,24
			5	15	10	NA	1,48	NA	1,80	8,52	1,88	16,52	2,04
			10	10	14	NA	1,08	NA	1,08	3,56	1,88	4,32	1,56
			15	15	21	NA	1,12	NA	1,12	2,36	2,20	2,32	2,04
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	2	6	4	NA	2,36	NA	6,68	30,16	3,32	54,40	7,28
4			4	6	NA	2,40	NA	3,12	11,92	3,88	34,56	2,60	
5			15	10	NA	1,80	NA	4,08	8,60	2,32	36,28	4,48	
10			10	14	NA	1,16	NA	1,92	3,12	2,12	10,40	2,16	
15			15	21	NA	1,16	NA	1,32	1,72	2,32	6,88	1,56	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,85$	2	6	4	NA	3,72	NA	5,76	19,28	2,88	29,92	6,56	
		4	4	6	NA	2,64	NA	2,36	12,64	2,92	37,36	2,32	
		5	15	10	NA	1,92	NA	4,00	12,24	1,40	28,76	4,08	
		10	10	14	NA	1,48	NA	1,88	3,36	1,92	12,44	1,88	
		15	15	21	NA	1,12	NA	1,48	2,04	2,32	8,20	1,48	

Tabela C3: Estimativas de *ARL* para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$ (continuação)

Cenário (<i>d</i>)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025; \alpha_2 = 0,025$				$\alpha_1 = 0,04; \alpha_2 = 0,01$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
0,500	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$	2	6	4	11,40	4,20	15,04	5,04	7,00	8,72	8,28	10,80
			4	4	6	5,08	5,04	7,88	2,28	4,48	10,24	5,92	4,36
			5	15	10	8,48	1,76	9,28	1,80	4,32	3,56	4,96	3,64
			10	10	14	2,32	2,92	2,88	1,92	2,00	4,64	2,20	3,64
			15	15	21	1,76	2,88	2,40	2,12	1,72	4,48	2,16	2,84
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	13,48	5,28	13,84	4,76	9,92	8,80	14,72	8,56
			4	4	6	4,80	5,76	6,04	2,80	5,32	5,56	7,00	3,52
			5	15	10	4,48	2,00	4,20	2,20	5,60	2,96	4,96	2,68
			10	10	14	2,16	3,08	2,64	2,16	2,04	3,96	1,88	2,68
			15	15	21	1,60	3,28	1,48	2,60	1,52	3,92	1,72	3,12
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	2	6	4	10,72	4,12	11,32	4,80	10,48	7,36	11,92	7,72
			4	4	6	6,20	4,96	8,92	2,20	3,64	6,36	5,44	4,64
			5	15	10	5,20	1,96	7,80	2,28	4,44	4,04	6,28	3,00
			10	10	14	2,44	3,12	3,00	2,04	2,32	4,48	2,56	2,48
			15	15	21	1,52	2,84	1,56	2,52	1,36	4,20	1,48	3,60
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,23$	2	6	4	10,80	5,56	10,80	4,40	8,92	7,16	10,40	6,92
			4	4	6	6,84	5,56	6,52	3,08	5,00	8,20	5,88	3,28
			5	15	10	7,12	2,80	9,68	2,16	3,88	2,52	5,36	3,60
			10	10	14	3,12	2,32	3,76	1,64	2,36	4,36	2,96	3,40
			15	15	21	1,60	2,96	1,92	2,28	1,48	4,64	1,84	3,08
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	2	6	4	13,48	4,64	20,00	8,48	6,64	7,32	17,68	16,00
4			4	6	10,76	3,44	12,04	3,20	6,44	5,72	12,88	5,64	
5			15	10	6,08	1,96	11,44	4,92	5,04	2,44	5,92	7,96	
10			10	14	2,24	2,52	7,92	2,36	2,68	3,52	5,68	2,60	
15			15	21	1,60	3,16	5,08	2,04	1,60	5,36	3,64	2,60	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,85$	2	6	4	12,32	5,44	20,64	9,80	6,48	5,60	13,28	13,64	
		4	4	6	7,36	3,00	16,64	2,96	6,60	8,48	10,80	7,72	
		5	15	10	5,96	2,44	12,88	3,96	4,12	3,20	6,60	7,92	
		10	10	14	2,40	2,80	6,08	2,92	1,88	3,40	4,80	3,12	
		15	15	21	1,64	2,64	3,24	2,24	1,68	3,40	4,44	3,00	

Tabela C4: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=1,000$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00; \alpha_2 = 0,05$				$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,04$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
1,000	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	NA	2,04	NA	2,04	11,40	2,84	7,76	2,60
			4	4	6	NA	1,64	NA	1,48	4,68	1,52	4,56	1,36
			5	15	10	NA	1,20	NA	1,16	3,88	1,60	3,48	1,92
			10	10	14	NA	1,04	NA	1,04	1,92	2,64	1,68	2,56
			15	15	21	NA	1,00	NA	1,00	1,04	8,64	1,04	9,76
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 2,00$	2	6	4	NA	1,68	NA	1,64	9,96	2,48	9,76	1,84
			4	4	6	NA	1,68	NA	1,44	4,84	2,24	4,80	1,44
			5	15	10	NA	1,36	NA	1,36	3,36	1,92	3,36	1,96
			10	10	14	NA	1,00	NA	1,00	1,68	2,40	1,56	2,48
			15	15	21	NA	1,00	NA	1,00	1,16	6,20	1,20	7,44
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,87$	2	6	4	NA	1,68	NA	1,88	10,08	2,52	15,52	2,52
			4	4	6	NA	1,68	NA	1,28	4,40	1,80	7,16	1,60
			5	15	10	NA	1,12	NA	1,08	3,00	1,56	3,48	1,48
			10	10	14	10	14	NA	1,00	1,80	2,24	2,20	2,36
			15	15	21	NA	1,00	NA	1,00	1,20	4,60	1,44	2,88
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,73$	2	6	4	NA	1,72	NA	2,16	12,72	2,28	19,64	3,36
			4	4	6	NA	1,44	NA	1,24	5,28	2,36	7,16	2,08
			5	15	10	NA	1,16	NA	1,64	3,64	1,68	11,64	2,16
			10	10	14	NA	1,00	NA	1,04	1,48	2,92	4,96	1,52
			15	15	21	NA	1,00	NA	1,00	1,16	5,32	1,36	2,92
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,60$	2	6	4	6	4	NA	3,60	11,28	1,80	30,52	3,32
4			4	6	NA	1,20	NA	1,60	4,64	2,32	19,56	2,56	
5			15	10	NA	1,28	NA	2,28	5,04	1,56	12,96	1,80	
10			10	14	NA	1,04	NA	1,08	1,56	2,32	6,40	1,72	
15			15	21	NA	1,00	NA	1,00	1,20	6,72	2,68	1,48	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,20$	2	6	4	NA	1,64	NA	3,44	10,36	2,04	20,52	4,32	
		4	4	6	NA	1,48	NA	1,80	6,20	1,96	15,76	1,84	
		5	15	10	NA	1,24	NA	1,24	3,44	1,28	5,40	1,12	
		10	10	14	NA	1,00	NA	1,00	1,68	2,36	2,28	1,96	
		15	15	21	NA	1,04	NA	1,08	1,08	4,76	2,92	1,56	

