

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICEX
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA
ABRIL DE 2012

Estudo de desempenho de testes de hipóteses multivariados no caso de dados de duas populações independentes

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aluno: Fernando Henrique Pereira

Orientadora: Profa. PhD. Sueli Aparecida Mingoti

Fernando Henrique Pereira

Estudo de desempenho de testes de hipóteses
multivariados no caso de dados de duas
populações independentes

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientadora: Profa. PhD. Sueli Aparecida Mingoti

Belo Horizonte, Abril de 2012
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Minas Gerais

*Contudo, seja qual
for o grau a que
chegamos, o que importa
é prosseguir
decididamente*

Paulo de Tarso, 62 D.C.

Agradecimentos

A gratidão é uma virtude pela qual devemos nos deixar ser guiados!

*Agradeço primeiramente e sobretudo a Deus, pelo dom da vida e por
direcionar os meus passos até aqui. Por mais essa vitória!
Obrigado, Senhor, por poder dizer ao final desta etapa:
“**Até aqui me ajudou o Senhor!**” (cf. 1 Samuel 7,12)*

*Aos meus pais, que são a base e o sustento do meu caminhar. Por me
oferecerem apoio para cada passo que dou no meu dia-dia!*

*À minha família e aos meus amigos. Cada um tem seu lugar nessa
vitória!*

*Agradeço, ainda, à Profa Sueli Aparecida Mingoti, que é para mim um
exemplo de profissionalismo e de maestria na arte de partilhar o saber.
Obrigado pela confiança.*

Aos professores e mestres, que me formaram até aqui!

*Enfim, por todos que me deram a mão, me incentivaram e me
promoveram de alguma forma.
A todos estes,*

Muito obrigado!

Resumo

Os testes de hipótese são muito usados em várias áreas do conhecimento. Há situações em que várias variáveis são medidas na mesma população e a hipótese de interesse envolve um vetor de parâmetros da distribuição de probabilidades conjunta dessas variáveis. Um dos testes de hipótese multivariados mais conhecidos é o teste T^2 de Hotelling usado para testar o vetor de médias populacional no caso de uma ou duas populações. Um teste alternativo ao T^2 de Hotelling foi proposto por Hayter e Tsui em 1994, apenas para o caso de uma população. Assim, o objetivo principal desta dissertação é a extensão do teste Hayter & Tsui (1994) para o caso de comparação de vetores de médias de 2 populações independentes. Três novos testes que foram combinações dos 2 testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui também foram propostos, aproveitando-se deste modo a qualidade destes dois testes na tentativa de obter-se um teste mais poderoso que os testes individualmente. Avaliou-se o comportamento destes novos testes, comparando-os, via simulação Monte Carlo, com o usual T^2 de Hotelling, no que tange ao poder do teste. A extensão proposta do teste de Hayter e Tsui se mostrou bastante comparável ao usual teste T^2 de Hotelling, chegando até mesmo a superá-lo em alguns casos. Os testes de combinação de p-valores de Tippett (1931) e Fisher (1950) também se mostraram eficientes, superando também tanto o teste T^2 de Hotelling quanto o teste de Hayter e Tsui em alguns casos para alguns cenários simulados.

Palavras Chaves: Teste de Hipótese Multivariado, Hayter e Tsui, T^2 de Hotelling, Monte Carlo, Comparação de 2 populações.

Abstract

Hypothesis tests are widely used in various fields. There are situations where several variables are measured on same elements of the population and the hypothesis of interest involves a parameter vector of the joint probability distribution of these variables. The well-known Hotelling's T^2 multivariate hypothesis testing is used to test the population mean vector for one or two populations. An alternative test was proposed by Hayter and Tsui in 1994, only for the case of one population. Thus, the main objective of this dissertation is to extend Hayter and Tsui's test for the comparison of the mean vectors of two independent populations. Three new tests which are combinations of the Hotelling's T^2 and Hayter and Tsui tests are proposed in an attempt to obtain a test more powerful than the tests individually, taking the advantage of the quality of these two tests. The performance of the proposed tests were evaluated by Monte Carlo simulation, and all of them compared to the usual Hotelling's T^2 , regarding the power of the tests. The proposed extension of Hayter and Tsui test proved to be comparable to the usual Hotelling's T^2 test, reaching higher power values in some cases. The tests of combination of p-values by Tippett (1931) and Fisher (1950) also proved to be effective, also exceeding the power values of T^2 Hotelling and Hayter and Tsui's tests in some simulated scenarios.

Keywords: Multivariate Hypothesis Tests, Hayter and Tsui, Hotelling's T^2 test, Monte Carlo, Comparison of two populations.

Sumário

Capítulo 1

Introdução	01
1.1 Objetivos	03
1.2 Organização	04

Capítulo 2

Metodologia	05
2.1 A distribuição Normal Multivariada	05
2.2 Teste T^2 de Hotelling para Uma População	10
2.3 Teste de Hayter & Tsui para Uma População	11
2.3.1 Exemplo de Aplicação – Teste para o Vetor de Médias de Uma População ..	16
2.4 Teste T^2 Hotelling para 2 populações independentes	20
2.4.1 Caso de Matrizes de Covariâncias Iguais	20
2.4.1.1 Cálculo de Poder Teórico do Teste T^2 de Hotelling	22
2.4.2 Caso de Matrizes de Covariâncias Diferentes.....	24
2.4.2.1 Distribuições Empíricas e Aproximadas do Teste T^2 de Hotelling: Caso de Matrizes de Covariâncias Diferentes	25
2.5 Extensão do Teste Hayter & Tsui para 2 populações independentes – Teste Proposto nesta Dissertação	29
2.5.1 Hayter e Tsui para 2 Populações Independentes: Caso de Matrizes de Covariâncias Iguais	30
2.5.2 Hayter e Tsui para 2 Populações Independentes: Caso de Matrizes de Covariâncias Diferentes.....	32
2.6 Testes fundamentados na combinação de P-valores – Proposta desta Dissertação	34
2.6.1 Determinação da Constante Crítica do Teste de Tippett para $k=2$	35
2.6.2 Determinação da Constante Crítica do Teste de Fisher para $k=2$	35
2.7 Teste combinado de Hayter & Tsui e T^2 Hotelling – Proposta desta Dissertação	36

2.8 Exemplo – Vetor de Médias de Duas Populações.....	37
--------------------------------------------------------------	-----------

Capítulo 3

Modelos Simulados	44
3.1 Modelos simulados.....	45
3.2 Detalhes de Implementação dos Testes.....	49
3.2.1 Teste T^2 de Hotelling para 2 Populações.....	49
3.2.2 Extensão do Teste de Hayter e Tsui para 2 Populações.....	51
3.2.2.1 Exemplo de obtenção do $C_{R,\alpha}$ para Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas	53
3.2.2.2 Exemplo de obtenção do $C_{R,\alpha}$ para Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas	56
3.2.3 Testes de Combinação de P-valores Tippett e Fisher	59

Capítulo 4

Avaliação dos Resultados	64
4.1 Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas	65
4.1.1 Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas: Caso Bivariado.....	65
4.1.2 Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas: Caso Trivariado	73
4.2 Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas	80
4.2.1 Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas: Caso Bivariado.....	80
4.2.2 Matrizes de Covariâncias Conhecidas e Desconhecidas: Análise Comparativa dos Testes - Caso Bivariado.....	90
4.2.3 Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas: Caso Trivariado.....	92
4.2.4 Matrizes de Covariâncias Conhecidas e Desconhecidas: Análise Comparativa dos Testes para o Caso Trivariado	99
4.3 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas.....	100
4.3.1 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas: Caso Bivariado	100
4.3.2 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas: Caso Trivariado	108
4.4 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas.....	115
4.4.1 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas: Caso Bivariado	115
4.4.2 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas: Caso Trivariado	122

4.5 Resumo Geral dos Resultados	126
Capítulo 5	
Considerações Finais	129
. Contribuições dessa Dissertação	131
. Trabalhos Futuros.....	132
ANEXOS.....	134
Anexo A: Poder Teórico e Simulado do Teste T^2 de Hotelling – Caso de Matrizes Iguais	135
Anexo B: Estimativas de Poder dos Testes - Outros Casos Simulados ...	142
B.1. Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas	142
B.2. Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas	145
B.3. Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas	148
B.4. Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas	152
Anexo C: Programas em R para se realizar os testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para 2 populações independentes.....	156
C.1. Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas	157
C.2. Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas	159
C.3. Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas	161
C.4. Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas	163
Referências.....	165

Lista de Figuras

Figura 2.1: Gráfico da função de densidade da distribuição normal bivariada ($\rho = 0$).	08
Figura 2.2: Gráfico da função de densidade da distribuição normal bivariada ($\rho = 0,5$).	09
Figura 2.3: Gráfico da função de densidade da distribuição normal bivariada ($\rho = 0,9$).	09
Figura 2.4: Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$	14
Figura 2.5: Estimação de $C_{R,\alpha}$ não paramétrica.....	15
Figura 2.6: Regiões críticas dos testes T2 de Hotelling e Hayter & Tsui ($\rho = 0,6$).....	16
Figura 2.7: Obtenção dos percentis da distribuição empírica T^2 e T_*^2	27
Figura 3.1: Distribuição empírica da estatística M – Matrizes Iguais e conhecidas, e valor de $C_{R,\alpha}$ para $\alpha = 0,05$, $n_1=n_2=5$	54
Figura 3.2: Distribuição Empírica da estatística M – Matrizes Diferentes e Conhecidas, e o valor de $C_{R,\alpha}$ para $\alpha = 0,05$, $n_1=n_2=50$	55
Figura 3.3: Distribuição dos 100 valores de $C_{R,\alpha}$ - Matrizes Iguais e Desconhecidas e o valor de $C_{R,\alpha}$ para $\alpha = 0,05$, $n_1=n_2=10$	57
Figura 3.4: Distribuição dos 100 valores de $C_{R,\alpha}$ - Matrizes Diferentes e Desconhecidas e o valor de $C_{R,\alpha}$ para $\alpha = 0,05$, $n_1=n_2=50$	58
Figura 3.5: Correção das constantes da combinação de p-valores Tippett e Fisher.	60
Figura 3.6: Distribuição empírica e constante crítica corrigida da estatística do teste de Tippett – Matrizes Iguais e conhecidas, $n_1=n_2=5$	61
Figura 3.7: Distribuição empírica e constante crítica corrigida da estatística do teste de Fisher – Matrizes Iguais e conhecidas, $n_1=n_2=5$	61
Figura 5.1: Fluxograma de execução dos programas computacionais do Anexo C	61

Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Dados do solo de capoeira nova na Amazônia.....	17
Tabela 2.2: Percentis para matrizes de covariâncias diferentes $p=2$ e $p=3$	29
Tabela 2.3: Dados de variedade de milho.....	38
Tabela 3.1: Cenários de tamanhos de amostra das 2 populações.....	44
Tabela 3.2: Cenários de matrizes de covariâncias iguais para $p=2$	46
Tabela 3.3: Cenários de matrizes de covariâncias iguais para $p=3$	46
Tabela 3.4: Cenários de matrizes de covariâncias diferentes para $p=2$	47
Tabela 3.5: Cenários de matrizes de covariâncias diferentes para $p=3$	47
Tabela 3.6: Constantes críticas da distribuição F para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e iguais $p=2$ – Teste T^2 de Hotelling.....	50
Tabela 3.7: Constantes críticas da distribuição F para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e iguais $p=3$ – Teste T^2 de Hotelling.....	50
Tabela 3.8: Constantes críticas da distribuição F para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e diferentes $p=2$ – Teste T^2 de Hotelling.	50
Tabela 3.9: Constantes críticas da distribuição F para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e diferentes $p=3$ - Teste T^2 de Hotelling.	50
Tabela 3.10: Constantes críticas do Teste Hayter e Tsui para matrizes de covariâncias iguais e conhecidas - $\alpha = 0,05$	52
Tabela 3.11: Constantes críticas do Teste Hayter e Tsui para matrizes de covariâncias diferentes e conhecidas - $\alpha = 0,05$	52
Tabela 3.12: Constantes críticas do Teste Hayter e Tsui para matrizes de covariâncias iguais e desconhecidas - $\alpha = 0,05$	53
Tabela 3.13: Constantes críticas do Teste Hayter e Tsui para matrizes de covariâncias diferentes e desconhecidas - $\alpha = 0,05$	53
Tabela 3.14: Estimativa da Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes Iguais e Conhecidas.	59
Tabela 3.15: Constantes da Correção da combinação de p-valores de Tippett e Fisher.	63
Tabela 4.1: Estimativas médias da Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes Iguais e Conhecidas - $p=2$	66

Tabela 4.2: Estimativa do Poder dos Testes - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 1.	69
Tabela 4.3: Estimativa do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 2...	70
Tabela 4.4: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 3.	71
Tabela 4.5: Estimativas de Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 4.	72
Tabela 4.6: Estimativas da Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas - p=3.	74
Tabela 4.7: Estimativa do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 5 – p=3.	77
Tabela 4.8: Estimativa de Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 6 – p=3.	78
Tabela 4.9: Estimativa de Poder dos Testes - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 7 – p=3.	79
Tabela 4.10: Estimativas da Probabilidade do Erro do Tipo I para o Teste de Hayter e Tsui usando Nível de Significância Nominal de 0,05 – p=2 – Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas.	81
Tabela 4.11: Estimativas da Probabilidade do Erro de Tipo I - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – p=2.	83
Tabela 4.12: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 1 - p=2.	86
Tabela 4.13: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 2 - p=2.	87
Tabela 4.14: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 3 - p=2.	88
Tabela 4.15: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 4 - p=2.	89
Tabela 4.16: Comparação das Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas - p=2 – $n_1=n_2=50$.	91
Tabela 4.17: Estimativas Médias da Probabilidade do Erro Tipo I do Teste de Hayter e Tsui usando um Nível de Significância Nominal de 0,05 – p=3- Matrizes de Covariâncias Iguais.	92
Tabela 4.18: Estimativa da probabilidade do Erro de Tipo I - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – p=3.	94
Tabela 4.19: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 5 - p=3.	96
Tabela 4.20: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 6 - p=3.	97

Tabela 4.21: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 7 - $p=3$	98
Tabela 4.22: Comparação das Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais Conhecida e Desconhecidas - $p=3$	99
Tabela 4.23: Estimativas de Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas - $p=2$	101
Tabela 4.24: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 8 - $p=2$	104
Tabela 4.25: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 9 - $p=2$	105
Tabela 4.26: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 10 - $p=2$	106
Tabela 4.27: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 11 - $p=2$	107
Tabela 4.28: Estimativas da Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas - $p=3$	108
Tabela 4.29: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 12 - $p=3$	112
Tabela 4.30: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 13 - $p=3$	113
Tabela 4.31: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 14 - $p=3$	113
Tabela 4.32: Estimativas da Probabilidade do Erro do Tipo I para os Testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui usando Nível de Significância Nominal de 0,05- $p=2$ - Matrizes de Covariâncias diferentes e Desconhecidas.....	116
Tabela 4.33: Estimativas da probabilidade do erro tipo I Para Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas - $p=2$	117
Tabela 4.34: Estimativas do Poder do Teste - Matriz de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 8 – $p=2$	118
Tabela 4.35: Estimativas do Poder do Teste - Matriz de covariâncias diferentes e desconhecidas – Cenário 9 – $p=2$	118
Tabela 4.36: Estimativas do Poder do Teste - Matriz de covariâncias diferentes e desconhecidas – Cenário 10 – $p=2$	120
Tabela 4.37: Estimativas do Poder do Teste - Matriz de covariâncias diferentes e desconhecidas – Cenário 11 – $p=2$	121
Tabela 4.38: Estimativas da Probabilidade do Erro Tipo I do Teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para Matrizes de Covariâncias Diferentes Usando um Nível de Significância Nominal de 0,05 – $p=3$	122

Tabela 4.39: Estimativas da Probabilidade do Erro Tipo I para Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas - $p=3 - n_1=n_2=50$.	123
Tabela 4.40: Estimativas do Poder do Teste - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenários 12 a 14 – $n_1=n_2=50 - p=3$.	124
Tabela 4.41: Cenários e Casos de Mudanças nos Vetores de Médias Apresentados na Tabela 4.40	125
Tabela 4.42: Resumo das Situações de Melhores Resultados de Estimativa de Poder do Teste obtidos para os Testes T2 de Hotelling e Hayter e Tsui - Matrizes de Covariâncias Iguais e Diferentes - $p=2$.	127
Tabela 4.43: Resumo das Situações de Melhores Resultados de Estimativa de Poder do Teste obtidos para os Testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui - Matrizes de Covariâncias Iguais e Diferentes - $p=3$.	127
Tabela A.1: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 1 – $p=2$.	135
Tabela A.2: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 2 – $p=2$.	136
Tabela A.3: Poder Teórico e Simulado para matrizes de covariâncias iguais conhecidas e desconhecidas – Cenário 3 - $p=2$.	137
Tabela A.4: Poder Teórico e Simulado para matrizes de covariâncias iguais conhecidas e desconhecidas – Cenário 4 - $p=2$.	138
Tabela A.5: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 5 - $p=3$.	139
Tabela A.6: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 6 - $p=3$.	140
Tabela A.7: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 7 - $p=3$.	141
Tabela B.1: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 2 – $p=2$.	142
Tabela B.2: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 3 – $p=2$.	143
Tabela B.3: Estimativas de Poder dos Testes para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 4 – $p=2$.	144
Tabela B.4: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 2 – $p=2$.	145

Tabela B.5: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 3 – $p=2$	146
Tabela B.6: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas - Cenário 4 – $p=2$	147
Tabela B.7: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 8 – $p=2$	148
Tabela B.8: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 9 – $p=2$	149
Tabela B.9: Estimativas de Poder dos testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 10.....	150
Tabela B.10: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 11.....	151
Tabela B.11: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 8.	152
Tabela B.12: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 9.	153
Tabela B.13: Estimativas de Poder dos Testes Para outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 10.	154
Tabela B.14: Estimativas de Poder dos Testes para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 11.	155

Lista de Notação

μ	Vetor de médias teóricas (populacional).
\bar{X}	Vetor de médias amostrais.
μ_j	Média teórica (populacional) da j -ésima variável.
\bar{X}_j	Média amostral da j -ésima variável.
Σ_{pxp}	Matriz de Covariâncias teórica.
Σ_{pxp}^i	Matriz de Covariâncias teórica da população i .
S_c	Matriz de Covariâncias amostral combinada.
S_{pxp}	Matriz de Covariâncias amostral.
S_i	Matriz de Covariâncias amostral da população i .
P_{pxp}	Matriz de Correlação teórica (populacional).
R_{pxp}	Matriz de Correlação amostral.
X_i	Variável aleatória da população i .
ρ	Correlação entre duas variáveis.
n_i	Tamanho da amostra da população i .
$C_{R,\alpha}$	Valor crítico do teste de Hayter e Tsui.
M	Estatística de teste de Hayter e Tsui.
χ^2	Distribuição Qui-quadrado.
γ	Parâmetro de não centralidade da distribuição Qui-quadrado.
p	Índice de dimensão do vetor. Quantidade de variáveis.
F	Distribuição da estatística F .
T^2	Estatística do Teste T^2 de Hotelling.

T_*^2	Distribuição empírica da Estatística T^2 de Hotelling quando $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ são desconhecidas.
α	Nível de significância nominal.
σ_{kk}	Variância teórica da k -ésima variável.
s_{kk}	Variância amostral da k -ésima variável.
σ_{kk_i}	Variância teórica da k -ésima variável proveniente de $\Sigma_{p \times p}^i$.
s_{kk_i}	Variância amostral da k -ésima variável proveniente de S_i .
P_j^*	O j -ésimo p-valor.
ψ_T	Estatística do teste de Combinação de p -valores de Tippett.
ψ_F	Estatística do teste de Combinação de p -valores de Fisher.
s_k^2	Variância combinada da k -ésima variável.
s_{ik}^2	Variância amostral da k -ésima variável para a i -ésima população.
p_T	Probabilidade de significância do teste de combinação de p -valores de Tippett.
p_F	Probabilidade de Significância do teste de combinação de p -valores de Fisher.
D	Distância de Mahalanobis.
d	Distância de Mahalanobis sem levar em consideração o tamanho amostral.