Tabela C4: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=1,00$ (continuação)

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025; \alpha_2 = 0,025$				$\alpha_1 = 0,04; \alpha_2 = 0,01$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
1,000	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,00$	2	6	4	6,24	3,16	6,16	3,04	5,04	3,32	4,24	3,24
			4	4	6	3,04	2,92	2,88	2,28	2,80	4,76	2,60	2,44
			5	15	10	2,92	1,76	2,68	1,92	2,08	2,44	2,32	1,96
			10	10	14	1,48	2,68	1,28	3,56	1,36	7,44	1,44	5,76
			15	15	21	1,00	14,44	1,04	13,72	1,00	22,04	1,00	24,08
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 2,00$	2	6	4	5,88	2,84	5,28	2,76	6,32	2,92	5,52	2,72
			4	4	6	3,52	2,80	3,40	2,08	2,08	5,44	2,08	2,76
			5	15	10	2,24	2,44	2,04	2,68	2,40	2,08	2,52	2,08
			10	10	14	1,32	4,64	1,28	4,56	1,20	5,96	1,16	6,40
			15	15	21	1,12	7,12	1,08	10,04	1,04	16,92	1,08	18,52
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,87$	2	6	4	11,00	1,80	12,56	2,48	5,52	3,40	6,20	3,92
			4	4	6	2,96	3,12	4,12	2,00	2,76	4,40	2,84	2,24
			5	15	10	2,24	2,76	2,84	1,96	1,80	2,84	2,44	2,48
			10	10	14	1,20	4,24	1,20	3,80	1,24	6,00	1,32	3,88
			15	15	21	1,04	10,52	1,12	6,96	1,08	13,52	1,32	6,24
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,73$	2	6	4	7,08	3,04	7,72	2,56	4,16	3,72	6,08	3,88
			4	4	6	2,84	3,48	4,04	2,16	2,88	3,80	3,64	2,28
			5	15	10	2,72	2,20	8,96	2,52	2,16	2,40	5,04	3,32
			10	10	14	1,28	4,56	2,96	1,88	1,16	8,24	2,44	3,04
			15	15	21	1,32	8,88	1,36	4,96	1,08	13,32	1,16	9,00
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,60$	2	6	4	5,68	2,88	13,36	5,16	5,48	2,56	15,36	6,64
4			4	6	2,20	2,84	7,88	2,48	2,68	4,76	6,76	3,76	
5			15	10	2,36	2,12	10,08	2,76	2,40	2,72	4,80	2,64	
10			10	14	1,20	4,36	2,44	2,16	1,32	5,12	2,24	2,60	
15			15	21	1,04	11,20	1,76	2,52	1,12	14,72	1,92	2,96	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,20$	2	6	4	5,68	2,44	17,48	4,52	5,24	2,80	9,88	11,60	
		4	4	6	3,88	2,56	9,88	2,84	2,60	3,92	8,88	3,64	
		5	15	10	2,24	2,16	3,48	1,96	1,88	2,88	2,48	2,80	
		10	10	14	1,20	5,68	1,52	2,92	1,36	5,88	1,80	2,84	
		15	15	21	1,12	10,96	2,52	2,12	1,24	11,56	2,00	2,28	

Tabela C5: Estimativas de ARL para T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,0$ e $k_2=0,5$

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00; \alpha_2 = 0,05$				$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,04$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
$k_1 = 0,0$ $k_2 = 0,5$	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,2500	2	6	4	NA	5,52	NA	6,84	35,96	8,24	35,76	7,88
			4	4	6	NA	4,40	NA	2,88	30,48	5,56	29,92	3,44
			5	15	10	NA	2,56	NA	2,68	23,08	2,84	24,56	2,92
			10	10	14	NA	2,24	NA	1,72	5,84	2,84	6,08	2,12
			15	15	21	NA	1,56	NA	1,28	5,80	2,00	5,56	1,60
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,0625	2	6	4	NA	11,60	NA	11,32	76,00	14,84	101,68	16,92
			4	4	6	NA	11,72	NA	5,40	94,16	11,80	89,56	3,28
			5	15	10	NA	8,16	NA	8,08	59,44	8,92	54,12	10,20
			10	10	14	NA	6,60	NA	3,36	22,76	9,96	31,32	5,12
			15	15	21	NA	4,88	NA	2,84	35,16	6,36	31,60	4,04
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,3333	2	6	4	NA	5,96	NA	6,64	32,00	6,88	31,96	7,28
			4	4	6	NA	3,52	NA	2,20	14,60	3,12	19,00	2,44
			5	15	10	NA	1,88	NA	2,64	9,60	2,32	13,76	2,88
			10	10	14	NA	1,20	NA	1,08	5,76	2,24	9,16	2,12
			15	15	21	NA	1,08	NA	1,08	4,40	1,52	5,88	1,40
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,0833	2	6	4	NA	11,12	NA	14,64	55,00	11,16	65,80	10,92
			4	4	6	NA	13,00	NA	5,88	51,48	8,88	54,20	4,52
			5	15	10	NA	5,08	NA	7,00	56,28	8,84	67,80	8,68
			10	10	14	NA	6,12	NA	2,88	35,52	9,84	48,36	5,08
			15	15	21	NA	5,16	NA	3,08	28,24	5,64	32,32	3,44
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	0,6944	2	6	4	NA	2,12	NA	4,08	16,72	2,36	37,24	4,48
			4	4	6	NA	1,84	NA	2,00	5,92	3,36	22,52	2,76
			5	15	10	NA	1,08	NA	2,00	9,04	1,64	20,28	3,40
			10	10	14	NA	1,12	NA	1,68	3,04	1,96	9,60	1,60
15			15	21	NA	1,04	NA	1,16	1,68	2,40	5,80	1,36	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	0,1736	2	6	4	NA	7,88	NA	14,52	62,36	9,44	81,80	19,64	
		4	4	6	NA	6,36	NA	5,08	32,92	6,28	71,16	4,24	
		5	15	10	NA	3,52	NA	6,52	31,08	2,64	45,84	6,92	
		10	10	14	NA	1,96	NA	2,60	13,56	3,00	26,48	5,40	
		15	15	21	NA	1,92	NA	2,16	9,52	2,80	21,76	3,08	

Tabela C5: Estimativas de ARL para T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,0$ e $k_2=0,5$ (continuação)

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025; \alpha_2 = 0,025$				$\alpha_1 = 0,04; \alpha_2 = 0,01$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
$k_1 = 0,0$ $k_2 = 0,5$	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,2500	2	6	4	24,20	8,52	24,88	10,72	17,44	17,84	16,20	11,72
			4	4	6	10,16	6,28	11,52	3,16	6,68	19,32	8,88	4,48
			5	15	10	9,88	5,12	10,36	4,36	8,16	4,16	7,80	4,92
			10	10	14	5,72	3,36	5,00	2,92	3,72	5,76	3,88	2,56
			15	15	21	3,52	2,76	3,36	2,16	2,48	3,60	2,76	3,12
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,0625	2	6	4	41,44	19,60	29,80	20,64	19,44	36,64	14,28	33,76
			4	4	6	18,28	21,04	23,56	7,48	20,32	35,80	18,20	10,08
			5	15	10	24,56	10,12	22,92	11,00	16,88	25,68	24,12	16,16
			10	10	14	21,92	9,44	19,92	3,28	10,56	25,72	9,80	9,16
			15	15	21	13,64	10,16	12,60	3,52	11,84	20,36	10,64	5,84
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,3333	2	6	4	15,40	5,92	20,16	7,56	9,08	12,56	13,24	11,92
			4	4	6	11,72	5,40	11,00	2,40	6,36	13,12	9,08	5,68
			5	15	10	6,40	3,20	10,56	3,68	5,68	3,60	7,64	4,96
			10	10	14	3,36	2,60	4,00	1,80	3,32	4,00	3,48	3,20
			15	15	21	2,24	2,92	3,40	2,08	2,00	3,08	2,92	2,16
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,0833	2	6	4	33,20	14,76	27,80	19,56	14,12	38,16	17,00	33,52
			4	4	6	23,08	22,80	22,00	7,60	16,68	35,32	15,72	12,04
			5	15	10	20,00	11,28	32,72	14,16	14,60	15,56	14,56	19,88
			10	10	14	11,40	11,16	12,76	5,76	11,60	17,44	13,20	8,44
			15	15	21	11,40	6,52	15,48	3,96	7,96	15,96	8,36	4,96
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	0,6944	2	6	4	8,84	4,40	13,92	9,60	8,32	4,44	12,32	11,44
			4	4	6	3,72	2,80	9,28	3,88	4,08	7,40	7,92	5,08
			5	15	10	4,04	2,36	9,20	4,12	3,36	2,28	8,48	4,40
			10	10	14	1,52	4,04	5,48	1,96	1,76	4,16	3,40	2,80
15			15	21	1,56	3,88	3,36	1,72	1,08	5,80	2,60	2,96	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	0,1736	2	6	4	20,76	10,88	39,80	21,56	19,64	24,68	29,48	26,48	
		4	4	6	14,72	13,28	23,72	6,08	8,84	22,32	16,40	12,84	
		5	15	10	13,00	5,28	19,52	12,96	8,72	10,96	12,96	22,80	
		10	10	14	9,20	3,52	20,32	3,92	5,84	9,04	10,20	4,68	
		15	15	21	4,44	3,40	10,16	3,76	3,52	6,36	9,28	4,80	

Tabela C6: Estimativas de ARL para T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,5$ e $k_2=-0,5$

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00; \alpha_2 = 0,05$				$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,04$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂
$k_1 = 0,5$ $k_2 = -0,5$	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,5000	2	6	4	NA	4,04	NA	3,24	22,32	4,16	26,92	3,80
			4	4	6	NA	2,12	NA	1,40	7,48	3,28	12,92	2,04
			5	15	10	NA	1,68	NA	1,60	10,00	2,08	9,64	2,36
			10	10	14	NA	1,40	NA	1,32	2,92	2,12	4,12	1,60
			15	15	21	NA	1,04	NA	1,04	2,00	1,80	2,72	1,64
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,3125	2	6	4	NA	3,76	NA	4,44	38,08	6,00	49,20	6,08
			4	4	6	NA	3,28	NA	2,16	16,40	4,64	23,52	2,28
			5	15	10	NA	1,76	NA	1,72	17,76	1,96	23,40	1,80
			10	10	14	NA	1,40	NA	1,28	5,52	2,96	6,32	1,92
			15	15	21	NA	1,36	NA	1,12	5,56	2,08	5,56	1,84
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	1,0000	2	6	4	NA	2,08	NA	2,64	13,60	2,28	21,88	2,68
			4	4	6	NA	1,32	NA	1,56	4,84	2,04	16,36	1,44
			5	15	10	NA	1,28	NA	1,36	4,20	2,08	12,28	1,96
			10	10	14	NA	1,00	NA	1,04	1,72	2,00	5,92	1,20
			15	15	21	NA	1,00	NA	1,04	1,24	5,48	3,36	1,56
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,5833	2	6	4	NA	2,16	NA	3,20	16,40	3,00	26,84	4,48
			4	4	6	NA	2,16	NA	1,84	9,24	2,72	22,48	2,60
			5	15	10	NA	1,32	NA	1,76	6,52	2,12	16,44	2,44
			10	10	14	NA	1,20	NA	1,32	3,04	1,64	11,56	1,20
			15	15	21	NA	1,12	NA	1,24	1,76	2,44	3,64	1,68
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	2,5000	2	6	4	NA	1,16	NA	2,56	3,72	1,80	20,12	2,08
			4	4	6	NA	1,04	NA	1,16	1,64	2,44	9,64	1,52
			5	15	10	NA	1,00	NA	1,20	1,36	3,96	11,52	1,48
			10	10	14	NA	1,00	NA	1,04	1,00	56,00	3,76	1,40
15			15	21	NA	1,00	NA	1,00	1,00	1602,28	2,92	1,56	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	1,4236	2	6	4	NA	1,36	NA	3,84	10,08	1,48	36,08	4,44	
		4	4	6	NA	1,12	NA	1,72	4,00	1,60	17,96	2,72	
		5	15	10	NA	1,04	NA	1,36	2,36	1,80	15,08	2,24	
		10	10	14	NA	1,00	NA	1,00	1,20	4,52	5,56	1,36	
		15	15	21	NA	1,00	NA	1,00	1,04	21,32	3,12	1,36	