Capítulo 1

Introdução

Os testes de hipótese são muito usados em várias áreas do conhecimento. Estes são realizados, por exemplo, quando um pesquisador deseja verificar se algum parâmetro da distribuição de uma variável de interesse é condizente com o valor por ele estipulado, ou quando se deseja saber se parâmetros de dois grupos (populações) independentes são semelhantes, etc. Para isso, estatísticas de teste são formuladas e seus valores obtidos a partir dos dados amostrais são usados para avaliar as hipóteses formuladas.

Há situações em que várias variáveis são medidas na mesma população e a hipótese de interesse envolve um vetor de parâmetros da distribuição de probabilidades conjunta dessas variáveis. Nesse caso, uma estratégia comum é realizar-se um teste de hipótese para cada parâmetro que se deseja avaliar. Pode-se fazer um teste de hipótese para o parâmetro de interesse de cada uma das variáveis separadamente, por exemplo. No entanto, como as variáveis são medidas em uma mesma unidade experimental, é possível que haja correlação entre elas, sendo então mais razoável a realização de um teste multivariado capaz de avaliar simultaneamente os parâmetros das distribuições de todas as variáveis. Por levar em consideração a correlação entre as variáveis, os testes multivariados tendem a ser mais poderosos que os testes univariados quando esses são utilizados em conjunto para avaliar hipóteses multivariadas. Um caso muito comum é o de comparação de vetor de médias de uma população ou de populações independentes (Timm, 2002).

Um dos testes de hipótese multivariados mais conhecidos é o teste T^2 proposto por Harold Hotelling em 1947, usado para testar o vetor populacional no caso de uma ou duas populações. Este é uma extensão do teste *t-student* univariado (Anderson, 1984) e supõe que os dados amostrais sejam provenientes de uma distribuição normal multivariada. A estatística de teste

T^2 tem como base a distância de Mahalanobis (1936) entre a observação amostral (ou o vetor de médias amostral) e o vetor de médias populacional ponderada pela inversa da matriz de covariâncias das variáveis.

Uma possível crítica ao uso do teste T^2 de Hotelling vem do fato de que, quando a hipótese nula é rejeitada, torna-se necessário identificar as variáveis responsáveis pela sua rejeição, o que muitas vezes é feito utilizando-se testes de comparações múltiplas (Montgomery, 2004). Nas comparações múltiplas são realizados testes estatísticos que comparam cada par de médias possível das variáveis separadamente, afim de se observar quais o(s) par(es) de médias que diferem significativamente e que portanto, seriam os responsável(is) pela rejeição da hipótese nula.

Comparações múltiplas como a correção de Bonferroni (Johnson e Wichern, 2002), teste HSD de Tucey (1953) ou teste de Scheffé (Montgomery, 1976), podem ser usadas. No entanto, esses testes não levam em consideração a correlação existente entre as variáveis. Em controle de qualidade, é comum usar-se os gráficos univariados de controle de Shewhart (Montgomery, 2004) ou métodos que envolvem a decomposição da estatística T^2 (Runger, et al., 1996) para essa identificação.

Um teste alternativo ao T^2 de Hotelling foi proposto por Hayter e Tsui em 1994. Esse teste além de testar a hipótese nula sobre o vetor de médias de uma população, identifica automaticamente quais variáveis são as responsáveis pela sua rejeição. Hayter e Tsui (1994) mostraram que esse teste não é uniformemente mais poderoso que o T^2 de Hotelling, o mesmo vale para esse último que também não é uniformemente mais poderoso que o teste de Hayter e Tsui. Em algumas situações um teste é mais poderoso que o outro. Deste modo, os dois são competidores. Estes testes podem ser usados em várias áreas do conhecimento, como Agronomia, Bioestatística e Controle de Qualidade, dentre outras.

Alguns outros testes alternativos ao T^2 de Hotelling estão publicados na literatura, como os testes stepwise robustos de Mudholkar e Srivastava (2000b), e outros que não serão discutidos nesta dissertação. Para maiores informações sobre estes testes, verifique a literatura: Timm (1996), Tiku e

Singh (1982), Tiku e Balakrishnan (1988), Mudholkar e Subbaiah (1980), Mudholkar e Srivastava (2000a) e Willians et. al. (2006), dentre outros.

Existem vários trabalhos na literatura que abordam o teste de Hayter e Tsui para o caso de uma única população como Ferreira (2010), Colenghi (2008), Glória (2006) e Mingoti & Glória (2005). No entanto, não há nenhum trabalho até o momento que aborde esse teste para o caso de comparação de vetores de médias de duas ou mais populações. Esse fato foi, então, o fator de motivação para o trabalho que foi desenvolvido nessa dissertação.

1.1 Objetivos

O objetivo principal desta dissertação é estender o teste Hayter e Tsui (1994) para se comparar os vetores de médias de 2 populações independentes para os casos de matrizes de covariâncias iguais e diferentes, conhecidas e desconhecidas. Apesar de já existir o teste T^2 de Hotelling que compara 2 populações, uma justificativa para tal extensão de Hayter e Tsui é que, além de testar a hipótese nula sobre a igualdade dos vetores de médias, teríamos uma vantagem adicional pois seria possível identificar automaticamente quais variáveis seriam as responsáveis pela sua rejeição, evitando-se assim a necessidade do uso de comparações múltiplas.

Além de propormos esta extensão, iremos também avaliar o comportamento deste novo teste, comparando-o com o usual T^2 de Hotelling, no que tange ao poder do teste.

Construímos, ainda, 3 novos testes que são combinações dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui, aproveitando-se deste modo a qualidade destes dois testes na tentativa de obter-se um teste mais poderoso que os testes individualmente. Os testes de Tippett e Fisher fundamentados na combinação de p-valores também foram avaliados.

Ressalta-se que foi realizada a pesquisa bibliográfica e na literatura não foi encontrado nenhuma comparação dos testes estudados nesta dissertação ou algum teste que os combine de alguma forma.

O estudo sobre o desempenho dos testes tratados na dissertação foi feito via simulação Monte Carlo, já que para o teste de Hayter e Tsui, assim como para os testes baseado nas combinações de p-valores de Tippett e Fisher, não se tem uma distribuição de referência teórica conhecida que permita a determinação do poder do teste via fórmulas matemáticas. O estudo de simulação desenvolvido nesta dissertação foi implementado no software R: A Language and Environment for Statistical Computing, dos autores R Development Core Team.

1.2 Organização

Este texto está organizado em 5 capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os testes de hipótese que serão tratados nesta dissertação com suas premissas básicas e alguns exemplos. No Capítulo 3 são apresentados os modelos teóricos e cenários que foram simulados bem como todo o processo envolvido nas simulações. No Capítulo 4 é apresentado a avaliação dos resultados obtidos para os diversos cenários. Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais desta dissertação.

Capítulo 2

Metodologia

Neste capítulo descrevemos os testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para uma população; T^2 de Hotelling para duas populações; a extensão de Hayter e Tsui proposta nesta dissertação, um novo teste que é fundamentado na combinação dos p-valores dos testes de T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui e ainda um novo teste que é dado pela combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui. Pelo fato de, tanto o teste T^2 de Hotelling quanto o Hayter e Tsui, estarem fundamentados na suposição de normalidade multivariada, essa também é introduzida.

2.1 A Distribuição Normal Multivariada

A função densidade da distribuição normal multivariada é uma generalização do caso univariado, porém, no caso multivariado trabalhamos com duas ou mais variáveis aleatórias simultaneamente. Para o caso univariado a função densidade de probabilidade de uma variável com distribuição normal, com media μ e variância σ^2 é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad -\infty < x < \infty; \quad \mu \in (-\infty; \infty) ; \sigma > 0 \quad (2.1)$$

Suponha que tenhamos o vetor aleatório $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p]^T$ de dimensão $p \times 1$. Dizemos que esse vetor tem uma distribuição normal multivariada (ou normal p-variada) com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e Σ , isto é $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_{p \times p})$ sendo Σ a matriz de covariâncias do vetor aleatório \mathbf{X} , e $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^T$ o vetor (transposto) de médias da distribuição, se a função de densidade do vetor \mathbf{X} for da forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (x - \boldsymbol{\mu})\right\} \quad (2.2)$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^p$, onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $-\infty < x_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, p$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{R}^p$ e

$\Sigma_{p \times p}$ simétrica positiva definida, pois neste caso sua matriz inversa Σ^{-1} existe e pode ser calculada. A quantidade $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ representa a distância de Mahalanobis do vetor \mathbf{x} em relação ao vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ (Mingoti, 2005).

A matriz Σ é denotada por:

$$\Sigma_{p \times p} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo $\sigma_{ii} = \text{Var}(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$ e σ_{ij} é a covariância entre as variáveis

X_i e X_j , $i \neq j$. A matriz Σ é simétrica uma vez que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\forall i, j$.

A distribuição normal bivariada ($p=2$) é um caso particular da distribuição multivariada em que se tem $p=2$. Como ilustração, suponha que X_1 e X_2 sejam duas variáveis aleatórias, tal que $X = (X_1, X_2)^T$ provenientes de uma distribuição normal bivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias Σ , dados respectivamente por:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad e \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde σ_{11} e σ_{22} representam as variâncias da variável X_1 e X_2 e σ_{12} a covariância entre as variáveis X_1 e X_2 . A correlação entre X_1 e X_2 , representada por ρ_{12} ou simplesmente ρ , é dada por:

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \quad (2.5)$$

Assim, a matriz Σ também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} \\ \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

cujos determinante é expresso como:

$$|\Sigma| = \sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho^2) \quad (2.7)$$

A matriz inversa de Σ , presente no termo exponencial da função de densidade do vetor X , será tal que:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{|\Sigma|} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} \\ -\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} & \sigma_{11} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Portanto, a forma quadrática presente no termo exponencial da função de densidade de X , a saber, $(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)$, pode ser expressa como se segue:

$$\frac{1}{(1 - \rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

Essa é a equação de uma elipse centrada em $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$, cujo maior eixo está associado à variável que apresenta maior variabilidade. Dessa forma, a função de densidade da distribuição normal bivariada pode ser reescrita como:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.10)$$

em que $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$, $\mu \in \mathfrak{R}^2$, $\sqrt{\sigma_{ii}} > 0$ $i = 1, 2$ e $|\rho_{12}| < 1$.

Assim, através da função de densidade normal bivariada, pode-se verificar que a correlação entre as variáveis interfere diretamente na forma da distribuição. As Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 apresentam alguns gráficos da função de densidade para os valores de médias iguais a zero nas duas variáveis, os valores de variâncias iguais a 1 nas duas variáveis e valores de correlações variando de 0, 0,5 e 0,9.

Verifica-se na Figura 2.1 que as curvas de nível da função são evidenciadas pela forma geométrica circular, indicando ausência de correlação entre X_1 e X_2 . Nesse caso, se todas as variáveis têm a mesma variância, tem-se uma estrutura que é chamada de “estrutura de covariância esférica” (Mingoti, 2005).

Quando a correlação é acrescida para 0,5 (Figura 2.2), aumenta-se a concentração de massa em torno do vetor de médias de uma reta imaginária e as curvas de nível da função tomam o formato de uma elipse. Ao atingir 0,9 percebe-se que essa relação é ainda mais evidente (Figura 2.3).

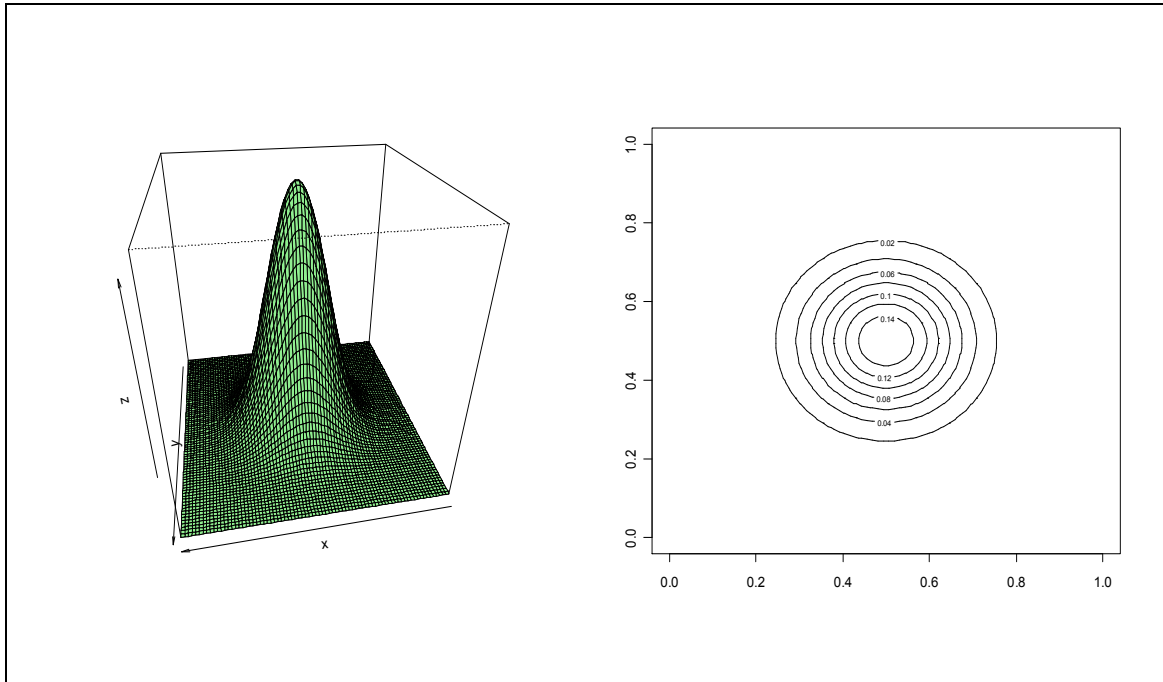


Figura 2.1: Gráfico da função de densidade e de contorno da distribuição normal bivariada ($\rho = 0$).

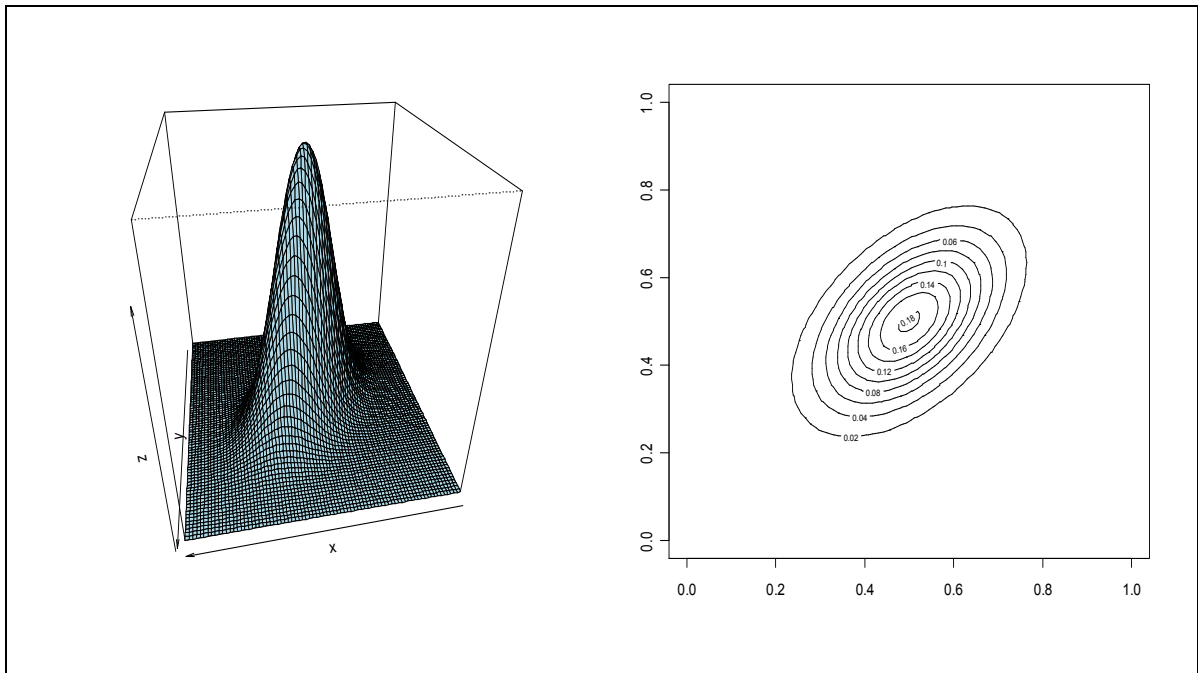


Figura 2.2: Gráfico da função de densidade e de contorno da distribuição normal bivariada ($\rho = 0,5$).

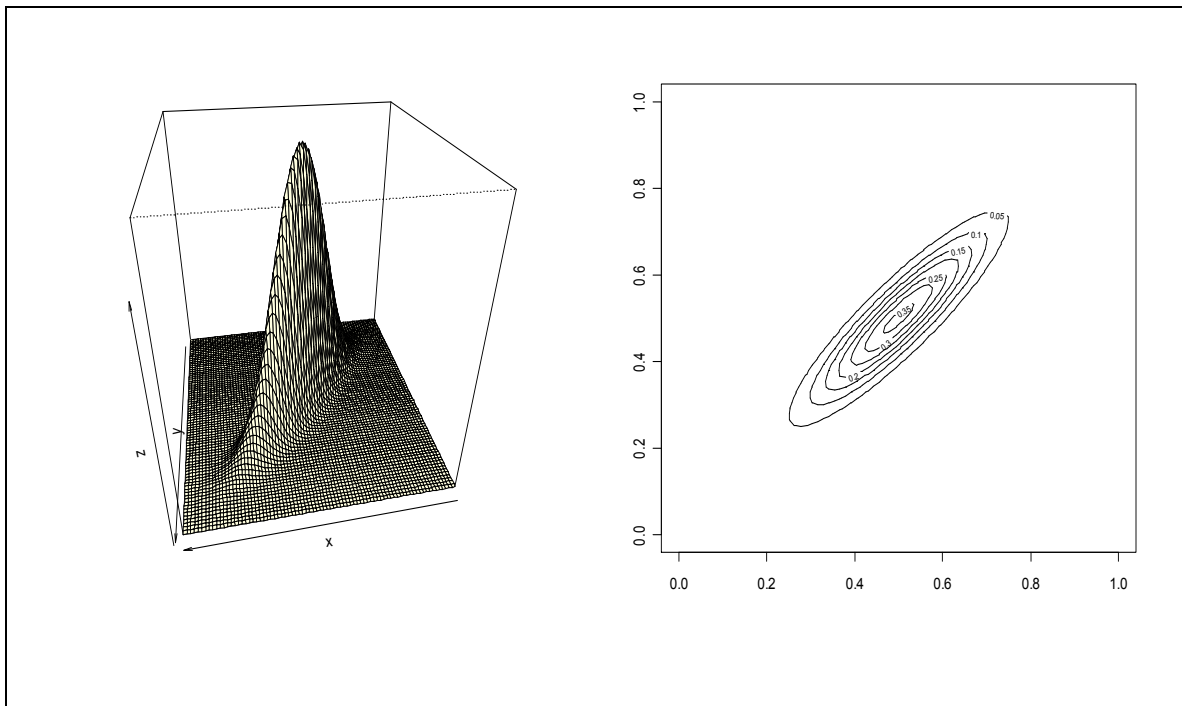


Figura 2.3: Gráfico da função de densidade e de contorno da distribuição normal bivariada ($\rho = 0,9$).

A distribuição normal multivariada é uma suposição dos testes que foram apresentados nas próximas seções. Existem alguns testes estatísticos e procedimentos gráficos para avaliar a suposição de normalidade multivariada, que podem ser vistos com mais detalhes em Jobson (1992) e Mingoti (2005).

2.2 Teste T^2 de Hotelling para Uma População

O procedimento mais usual e comum na literatura estatística para testar o vetor de médias é o teste T^2 de Hotelling (1947). Suponha que a distribuição de probabilidade do vetor aleatório X seja normal p -variada.