Tabela C6: Estimativas de ARL para T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $k_1=0,5$ e $k_2=-0,5$ (continuação)

Cenário (μ_1)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,025; \alpha_2 = 0,025$				$\alpha_1 = 0,04; \alpha_2 = 0,01$			
						T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
$k_1 = 0,5$ $k_2 = -0,5$	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,5000	2	6	4	16,24	3,96	12,48	5,24	13,36	8,28	15,96	7,52
			4	4	6	5,92	3,32	5,76	2,12	3,92	8,92	5,20	4,48
			5	15	10	5,28	2,72	7,32	2,40	3,04	3,00	4,12	2,96
			10	10	14	3,08	3,48	3,84	2,40	3,24	3,64	2,84	2,52
			15	15	21	1,52	3,24	1,84	2,00	1,44	4,56	1,88	2,80
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	0,3125	2	6	4	12,04	9,20	15,64	8,36	10,60	10,08	8,24	8,44
			4	4	6	7,92	7,68	9,76	3,20	6,28	14,32	8,68	4,52
			5	15	10	5,40	3,00	7,84	3,32	6,52	4,08	5,64	4,04
			10	10	14	3,40	3,44	4,56	2,12	3,24	5,44	3,44	2,56
			15	15	21	2,76	2,80	3,24	1,88	2,32	4,24	2,52	2,48
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	1,0000	2	6	4	7,56	2,28	13,68	3,20	5,64	2,96	10,64	6,12
			4	4	6	2,80	2,92	5,44	1,96	2,32	4,84	4,56	2,84
			5	15	10	2,24	2,28	6,48	1,84	2,20	2,24	3,76	2,52
			10	10	14	1,52	3,44	2,72	1,76	1,36	5,28	1,96	2,20
			15	15	21	1,08	10,64	1,56	2,88	1,04	23,92	1,44	3,84
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	0,5833	2	6	4	10,16	4,04	12,28	6,00	6,64	6,96	10,20	10,68
			4	4	6	5,04	3,12	9,28	2,64	2,96	6,72	7,40	4,48
			5	15	10	3,32	1,96	7,64	2,48	4,04	2,28	6,72	3,32
			10	10	14	1,80	2,72	4,48	1,72	1,88	4,36	3,64	2,36
			15	15	21	1,68	4,04	2,96	1,52	1,36	5,68	2,24	3,12
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	2,5000	2	6	4	3,08	1,80	12,04	4,20	1,92	2,88	8,68	9,20
			4	4	6	1,12	4,16	5,32	2,40	1,20	5,36	3,52	2,28
			5	15	10	1,04	6,92	4,64	1,44	1,28	8,44	5,44	1,92
			10	10	14	1,00	142,24	2,16	1,60	1,00	209,16	1,56	2,36
15			15	21	1,00	2995,00	1,48	2,36	1,00	8459,84	1,72	3,08	
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	1,4236	2	6	4	4,36	2,48	20,44	5,16	3,60	2,40	8,84	8,24	
		4	4	6	2,20	2,36	10,48	1,84	1,80	4,72	4,64	4,36	
		5	15	10	1,68	3,88	8,92	2,32	1,60	3,24	5,52	3,36	
		10	10	14	1,04	9,92	4,08	1,48	1,12	14,04	3,00	2,40	
		15	15	21	1,04	56,44	2,60	1,84	1,00	88,40	2,04	2,52	

Tabela C7: Estimativas de ARL para os testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui sob amostragem dupla para o caso em que Σ é conhecida e $p=3$

Cenário (μ_1)	Matriz De Covariâncias	Matriz de Correlação	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00; \alpha_2 = 0,05$				$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,04$				$\alpha_1 = 0,025; \alpha_2 = 0,025$				$\alpha_1 = 0,04; \alpha_2 = 0,01$			
				n_1	n_2	\bar{n}	T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui		T^2 de Hotelling		Hayter e Tsui	
							ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂
$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,125	5	5	7	NA	5,44	NA	4,76	42,56	7,64	57,76	4,92	25,60	9,08	22,60	6,08	18,96	16,80	12,60	7,52
				5	10	9	NA	5,00	NA	2,24	16,96	4,56	24,20	2,96	15,92	9,72	15,20	3,96	11,36	22,40	11,56	4,60
				10	10	14	NA	8,16	NA	2,64	50,72	7,32	40,68	3,32	15,84	16,00	19,48	4,32	11,68	26,96	11,64	6,40
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,138	5	5	7	NA	7,32	NA	5,64	38,16	4,44	58,96	4,64	29,40	9,92	31,20	7,40	12,84	19,60	16,72	13,52
				5	10	9	NA	3,84	NA	2,08	21,68	5,00	34,44	2,68	12,08	6,24	15,56	3,80	8,52	11,40	10,00	5,36
				10	10	14	NA	8,20	NA	4,12	43,56	8,16	56,68	4,44	21,76	18,44	19,68	6,80	10,72	27,24	14,88	7,84
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,031	5	5	7	NA	13,96	NA	10,72	86,32	17,72	88,36	15,88	40,24	17,44	45,04	11,84	17,00	57,00	21,60	21,12
				5	10	9	NA	16,24	NA	4,84	42,04	18,68	63,12	6,96	26,00	17,76	31,84	7,04	19,60	54,40	27,68	11,40
				10	10	14	NA	12,68	NA	6,24	63,12	20,84	89,92	6,88	24,64	24,32	33,40	6,20	18,04	65,00	30,48	12,16
$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$ $k_3 = 0,00$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0,500	5	5	7	NA	1,72	NA	1,64	8,24	2,40	13,28	2,44	7,84	2,40	9,80	2,24	5,00	3,80	4,40	3,60
				5	10	9	NA	1,28	NA	1,28	3,44	2,12	4,36	1,56	3,12	3,00	3,76	2,28	2,40	4,16	2,68	2,60
				10	10	14	NA	2,44	NA	1,68	12,36	3,32	16,36	2,04	8,12	2,92	8,24	2,84	4,60	7,16	6,48	3,60
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,553	5	5	7	NA	2,08	NA	2,12	7,68	2,44	16,48	2,40	6,72	2,40	7,72	2,36	3,80	3,76	6,00	5,24
				5	10	9	NA	1,32	NA	1,40	3,52	2,00	6,96	1,56	2,64	2,16	3,12	1,92	2,60	3,48	3,76	3,12
				10	10	14	NA	2,72	NA	1,92	11,16	3,24	13,48	2,08	5,20	4,32	8,68	2,28	4,04	5,00	5,20	3,64
	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	0,123	5	5	7	NA	5,16	NA	5,72	38,40	6,40	48,00	7,56	18,08	9,48	25,00	9,96	9,72	21,28	13,80	10,12
				5	10	9	NA	4,00	NA	3,48	15,60	5,76	38,96	4,40	10,08	10,68	13,40	5,96	11,56	10,76	13,36	5,96
				10	10	14	NA	7,08	NA	4,20	34,12	7,80	53,52	5,52	23,48	13,84	25,72	4,92	12,56	21,76	13,56	8,44

Tabela C8: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,125$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00; \alpha_2 = 0,05$		$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,04$		$\alpha_1 = 0,025; \alpha_2 = 0,025$		$\alpha_1 = 0,04; \alpha_2 = 0,01$	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2	ARL_1	ARL_2
0,125	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$	4	4	6	NA	64,16	NA	108,40	NA	385,48	NA	6479,88
			5	15	10	NA	8,68	NA	8,84	NA	13,84	38837,89	32,40
			10	10	14	NA	3,84	947,84	5,96	93,48	5,80	39,40	19,84
			15	15	21	NA	2,68	61,64	3,28	25,00	4,56	10,52	9,96
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0$	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,50$	4	4	6	NA	65,12	NA	110,00	NA	377,56	NA	6502,92
			5	15	10	NA	8,60	NA	9,92	NA	11,92	28,92	4,84
			10	10	14	NA	6,08	1277,60	6,84	120,32	6,28	29,04	17,60
			15	15	21	NA	2,68	78,32	3,48	50899,23	22,60	16,88	9,48
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,31$	4	4	6	NA	59,92	NA	126,24	NA	274,40	NA	4025,48
			5	15	10	NA	11,48	NA	9,96	NA	10,48	55671,11	20,64
			10	10	14	NA	4,76	1212,36	5,40	118,76	10,12	27,56	17,20
			15	15	21	NA	2,80	64,64	3,16	23,88	4,76	14,72	12,32
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,5$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	4	4	6	NA	58,76	NA	97,48	NA	475,20	NA	5860,48
			5	15	10	NA	5,96	NA	7,24	NA	15,92	41145,62	22,80
			10	10	14	NA	5,48	1204,72	6,12	100,92	10,32	56,68	15,08
			15	15	21	NA	3,92	61,04	3,40	20,04	3,72	9,48	8,28
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,21$	4	4	6	NA	63,40	NA	109,40	NA	321,64	NA	7908,04
			5	15	10	NA	11,12	NA	12,28	59083,00	10,76	52806,83	19,84
			10	10	14	NA	6,68	1290,64	5,56	104,80	9,24	63,16	16,84
			15	15	21	NA	3,52	68,64	3,16	17,64	4,80	15,24	9,00
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$ $\rho = 0,8$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	4	4	6	NA	64,68	NA	92,60	NA	369,28	NA	5025,56
			5	15	10	NA	9,88	NA	8,20	NA	9,56	38962,45	25,72
			10	10	14	NA	6,92	849,00	7,24	125,80	10,16	44,24	19,72
			15	15	21	NA	3,48	68,76	2,84	31,52	6,60	9,80	9,56

Tabela C9: Estimativas de ARL para o teste T^2 de Hotelling sob amostragem dupla para o caso em que Σ é desconhecida e $p=2$, cenário $d=0,500$