As hipóteses nula e alternativa do teste são $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ e $H_a : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$, sendo pré-especificado o vetor $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})^T$. Seja Σ_{pxp} a matriz de covariâncias de X . A partir de uma amostra aleatória de n observações de X , $n > 1$, é possível testar H_0 . Seja X_1, X_2, \dots, X_n , uma amostra aleatória de X , sendo $X_i = [X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}]^T$, o i -ésimo vetor de observações do elemento amostral de dimensão $px1$, $i=1, 2, \dots, n$.

O procedimento requer o cálculo do vetor de médias amostral que é dado por $\bar{X} = [\bar{X}_1 \ \bar{X}_2 \ \dots \ \bar{X}_p]^T$ de modo que \bar{X}_j é a média amostral da j -ésima variável, $j=1, \dots, p$. A estatística de teste, quando Σ_{pxp} é conhecida, é dada por:

$$T^2 = n (\bar{X} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma_{pxp}^{-1} (\bar{X} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.11)$$

Sob H_0 , T^2 tem distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade (Johnson e Wichern, 2002), sendo assim H_0 será rejeitada se o valor de T^2 observado for maior que o valor crítico $\chi_{1-\alpha, p}^2$ que é o quantil referente à probabilidade acumulada igual a $(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, ou seja, $P[T^2 \leq \chi_{1-\alpha, p}^2] = 1-\alpha$. Portanto, a região crítica será dada por: $RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}^p, \text{ tal que } T^2 > \chi_{1-\alpha, p}^2\}$.

Na prática, em geral, é necessário estimar Σ_{pxp} . Existem vários estimadores de Σ , sendo comum o uso da matriz de covariâncias amostral S_{pxp} , definida como:

$$S_{pxp} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^T,$$

e sendo

$$s_{jj} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 \quad (2.12)$$

a variância amostral da j -ésima variável e S_{pxp} um estimador não-viciado da matriz de covariâncias populacional (Johnson e Wichern, 2002). A estatística de teste neste caso é dada por:

$$T^2 = n (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T S_{pxp}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.13)$$

que, sob H_0 segue uma distribuição que é proporcional a uma distribuição F (Johnson e Wichern, 2002), isto é, o valor crítico do teste a um nível de significância α , é dado por:

$$F_c = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{1-\alpha, p, n-p}, \quad (2.14)$$

onde $F_{1-\alpha, p, n-p}$ é o quantil referente à probabilidade acumulada igual a $(1-\alpha)$ da distribuição F com p e $n-p$ graus de liberdade. Assim a região crítica do teste é dada por: $RC = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^p, \text{ tal que } T^2 > F_c\}$.

2.3 Teste de Hayter e Tsui para o Vetor de Médias de uma População

Como uma alternativa ao teste T^2 de Hotelling, Hayter e Tsui (1994) propuseram um método que, além de testar o vetor de médias, também procura identificar quais variáveis são responsáveis pela mudança ocorrida no vetor de médias através da construção de intervalos de confiança para a média verdadeira de cada uma das p variáveis.

Seja $X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_{p \times p})$. As hipóteses nula e alternativa do teste são $H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ e $H_a: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$, sendo pré-especificado $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})^T$. Dado uma amostra aleatória de tamanho n do vetor aleatório X , de acordo com Hayter e Tsui quando a matriz de covariâncias é conhecida, a hipótese nula H_0 será rejeitada a um nível de significância α quando:

$$M = \max \left\{ \left| \frac{\bar{X}_j - \mu_{0j}}{\sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}}} \right|, j = 1, 2, \dots, p \right\} > C_{R,\alpha} \quad (2.15)$$

sendo σ_{jj} a variância da variável $X_j, j = 1, 2, \dots, p$ e $C_{R,\alpha}$ o valor que delimita a região de rejeição da hipótese nula. Este é determinado usando-se a distribuição do máximo do valor absoluto das coordenadas do vetor aleatório X padronizadas.

Deste modo, para cada média populacional $\mu_j, j=1,2,\dots,p$, os limites de confiança de $(1-\alpha)100\%$, são dados pela equação:

$$P \left[\left| \frac{\bar{X}_j - \mu_{0j}}{\sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}}} \right| \leq C_{R,\alpha}, \forall j = 1, 2, \dots, p \right] = 1 - \alpha. \quad (2.16)$$

Assim, um intervalo de $(1-\alpha)100\%$ de confiança para cada média populacional μ_j é dado por:

$$\left(\bar{X}_j - \sqrt{\sigma_{jj}} C_{R,\alpha} / \sqrt{n}; \bar{X}_j + \sqrt{\sigma_{jj}} C_{R,\alpha} / \sqrt{n} \right), \text{ para } \forall j = 1, 2, \dots, p \quad (2.17)$$

Se todos os intervalos determinados contiverem os valores μ_j , para $j = 1, 2, \dots, p$, H_0 não deve ser rejeitada.

O valor de $C_{R,\alpha}$ é obtido através de um algoritmo que envolve a simulação de amostras de uma população normal p -variada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias $P_{p \times p}$ que é a matriz de correlação teórica do vetor aleatório X . Na prática é comum estimar a matriz $P_{p \times p}$ pela matriz de correlação amostral das variáveis observadas que é denotada por $R_{p \times p}$ (Johnson

e Wichern, 2002). No caso em que $\Sigma_{p \times p}$ é desconhecida o valor de σ_{jj} em (2.15) é substituído pela sua estimativa $s_{jj}, j = 1, 2, \dots, p$, que provem da matriz de covariâncias amostral $S_{p \times p}$ definida em (2.12).

O algoritmo de obtenção de $C_{R,\alpha}$ é mostrados na Figura 2.4. É importante observar que na proposta de Hayter e Tsui a estrutura de correlação de X afeta todos os intervalos simultaneamente, ao contrário dos intervalos simultâneos de Bonferroni (Montgomery, 2004) usado em comparações múltiplas nos quais apenas os valores de referência da distribuição t-student, utilizada para a construção dos intervalos, é alterado de modo a manter-se o nível de significância (α) global de comparação requerido a priori para o teste.

Hayter e Tsui (1994) sugerem que sejam geradas $k=100000$ observações de uma distribuição normal p-variada para a determinação de $C_{R,\alpha}$ com grande precisão. Além disso, mostram que os intervalos de confiança assim construídos são melhores que os intervalos de Bonferroni.

Dados da literatura indicam que a constante $C_{R,\alpha}$ pode ser obtida, para casos normais bi-variados ($p=2$), através de valores tabelados, segundo o artigo de Bechhofer e Dunnet (1988). A obtenção dessa constante, no caso de normalidade, para mais que duas variáveis ($p>2$), pode ser feita através de integração numérica, algo complicado uma vez que a determinação da constante $C_{R,\alpha}$ envolve o encontro da distribuição do máximo das coordenadas do vetor aleatório X . Daí a importância dos métodos de obtenção de $C_{R,\alpha}$ propostos por Hayter e Tsui (1994).

Quando o tamanho da amostra é grande, o algoritmo da Figura 2.4 pode ser modificado sendo a função distribuição empírica da estatística M calculada usando-se apenas os n vetores observados da amostra original e não mais através de uma simulação da distribuição normal p-variada, como mostra a Figura 2.5. Neste caso, o método independe do fato do vetor X ter ou não uma distribuição normal multivariada sendo portanto, um método não-paramétrico. Segundo Hayter e Tsui seria necessário ter-se uma amostra de no mínimo 500 observações para se utilizar o método. No entanto, em Mingoti

e Glória (2005) é mostrado que 500 observações não é um número adequado para tal, sendo necessário pelo menos 5000 observações. Outra forma de estimar $C_{R,\alpha}$ não parametricamente é através do método de núcleo estimadores discutido em Glória (2006). Nesse trabalho foi mostrado que a obtenção da $C_{R,\alpha}$ pelo método de núcleo-estimador é mais apropriado que o método não-paramétrico proposto por Hayter e Tsui para populações normais e não normais principalmente para amostras pequenas.

1- Gerar um grande número N de vetores de uma distribuição normal multivariada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias P_{pp} , em que P_{pp} é a matriz de correlação proveniente de Σ_{pp} , denotados por:

$$Z^i = \left(Z_1^i \ Z_2^i \dots Z_p^i \right)^T, i = 1, 2, \dots, N.$$

2- Calcular a estatística M^i para cada um dos vetores gerados, isto é,

$$M^i = \max_{1 \leq j \leq p} |Z_j^i|, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N.$$

em que Z_j^i é a observação da j -ésima variável do i -ésimo vetor aleatório gerado no passo 1.

3- Finalmente encontrar a ordenada correspondente ao $(1-\alpha)$ percentil da amostra $\{M^1, \dots, M^N\}$ e usar este como estimativa para o ponto crítico $C_{R,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Figura 2.4: Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$.

1- Calcular o vetor de médias amostral \bar{X} e matriz de covariâncias amostral $S_{p \times p}$ a partir da amostra de tamanho n ;

2- Calcular a estatística M^i , para cada um dos vetores amostrais ($i = 1, \dots, n$), isto é,

$$M^i = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{\sqrt{S_{jj}}} \right|, \forall i = 1, \dots, N.$$

Sendo que X_{ij} , \bar{X}_j e S_{jj} são, respectivamente, a i -ésima observação da j -ésima variável, a média amostral e a variância amostral da j -ésima variável.

3- Finalmente encontrar a ordenada correspondente ao $(1-\alpha)$ percentil da amostra $\{M^1, \dots, M^N\}$ e usar este como estimativa não-paramétrica para o ponto crítico $C_{R,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Figura 2.5: Estimação de $C_{R,\alpha}$ não paramétrica.

Hayter e Tsui (1994) mostraram que o teste com a estatística M não é uniformemente mais poderoso que o teste com a estatística T^2 de Hotelling, e vice-versa. Para facilitar o entendimento, os autores mostram um exemplo de duas populações com vetor de médias nulo, variâncias iguais a 1 e coeficiente de correlação $\rho = 0,6$. Pela Figura 2.6, a área fora da elipse é a região crítica do teste T^2 de Hotelling de acordo com a distribuição χ^2 e a área fora do retângulo é a região crítica do teste Hayter e Tsui de acordo com a distribuição da estatística M . O teste T^2 indicará a rejeição da hipótese nula se uma observação estiver dentro do retângulo e fora da elipse (área A da Figura 2.6), porém o teste de Hayter e Tsui não indicará. Então, o teste T^2 pode ser mais poderoso quando a mudança do vetor de médias ocorrer nesta região. Similarmente, o teste de Hayter e Tsui indicará rejeição da hipótese nula se uma observação estiver fora do retângulo e dentro da elipse (área hachurada da Figura 2.6) e o teste T^2 não indicará. Assim, a estatística T^2 é menos poderosa quando a mudança do vetor de médias ocorrer nesta região.

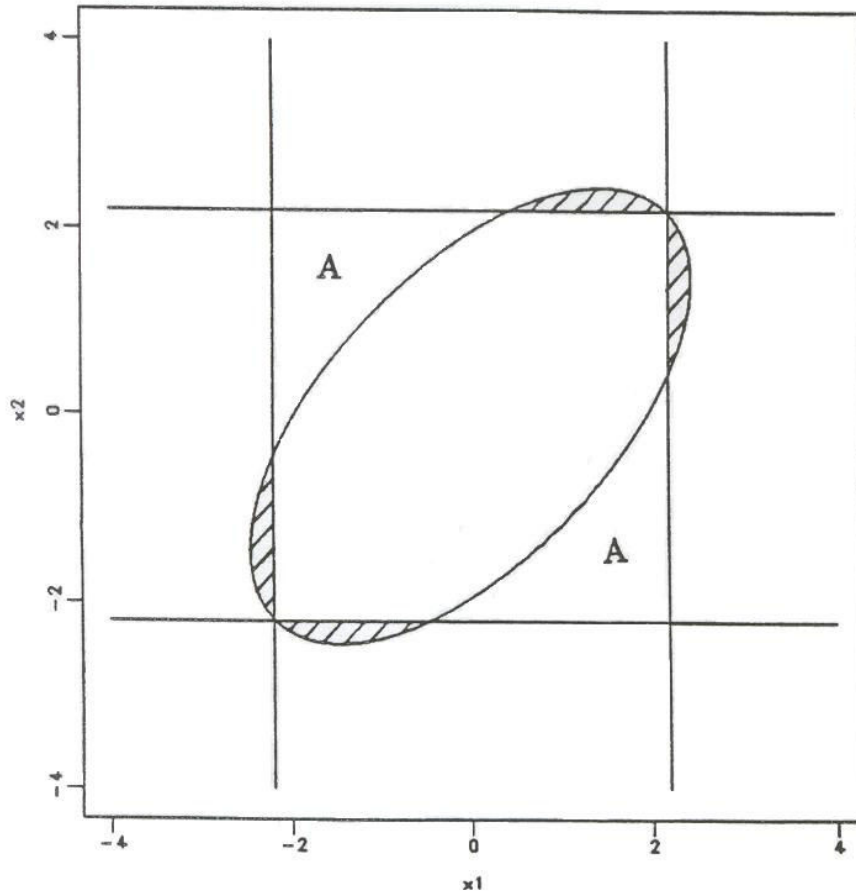


Figura 2.6: Regiões críticas dos testes T2 de Hotelling e Hayter & Tsui ($\rho = 0,6$).

Fonte: Hayter e Tsui (1994)

2.3.1 Exemplo de Aplicação – Teste para o Vetor de Médias de uma População

Na Tabela 2.1 apresentamos os dados do exemplo 5.1 de Ferreira (2008) sobre teores de areia e argila de uma amostra de $n=30$ parcelas em um solo de capoeira nova na Amazônia.

As hipóteses nula e alternativa do teste são $H_0 : \boldsymbol{\mu} = [14, 42]^T$ contra $H_a : \boldsymbol{\mu} \neq [14, 42]^T$, onde $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]^T$ representa a média dos teores de areia e argila de uma população de floresta.

Tabela 2.1: Dados do solo de capoeira nova na Amazônia.

<i>Areia</i>	<i>Argila</i>	<i>Areia</i>	<i>Argila</i>
11	38	20	32
13	47	24	25
18	34	28	32
16	49	17	39
11	45	18	34
30	32	27	36
5	64	45	24
7	59	11	40
11	50	42	23
17	38	41	21
21	35	9	40
22	36	48	21
13	40	14	32
12	36	53	21
25	28	31	32

O vetor de médias e a matriz de covariâncias amostrais são, respectivamente

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 22,0 \\ 36,1 \end{bmatrix} \text{ e } S_{p \times p} = \begin{bmatrix} 164,2069 & -109,8966 \\ -109,8966 & 110,5759 \end{bmatrix}.$$

O valor observado da estatística do teste de T^2 de Hotelling é dado por:

$$\begin{aligned} T^2 &= n (\bar{X} - \mu)^T S_{p \times p}^{-1} (\bar{X} - \mu) \\ &= 30 \begin{bmatrix} 22,0 - 14 & 36,1 - 42 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 164,2029 & -109,8966 \\ -109,8966 & 110,5759 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 22,0 - 14 \\ 36,1 - 42 \end{bmatrix} = 11,93406 \end{aligned}$$

O valor crítico, delimitador da região de rejeição considerando-se um nível de significância de 5%, é:

$$F_c = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{1-\alpha, p, n-p} = \frac{2 \times 29}{30-2} \times F_{0,95, 2, 30-2} = \frac{58}{28} \times 3,340386 = 6,9194$$

Portanto, como o valor calculado $T^2 = 11,9341$ é superior ao valor crítico 6,9194, conclui-se que a hipótese nula deverá ser rejeitada e que há alguma

diferença entre as médias de areia e argila do solo de capoeira nova em relação ao da população de floresta. Para se verificar qual variável foi a responsável por tal rejeição é necessário aplicar comparações múltiplas. Escolhemos a metodologia da correção de Bonferroni (Johnson e Wichern, 2002). Esta correção consiste em ajustar o valor de α para α / c , onde c é o número de possíveis combinações de médias. Como no exemplo acima $c=2$, trabalharemos com o nível de significância $\alpha = 0,025$. Portanto, agora aplicamos o teste univariado t -student para uma média para a k -ésima variável, $k=1,2$. Dessa forma, a estatística de teste será dada por:

$$t_k = \frac{(\bar{x}_k - \mu_k)}{\sqrt{\frac{s_k^2}{n}}} \sim t_{n-1; 1-(\alpha/2)}$$

onde $t_{n-1; 1-(\alpha/2)}$ corresponde ao percentil de ordem $1-(\alpha/2)$ da distribuição tabelada t de student com $n - 1$ graus de liberdade (Triola, 2005); \bar{x}_k representa a média amostral da k -ésima variável e s_k^2 é a variância amostral da k -ésima variável.

Assim, as estatísticas de teste para cada variável são dadas por:

$$t_1 = \frac{(22-14)}{\sqrt{\frac{164,2029}{30}}} = \frac{8}{\sqrt{5,473}} = 3,42$$

$$t_2 = \frac{(36,1-42)}{\sqrt{\frac{110,5759}{30}}} = \frac{-5,9}{\sqrt{3,686}} = -3,07$$

O valor crítico do teste t -student é dado da tabela da distribuição t -student com 29 graus de liberdade e percentil de ordem 0,9875. Esse valor obtido foi de 2,46. Como o módulo de t_1 e t_2 é maior que $t_c=2,46$, conclui-se que as duas variáveis são responsáveis pela rejeição de H_0 quando se realizou o teste T^2 de Hotelling.

Para aplicar o teste de Hayter e Tsui (1994) é necessário encontrar a matriz de correlação amostral $R_{2 \times 2}$ a partir da matriz $S_{p \times p}$. O coeficiente de correlação entre as i -ésima e a j -ésima variáveis do vetor X é dado por:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} \times \sigma_{jj}}} \quad (2.18)$$

$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, $i, j, = 1, 2, \dots, p$. Quando $i=j$, a expressão em (2.18) torna-se igual a 1. Assim, a correlação amostral entre a 1ª e a 2ª variável é dado por:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11} \times \sigma_{22}}} = \frac{-109,8966}{\sqrt{164,2069 \times 110,5759}} = -0,8156 = \rho_{21}$$

E a matriz de correlação amostral será:

$$R_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -0,8156 \\ -0,8156 & 1 \end{bmatrix}$$

O valor encontrado de $C_{R,0,05}$, a partir de $R_{2 \times 2}$, conforme os passos do Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ da Figura 2.4 e utilizando um valor de $N=50000$, foi 2,15.

O valor observado da estatística de teste (M) é dado por:

$$M = \max \left\{ \left| \frac{22 - 14}{\sqrt{\frac{164,2029}{30}}} \right|; \left| \frac{36,1 - 42}{\sqrt{\frac{110,5759}{30}}} \right| \right\}$$

$$= \max \{ 3,419; 3,073 \} = 3,419.$$

Como o valor de M é maior que o valor crítico do teste ($C_{R,0,05}=2,15$), H_0 é rejeitado ao nível de significância de 5%. Observe que a rejeição de H_0 se deu pela diferença significativa nas médias das 2 variáveis já que ambos elementos da estatística M estão acima de 2,15.

Os intervalos de 95% de confiança para as médias populacionais das duas variáveis são dados respectivamente por:

$$\bar{X}_j \pm C_{R;\alpha} \times \sqrt{s_{jj}} / \sqrt{n}$$

$$\mu_1 : \left[22,0 - 2,15 \times (12,8143 / \sqrt{30}) ; 22,0 + 2,15 \times (12,8143 / \sqrt{30}) \right] = [16,97 ; 27,03]$$

$$\mu_2 : \left[36,1 - 2,15 \times (10,5155 / \sqrt{30}) ; 36,1 + 2,15 \times (10,5155 / \sqrt{30}) \right] = [31,97 ; 40,23]$$

Como as médias $\mu_1 = 14$ e $\mu_2 = 42$ não pertencem aos respectivos intervalos de confiança, H_0 deve ser rejeitada ao nível de 5% de significância. Note que houve a mesma decisão em relação a rejeição de H_0 , que a obtida no teste T^2 de Hotelling. No entanto, com o teste de Hayter e Tsui é possível identificar automaticamente que a rejeição foi devido a diferença nas 2 médias, informação que não é obtida automaticamente com o teste T^2 de Hotelling.

2.4 Teste T^2 Hotelling para Duas Populações Independentes

Assim como no caso de apenas uma única população, o procedimento mais usual e comum na literatura para testar a igualdade dos vetores de médias de duas populações independentes é o teste T^2 de Hotelling para duas populações que será descrito a seguir.