Cenário (d)	Matriz de Covariâncias/ Correlação	Vetor de Médias sob H_1	Tamanhos de Amostra			$\alpha_1 = 0,00; \alpha_2 = 0,05$		$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,04$		$\alpha_1 = 0,025; \alpha_2 = 0,025$		$\alpha_1 = 0,04; \alpha_2 = 0,01$	
			n_1	n_2	\bar{n}	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂	ARL ₁	ARL ₂
0,500	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 0,50$	4	4	6	NA	7,92	NA	10,28	NA	23,96	NA	301,20
			5	15	10	NA	2,84	NA	2,92	54503,00	2,28	13536,84	2,52
			10	10	14	NA	1,48	35,36	1,32	9,24	1,56	6,28	2,84
			15	15	21	NA	1,16	7,08	1,20	2,28	2,16	2,20	3,28
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$k_1 = 0,50$ $k_2 = 1,00$	4	4	6	NA	6,24	NA	12,84	NA	24,24	NA	339,20
			5	15	10	NA	1,04	5,04	1,92	2,84	1,92	2,28	3,48
			10	10	14	NA	1,36	56,16	1,80	11,40	1,56	5,20	2,60
			15	15	21	NA	1,12	5,12	1,20	2,76	1,72	2,44	2,32
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,61$	4	4	6	NA	8,64	NA	16,80	NA	31,44	NA	293,00
			5	15	10	NA	2,48	NA	2,40	54900,00	2,56	8628,60	2,00
			10	10	14	NA	1,40	56,28	1,52	14,72	1,88	5,64	2,44
			15	15	21	NA	1,12	4,92	1,44	2,68	2,12	1,88	3,76
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 1,23$	4	4	6	NA	7,76	NA	12,24	NA	20,00	NA	224,96
			5	15	10	NA	2,12	NA	2,68	82301,50	2,08	8442,80	3,32
			10	10	14	NA	1,20	65,00	1,36	9,36	1,64	3,64	3,52
			15	15	21	NA	1,16	6,08	1,40	2,60	1,72	2,28	2,40
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,42$	4	4	6	NA	10,16	NA	12,12	NA	22,28	NA	324,96
			5	15	10	NA	2,72	NA	1,84	NA	2,20	10514,84	3,60
			10	10	14	NA	1,20	33,56	1,48	11,24	1,68	5,60	3,20
			15	15	21	NA	1,12	5,56	1,36	2,76	2,24	2,32	2,68
	$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1,6 & 4 \end{pmatrix}$	$k_1 = 0,00$ $k_2 = 0,85$	4	4	6	NA	9,64	NA	17,04	NA	36,72	NA	213,96
			5	15	10	NA	3,88	NA	2,48	58549,50	2,48	9368,64	2,96
			10	10	14	NA	1,60	33,36	1,76	11,24	1,96	4,32	2,52
			15	15	21	NA	1,20	5,64	1,44	2,04	2,16	1,68	2,72

Anexo D

Este anexo contém os algoritmos implementados para a utilização de um usuário. Trata-se de uma versão preliminar construída com o intuito de auxiliar na aplicação das metodologias propostas nesta dissertação. A apresentação dos códigos implementados é fornece suporte à análise de dados relacionados ao controle multivariado em que se deseja utilizar a amostragem dupla e constitui apoio fundamental aos usuários uma vez que as metodologias propostas nesta dissertação não estão implementadas nos *softwares* estatísticos.

Quadro D1: Algoritmo do teste T^2 de Hotelling para Σ conhecida

```
#TESTE  $T^2$  DE HOTELLING PARA O CASO EM QUE A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS TEÓRICA DO PROCESSO É
CONHECIDA
# Versão: 1.0
# Ano: 2009
# Autores: Grazielle Umbelina Alves Ferreira
#          Sueli Aparecida Mingoti
# Descrição: Este programa algoritmo calcula os limites críticos do testes  $T^2$  de Hotelling e
# sua aplicação para o controle estatístico de processos multivariados sob amostragem dupla.
# Nota: Este algoritmo funciona em linguagem R e requer a instalação do pacote mvtnorm.
#
### Inserção de Parâmetros ###
#Vetor de Médias sob a Hipótese Nula
mizero <- c(mizero1, mizero2, ..., mizero

)
#Número de variáveis avaliadas
p <- length(mizero)
#Matriz de covariâncias teórica
sigmazero <- matrix(c(sigmall, sigma12, ..., sigmapp), nrow=p, ncol=p, byrow=T)
#Tamanho Amostral da Fase 1
n1 <- tamanho da amostra 1
#Tamanho Amostral da Fase 2
n2 <- tamanho da amostra 2
# Tamanho da Amostra Conjunta
n <- n1+n2
#Nível de Significância atribuído à primeira fase
alfal <- nivel1
#Nível de Significância global
alfa <- nivel global
#Nível de Significância da fase 2
alfa2 <- alfa-alfal
#
### Estimativas associadas à Fase 1
pzero <- (n1+n2-nbarra)/n2
CL1Hot <- qchisq(1-alfal, p, lower.tail=TRUE)
alfaast <- pzero - alfal
wHot <- qchisq(alfaast, p, lower.tail=TRUE)
#
### Algoritmo para obtenção do Limite Crítico  $CL_2$ 
require(mvtnorm)
N <- 300000
x <- list(); y <- list(); z <- list()
Hot1 <- NULL; Hot <- NULL
M <- NULL
ind1Fase2Hot <- NULL
for (i in 1:N){
  x[[i]] <- rmvnorm(n1, mizero, sigmazero)
  Hot1[i] <- n1*(t(colMeans(x[[i]])-mizero))%*%solve(sigmazero)%*(colMeans(x[[i]])-
mizero)
  ind1Fase2Hot[i] <- ifelse((Hot1[i]>wHot & Hot1[i]<=CL1Hot), 1, 0)
  if(ind1Fase2Hot[i]==1){
    y[[i]] <- rmvnorm(n2, mizero, sigmazero)
    z[[i]] <- rbind(x[[i]], y[[i]])
    Hot[i] <- (n1+n2)*(t(colMeans(z[[i]])-
mizero))%*%solve(sigmazero)%*(colMeans(z[[i]])-mizero)
  }
}
M <- sum(ind1Fase2Hot)
T1 <- Hot1[ind1Fase2Hot==1]
T <- Hot[ind1Fase2Hot==1]
CL2Hot <- quantile(T, 1-alfa2/(1-pzero))

### Leitura dos Dados ###
x <- amostra de tamanho n1
y <- amostra de tamanho n2
z <- rbind(x, y)

### Aplicação do teste ###
Hot1 <- n1*(t(colMeans(x)-mizero))%*%solve(sigma)%*(colMeans(x)-mizero)
Hot <- ifelse(Hot1>wHot & Hot1<=CL1Hot, (n1+n2)*(t(colMeans(z)-
mizero))%*%solve(sigmazero)%*(colMeans(z)-mizero), NA)
ifelse(Hot1>wHot & Hot1<=CL1Hot, print("A análise do processo vai para a segunda fase de
inspeção", ifelse(Hot1<=w, print("Não se rejeita a Hipótese nula"), print("Rejeita-se a Hipótese
Nula")))
ifelse(Hot1>wHot & Hot1<=CL1Hot & Hot>CL2Hot, print("Rejeita-se a Hipótese Nula", print("Não se
rejeita a Hipótese nula"))