2.4.1 Caso de Matrizes de Covariâncias Iguais

Define-se X_{ijk} como o valor da variável k para o elemento amostral j que pertence à população i , $i=1,2$; $j=1,2,\dots, n_i$; $k=1,2,\dots,p$. Sendo assim, $\mathbf{X}_{ij} = (X_{ij1} \ X_{ij2} \ \dots \ X_{ijp})^T$ será o vetor de observações do elemento amostral j da população i , sendo que \mathbf{X}_{ij} é proveniente de uma distribuição normal p -variada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{ip})^T$ e matriz de covariâncias $\Sigma_{p \times p}^i$, $i=1,2$; sendo as duas populações independentes entre si, $\boldsymbol{\mu}_i \in \mathbb{R}^p$. Um caso particular é aquele em que $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$. Define-se n_1 e n_2 como sendo os tamanhos das amostras da primeira e da segunda população,

respectivamente, mensuradas em p variáveis e $n=n_1+n_2$. Para cada população i , tem-se independência entre os elementos amostrais respectivos.

Seja $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$. A estimação do vetor de parâmetro $\boldsymbol{\delta}$, assim como a formulação do teste de hipótese sobre $\boldsymbol{\delta}$, é de especial interesse dos pesquisadores das áreas aplicadas. Uma das hipóteses de interesse neste caso é a de que as populações tem o mesmo vetor de médias, isto é, $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_0$, sendo $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})^T$, ou de forma equivalente, $H_0 : \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, onde $\boldsymbol{\delta}$ é um vetor com dimensão $p \times 1$. Seja $H_a : \boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$. Neste caso, o teste T^2 de Hotelling para testar H_0 é fundamentado na estatística de teste dada em (2.19) se $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$, sendo Σ conhecida.

$$\begin{aligned} T^2 &= (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)^T \left(\frac{\Sigma_1}{n_1} + \frac{\Sigma_2}{n_2} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) \\ &= \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ij} \quad (2.20)$$

o vetor de médias amostral, $i=1,2$.

Sob a hipótese nula a estatística T^2 de Hotelling tem distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade. Assim, deve-se rejeitar H_0 se o valor observado de T^2 for maior ao valor crítico $\chi_{\alpha,p}^2$, sendo $\chi_{\alpha,p}^2$ o quantil referente à probabilidade acumulada igual a $(1-\alpha)$ da distribuição χ^2 com p graus de liberdade (Morrison, 1976).

Quando Σ é desconhecida, esta é estimada pela matriz de covariâncias amostral combinada dada em (2.21).

$$S_c = \frac{(n_1 - 1)S_{1.} + (n_2 - 1)S_{2.}}{n - 2} \quad (2.21)$$

sendo

$$S_{i.} = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)(X_{ij} - \bar{X}_i)^T \quad (2.22)$$

a matriz de covariâncias amostral da população i , $i=1,2$.

A estatística do teste é então dada por:

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n} (\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^T S_c^{-1} (\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.}) \quad (2.23)$$

que sob a hipótese nula tem distribuição proporcional à distribuição F . Assim, a hipótese nula será rejeitada se o valor observado de T^2 for maior que o valor crítico:

$$\frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - 1 - p)} F_{\alpha, p, n_1 + n_2 - 1 - p} \quad (2.24)$$

sendo $F_{\alpha, p, n_1 + n_2 - 1 - p}$ o quantil referente à probabilidade acumulada igual a $(1 - \alpha)$ da distribuição F com p e $n_1 + n_2 - 1 - p$ graus de liberdade (Johnson e Wichern, 2002).

2.4.1.1 Cálculo de Poder Teórico do teste T^2 de Hotelling

A estatística do teste T^2 de Hotelling para a situação de matrizes de covariâncias iguais conhecidas e desconhecidas possui distribuição exata conhecida. Sendo assim, é possível obter o poder teórico do teste acessando-se a distribuição exata dessa estatística, que será a distribuição qui-quadrado ou F , quando as matrizes de covariâncias são iguais conhecidas ou desconhecidas, respectivamente.

No caso de matrizes de covariâncias iguais e conhecidas, ou seja, quando $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$, sendo Σ conhecida, o teste T^2 de Hotelling para testar $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ é fundamentado na estatística de teste que foi dada em (2.19). Outra forma de escrever a distribuição exata da estatística de teste neste caso é a seguinte:

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \left((\bar{X}_1. - \bar{X}_2.) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) \right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left((\bar{X}_1. - \bar{X}_2.) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) \right) \sim \chi^2_{\alpha; p; \gamma} \quad (2.25)$$

onde

$$\gamma = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right) (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) \quad (2.26)$$

é o parâmetro de não centralidade da distribuição (Timm, 2002).

Quando a hipótese nula H_0 é verdadeira, o parâmetro de não centralidade é zero e T^2 tem uma distribuição χ^2 central.

Sob a hipótese alternativa $H_a : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ ou $H_a : \boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$, o parâmetro de não centralidade pode ser escrito como:

$$\gamma = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right) \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\delta} \quad (2.27)$$

Assim, o poder teórico sob a hipótese alternativa no caso de matrizes de covariâncias iguais e conhecidas será dado pela probabilidade da estatística de teste T^2 , na distribuição $\chi^2_{\alpha; p; \gamma}$, assumir valores acima da constante crítica $\chi^2_{\alpha, p}$, sendo $\chi^2_{\alpha, p}$ o quantil referente à probabilidade acumulada igual a $(1 - \alpha)$ da distribuição χ^2 com p graus de liberdade e parâmetro de não centralidade γ .

Quando as matrizes de covariâncias são iguais e desconhecidas o teste T^2 de Hotelling para testar $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_0$ é fundamentado na estatística de teste que foi dada em (2.23). Outra forma de escrever a distribuição exata da estatística de teste neste caso é a seguinte:

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n} \left((\bar{X}_1. - \bar{X}_2.) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) \right)^T S_c^{-1} \left((\bar{X}_1. - \bar{X}_2.) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) \right) \sim$$

$$\frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - 1 - p)} F_{(\alpha; p, n_1 + n_2 - 1 - p; \gamma)} \quad (2.28)$$

sendo γ da forma como apresentado em (2.26).

Assim, o poder teórico sob a hipótese alternativa no caso de matrizes de covariâncias iguais e desconhecidas será dado pela probabilidade da estatística de teste T^2 (calculada conforme (2.23)) na distribuição proporcional F dada como em (2.28), assumir valores acima da constante crítica $\frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - 1 - p)} F_{(\alpha; p, n_1 + n_2 - 1 - p)}$, sendo $F_{\alpha, p, n_1 + n_2 - 1 - p}$ o quantil referente à probabilidade acumulada igual a $(1 - \alpha)$ da distribuição F com p e $n_1 + n_2 - 1 - p$ graus de liberdade (Johnson e Wichern, 2002) e parâmetro de não centralidade γ .

No anexo A encontram-se alguns resultados de poder teórico obtidos conforme foi explicado nesta seção e algumas estimativas de poder do teste T^2 de Hotelling obtidos via simulação Monte Carlo, para alguns cenários de matrizes de covariâncias que foram estudados nesta dissertação. Pode-se observar que os valores obtidos via simulação e via distribuição exata são muito semelhantes.

2.4.2 Caso de Matrizes de Covariâncias Diferentes

Dadas as mesmas definições anteriores, ver seção (2.4.1), outro caso possível de ocorrer é aquele em que $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Para testar a hipótese nula de igualdade dos vetores de médias de duas populações normais independentes especificada por $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, ou equivalentemente $H_0 : \delta = \mathbf{0}$ onde $\delta = \mu_1 - \mu_2$, quando Σ_1 e Σ_2 são conhecidas, utiliza-se a estatística de teste dada em (2.29) que sob a hipótese nula possui distribuição aproximada à distribuição qui-quadrado central, com p graus de liberdade.

$$T^2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^T \left(\frac{\Sigma_1}{n_1} + \frac{\Sigma_2}{n_2} \right)^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \quad (2.29)$$

Assim, deve-se rejeitar H_0 se o valor observado de T^2 for maior que o valor crítico $\chi^2_{\alpha,p}$, sendo $\chi^2_{\alpha,p}$ o quantil referente à probabilidade acumulada igual a $(1-\alpha)$ da distribuição χ^2 com p graus de liberdade (Johnson e Wichern, 2002) e \bar{X}_i como definidos na seção 2.4.1, $i=1,2$.

Quando Σ_1 e Σ_2 são desconhecidas, a estatística de teste será dada como em (2.30) que sob a hipótese nula possui distribuição aproximada proporcional à distribuição F central. Sendo S_1 e S_2 as matrizes definidas como em (2.22).

$$T^2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^T \left(\frac{S_1}{n_1} + \frac{S_2}{n_2} \right)^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \quad (2.30)$$

Assim, deve-se rejeitar a hipótese nula se o valor observado de T^2 for maior que o valor crítico

$$\frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - 1 - p)} F_{\alpha,p,n_1+n_2-1-p} \quad (2.31)$$

sendo F_{α,p,n_1+n_2-1-p} o quantil referente à probabilidade acumulada igual a $(1-\alpha)$ da distribuição F com p e n_1+n_2-1-p graus de liberdade.

2.4.2.1 Distribuições Empíricas e Teóricas Aproximadas do Teste T^2 de Hotelling: Caso de Matrizes de Covariâncias Diferentes

A seguir apresenta-se a título de ilustração, algumas situações que mostram a proximidade dos percentis da distribuição empírica da estatística T^2 de Hotelling sob H_0 com as distribuições teóricas aproximadas χ^2 e proporcional a F .

Na Tabela 2.2 encontram-se os percentis das distribuições qui-quadrado (χ^2) e F teóricos e das respectivas distribuições empíricas da estatística T^2 de Hotelling calculadas considerando-se $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ conhecidas

(estatística chamada aqui de T^2) ou desconhecidas (estatística chamada aqui de T_*^2).

Para 4 situações de matrizes populacionais previamente fixas, isto é, $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_1 \neq \Sigma_2, \mu_1 = \mu_2 = 0$, gerou-se a distribuição empírica da estatística de teste T^2 (ou T_*^2) sob $H_0 : \delta = \mathbf{0}$, considerando-se $n_1 = n_2 = 10$, para o caso em que se tem $p=2$ e $p=3$ variáveis de uma distribuição normal p -variada, conforme o algoritmo descrito na Figura 2.7.

Pelos resultados obtidos pode-se perceber que para o caso de $p=2$ (Caso 1), por exemplo, o percentil de interesse de 95% obtido pela distribuição χ^2 (5,9915) é praticamente igual ao obtido pela distribuição empírica de T^2 (5,9939). O mesmo também ocorre para o caso em que a matriz de covariâncias é desconhecida. O percentil de 95% da distribuição F (7,6056) também é muito próximo ao percentil da distribuição empírica da estatística T_*^2 (7,6735). Porém, quando $p=3$ (Casos 2, 3 e 4) as aproximações para a situação de matrizes diferentes não são tão boas assim, principalmente quando as matrizes de covariâncias são muito diferentes entre si, caso dos cenários apresentado na Tabela 2.2 casos 2 e 4. Esse fato faz com que as estimativas médias da probabilidade do erro I para amostras pequenas sejam distorcidas, pois ao se usar um valor crítico menor do que se deveria, isso está causando um aumento da área de rejeição da hipótese nula e, conseqüentemente, aumento na estimativa da probabilidade do erro tipo I, conforme relatado em Anderson (1984) e outros autores.

Passo 1: Gera-se $k=20000$ amostras aleatórias com distribuição normal multivariada com vetores de médias iguais a zero e matrizes de covariâncias Σ_1 e Σ_2 , onde $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$, e tamanhos amostrais iguais a n_1 e n_2 para as populações 1 e 2, respectivamente.

Passo 2: Obtém-se os vetores de médias amostrais para cada uma das amostras aleatórias geradas no passo 1, de acordo com (2.20). Se for o caso da estimação da estatística T_*^2 , calcula-se também as matrizes de covariâncias

amostrais de acordo com (2.22). Para cada uma das $k=20000$ amostras geradas no Passo 1.

Passo 3: Calcula-se a estatística de teste T^2 , conforme (2.29) ou a estatística de teste T_*^2 , conforme (2.30) para cada uma das amostras aleatórias do passo 1.

Passo 4: Por fim, obtêm-se os percentis da ordem de 2,5%, 5%, 10%, 90%, 95% e 97,5% da distribuição empírica T^2 , ou da distribuição empírica T_*^2 , ambas obtidas no Passo 3.

Figura 2.7: Obtenção dos percentis da distribuição empírica T^2 e T_*^2 .

O que se pode verificar de modo genérico para os casos analisados nesta dissertação é que a aproximação pelas distribuições qui-quadrado e F das respectivas distribuições das estatísticas T^2 de Hotelling (T^2 e T_*^2) é melhor para o caso da distribuição qui-quadrado (caso de matrizes de covariâncias conhecidas) do que para o caso da distribuição F (caso de matrizes de covariâncias desconhecidas).

A aproximação pela distribuição qui-quadrado para matrizes 2×2 não parece obter valores de percentis muito diferentes das estimativas dos percentis obtidos pela distribuição empírica da estatística T^2 , principalmente para o percentil de interesse que é o de 95%, as estimativas são bem próximas. Porém, quando as matrizes de covariâncias possuem dimensões maiores e, ao mesmo tempo, são bem diferentes entre si, os percentis da distribuição qui-quadrado já não são sempre bem próximos dos percentis da distribuição empírica T^2 , mesmo para o percentil de 95%.

Já para a aproximação pela distribuição F os valores dos percentis não são muito próximos das estimativas dos percentis obtidos pela distribuição empírica da estatística T_*^2 . Quando as matrizes de covariâncias possuem dimensões maiores e, ao mesmo tempo, são bem diferentes entre si, os percentis da distribuição F não são tão próximos dos percentis da distribuição empírica de T_*^2 , mesmo para o percentil de interesse de 95%. E, para este caso de matrizes desconhecidas, as diferenças chegam a ser bem maiores do

que quando as matrizes são conhecidas. É possível observar estimativas com diferenças de quase 3 unidades dos valores críticos obtidos pela distribuição F enquanto para o caso de matrizes conhecidas essa diferença não superava o valor de 0,1 unidades da distribuição qui-quadrado.

Ressalta-se que quando as matrizes de covariâncias não são as mesmas o teste para a igualdade de vetores de médias tem uma probabilidade de rejeição sob a hipótese nula que depende destas matrizes. E segundo Anderson (1984), se a diferença entre as matrizes é pequena ou se os tamanhos amostrais são grandes, não existe praticamente efeito de distorção na estimativa da probabilidade do erro do tipo I. Entretanto, se as matrizes de covariâncias são completamente diferentes e/ou os tamanhos amostrais são relativamente pequenos, a probabilidade do erro tipo I pode ser diferente do nível de significância nominal (Anderson, 1984). Para as simulações realizadas nesta dissertação, esses comportamentos distorcidos para a estimativa da probabilidade do erro tipo I foram observados principalmente para o caso de matrizes de covariâncias diferentes e desconhecidas e, sendo mais agravante ainda no caso quando $p=3$ variáveis. Pois ao se usar um valor crítico F menor do que se deveria pela distribuição empírica de T_*^2 , há um aumento da área de rejeição da hipótese nula e, conseqüentemente, aumento na estimativa da probabilidade do erro tipo I para alguns tamanhos de amostras (veja seção 4.4.2, página 121).

Tabela 2.2: Percentis para matrizes de covariâncias diferentes $p=2$ e $p=3$.

Caso	Matriz de Covariâncias	Dist.	Percentis						
			Mediana	2,5%	5%	10%	90%	95%	97,5%
(1)	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	χ^2	1,386	0,0506	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	7,3778
		T^2	1,408	0,0529	0,1055	0,2139	4,6475	5,9939	7,2755
		F	1,5294	0,0537	0,1090	0,2245	5,6004	7,6056	9,7811
		T_*^2	1,5470	0,0561	0,1106	0,2215	5,6321	7,6735	10,089
(2)	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	χ^2	2,366	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484
		T^2	2,997	0,2247	0,3547	0,5852	6,2696	7,7785	9,3292
		F	2,778	0,2371	0,3883	0,6495	8,3086	10,9310	13,7593
		T_*^2	2,952	0,2551	0,4081	0,6761	9,2651	12,4945	15,9496
(3)	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$	χ^2	2,366	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484
		T^2	2,994	0,2110	0,3400	0,5781	6,2490	7,8000	9,4315
		F	2,778	0,2371	0,3883	0,6495	8,3086	10,931	13,7593
		T_*^2	2,809	0,2394	0,3947	0,6559	8,3675	10,957	13,7384
(4)	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	χ^2	2,366	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484
		T^2	3,023	0,2111	0,3483	0,5880	6,3102	7,9552	9,4456
		F	2,778	0,2371	0,3883	0,6495	8,3086	10,9310	13,7593
		T_*^2	3,060	0,2456	0,4061	0,6730	9,8307	13,1300	16,8056

Distribuições Teóricas Aproximadas: χ^2 e F . Distribuições Empíricas obtidas via Aproximação Monte Carlo: T^2 e T_*^2

2.5 Extensão do Teste de Hayter e Tsui para Duas Populações Independentes – Teste Proposto nesta Dissertação

Nesta seção é proposto um teste alternativo ao teste T^2 de Hotelling para duas populações independentes e que é objetivo principal desta dissertação. Esse teste é uma extensão do teste de Hayter e Tsui (1994) formulado inicialmente para testar o vetor de médias de uma população, como visto na Seção 2.3. Será apresentado a versão para matrizes de covariâncias iguais e diferentes.

2.5.1 Hayter e Tsui para 2 Populações Independentes: Caso de Matrizes de Covariâncias Iguais

Sejam $X_{1j} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{pxp}^1)$, $j=1, \dots, n_1$, e $X_{2l} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{pxp}^2)$, $l=1, \dots, n_2$, os vetores aleatórios independentes entre si, de observações dos elementos amostrais j e l , $j=1, \dots, n_1$; $l=1, \dots, n_2$, das populações 1 e 2, respectivamente, sendo $\boldsymbol{\mu}_1$ e $\boldsymbol{\mu}_2$ os vetores de médias, $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1p})^T$ e $\boldsymbol{\mu}_2 = (\mu_{21}, \mu_{22}, \dots, \mu_{2p})^T$ das respectivas populações. As hipóteses nula e alternativa do teste são $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_0$ e $H_a : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$, ou equivalentemente $H_0 : \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, $H_a : \boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$ sendo $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$, onde $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathfrak{R}^p$, $\boldsymbol{\mu}_2 \in \mathfrak{R}^p$, $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{ip})^T$, $i=1, 2$.

Quando $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ e a matriz de covariâncias Σ é conhecida a hipótese nula H_0 será rejeitada a um nível de significância α , $0 < \alpha < 1$, quando:

$$M = \max \left\{ \left| \bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k} \right| / \left[\text{Var}(\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k}) \right]^{1/2}, k = 1, 2, \dots, p \right\} > C_{R, \alpha}. \quad (2.32)$$

onde \bar{X}_{1k} e \bar{X}_{2k} são as médias amostrais da variável k da população 1 e 2 respectivamente e $[\text{Var}(\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k})]^{1/2}$ na fórmula (2.32) pode ser escrita como

$\sqrt{\frac{\sigma_{kk}}{n_1} + \frac{\sigma_{kk}}{n_2}}$, sendo σ_{kk} a variância teórica (populacional) da k -ésima variável e é proveniente da matriz de covariâncias teórica Σ , $k=1, 2, \dots, p$.

Assim, o valor de $C_{R, \alpha}$ é o ponto crítico que delimita a região de rejeição da hipótese nula. Este é determinado através de um algoritmo que envolve a simulação de amostras de uma população normal p -variada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias P_{pxp} , sendo P_1 a matriz de correlação das p variáveis da população 1 e P_2 a matriz de correlação das p variáveis da população 2, onde $P_1 = P_2 = P_{pxp}$ é a matriz de correlação das p variáveis, comum às duas populações. Assim, a estatística de teste M definida em (2.32) é usada para testar a hipótese nula $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_0$ contra a alternativa $H_a : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$. A constante $C_{R, \alpha}$ deverá ser calculada com base na

matriz de correlação P_{pxp} usando-se o Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ mostrado na Figura 2.4 (veja seção 2.3, página 14).

Deste modo, para cada diferença de médias populacionais $(\mu_{1k} - \mu_{2k})$, os limites de confiança de $(1-\alpha)100\%$, serão dados pela equação:

$$P \left[\left| \frac{\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k}}{[\text{Var}(\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k})]^{1/2}} \right| \leq C_{R,\alpha}, \forall k = 1, 2, \dots, p \right] = 1 - \alpha \quad (2.33)$$

Assim, um intervalo de $(1-\alpha)100\%$ de confiança para cada diferença de médias populacional $(\mu_{1k} - \mu_{2k})$, $k=1, 2, \dots, p$, é dado por:

$$\left((\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k}) - C_{R,\alpha} \times \sqrt{\frac{\sigma_{kk}}{n_1} + \frac{\sigma_{kk}}{n_2}}; (\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k}) + C_{R,\alpha} \times \sqrt{\frac{\sigma_{kk}}{n_1} + \frac{\sigma_{kk}}{n_2}} \right) \quad (2.34)$$

Se todos os intervalos determinados contiverem o valor zero, H_0 não deve ser rejeitada.

No caso em que $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ e a matriz de covariâncias Σ for desconhecida, esta deverá ser estimada como a matriz de covariâncias combinada S_c dada em (2.21). Assim, $[\text{Var}(\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k})]^{1/2}$ na fórmula (2.32)

pode ser escrita como $\sqrt{\frac{s_{kk}}{n_1} + \frac{s_{kk}}{n_2}}$, onde s_{kk} representa a variância amostral

da k -ésima variável e é proveniente da matriz de covariâncias amostral S_c . A partir da matriz de covariâncias amostral S_c obtém-se então, a matriz de correlação amostral estimada e denotada como R_c .

A constante $C_{R,\alpha}$ deverá ser calculada com base na matriz de correlação teórica P_{pxp} quando essa for conhecida ou na matriz de correlação amostral R_c , quando P_{pxp} for desconhecida, usando o Algoritmo de obtenção de

$C_{R,\alpha}$ mostrado na Figura 2.4 (veja Seção 2.3, página 14). A correspondência da matriz de correlação com a matriz de covariâncias é feita pela fórmula dada em (2.18).

2.5.2 Hayter e Tsui para Duas Populações Independentes: Caso de Matrizes de Covariâncias Diferentes

Sejam os vetores aleatórios $X_{1j} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{pxp}^1)$, $j=1, \dots, n_1$, e $X_{2l} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{pxp}^2)$, $l=1, \dots, n_2$, onde $\Sigma_{pxp}^1 \neq \Sigma_{pxp}^2$. As hipóteses nula e alternativa do teste são $H_0: \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ contra $H_a: \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$, sendo $\boldsymbol{\mu}_1$ e $\boldsymbol{\mu}_2$ os vetores de médias das populações 1 e 2, respectivamente, definidos em \mathfrak{R}^p como sendo $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{ip})^T$, $i=1, 2$.

Quando as matrizes de covariâncias são conhecidas e diferentes, a hipótese nula H_0 será rejeitada a um nível de significância α , $0 < \alpha < 1$, quando:

$$M = \max \left\{ \left| \bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k} \right| / \left[\text{Var}(\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k}) \right]^{1/2}, k = 1, 2, \dots, p \right\} > C_{R,\alpha}. \quad (2.35)$$

Quando $\Sigma_{pxp}^1 \neq \Sigma_{pxp}^2$ tem-se que $[\text{Var}(\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k})]^{1/2}$ na fórmula (2.35) pode ser

escrita como $\sqrt{\frac{\sigma_{kk_1}}{n_1} + \frac{\sigma_{kk_2}}{n_2}}$, onde σ_{kk_1} e σ_{kk_2} representam as variâncias da k -

ésima variável nas populações 1 e 2, e são provenientes das matrizes de covariâncias Σ_{pxp}^1 e Σ_{pxp}^2 , respectivamente.

Assim, o valor de $C_{R,\alpha}$ é o ponto crítico que delimita a região de rejeição da hipótese nula. A constante $C_{R,\alpha}$ deverá ser calculada com base na

matriz de covariâncias teórica $\frac{\Sigma_{pxp}^1}{n_1} + \frac{\Sigma_{pxp}^2}{n_2}$. Com base nesta matriz obtém-se

a matriz de correlação P_{pxp} e utiliza-se o Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ como mostrado na Figura 2.4 (página 14).

Deste modo, para cada diferença de médias populacionais $(\mu_{1k} - \mu_{2k})$, $k=1,2,\dots,p$, os limites de confiança de $(1-\alpha)100\%$, são dados pela equação:

$$P \left[\left| \frac{\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k}}{[\text{Var}(\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k})]^{1/2}} \right| \leq C_{R,\alpha}, \forall k = 1, 2, \dots, p \right] = 1 - \alpha \quad (2.36)$$

Assim, um intervalo de $(1 - \alpha)100\%$ de confiança para cada diferença de médias é dado por:

$$\left((\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k}) - C_{R,\alpha} \times \sqrt{\frac{\sigma_{kk_1}}{n_1} + \frac{\sigma_{kk_2}}{n_2}}; (\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k}) + C_{R,\alpha} \times \sqrt{\frac{\sigma_{kk_1}}{n_1} + \frac{\sigma_{kk_2}}{n_2}} \right) \quad (2.37)$$

Se todos os intervalos determinados contiverem o valor zero, H_0 não deve ser rejeitada.

No caso em que Σ_{pxp}^1 e Σ_{pxp}^2 são desconhecidas, estas deverão ser estimadas por S_1 e S_2 , respectivamente, como definido em (2.22) na página 21. Assim, $[\text{Var}(\bar{X}_{1k} - \bar{X}_{2k})]^{1/2}$ na fórmula (2.35) pode ser escrita como

$$\sqrt{\frac{s_{kk_1}}{n_1} + \frac{s_{kk_2}}{n_2}}, \text{ onde } s_{kk_1} \text{ e } s_{kk_2} \text{ representam as variâncias amostrais da } k\text{-}$$

ésima variável e são provenientes das matrizes de covariâncias amostrais S_1 e

S_2 , respectivamente. A partir da matriz de covariâncias amostral $\frac{S_1}{n_1} + \frac{S_2}{n_2}$,

obtém-se então a matriz de correlação estimada R .

A constante $C_{R,\alpha}$ deverá ser calculada com base na matriz de correlação teórica P quando essa é conhecida ou na matriz de correlação amostral R , quando P é desconhecida, de acordo com o Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ apresentado na Figura 2.4 (veja Seção 2.3), sendo P_{pxp} e R_c como definidos nesta Seção. A correspondência da matriz de correlação com a matriz de covariâncias é feita pela fórmula dada em (2.18).

2.6 Testes Fundamentados na Combinação de p -valores – Proposta desta Dissertação.

Testes estatísticos podem ser construídos a partir da combinação dos p -valores (probabilidades de significância) de testes de hipótese feitos separadamente para a mesma hipótese nula. Dois dos métodos mais conhecidos e amplamente utilizados para a combinação de p -valores independentes são o de Tippett (1931) e o de Fisher (1950). Suponha que se tenha feito m testes de hipóteses independentes realizados para a hipótese nula H_0 e sejam P_j^* , $j=1, \dots, m$, os p -valores de cada um dos testes realizados separadamente. Neste caso as estatísticas de teste serão dadas por:

(i) $\psi_T = \min (P_j^*, j=1, 2, \dots, m)$ de acordo com Tippett

(ii) $\psi_F = -2 \sum_{j=1}^m \ln(P_j^*)$ de acordo com Fisher .

Sob a hipótese nula, ψ_T é distribuída como o mínimo de m variáveis aleatórias com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$ (Lazar et. al., 2002). Considerando-se, como ilustração, o caso particular em que se faz apenas dois testes de hipóteses simultaneamente para a mesma hipótese nula ($m=2$), sob a hipótese nula ψ_T é distribuído como o mínimo de duas variáveis com distribuição uniforme $[0,1]$. A hipótese nula deverá ser rejeitada para valores pequenos de ψ_T , ou seja, para um nível de significância α fixo rejeita-se H_0 para $\psi_T \leq c$, sendo $P(\psi_T \leq c) = \alpha$, $0 < \alpha < 1$, como ilustrado na Seção 2.6.1 para $m=2$.

Sob a hipótese nula, ψ_F tem a distribuição χ^2 com $2m$ graus de liberdade (Fisher, 1950). Considerando-se, novamente, o caso particular em que se faz apenas dois testes de hipóteses simultaneamente para a mesma hipótese, sob a hipótese nula ψ_T tem uma distribuição qui-quadrado (χ^2) com 4 graus de liberdade, conforme ilustrado na Seção 2.6.2, para $m=2$.

A seguir apresenta-se como as constantes críticas do teste de Tippett e Fisher são obtidos.

2.6.1 Determinação da Constante Crítica do Teste de Tippett

Seja W_1, W_2, \dots, W_m , m variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Seja $W^* = \min(W_1, W_2, \dots, W_m)$. Assim:

$$P(W^* \leq c) = 1 - P(W^* > c) \quad 0 < c < 1$$

$$P(W^* > c) = \prod_{j=1}^m P(W_j > c),$$

pois se o menor entre (W_1, W_2, \dots, W_m) é maior do que c , todos serão maiores que c , e como W_1, W_2, \dots, W_m são independentes, tem-se o produto das probabilidades de todas as variáveis serem maiores que c . Tem-se que:

$$P(W_j > c) = 1 - P(W_j \leq c) = 1 - \left(\int_0^c dw_j \right) = 1 - c, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Logo, $P(W^* \leq c) = 1 - (1 - c)^m$.

Para α fixo, deve-se encontrar o ponto de corte c tal que $P(W^* \leq c) = \alpha$. Para isso é preciso resolver a seguinte equação:

$$1 - (1 - c)^m = \alpha \Rightarrow (1 - c)^m = 1 - \alpha \Rightarrow 1 - c = (1 - \alpha)^{1/m} \Rightarrow c = 1 - (1 - \alpha)^{1/m}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Para o caso particular de $m=2$ tem-se $c = 1 - (1 - \alpha)^{1/2}$, $0 < \alpha < 1$.

2.6.2 Determinação da Constante Crítica do Teste de Fisher

Seja X uma variável com distribuição $Beta(a, b)$, sendo $a > 0$ e $b > 0$ e seja $Y = -\ln(X)$. A densidade de Y é dada por:

$$f(y) = \frac{1}{B(a, b)} e^{-ay} (1 - e^{-y})^{b-1}, \quad y > 0. \quad (2.38)$$

Agora seja $Z = -2 \log(X) \Rightarrow \frac{Z}{2} = -\log(X)$. A função densidade de $w = \frac{Z}{2}$

será dada por:

$$f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{B(a,b)} \left(\frac{1}{2}\right) e^{-a(z/2)} (1 - e^{-z/2})^{b-1}. \quad (2.39)$$

A distribuição uniforme é um caso particular da distribuição Beta, quando $a = 1$ e $b = 1$. Se $a = b = 1$ a densidade de $\frac{Z}{2}$ será igual a:

$$\left(\frac{1}{2}\right) e^{-(z/2)} \quad (2.40)$$

A função densidade de uma qui quadrado com m graus de liberdade é da forma:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(m/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{m/2} x^{(m/2)-1} e^{-(1/2)x}, \quad x > 0. \quad (2.41)$$

Portanto, a densidade de $\frac{Z}{2}$ será a de uma qui quadrado com 2 graus de liberdade. Suponha agora que se tenha m variáveis todas com distribuição qui quadrado com 2 graus de liberdade e independentes. A soma dessas variáveis terá distribuição qui-quadrado com graus de liberdade igual à soma dos graus de liberdade das distribuições das m variáveis, ou seja, para o caso particular de duas variáveis a quantidade de graus de liberdade será 4. Para mais detalhes da combinação de p-valores o leitor pode consultar a dissertação de mestrado de Colenghi (2008).

2.7 Teste combinado de Hayter e Tsui e T^2 Hotelling – Proposta desta Dissertação

Aproveitando-se a qualidade dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui na tentativa de se obter um teste mais poderoso do que estes individualmente, foi proposto um teste fundamentado na combinação direta dos resultados desses testes para vetores de médias de duas populações.

Sejam $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ e $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ e T^2 e HT os testes de T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui realizados ao nível de significância α , $0 < \alpha < 1$. O teste combinado de T^2 e HT, chamado aqui de T^2 e HT comb, tem suas regiões de decisão definidos por:

- Rejeita-se H_0 : Se pelo menos um desses 2 testes estatísticos separadamente (T^2 de Hotelling ou Hayter e Tsui) rejeitar a hipótese nula.
- Não Rejeita H_0 : Se ambos os testes (T^2 de Hotelling ou Hayter e Tsui) não rejeitarem tal hipótese.

Para identificação das variáveis que são as responsáveis pela rejeição de H_0 , é necessário retornar ao teste que rejeitou a hipótese nula. Se for o teste de Hayter e Tsui automaticamente é possível identificar as variáveis que se diferem significativamente em média, se for o teste T^2 de Hotelling é necessário realizar as comparações múltiplas. Se ambos tiverem rejeitado H_0 , pode-se usar o teste de Hayter e Tsui para essa identificação.

2.8 Exemplo – Vetor de Médias de Duas Populações

Neste exemplo mostra-se uma aplicação dos testes T^2 de Hotelling, Hayter e Tsui, combinação de p -valores Tippett e Fisher e o teste combinado de T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para o caso de comparação de vetor de médias para duas populações.

Na Tabela 2.3 apresentamos os dados do exemplo 7.4 de Ferreira (2008). Deseja-se verificar se os vetores de médias de duas variedades de milho (A e B) eram iguais. Para isso amostras aleatórias independentes de tamanhos $n_A=6$ e $n_B=5$ foram observados de cada variedade e as variáveis produtividade (t/ha), X_1 , e altura de planta (m), X_2 , mensuradas.

Tabela 2.3: Dados de variedade de milho.

Variedade A		Variedade B	
X_1	X_2	X_1	X_2
5,7	2,10	4,4	1,80
8,9	1,90	7,5	1,75
6,2	1,98	5,4	1,78
5,8	1,92	4,6	1,89
6,8	2,00	5,9	1,90
6,2	2,01		

As estimativas dos vetores de médias populacionais e das matrizes de covariâncias das variedades A e B foram obtidas conforme (2.20) e (2.22) e são apresentadas a seguir:

$$\bar{X}_A = \begin{bmatrix} 6,600 \\ 1,985 \end{bmatrix} \quad S_A = \begin{bmatrix} 1,4200 & -0,05040 \\ -0,0504 & 0,00511 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_B = \begin{bmatrix} 5,560 \\ 1,824 \end{bmatrix} \quad S_B = \begin{bmatrix} 1,54300 & -0,03655 \\ -0,03655 & 0,00453 \end{bmatrix}$$

A matriz de covariâncias combinada, considerando-se que $\Sigma_A = \Sigma_B = \Sigma$, é dada como:

$$S_c = \frac{(n_A - 1)S_A + (n_B - 1)S_B}{n - 2} = \begin{bmatrix} 1,4747 & -0,0442 \\ -0,0442 & 0,0049 \end{bmatrix},$$

é uma estimativa não viciada da matriz Σ , onde $n = n_A + n_B = 6 + 5 = 11$.

- **Teste T^2 de Hotelling**

Para o teste T^2 de Hotelling, a estatística de teste é dada por:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{n_1 n_2}{n} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^T S_c^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \\ &= \frac{5 \times 6}{11} \begin{bmatrix} 6,6 - 5,56 & 1,985 - 1,824 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0,9335 & 8,5121 \\ 8,5121 & 283,7076 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,6 - 5,56 & 1,985 - 1,824 \end{bmatrix} \\ &= \frac{5 \times 6}{11} \begin{bmatrix} 1,040 & 0,161 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0,9335 & 8,5121 \\ 8,5121 & 283,7076 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,040 & 0,161 \end{bmatrix} = 30,58416 \end{aligned}$$

O valor crítico do teste (F_c) correspondente é

$$F_c = \frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - 1 - p)} F_{\alpha; p, n_1 + n_2 - 1 - p} = \frac{9 \times 2}{8} \times 4,46 = 10,035.$$

Pois, para um valor de $\alpha = 0,05$ e sendo os graus de liberdade da distribuição F iguais a 2 e 8, o quantil referente à probabilidade acumulada igual a $(1 - \alpha)$ da distribuição F será de 4,46.

Como a estatística do teste T^2 de Hotelling (30,58) supera o valor crítico F_c (10,035), a um nível de significância de 5% conclui-se pela rejeição da hipótese nula de igualdade dos vetores de médias das duas variedades de milho.

Para se verificar qual variável foi a responsável por tal rejeição é necessário aplicar comparações múltiplas. Escolhemos a metodologia da correção de Bonferroni (Johnson e Wichern, 2002). Esta correção consiste em ajustar o valor de α para α / c , onde c é o número de possíveis combinações de médias. Como no exemplo acima $c=2$, trabalharemos com o nível de significância $\alpha = 0,025$. Portanto, agora aplicamos o teste univariado t -student para a k -ésima variável, $k=1,2$, supondo que as variâncias amostrais de uma mesma variável para cada população são iguais. Dessa forma, a estatística de teste será dada por:

$$t_k = \frac{(\bar{x}_{1k} - \bar{x}_{2k})}{\sqrt{\frac{s_k^2}{n_1} + \frac{s_k^2}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2; 1 - (\alpha/2)} \quad (2.42)$$

onde $t_{n_1 + n_2 - 2; 1 - (\alpha/2)}$ corresponde ao percentil de ordem $1 - (\alpha/2)$ da distribuição tabelada t -student com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade (Triola, 2005); \bar{x}_{1k} e \bar{x}_{2k} representam as médias amostrais da k -ésima variável das populações 1 e 2, respectivamente, e s_k^2 é a variância combinada da k -ésima variável que é dada por:

$$s_k^2 = \frac{(n_1 - 1)s_{1k}^2 + (n_2 - 1)s_{2k}^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} \quad (2.43)$$

sendo s_{1k}^2 e s_{2k}^2 as variâncias amostrais da k -ésima variável das populações 1 e 2, respectivamente.

Pela fórmula dada em (2.43) obtém-se $s_1^2=1,47$ e $s_2^2=0,005$. E as estatísticas de teste para cada variável são dadas por:

$$t_1 = \frac{(6,6 - 5,56)}{\sqrt{\frac{1,47}{5} + \frac{1,47}{4}}} = \frac{1,04}{\sqrt{0,6645}} = 1,27$$

$$t_2 = \frac{(1,985 - 1,824)}{\sqrt{\frac{0,005}{5} + \frac{0,005}{4}}} = \frac{0,161}{\sqrt{0,0023}} = 3,39$$

O valor crítico do teste t -student é dado da tabela da distribuição t -student com 9 graus de liberdade e percentil de ordem 0,9875. Esse valor obtido foi de 2,82. Como apenas $t_2=3,39$ foi maior que $t_c=2,82$, conclui-se que a segunda variável ($X_2 =$ altura da planta) é a responsável pela rejeição de H_0 quando se realizou o teste T^2 de Hotelling.

Para a obtenção do p -valor do teste T^2 de Hotelling é preciso verificar na distribuição F com 2 e 8 graus de liberdade, qual a proporção da área desta distribuição que está acima do valor F :

$$F = \frac{(n_1 + n_2 - 1 - p)}{(n_1 + n_2 - 2)p} T^2 = \frac{8}{9 \times 2} \times 30,58 = 13,593.$$

Este valor foi de 0,0027.