```

Quadro D2: Algoritmo do teste T^2 de Hotelling para Σ desconhecida

```
#TESTE  $T^2$  DE HOTELLING PARA O CASO EM QUE A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS TEÓRICA DO PROCESSO É
DESCONHECIDA
# Versão: 1.0
# Ano: 2009
# Autores: Grazielle Umbelina Alves Ferreira
#          Sueli Aparecida Mingoti
# Descrição: Este programa algoritmo calcula os limites críticos do testes  $T^2$  de Hotelling e
# sua aplicação para o controle estatístico de processos multivariados sob amostragem dupla.
# Nota: Este algoritmo funciona em linguagem R e requer a instalação do pacote mvtnorm.
#
### Inserção de Parâmetros ###
#Vetor de Médias sob a Hipótese Nula
Mizero <- c(mizero1, mizero2, ..., mizerop)
#Número de variáveis avaliadas
p <- length(mizero)
#Matriz de covariâncias teórica
sigmazero <- matrix(c(sigmall, sigmal2, ..., sigmapp), nrow=p, ncol=p, byrow=T)
#Tamanho Amostral da Fase 1
n1 <- tamanho da amostra 1
#Tamanho Amostral da Fase 2
n2 <- tamanho da amostra 2
# Tamanho da Amostra Conjunta
n <- n1+n2
#Nível de Significância atribuído à primeira fase
alfal <- nivel1
#Nível de Significância global
alfa <- nivel global
#Nível de Significância da fase 2
alfa2 <- alfa-alfal
#
### Estimativas associadas à Fase 1
pzero <- (n1+n2-nbarra)/n2
CL1Hot <- ((p*(n1-1))/(n1-p))*qf(1-alfal,p,n1-p,lower.tail=TRUE)
alfaast <- pzero - alfal
wHot <- ((p*(n1-1))/(n1-p))*qf(alfaast,p,n1-p,lower.tail=TRUE)
#
### Algoritmo para obtenção do Limite Crítico  $CL_2$ 
require(mvtnorm)
N <- 300000
x <- list(); y <- list(); z <- list()
Hot1 <- NULL; Hot <- NULL
M <- NULL
ind1Fase2Hot <- NULL
for (i in 1:N){
  x[[i]] <- rmvnorm(n1,mizero,sigmazero)
  Hot1[i] <- n1*(t(colMeans(x[[i]])-mizero))%*%solve(cov(x[[i]]))%*%(colMeans(x[[i]])-
mizero)
  ind1Fase2Hot[i] <- ifelse((Hot1[i]>wHot & Hot1[i]<=CL1Hot),1,0)
  if(ind1Fase2Hot[i]==1){
    y[[i]] <- rmvnorm(n2,mizero,sigmazero)
    z[[i]] <- rbind(x[[i]],y[[i]])
    Hot[i] <- (n1+n2)*(t(colMeans(z[[i]])-
mizero))%*%solve(cov(z[[i]]))%*%(colMeans(z[[i]])-mizero)
  }
}
M <- sum(ind1Fase2Hot)
T1 <-Hot1[ind1Fase2Hot==1]
T <-Hot[ind1Fase2Hot==1]
CL2Hot <- quantile(T,1-alfa2/(1-pzero))

### Leitura dos Dados ###
x <- amostra de tamanho n1
y <- amostra de tamanho n2
z <- rbind(x,y)

### Aplicação do teste ###
Hot1 <- n1*(t(colMeans(x)-mizero))%*%solve(cov(x))%*%(colMeans(x)-mizero)
Hot <- ifelse(Hot1>wHot & Hot1<=CL1Hot, (n1+n2)*(t(colMeans(z)-
mizero))%*%solve(cov(x))%*%(colMeans(z)-mizero),NA)
ifelse(Hot1>wHot & Hot1<=CL1Hot,print("A análise do processo vai para a segunda fase de
inspeção",ifelse(Hot1<=w,print("Não se rejeita a Hipótese nula"),print("Rejeita-se a Hipótese
Nula")))
ifelse(Hot1>wHot & Hot1<=CL1Hot & Hot>CL2Hot,print("Rejeita-se a Hipótese Nula",print("Não se
rejeita a Hipótese nula"))
```

Quadro D3: Algoritmo do teste Hayter e Tsui para Σ conhecida

```
#TESTE HAYTER E TSUI PARA O CASO EM QUE A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS TEÓRICA DO PROCESSO É CONHECIDA
# Versão: 1.0
# Ano: 2009
# Autores: Grazielle Umbelina Alves Ferreira
#         Sueli Aparecida Mingoti
# Descrição: Este programa algoritmo calcula os limites críticos do teste multivariado para o vetor
# de médias de Hayter e Tsui e sua aplicação para o controle estatístico de processos multivariados
# sob amostragem dupla.
# Nota: Este algoritmo funciona em linguagem R e requer a instalação do pacote mvtnorm.
#
### Inserção de Parâmetros ###
#Vetor de Médias sob a Hipótese Nula
Mizero <- c(mizero1, mizero2, ..., mizero

)
#Número de variáveis avaliadas
p <- length(mizero)
#Matriz de covariâncias teórica
sigmazero <- matrix(c(sigmall1, sigmal2, ..., sigmapp), nrow=p, ncol=p, byrow=T)
#Tamanho Amostral da Fase 1
n1 <- tamanho da amostra 1
#Tamanho Amostral da Fase 2
n2 <- tamanho da amostra 2
# Tamanho da Amostra Conjunta
n <- n1+n2
#Nível de Significância atribuído à primeira fase
alfal <- nivel1
#Nível de Significância global
alfa <- nivel global
#Nível de Significância da fase 2
alfa2 <- alfa-alfal
#
### Algoritmo para obtenção dos Limites Críticos
require(mvtnorm)
N <- 100000
z <- list()
M <- NULL
for (i in 1:N){
  z[[i]] <- rmvnorm(n=1, mean = rep(0,p), sigma=Mcor)
  M[i] <- max(abs(z[[i]]))
}
(wHT <- quantile(M, Alfaast))
(CL1HT <- quantile(M, 1-Alfa1))
(CL2HT <- quantile(M, 1-Alfa2))
#
### Leitura dos Dados ###
x <- amostra de tamanho n1
y <- amostra de tamanho n2
z <- rbind(x,y)
#
### Aplicação do teste ###
HT1[i] <- max(abs((colMeans(x[[i]])-mizero)/(sqrt(diag(sigma)/n1))))
HT[i] <- ifelse(ind1Fase2HT[i]==1, max(abs((colMeans(z[[i]])-
mizero)/(sqrt((n2*diag(sigma))/(n1+n2)^2))))), NA)
ifelse(HT1>wHT & HT1<=CL1HT, print("A análise do processo vai para a segunda fase de
inspeção", ifelse(HT1<=w, print("Não se rejeita a Hipótese nula"), print("Rejeita-se a Hipótese
Nula")))
ifelse(Hot1>wHT & HT1<=CL1HT & HT>CL2HT, print("Rejeita-se a Hipótese Nula", print("Não se rejeita a
Hipótese nula"))