- **Teste Hayter e Tsui**

O valor da estatística de teste M para este exemplo é dado por

$$M = \max \left\{ \left| \frac{6,60 - 5,56}{\sqrt{\frac{1,4747}{6} + \frac{1,4747}{5}}}, \frac{1,985 - 1,824}{\sqrt{\frac{0,0049}{6} + \frac{0,0049}{5}}} \right| \right\}$$

$$M = \max \left\{ \left| \frac{1,04}{0,7353}; \frac{0,161}{0,0424} \right| \right\} = \max \left\{ |1,414 ; 3,797| \right\} = 3,797.$$

Para aplicar o teste de Hayter e Tsui (1994) é necessário encontrar a matriz de correlação amostral R_{pxp} a partir da matriz S_c , conforme (2.18), isto é:

$$R_{pxp} = \begin{bmatrix} 1 & -0,523 \\ -0,523 & 1 \end{bmatrix}$$

O valor encontrado de $C_{R,0,05}$, a partir de R_{pxp} , conforme os passos do Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ da Figura 2.4 (página 14) e utilizando-se $N=50000$, foi 2,207. Como o valor 3,797 é maior que o valor crítico do teste (2,207) a hipótese nula é rejeitada. É importante notar que o valor da estatística M foi proveniente da diferença entre as médias da variável X_2 (altura da planta). Sendo assim, pode-se concluir que as médias das 2 variedades diferem-se significativamente no que se refere à altura média.

Os intervalos de 95% de confiança para as diferenças das médias populacionais das duas variáveis são dados como descrito em (2.34):

$$\begin{aligned} \mu_1 &: \left[(6,60 - 5,56) - 2,207 \times \sqrt{\frac{1,4747}{6} + \frac{1,4747}{5}}; (6,60 - 5,56) + 2,207 \times \sqrt{\frac{1,4747}{6} + \frac{1,4747}{5}} \right] \\ &= \left[-0,583; 2,663 \right] \\ \mu_2 &: \left[(1,985 - 1,824) - 2,207 \times \sqrt{\frac{0,0049}{6} + \frac{0,0049}{5}}; (1,985 - 1,824) + 2,207 \times \sqrt{\frac{0,0049}{6} + \frac{0,0049}{5}} \right] \\ &= \left[0,067 ; 0,255 \right] \end{aligned}$$

Como o intervalo de 95% confiança para as diferenças de médias das duas populações na segunda variável ($X_2 =$ altura da planta) não contém o valor zero, H_0 deve ser rejeitada ao nível de 5% de significância.

Note que no teste T^2 de Hotelling houve a mesma decisão com relação à rejeição de H_0 , porém no teste T^2 seria necessário utilizar comparações múltiplas para se verificar em qual das duas variáveis houve a diferença significativa entre as médias. Em Hayter e Tsui a variável que causa a rejeição de H_0 já é detectada de imediato, o que torna este teste interessante. Isso é um

fato importante dado que se o teste envolver um número maior de variáveis ($p > 2$), o número de comparações múltiplas a serem feitas entre as médias para se identificar quais são as prováveis responsáveis pela rejeição da hipótese nula, poderá ser elevado comprometendo o poder dos testes utilizados nas comparações para um nível de significância global fixo.

O p-valor do teste Hayter e Tsui é obtido verificando-se qual a proporção dos $N=50000$ valores de M^i gerados conforme passos do Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ da Figura 2.4 (página 14) são maiores que o valor da estatística de teste $M = 3,797$. Deste modo, o p-valor de Hayter e Tsui obtido para este exemplo foi de 0,00024.

- **Testes de Tippett e Fisher**

As probabilidades de significância dos testes T^2 de Hotelling e de Hayter e Tsui foram, respectivamente, iguais a 0,0027 e 0,00024.

Obtidos os p-valores dos 2 testes, agora é possível obter o valor da estatística do teste combinado de p-valores de Tippett e Fisher, como segue:

$$\psi_T = \min(0,0027; 0,00024) = 0,00024$$

sendo a probabilidade de significância (p_T) do teste dada por

$$p_T = (1 - (1 - 0,00024)^2) = 0,00048$$

Para se obter o p-valor do teste de combinação de p-valores de Fisher é preciso obter o valor de referência conforme a seguir:

$$\psi_F = -2 \sum_{j=1}^2 \ln(P_j^*) = -2(\ln(0,0027) + \ln(0,00024)) = 28,498$$

sendo a probabilidade de significância (p_F) do teste dada por

$$p_F = P[\chi_4^2 \geq 28,498] = 0,00001$$

Portanto, para ambos testes de combinação de p-valores, a hipótese nula também foi rejeitada, assim como ocorreu nos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui, pois os p-valores destes testes foram sempre muito menores do que 0,05, que é o valor do nível de significância de referência, indicando uma forte rejeição da hipótese nula do teste. Porém, os testes combinados de

Tippett e Fisher, assim como ocorre com o teste T^2 de Hotelling, não indicam quais médias se diferem significativamente, como ocorre com o teste de Hayter e Tsui.

- **Teste combinado de Hayter e Tsui e T^2 de Hotelling**

Como tanto o teste de Hayter e Tsui quanto o teste T^2 de Hotelling rejeitaram a hipótese de igualdade de médias entre as duas variedades de milho para as duas variáveis analisadas, este teste combinado também rejeitará a hipótese de igualdade de médias.

Para identificar quais variáveis são as responsáveis pela rejeição da hipótese nula, uma vez que ambos os testes rejeitaram H_0 , usamos o resultado do teste de Hayter e Tsui de onde se conclui que a variável responsável por tal rejeição é $X_2 =$ altura da planta.

Capítulo 3

Modelos Simulados

Neste capítulo são apresentados os modelos usados na avaliação de desempenho dos testes propostos nesta dissertação para a comparação dos vetores de médias de 2 populações independentes. A avaliação foi feita através de simulação Monte Carlo e utilizando-se o software R for Windows, versão 2.9.0. O pacote estatístico do software R usado na geração da distribuição normal multivariada é o *mvtnorm*.

A fim de comparar os testes de hipótese para 2 populações independentes tratados nesta dissertação, vários cenários com distribuições normais multivariadas foram computacionalmente simulados. Para cada situação simulada, foram geradas $m = 20000$ amostras com variados tamanhos amostrais n_1 e n_2 , conforme a Tabela 3.1. Este procedimento foi repetido $M=10$ vezes para estimar a proporção média de rejeição de H_0 , sob a hipótese nula (estimativa da probabilidade do erro tipo I) e sob a hipótese alternativa (estimativa do poder do teste).

Tabela 3.1: Cenários de tamanhos de amostra das 2 populações.

Matrizes de Covariâncias Conhecidas		Matrizes de Covariâncias Desconhecidas	
n_1	n_2	n_1	n_2
5	5	10	10
10	10	15	15
15	15	25	25
25	25	50	50
50	50	15	10
5	10	10	15
10	5	25	10
15	5	10	25
5	25	-	-

Desta forma, para cada um dos testes, são contabilizadas em quantas das 20000 amostras a hipótese nula foi rejeitada, sendo calculada então a proporção de rejeição de H_0 . Quando as amostras são geradas sob H_0 , a

proporção de rejeição estima a probabilidade do erro tipo I real do teste, enquanto que, quando as amostras são geradas sob H_a , a proporção calculada estima o poder do teste.

Para o teste combinado simples de T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui a decisão é tomada através da combinação dos resultados dos dois testes. Se, pelo menos um dos testes rejeitar a hipótese nula, o teste combinado também rejeitará a hipótese nula, por outro lado, se ambos os testes não rejeitarem tal hipótese, o teste combinado não irá rejeitar a hipótese nula.

Já para o teste de combinação de p-valores de *Tippett e Fisher* a tomada de decisão é feita através da combinação dos p-valores dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui (Seção 2.6). Assim, quando o p-valor final do teste combinado de p-valores for menor do que 0,05, a hipótese nula será rejeitada.

Em situações práticas é muito comum ter tamanhos amostrais pequenos, por isso foram realizadas simulações neste trabalho em que o tamanho da amostra de uma ou das duas populações, na situação de matrizes de covariâncias conhecidas, eram iguais a 5. Porém, quando as matrizes de covariâncias são desconhecidas, faz-se necessário estimar essa matriz através dos dados provenientes das amostras. Sendo, portanto, necessário uma quantidade de dados maior para realizar tal estimação. Daí, o tamanho amostral $n=5$ ter sido eliminado dos cenários de tamanhos de amostras na situação de matrizes de covariâncias desconhecidas, conforme Tabela 3.1.

3.1 Modelos simulados

O número de variáveis consideradas nas simulações foi de $p=2$ e $p=3$. A hipótese nula é a de que o vetor de médias de dimensão $p \times 1$ da população 1 é igual ao vetor de médias da população 2. As matrizes de covariâncias dos cenários simulados são apresentadas a seguir, considerando-se duas situações $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ e $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$.

Nas Tabelas 3.2 e 3.3 estão apresentadas as matrizes de covariâncias teóricas para a situação de $p=2$ e $p=3$ variáveis, respectivamente, bem como as correlações correspondentes para $p=2$ e as matrizes de correlação para $p=3$. Já nas Tabelas 3.4 e 3.5 encontram-se os cenários simulados para o caso de matrizes de covariâncias diferentes.

Tabela 3.2: Cenários de matrizes de covariâncias iguais para $p=2$.

Cenário	$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$	Correlação
1	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	0
2	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	0
3	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	0,5
4	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	0,8

Tabela 3.3: Cenários de matrizes de covariâncias iguais para $p=3$.

Cenário	$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$	$P_1 = P_2 = P$
5	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$
6	$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$
7	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.4: Cenários de matrizes de covariâncias diferentes para $p=2$.

Cenário	$\Sigma_1 \neq \Sigma_2$
8	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
9	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$
10	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$
11	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.5: Cenários de matrizes de covariâncias diferentes para $p=3$.

Cenário	$\Sigma_1 \neq \Sigma_2$
12	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$
13	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$
14	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$

Inicialmente as amostras foram geradas para as situações em que a hipótese nula ($\mu_1 = \mu_2$) era verdadeira, ou seja, as amostras eram provenientes da distribuição normal bivariada com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias dada de acordo com o cenário simulado. Posteriormente, as amostras foram geradas sob a hipótese alternativa, isto é, situações em que mudanças ocorriam no vetor de médias de uma ou nas duas populações, com o objetivo de avaliar o desempenho dos testes em perceber tais mudanças.

As mudanças nas médias foram escolhidas de modo a analisar se o poder dos testes era dependente da estrutura de mudança e não somente da distância do vetor de médias populacionais sob a hipótese alternativa em relação ao vetor de médias sob a hipótese nula.

As mudanças que acontecem no vetor de médias podem ser expressas em termos das distâncias de Mahalanobis, considerando que se $\boldsymbol{\mu}_{01}$ e $\boldsymbol{\mu}_{02}$ são os vetores de médias sob a hipótese nula e $\boldsymbol{\mu}_{11}$ e $\boldsymbol{\mu}_{12}$ são os vetores de médias sob a hipótese alternativa, tem-se a distância dada por:

$$D = n(\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}_{pxp}^{-1} (\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1) \quad (3.1)$$

quando $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$, sendo $\boldsymbol{\delta}_0 = \boldsymbol{\mu}_{01} - \boldsymbol{\mu}_{02}$ e $\boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\mu}_{11} - \boldsymbol{\mu}_{12}$ e por:

$$D = (\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1)^T \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}_1}{n_1} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}_2}{n_2} \right)^{-1} (\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1) \quad (3.2)$$

quando $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$, n_1 e n_2 os tamanhos amostrais das populações 1 e 2 respectivamente.

3.2 Detalhes de Implementação dos Testes

Para o caso de matrizes de covariâncias conhecidas (iguais ou diferentes) todos os testes foram realizados ao nível de significância nominal de 5%. Para o caso de matrizes desconhecidas (iguais ou diferentes) houve a necessidade de alterações do nível de significância nominal dos testes em função da estimativa de probabilidade do erro tipo I observado para o teste de Hayter e Tsui quando esse era realizado ao nível de 5%. As alterações feitas serão melhor explicadas na Seção 4.2, página 79. Todos os testes foram implementados de acordo com as estatísticas de teste apresentadas no Capítulo 2.

3.2.1 Teste T^2 de Hotelling para Duas Populações

Os valores críticos do teste T^2 de Hotelling quando as matrizes são conhecidas só dependem do número p de variáveis. Para $p=2$ o valor obtido foi de $\chi_{0,05,2}^2 = 5,99$ e para $p=3$ foi de $\chi_{0,05,3}^2 = 7,82$. No entanto, quando as matrizes de covariâncias são desconhecidas as constantes críticas dependem dos valores dos tamanhos de amostras n_1 e n_2 e do nível de significância nominal assumido, pois, o teste de Hayter e Tsui apresentou estimativas da probabilidade do erro de tipo I superior a 5% para tamanhos amostrais pequenos. Portanto, o teste T^2 de Hotelling, neste trabalho, foi simulado usando-se como nível de significância real o valor da estimativa da probabilidade do erro tipo I apresentado para o teste Hayter e Tsui quando este foi realizado ao nível de significância nominal de 5%. Maiores detalhes podem ser vistos na seção 4.2.1 (página 79).

Nas Tabelas 3.6 a 3.9 estão apresentados os valores críticos e os níveis de significância nominal utilizados. Para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e diferentes para $p=2$ (Tabela 3.8) foram realizadas simulações apenas para os casos balanceados, devido ao fato das estimativas da probabilidade do erro tipo I resultarem em valores muito distintos de 0,05 para o teste T^2 de Hotelling. E para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e diferentes com $p=3$ (Tabela 3.9) esse comportamento foi

observado para os casos desbalanceados e também para os casos balanceados que possuíam tamanhos amostrais menores, por isso, calculou-se as constantes críticas apenas para a situação de $n_1=n_2=50$. Maiores detalhes veja na Seção 4.4 (página 114).

Tabela 3.6: Constantes críticas da distribuição F para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e iguais $p=2$ – Teste T^2 de Hotelling.

Tamanho Amostral	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Cenário 4	
	α	F	α	F	α	F	α	F
$n_1=n_2=10$	0,0744	6,436	0,0747	6,424	0,0697	6,624	0,0677	6,709
$n_1=n_2=15$	0,0646	6,296	0,0635	6,343	0,0629	6,367	0,0591	6,526
$n_1=n_2=25$	0,0572	6,215	0,0581	6,179	0,0576	6,199	0,0551	6,301
$n_1=n_2=50$	0,0530	6,119	0,0526	6,135	0,0524	6,143	0,0491	6,283
$n_1=15$ e $n_2=10$	0,0666	6,423	0,0675	6,387	0,0657	6,459	0,0626	6,589
$n_1=10$ e $n_2=15$	0,0678	6,375	0,0684	6,352	0,0658	6,455	0,0625	6,593
$n_1=25$ e $n_2=10$	0,0609	6,307	0,0615	6,283	0,0586	6,402	0,0569	6,475
$n_1=10$ e $n_2=25$	0,0616	6,279	0,0620	6,264	0,0593	6,373	0,0568	6,479

Tabela 3.7: Constantes críticas da distribuição F para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e iguais $p=3$ – Teste T^2 de Hotelling.

Tamanho Amostral	Cenário 5		Cenário 6		Cenário 7	
	α	F	α	F	α	F
$n_1=n_2=10$	0,0753	9,359	0,0743	9,409	0,0795	9,156
$n_1=n_2=15$	0,0637	8,849	0,0636	8,854	0,0687	8,614
$n_1=n_2=25$	0,0577	8,397	0,0562	8,468	0,0602	8,282
$n_1=n_2=50$	0,0514	8,200	0,0512	8,209	0,0547	8,046
$n_1=15$ e $n_2=10$	0,0688	9,010	0,0688	9,010	0,0735	8,789
$n_1=10$ e $n_2=15$	0,0689	9,005	0,0683	9,035	0,0737	8,780
$n_1=25$ e $n_2=10$	0,0619	8,660	0,0618	8,665	0,0651	8,511
$n_1=10$ e $n_2=25$	0,0605	8,728	0,0616	8,675	0,0659	8,474

Tabela 3.8: Constantes críticas da distribuição F para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e diferentes $p=2$ – Teste T^2 de Hotelling.

Tamanho Amostral	Cenário 8		Cenário 9		Cenário 10		Cenário 11	
	α	F	α	F	α	F	α	F
$n_1=n_2=10$	0,0714	6,655	0,0717	6,654	0,0689	6,658	0,0766	6,352
$n_1=n_2=15$	0,0642	6,315	0,0619	6,408	0,0603	6,475	0,0682	6,162
$n_1=n_2=25$	0,0572	6,215	0,0558	6,272	0,0550	6,305	0,0581	6,179
$n_1=n_2=50$	0,0531	6,115	0,0523	6,147	0,0509	6,206	0,0531	6,115

Tabela 3.9: Constantes críticas da distribuição F para o caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e diferentes $p=3$ - Teste T^2 de Hotelling.

Tamanho Amostral	Cenário 12		Cenário 13		Cenário 14	
	α	F	α	F	α	F
$n_1=n_2=50$	0,0500	8,267	0,0500	8,267	0,0500	8,267

3.2.2 Extensão do Teste de Hayter e Tsui para Duas Populações

Para a determinação da constante crítica do teste de Hayter e Tsui, $C_{R,\alpha}$, foi necessário a utilização do Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ descrito na Figura 2.4 com $N=50000$ (ver página 14). Para o caso de matrizes de covariâncias conhecidas (iguais ou diferentes) o algoritmo foi realizado considerando-se a matriz de correlação teórica (populacional) proveniente da matriz de covariâncias correspondente, isto é:

- a) Da matriz Σ quando $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$;
- b) Da matriz $\begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}$ quando $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$.

Para o caso de matrizes desconhecidas (iguais ou diferentes) seria necessário aplicar o Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ da Figura 2.4 para cada uma das $m=20000$ amostras que seriam geradas para avaliação do poder dos testes avaliados nesta dissertação, já que cada amostra gera seu próprio valor de $C_{R,\alpha}$, a partir da sua própria matriz de correlação amostral. Porém, em termos de tempo de simulação, isso encareceria muito o trabalho. Devido a isso, optou-se por um procedimento de estimação da constante $C_{R,\alpha}$ descrito a seguir.

Como a variabilidade dos valores amostrais de $C_{R,\alpha}$, a partir de amostras aleatórias provenientes de um mesmo modelo normal é pequena, para modelo sob a hipótese nula foram geradas inicialmente $m=100$ amostras aleatórias de acordo com os tamanhos das amostras especificados de cada população. Para cada amostra estimou-se a matriz de covariâncias correspondente e posteriormente a matriz de correlação, isto é:

- c) Da matriz S_c , conforme (2.21) quando $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$;
- d) Da matriz $\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}$ quando $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$.

A partir da matriz de correlação o valor de $C_{R;\alpha}$ foi determinado para a amostra respectiva usando o Algoritmo de Obtenção de $C_{R;\alpha}$ da Figura 2.4, com $N=50000$. Sendo assim, para cada modelo postulado sob a hipótese nula e para cada estrutura de tamanhos amostrais tem-se 100 valores de $C_{R;\alpha}$'s obtidos de matrizes de correlação provenientes de matrizes de covariâncias amostrais desconhecidas. O percentil de ordem de 0,95 da distribuição amostral dos 100 valores de $C_{R;\alpha}$ foi considerado o valor crítico ($C_{R;\alpha}$) do teste de Hayter e Tsui no caso de matrizes de covariâncias desconhecidas.

Nas Tabelas 3.10 a 3.13 estão apresentadas as constantes críticas obtidas para cada tamanho amostral e matriz de covariâncias.

Tabela 3.10: Constantes críticas do Teste Hayter e Tsui para matrizes de covariâncias iguais e conhecidas - $\alpha = 0,05$.

Tamanho Amostral	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4	Cenário 5	Cenário 6	Cenário 7
$n_1=n_2=5$	2,247	2,250	2,226	2,164	2,352	2,351	2,400
$n_1=n_2=10$	2,247	2,250	2,227	2,164	2,352	2,352	2,400
$n_1=n_2=15$	2,248	2,249	2,224	2,166	2,352	2,350	2,399
$n_1=n_2=25$	2,248	2,249	2,225	2,164	2,349	2,351	2,400
$n_1=n_2=50$	2,248	2,248	2,225	2,164	2,351	2,350	2,398
$n_1=5$ e $n_2=10$	2,248	2,247	2,225	2,165	2,351	2,352	2,398
$n_1=10$ e $n_2=5$	2,252	2,250	2,223	2,165	2,351	2,352	2,398
$n_1=15$ e $n_2=5$	2,249	2,246	2,225	2,165	2,350	2,351	2,398
$n_1=5$ e $n_2=25$	2,249	2,247	2,222	2,163	2,351	2,351	2,400

Tabela 3.11: Constantes críticas do Teste Hayter e Tsui para matrizes de covariâncias diferentes e conhecidas - $\alpha = 0,05$.

Tamanho Amostral	Cenário 8	Cenário 9	Cenário 10	Cenário 11	Cenário 12	Cenário 13	Cenário 14
$n_1=n_2=5$	2,249	2,242	2,232	2,202	2,367	2,388	2,390
$n_1=n_2=10$	2,251	2,244	2,233	2,204	2,365	2,387	2,393
$n_1=n_2=15$	2,249	2,244	2,235	2,205	2,366	2,389	2,389
$n_1=n_2=25$	2,249	2,245	2,233	2,205	2,366	2,389	2,389
$n_1=n_2=50$	2,249	2,245	2,233	2,220	2,366	2,390	2,390
$n_1=5$ e $n_2=10$	2,246	2,247	2,243	2,211	2,372	2,396	2,393
$n_1=10$ e $n_2=5$	2,249	2,237	2,220	2,192	2,360	2,380	2,382
$n_1=15$ e $n_2=5$	2,245	2,236	2,210	2,18	2,357	2,375	2,377
$n_1=5$ e $n_2=25$	2,247	2,245	2,247	2,188	2,388	2,399	2,399

Tabela 3.12: Constantes críticas do Teste Hayter e Tsui para matrizes de covariâncias iguais e desconhecidas - $\alpha = 0,05$.

Tamanho Amostral	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4	Cenário 5	Cenário 6	Cenário 7
$n_1=n_2=10$	2,245	2,247	2,240	2,194	2,373	2,369	2,396
$n_1=n_2=15$	2,247	2,247	2,235	2,189	2,370	2,369	2,397
$n_1=n_2=25$	2,248	2,247	2,232	2,177	2,366	2,362	2,396
$n_1=n_2=50$	2,245	2,245	2,229	2,187	2,361	2,354	2,398
$n_1=15$ e $n_2=10$	2,249	2,245	2,234	2,202	2,375	2,376	2,398
$n_1=10$ e $n_2=15$	2,248	2,248	2,234	2,192	2,366	2,363	2,393
$n_1=25$ e $n_2=10$	2,245	2,246	2,235	2,185	2,362	2,366	2,397
$n_1=10$ e $n_2=25$	2,249	2,247	2,231	2,188	2,363	2,365	2,398

Tabela 3.13: Constantes críticas do Teste Hayter e Tsui para matrizes de covariâncias diferentes e desconhecidas - $\alpha = 0,05$.

Tamanho Amostral	Cenário 8	Cenário 9	Cenário 10	Cenário 11	Cenário 12	Cenário 13	Cenário 14
$n_1=n_2=10$	2,244	2,245	2,241	2,223	-	-	-
$n_1=n_2=15$	2,248	2,244	2,240	2,224	-	-	-
$n_1=n_2=25$	2,248	2,244	2,235	2,223	-	-	-
$n_1=n_2=50$	2,248	2,242	2,234	2,209	2,374	2,389	2,361

3.2.2.1 Exemplo de obtenção do $C_{R,\alpha}$ - Matrizes de Covariâncias Conhecidas

Como ilustração apresenta-se como o valor de $C_{R,\alpha}$ foi obtido para o Cenário 1, $n_1=n_2=10$, da Tabela 3.10 caso em que as matrizes de covariâncias são iguais a $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e conhecidas.

O primeiro passo para a obtenção de $C_{R,\alpha}$ é obter a matriz de correlação teórica (populacional) a partir da matriz de covariâncias conhecida, ou seja, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Uma vez obtida a matriz de correlação teórica P , segue-se as recomendações do Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ da Figura 2.4, página 14,

com $N=50000$. A distribuição da estatística M obtida é apresentada na Figura 3.1 com o valor de $C_{R,\alpha}$ obtido para $\alpha = 0,05$.

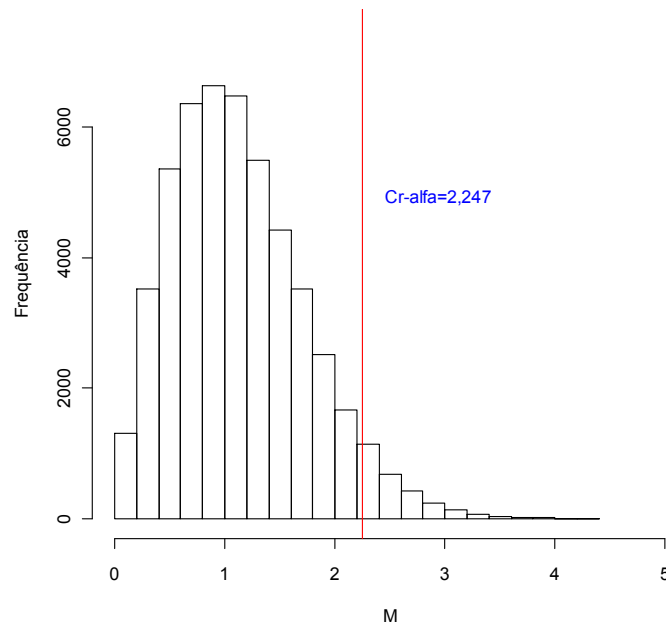


Figura 3.1: Distribuição simulada da estatística M – Matrizes Iguais e Conhecidas, e valor de $C_{R,\alpha}$ para $\alpha = 0,05$, $n_1=n_2=10$.

A seguir apresenta-se um exemplo para a situação em que as matrizes são diferentes e conhecidas. O Cenário 14, com $n_1=n_2=50$, da Tabela 3.11 foi usado como ilustração. As matrizes de covariâncias diferentes do cenário 14 são as seguintes:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}.$$

O primeiro passo para a obtenção de $C_{R,\alpha}$ é obter a matriz de correlação teórica a partir das matrizes de covariâncias diferentes e conhecidas. Mas, antes, é preciso realizar a seguinte operação quando $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$:

$$\left(\frac{\Sigma_1}{n_1} + \frac{\Sigma_2}{n_2} \right) = \begin{bmatrix} 0,100 & 0,070 & 0,126 \\ 0,070 & 0,200 & 0,078 \\ 0,126 & 0,078 & 0,340 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de correlação teórica (populacional) P será dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0,495 & 0,683 \\ 0,495 & 1 & 0,299 \\ 0,683 & 0,299 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez obtida a matriz de correlação teórica P , segue-se as recomendações do Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ da Figura 2.4 com $N=50000$, obtendo-se a distribuição empírica da estatística M mostrada na Figura 3.2 com o respectivo valor de $C_{R,\alpha}$ para $\alpha=0,05$.

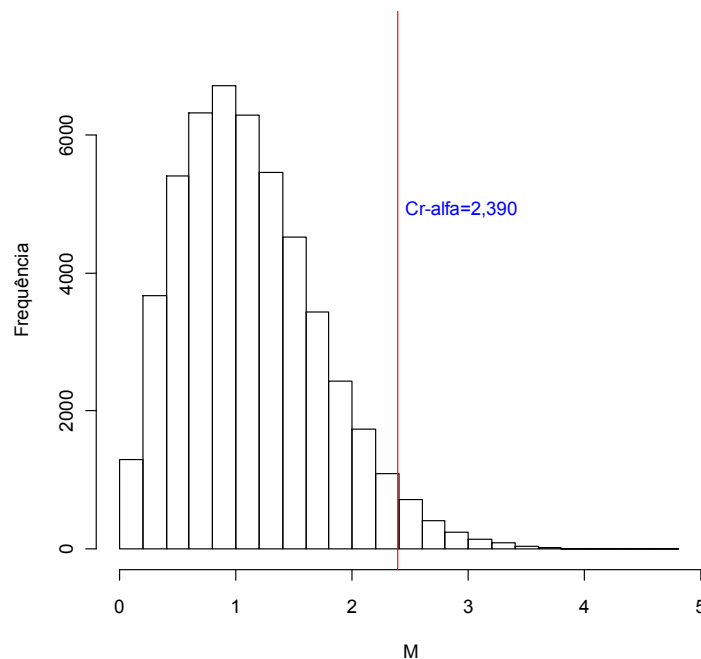


Figura 3.2: Distribuição simulada da estatística M – Matrizes Diferentes e Conhecidas, e o valor de $C_{R,\alpha}$ para $\alpha = 0,05$, $n_1=n_2=50$.

3.2.2.2 Exemplo de obtenção do $C_{R,\alpha}$ - Matrizes de Covariâncias Desconhecidas

Como ilustração apresenta-se como o valor de $C_{R,\alpha}$ foi obtido para o Cenário 1, $n_1=n_2=10$, da Tabela 3.12 caso em que as matrizes de covariâncias são iguais a $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e desconhecidas.

O primeiro passo para a obtenção de $C_{R,\alpha}$ é obter as matrizes de covariâncias amostrais S_c para cada uma das 100 simulações. Daí, obtém-se a matriz de correlação amostral a partir de cada uma das 100 matrizes de covariâncias amostrais S_c , ou seja, R_c . Uma vez obtida a matriz de correlação amostral R_c para cada uma das 100 matrizes de covariâncias amostrais S_c , segue-se as recomendações do Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ da Figura 2.4, página 14, com $N=50000$. O percentil de ordem 0,95 dos 100 $C_{R,\alpha}$ obtidos de cada uma das amostras simuladas foi considerado o $C_{R,\alpha}$ no caso de matrizes de covariâncias desconhecidas.

A distribuição dos 100 $C_{R,\alpha}$'s está apresentado na Figura 3.3 com o valor de percentil de ordem 0,95 (2,245) para $\alpha = 0,05$.

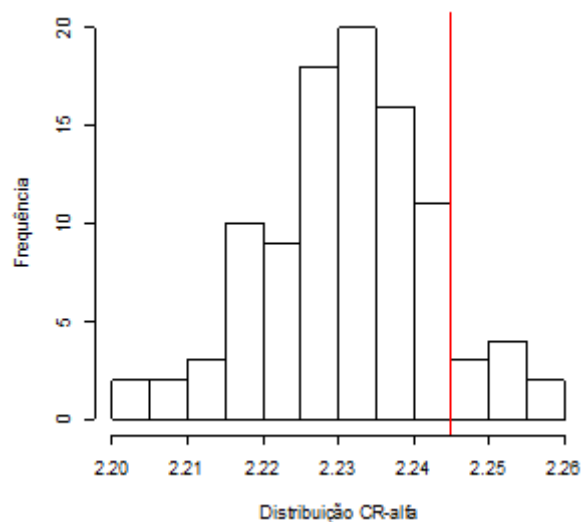


Figura 3.3: Distribuição dos 100 valores de $C_{R,\alpha}$ - Matrizes Iguais e Desconhecidas e o valor de $C_{R,\alpha}$ para $\alpha = 0,05$, $n_1=n_2=10$. Média=2,231; Mediana=2,233 e desvio padrão=0,0081.

A seguir apresenta-se um exemplo para a situação em que as matrizes são diferentes e desconhecidas. O Cenário 14, com $n_1=n_2=50$, da Tabela 3.11 foi usado como ilustração. As matrizes de covariâncias diferentes do cenário 14 são as seguintes:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}.$$

O primeiro passo para a obtenção de $C_{R,\alpha}$ é obter as matrizes de covariâncias amostrais para cada uma das populações em cada uma das 100 simulações. Daí, obtém-se a matriz de correlação amostral a partir de cada uma das 100 matrizes de covariâncias amostrais $\left(\frac{S_1}{n_1} + \frac{S_2}{n_2} \right)$, ou seja, R_c .

Uma vez obtida a matriz de correlação amostral R_c para cada uma das 100 matrizes de covariâncias amostrais, segue-se as recomendações do Algoritmo de Obtenção de $C_{R,\alpha}$ da Figura 2.4, página 14, com $N=50000$. O percentil de ordem 0,95 dos 100 $C_{R,\alpha}$ obtidos de cada uma das amostras simuladas foi considerado o $C_{R,\alpha}$ neste caso de matrizes de covariâncias desconhecidas e diferentes.

A distribuição dos 100 $C_{R,\alpha}$'s está apresentado na Figura 3.4 com o valor de percentil de ordem 0,95 (2,361), para $\alpha = 0,05$.

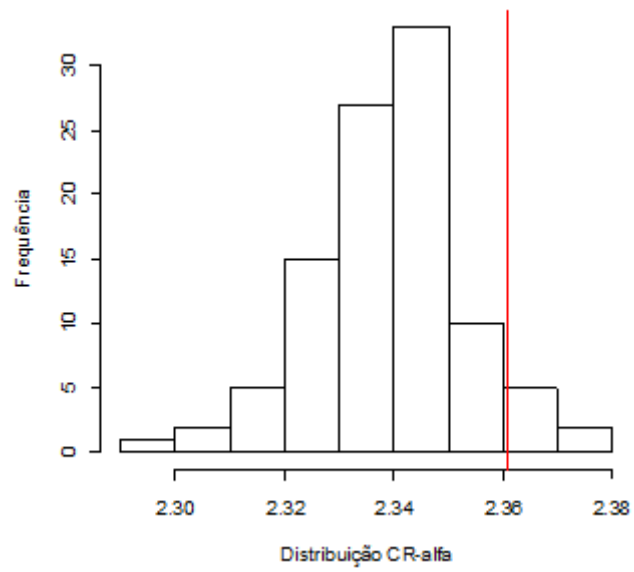


Figura 3.4: Distribuição dos 100 valores de $C_{R,\alpha}$ - Matrizes Diferentes e Desconhecidas e o valor de $C_{R,\alpha}$ para $\alpha = 0,05$, $n_1=n_2=50$. Média=2,339; Mediana=2,338 e desvio padrão=0,0155.

3.2.3 Testes de Combinação de p-valores de Tippett e Fisher

Nesta dissertação os 2 p-valores usados em nossas simulações nos testes de combinação de p-valores de Tippett e Fisher não eram independentes, pois foram calculados com base na mesma amostra simulada. A violação da suposição de independência dos p-valores faz com que o nível de significância desses testes não corresponda ao valor de referência de 0,05, conforme mostrado na Tabela 3.14 para a situação de matrizes de covariâncias iguais e conhecidas e $\mu_1 = \mu_2 = 0$. No caso de teste de Tippett a estimativa da probabilidade do erro do tipo I é menor que 0,05 enquanto para o teste de Fisher o valor é maior.

Tabela 3.14: Estimativa da Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes Iguais e Conhecidas.

Matriz de Covariâncias (Cenário)	Distância de Mahalanobis	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	Tippett	Fisher
		n ₁	n ₂				
$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\rho = 0$	0	5	5	0,0500	0,0501	0,0320	0,0934
		10	10	0,0493	0,0511	0,0321	0,0927
		15	15	0,0504	0,0500	0,0316	0,0935
		25	25	0,0494	0,0514	0,0320	0,0933
		50	50	0,0504	0,0497	0,0320	0,0935
		5	10	0,0496	0,0483	0,0313	0,0917
		10	5	0,0491	0,0483	0,0316	0,0912
		15	5	0,0509	0,0492	0,0322	0,0922
		5	25	0,0491	0,0513	0,0317	0,0919
$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\rho = 0$	0	5	5	0,0500	0,0509	0,0327	0,0924
		10	10	0,0503	0,0481	0,0316	0,0913
		15	15	0,0500	0,0493	0,0319	0,0930
		25	25	0,0509	0,0493	0,0320	0,0926
		50	50	0,0508	0,0498	0,0324	0,0930
		5	10	0,0511	0,0500	0,0316	0,0931
		10	5	0,0497	0,0508	0,0324	0,0937
		15	5	0,0500	0,0492	0,0322	0,0921
		5	25	0,0505	0,0507	0,0320	0,0930
$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ $\rho = 0,5$	0	5	5	0,0504	0,0506	0,0330	0,0918
		10	10	0,0508	0,0513	0,0343	0,0929
		15	15	0,0508	0,0489	0,0333	0,0913
		25	25	0,0495	0,0480	0,0308	0,0903
		50	50	0,0500	0,0497	0,0324	0,0914
		5	10	0,0493	0,0493	0,0327	0,0906
		10	5	0,0507	0,0503	0,0328	0,0912
		15	5	0,0508	0,0506	0,0336	0,0921
		5	25	0,0502	0,0509	0,0330	0,0917
$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$ $\rho = 0,8$	0	5	5	0,0494	0,0507	0,0358	0,0882
		10	10	0,0504	0,0513	0,0367	0,0898
		15	15	0,0504	0,0497	0,0350	0,0884
		25	25	0,0496	0,0507	0,0361	0,0881
		50	50	0,0494	0,0496	0,0360	0,0879
		5	10	0,0504	0,0489	0,0352	0,0883
		10	5	0,0507	0,0490	0,0360	0,0889
		15	5	0,0510	0,0498	0,0362	0,0889
		5	25	0,0501	0,0519	0,0360	0,0895

Buscando uma solução para esse problema e, assim, viabilizar a comparação desses testes com os demais através de um nível de significância

comum (0,05), efetuou-se uma correção na determinação das constantes críticas desses 2 testes de modo a manter-se o nível de significância nominal em torno de 5%. Essa correção foi feita com base na geração, via Monte Carlo, da distribuição exata das estatísticas de teste de Tippett e Fisher de acordo com o algoritmo mostrado na Figura 3.5:

- 1- Gerou-se 50000 amostras da distribuição normal multivariada para cada n_1 e n_2 fixo e matrizes de covariâncias fixas.
- 2- Para cada amostra, realizou-se os testes de T^2 de Hotelling, Hayter e Tsui e o teste de Combinação de p-valores Tippett e Fisher, a um nível de significância $\alpha = 0,05$.
- 3- Assim: a) obtém-se da distribuição empírica do teste de combinação de p-valores de Tippett o percentil de ordem 0,05, que indicará a constante que deixa 5% dos valores da distribuição abaixo dela, pois o teste do Tippett é baseado no mínimo de 2 p-valores; b) o mesmo é feito para a distribuição exata do teste de combinação de p-valores de Fisher, porém buscando a constante que corresponda ao percentil de 0,95, que deixa 5% dos valores da distribuição acima dela.
- 4- Repete-se o procedimento anterior 5 vezes. Ao final deste passo, calcula-se a média das constantes das distribuições exatas do teste da combinação de p-valores Tippett e Fisher.
- 5- Estes 2 valores obtidos no passo anterior são considerados como as constantes críticas do teste do Tippett e Fisher. A partir dessas constantes é feito a correspondência com a distribuição do mínimo de 2 distribuições uniformes, $(P(Z \leq c) = 1 - (1 - c)^2)$, usada no teste de Tippett original, e com distribuição qui-quadrado usado no teste de Fisher original.
- 6- Estes valores assim obtidos são os novos valores que serão usados nas simulações como sendo os respectivos níveis de significância do Tippett e Fisher, ao invés de usar 0,05.

Figura 3.5: Correção das constantes da combinação de p-valores Tippett e Fisher.

Como um exemplo considere o Cenário 1, onde $n_1=n_2=5$ e as matrizes de covariâncias são conhecidas e iguais, sendo $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. As distribuições empíricas das estatísticas de teste de Tippett e Fisher estão apresentadas nas Figuras 3.6 e 3.7 e foram obtidas usando-se $N=50000$ amostras.