```

Referências Bibliográficas

ALT, F. B.; Multivariate Quality Control. *Encyclopedia of Statistical Sciences* 6, edited by S. Kotz and N. L. Johnson. John Wiley & Sons. New York, NY, 1985.

ANDERSON, T. W. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley, 721p, 2003.

BECHHOFFER, R. E.; DUNNETT, C. W.; Percentage Points of Multivariate Student t Distributions. *Selected Tables in Mathematical Statistics* 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

COLENGHI, F. K. R.; Estudo comparativo de testes de hipótese multivariados para o vetor de médias via simulação de Monte Carlo. Belo Horizonte: Departamento de Estatística, UFMG, 2008. Dissertação de Mestrado.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R.; Controle Estatístico de Qualidade. São Paulo: Ed Atlas, 2005.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G.; Bivariate control charts with double sampling. *Journal of Quality Technology*, v. 35, N° 7, p. 809-822, July 2008

COSTA, A. B., RAHIM, M. A.; A Single EWMA Chart for Monitoring Process Mean and Process Variance, *Quality Technology & Quantitative Management* Vol. 3, No. 3, pp. 295-305, 2006.

DAUDIN, J. J.; Double sampling \bar{X} charts, *Journal Quality Technology*, v. 24, pp 78-87, 1992.

DOGANAKSOY, N., FALTIN, F. W., TUCKER, W. T.; Identification of Out of Control Quality Characteristics in a Multivariate Manufacturing Environment. *Communications in Statistics – Theory and Methods* 20, pp. 2775-2790, 1991.

FARAZ, A., PARSIAN, A.; Hotelling's T^2 control chart with double warning lines, *Statistical Papers* 47, pp. 569-593, 2006.

FUJIKOSHI, Y., SEO, T.; Asymptotic Expansions for the Joint Distribution of Correlated Hotelling's T^2 Statistics under Normality, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 28(3&4), 773-778, 1999.

GLORIA, F. A. A.; Uma avaliação do desempenho de núcleo-estimadores no controle de processos multivariados. Belo Horizonte: Departamento de Estatística, UFMG, 2006. Dissertação de Mestrado.

HAYTER, A. J., TSUI, K. L.; Identification and Qualification in Multivariate Quality Control Problems. *Journal of Quality Technology*, v. 26, N° 3, p. 197-208, 1994.

HE D, GRIGORYAN A. Construction of Double Sampling s -Control Charts for Agile Manufacturing, *Quality and Reliability Engineering International*; 18: 343–355, 2002.

HE, D., GRIGORYAN, A.; Multivariate multiple sampling charts. *Institute of Industrial Engineers Transactions*, 37, pp 509-521, 2005.

HOTELLING, H. Multivariate Quality Control. *Techniques of statistical Analysis*, C. Eisenhart, M. Hastay e W. A. Wallis (eds), New York: McGraw-Hill, pp111-184, 1947.

JOHNSON, R. A., WICHERN, D. W.; Applied multivariate statistical analysis. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

KALGONDA, A. A., KULKARNI, S. R.; Multivariate Quality Control Chart for Autocorrelated Processes. *Journal of Applied Statistics* vol. 31, N° 3, pp. 317-327, 2004.

LOWRY, C. A., WOODALL, W. H.; CHAMP, C. W.; and RIGON, S. E.; A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart, *Technometrics* 34, pp. 46-53, 1992.

MINGOTI, S. A.; Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada. Belo Horizonte: Editora UFMG, 295 p., 2005.

MINGOTI, S. A., GLÓRIA, F. A. A.; Comparando os métodos paramétrico e não-paramétrico na determinação do valor crítico do teste estatístico de médias proposto por Hayter e Tsui, *Revista Produção*, 15(2):251-262, 2005.

MONTGOMERY, D. C.; Introdução ao controle estatístico da qualidade. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, c2004.

ODEH, R. E.; Tables of Percentage Points of the Distribution of the Maximum Absolute Value of Equally Correlated Normal Random Variables. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* 11, pp. 65-87, 1982.

ROCON, G. M.; Comparação de Cartas Controle Multivariados usados no Monitoramento de Processos Univariados Autocorrelacionados. Belo Horizonte, Departamento de Estatística, UFMG, 2004. (Dissertação de Mestrado).

SADEGHPOUR-GILDEH B., YARI, G., JAMKHANEH, E. B.; Acceptance Double Sampling Plan with Fuzzy Parameter, Proceedings of the 11th Joint Conference Sciences, Atlantis Press, 2008.

SHEWHART, W. A.; Quality control charts. *Bell System Technical Journal*, 1926.

SOUZA, A. M., RIGÃO, M. A.; Identificação de variáveis fora de controle em processos produtivos multivariados. *Produção*, v. 15, n. 1, p. 074-086, Jan./Abr. 2005.

SULLIVAN, J. H., STOUMBOS, Z. G., MASON, R. T., YOUNG, J. C.; Step-Down Analysis for Changes in the Covariance Matrix and Other Parameters. *Journal of Quality Technology*; 39, 1; ABI/INFORM Global; Jan. 2007.