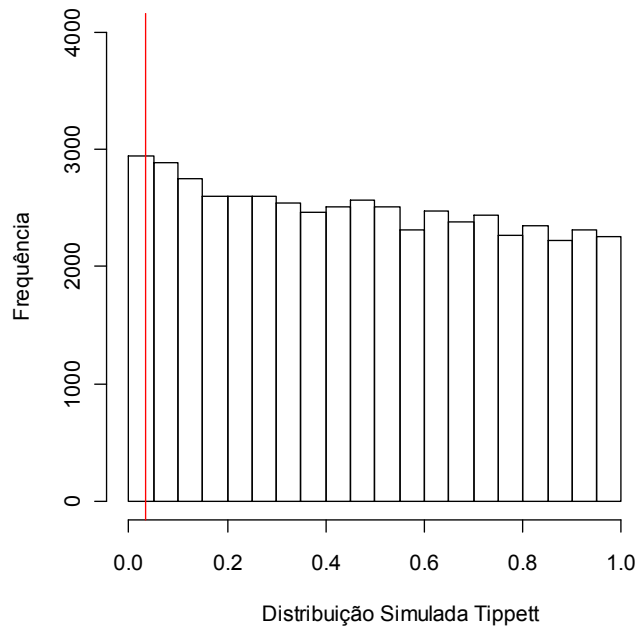


Figura 3.6: Distribuição simulada e constante crítica corrigida (0,0394) da estatística do teste de Tippett – Matrizes Iguais e conhecidas, $n_1=n_2=5$.

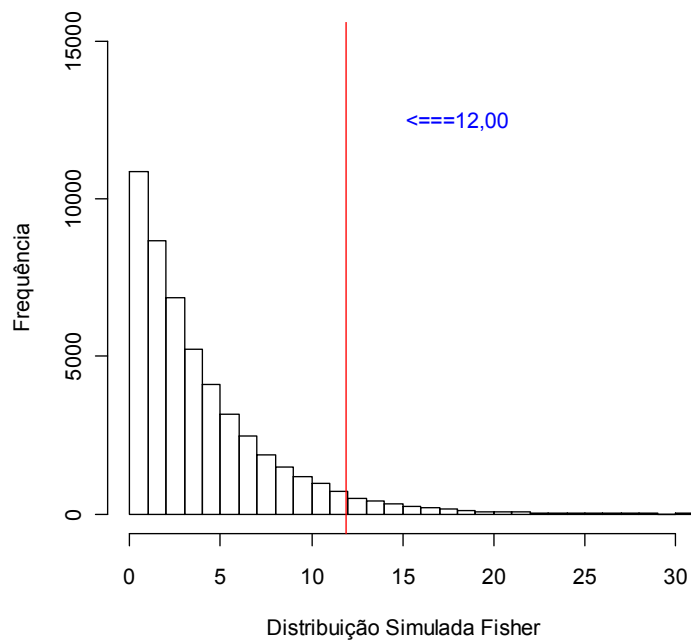


Figura 3.7: Distribuição simulada e constante crítica corrigida (12,0) da estatística do teste de Fisher – Matrizes Iguais e conhecidas, $n_1=n_2=5$.

Como mostrado nas Figuras 3.6 e 3.7, as estimativas para os testes de Tippett e Fisher foram, respectivamente, iguais a 0,0394 e 12,0.

A partir dessas constantes é feita a correspondência com a distribuição do mínimo de 2 uniformes, $(P(Z \leq c) = 1 - (1 - c)^2)$, usada no teste de Tippett original, e com a distribuição qui-quadrado usado no teste de Fisher, como segue:

- a) **Tippett:** de posse do valor da constante crítica $c=0,0394$, realiza-se o seguinte cálculo:

$$1 - (1 - c)^2 = 1 - (1 - 0,0394)^2 = 0,0772$$

Esse é o nível de significância nominal a ser utilizado para o teste de Tippett quando se utiliza a distribuição de mínimo de 2 distribuições uniformes independentes como referência.

- b) **Fisher:** de posse do valor da constante $c=12,0$, deve-se acessar a distribuição qui-quadrado com $2m$ graus de liberdade (que neste exemplo é 4) e assim obter a probabilidade de se observar valores acima desta constante crítica, isto é

$$P[\chi_4^2 \geq 12] = 0,0174$$

Esse é o nível de significância nominal a ser utilizado para o teste de Fisher (como correspondente ao nível de 0,05) quando se utiliza a distribuição qui-quadrado como referência considerando-se os 2 p-valores como sendo independentes.

Na Tabela 3.15 apresentamos os resultados das correções de combinação de p-valores para o caso de matrizes iguais e conhecidas. O mesmo procedimento para correção das constantes críticas dos 2 testes foi utilizado para o caso de matrizes iguais e desconhecidas e assim como para matrizes diferentes conhecidas e desconhecidas, porém omitimos a apresentação dos mesmos (resultado não apresentado na dissertação).

Tabela 3.15: Constantes da Correção da combinação de p-valores de Tippett e Fisher.

Matriz de Covariâncias	n_1 e n_2	DE.C	DE.F	N.Sig. DE.C	N.Sig. DE.F	Matriz de Covariâncias	n_1 e n_2	DE.C	DE.F	N.Sig. DE.C	N.Sig. DE.F
$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	5 e 5	0,0394	12,00	0,0772	0,0174	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	5 e 5	0,0403	11,94	0,0790	0,0178
	10 e 10	0,0405	11,95	0,0793	0,0178		10 e 10	0,0408	11,93	0,0799	0,0179
	15 e 15	0,0408	11,90	0,0799	0,0181		15 e 15	0,0406	11,91	0,0795	0,0180
	25 e 25	0,0401	11,94	0,0787	0,0178		25 e 25	0,0401	11,96	0,0786	0,0177
	50 e 50	0,0399	11,96	0,0781	0,0177		50 e 50	0,0416	11,85	0,0814	0,0185
	5 e 10	0,0414	11,86	0,0811	0,0184		5 e 10	0,0408	11,93	0,0798	0,0179
	10 e 5	0,0402	11,93	0,0787	0,0179		10 e 5	0,0409	11,89	0,0801	0,0182
	15 e 5	0,0404	11,93	0,0791	0,0179		15 e 5	0,0403	11,91	0,0791	0,0180
	5 e 25	0,0386	12,06	0,0758	0,0169		5 e 25	0,0403	11,91	0,0791	0,0180
$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	5 e 5	0,0387	11,86	0,0759	0,0184	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	5 e 5	0,0357	11,67	0,0701	0,0200
	10 e 10	0,0399	11,78	0,0782	0,0191		10 e 10	0,0369	11,59	0,0724	0,0207
	15 e 15	0,0394	11,80	0,0773	0,0189		15 e 15	0,0362	11,67	0,0711	0,0200
	25 e 25	0,0393	11,79	0,0772	0,0190		25 e 25	0,0362	11,65	0,0710	0,0202
	50 e 50	0,0399	11,76	0,0783	0,0192		50 e 50	0,0367	11,57	0,0721	0,0209
	5 e 10	0,0391	11,82	0,0766	0,0187		5 e 10	0,0362	11,63	0,0712	0,0203
	10 e 5	0,0396	11,79	0,0777	0,0190		10 e 5	0,0367	11,62	0,0720	0,0204
	15 e 5	0,0385	11,87	0,0754	0,0184		15 e 5	0,0360	11,66	0,0707	0,0201
	5 e 25	0,0380	11,90	0,0746	0,0181		5 e 25	0,0354	11,68	0,0727	0,0199

DE.C= Constante que deixa 5% dos valores do mínimo de 2 p-valores relacionados aos testes de T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui abaixo dela, considerando-se a distribuição exata de p-valor; **DE.F**= constante que deixa 5% dos valores da distribuição exata do teste Fisher acima dela considerando-se a distribuição exata de p-valor; **N.Sig.DE.C**= Área da distribuição do mínimo de 2 p-valores independentes abaixo da constante obtida em DE.C – novo alfa para Tippett; e **N.Sig.DE.F**= Área da distribuição qui-quadrado com 4 graus de liberdade acima da constante obtida em DE.C – novo alfa para Fisher.

Ao usarmos os valores de **N.Sig.DE.C** e **N.Sig.DE.F** como os novos níveis de significâncias teóricos para os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher, as estimativas simuladas do nível de significância destes testes ficaram bem próximos de 0,05, como se esperava. Os resultados das estimativas da probabilidade do erro do tipo I obtidos usando-se essas correções para os cenários da Tabela 3.14 encontram-se na Tabela 4.1, na página 65. Como pode ser observado, as estimativas para Tippett e Fisher ficaram próximas de 0,05.

Assim, nesta dissertação, em todas as situações simuladas os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher foram implementados com as correções discutidas na Figura 3.5 de modo a ser possível comparar os resultados de poder dos testes com os obtidos para T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui separadamente.

Capítulo 4

Avaliação dos Resultados

Nesta seção serão apresentados alguns resultados de estimativas médias da probabilidade do erro tipo I e do poder dos testes obtidos nas simulações realizadas e comentar-se-á o comportamento de cada teste em cada cenário estudado. Primeiro será apresentado os resultados da situação em que as matrizes de covariâncias são iguais para caso de matrizes conhecidas (Seção 4.1) e desconhecidas (Seção 4.2) e a situação em que as matrizes de covariâncias são diferentes, também para matrizes conhecidas (Seção 4.3) e desconhecidas (Seção 4.4). Por fim, será apresentado um resumo geral dos resultados (Seção 4.5).

Como mencionamos no Capítulo 2 (seção 2.4.1.1) para o teste T^2 de Hotelling é possível determinar o poder analiticamente ou seja, sem a necessidade de simulação Monte Carlo. Deste modo, apresentou-se no Anexo B o poder teórico do teste T^2 de Hotelling, obtido via expressão matemática, para as situações em que as matrizes de covariâncias eram iguais conhecidas e desconhecidas. Objetivou-se com isso validar os resultados obtidos via simulação por esta dissertação. Em todas as situações apresentadas verificou-se que os poderes simulados obtidos nesta dissertação são bem próximos dos valores teóricos obtidos via expressão matemática. Isso valida os resultados obtidos nesta dissertação no que diz respeito ao teste T^2 de Hotelling.

Para os testes de Hayter e Tsui, Tippett e Fisher não se tem uma expressão matemática para o cálculo do poder do teste, sendo necessário a implementação de simulação Monte Carlo.

O poder do teste foi avaliado em várias situações de mudanças nos vetores de médias e de distâncias de Mahalanobis entre os vetores de médias postuladas em H_0 e H_a , porém no texto principal desta dissertação são apresentados os resultados para $p=2$ variáveis do caso de distâncias de Mahalanobis entre os vetores δ_0 e δ_1 igual a 0,25, 0,5 e 1, calculados como:

$$d = (\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1) \text{ no caso em que } \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$$

$$d = (\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1)^T (\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)^{-1} (\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1) \text{ no caso em que } \boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2.$$

As estimativas para outras mudanças nos vetores de médias se encontram no Anexo B.

4.1 Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecida

Os primeiros cenários avaliados são aqueles bivariados e trivariados em que as matrizes de covariâncias são iguais e conhecidas (seções 4.1.1 e 4.1.2).

4.1.1 Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas: Caso Bivariado

Na Tabela 4.1 apresenta-se os resultados das estimativas médias obtidas da probabilidade do erro do tipo I para $p=2$ quando as matrizes de covariâncias são iguais e conhecidas.

Tanto para o teste T^2 de Hotelling quanto para o Hayter e Tsui as estimativas são bem próximas do valor do nível de significância nominal de 0,05 usado para a construção da região de rejeição da hipótese nula em ambos os testes, em todos os cenários considerados. O mesmo ocorre para os testes de combinação de p -valores de Fisher e Tippett.

As estimativas médias da probabilidade do erro tipo I para a combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui (**T2 & HT Comb**) são maiores que 0,05 (valores próximos a 0,06). O interessante da combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui é que ambos foram feitos ao nível de significância de 5% e a estimativa da probabilidade do erro tipo I não ficou inflacionada da forma como ocorre para dois testes independentes (em geral próximo a 0,10). Esse é um ponto positivo para esse novo teste combinado. Na Tabela 4.1 é apresentada a proporção de concordância entre os testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui (**Prop Concordância**) no que se refere a decisão sobre a rejeição ou não da hipótese nula.

Tabela 4.1: Estimativas médias da Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes Iguais e Conhecidas - p=2.

Matrizes de Covariâncias Conhecidas (Cenário)	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
	n ₁	n ₂						
(1) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	5	5	0,05021	0,05078	0,06175	0,04920	0,04960	0,9775
	10	10	0,04915	0,04917	0,06019	0,04870	0,04855	0,9779
	15	15	0,04965	0,05218	0,06270	0,05160	0,05132	0,9764
	25	25	0,04943	0,05063	0,06128	0,04942	0,04965	0,9775
	50	50	0,04952	0,04951	0,06071	0,04862	0,04922	0,9776
	5	10	0,04990	0,04876	0,06026	0,05043	0,05012	0,9781
	10	5	0,04991	0,05192	0,06232	0,05026	0,05076	0,9772
	15	5	0,04952	0,04919	0,06028	0,04861	0,04899	0,9782
	5	25	0,04977	0,04975	0,06052	0,04751	0,04822	0,9785
(2) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	5	5	0,05021	0,05078	0,06175	0,05012	0,05041	0,9775
	10	10	0,04915	0,04917	0,06019	0,04901	0,04879	0,9779
	15	15	0,04965	0,05218	0,06270	0,05135	0,05092	0,9764
	25	25	0,04943	0,05063	0,06128	0,04927	0,04937	0,9775
	50	50	0,04952	0,04951	0,06071	0,05075	0,05101	0,9776
	5	10	0,04990	0,04876	0,06026	0,04968	0,04922	0,9781
	10	5	0,04991	0,05192	0,06232	0,05126	0,05121	0,9772
	15	5	0,04952	0,04919	0,06028	0,04859	0,04921	0,9782
	5	25	0,04977	0,04975	0,06052	0,04936	0,04986	0,9785
(3) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	5	5	0,05021	0,05018	0,06360	0,05068	0,04957	0,9732
	10	10	0,04915	0,04849	0,06212	0,04999	0,04918	0,9734
	15	15	0,04965	0,05230	0,06524	0,05185	0,05103	0,9715
	25	25	0,04943	0,05087	0,06390	0,05075	0,05034	0,9725
	50	50	0,04952	0,04965	0,06311	0,05026	0,04994	0,9730
	5	10	0,04990	0,04922	0,06258	0,04929	0,04943	0,9740
	10	5	0,04991	0,04987	0,06295	0,05081	0,05058	0,9739
	15	5	0,04952	0,04932	0,06241	0,04825	0,04837	0,9740
	5	25	0,04977	0,05027	0,06340	0,04845	0,04882	0,9732
(4) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	5	5	0,05021	0,05028	0,06889	0,04961	0,05017	0,9627
	10	10	0,04915	0,04820	0,06676	0,04963	0,04920	0,9638
	15	15	0,04965	0,05022	0,06871	0,05137	0,05015	0,9625
	25	25	0,04943	0,05018	0,06835	0,05038	0,04957	0,9629
	50	50	0,04952	0,04902	0,06755	0,04936	0,04979	0,9635
	5	10	0,04990	0,04926	0,06762	0,04931	0,04956	0,9639
	10	5	0,04991	0,04892	0,06696	0,04977	0,04978	0,9649
	15	5	0,04952	0,04784	0,06635	0,04913	0,04911	0,9647
	5	25	0,04977	0,05028	0,06831	0,05125	0,04943	0,9634

* A última coluna apresenta a proporção de concordância entre os testes T² de Hotelling e Hayter e Tsui no que se refere a rejeição ou não rejeição da hipótese nula.

A partir da Tabela 4.2 inicia-se a análise dos resultados de poder dos testes obtidos via simulação, como foi proposto para essa dissertação. O que se pode verificar das Tabelas 4.2 a 4.5 é que as estimativas do poder do teste de Hayter e Tsui se aproximam bastante das estimativas obtidas para o teste T^2 de Hotelling, sendo em alguns casos inferiores a este, porém bem próximos. Há alguns casos em que o poder do teste de Hayter e Tsui supera o poder do teste T^2 de Hotelling, mostrando que ambos competem entre si e que nenhum deles é uniformemente mais poderoso.

Para a situação em que a mudança do vetor de médias ocorre em apenas uma das variáveis de uma única população (casos 6 e 7 da Tabela 4.2 e casos 1, 6 e 7 da Tabela 4.3) o que se constata é que a estimativa do poder do teste do Hayter e Tsui é superior ao do T^2 de Hotelling embora com valores próximos (valores assinalados em negrito nas Tabelas).

Quando a correlação entre as variáveis é igual a 0,5 (Tabela 4.4) o teste de Hayter e Tsui foi mais poderoso que o T^2 de Hotelling para os casos simulados em que a distância de Mahalanobis (d) entre os vetores de médias postuladas em H_0 e H_a era igual a 0,5 (casos 1 a 5) para vários tamanhos de amostras n_1 e n_2 . O teste T^2 de Hotelling foi superior ao Hayter e Tsui nos casos em que $d=0,25$ e 1 (casos 6 e 7).

Para a situação em que a correlação entre as variáveis é 0,8 (Tabela 4.5) o teste T^2 de Hotelling foi mais poderoso em quase todos os casos, com exceção dos casos 3 e 6. Ressalta-se que há uma discrepância maior entre as estimativas de poder do T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui na situação de correlação igual a 0,8.

O desbalanceamento dos tamanhos amostrais (n_1 e n_2) parece exercer influência nos resultados de poder dos testes para todos os casos de matrizes de covariâncias iguais analisados. Basta verificar, por exemplo, para o caso 1 de mudança dos vetores de médias da Tabela 4.2, no caso balanceado $n_1=n_2=10$, onde o valor de $n=n_1+n_2=20$, as estimativas do poder (0,2733 para T^2 e 0,2569 para Hayter e Tsui) foram superiores às estimativas do caso desbalanceado de mesmo tamanho $n=20$, por exemplo $n_1=15$ e $n_2=5$ (0,2120 para T^2 e 0,2014 para Hayter e Tsui). Esse fato evidencia a perda nas estimativas de poder do teste causadas pelo desbalanceamento das amostras.

Para os casos analisados nas Tabelas 4.2 e 4.3, o que se pode concluir com relação aos testes propostos por essa dissertação é que eles apresentam estimativas de poder semelhantes, equiparáveis ao usual T^2 de Hotelling. Já para a Tabela 4.4 em alguns casos os testes propostos por esta dissertação chegam a ser mais poderosos que o teste T^2 de Hotelling.

É fácil observar que o teste T^2 de Hotelling não tem seu poder influenciado pela direção de mudança das médias (na hipótese alternativa) mas apenas pela distância de Mahalanobis (d) entre os vetores de médias postuladas em H_0 e H_a , como é esperado teoricamente. Para um mesmo tamanho de amostra (n_1 e n_2) o teste T^2 de Hotelling apresenta estimativa de poder semelhante em todos os casos nos quais as distâncias entre os vetores de médias é a mesma. Já o teste de Hayter e Tsui é um pouco influenciado pela direção de mudança dos vetores de médias e não apenas pela distância entre esses vetores. Quando a distância entre os vetores de médias postuladas em H_0 e H_a aumenta, a estimativa do poder dos testes Hayter e Tsui, Fisher e Tippett também tende a aumentar, como esperado.

O teste combinado T^2 e HT (comb) sempre apresentou estimativas de poder maior que os dois testes separadamente em todos os cenários estudados. No entanto, é importante ressaltar que esse teste apresenta estimativa de probabilidade do erro tipo I em torno de 0,06 ao invés de 0,05 como nos outros testes e, logo já se espera que o poder seja inflacionado devido a esse fato.

Tabela 4.2: Estimativa do Poder dos Testes - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 1.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,322 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1554	0,1471	0,1753	0,1493	0,1503	0,9518
		10	10	0,2733	0,2569	0,2990	0,2694	0,2675	0,9321
		15	15	0,3935	0,3810	0,4280	0,3964	0,3935	0,9185
		25	25	0,6016	0,5793	0,6323	0,5984	0,5967	0,9162
		50	50	0,8954	0,8826	0,9100	0,8939	0,8935	0,9580
		5	10	0,1930	0,1853	0,2177	0,1952	0,1936	0,9430
		10	5	0,1941	0,1902	0,2212	0,1934	0,1932	0,9420
		15	5	0,2120	0,2014	0,2366	0,2082	0,2084	0,9402
		5	25	0,2334	0,2246	0,2604	0,2269	0,2270	0,9371
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,322 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1555	0,1493	0,1768	0,1510	0,1515	0,9512
		10	10	0,2722	0,2659	0,3040	0,2734	0,2710	0,9301
		15	15	0,3905	0,3719	0,4214	0,3876	0,3866	0,9195
		25	25	0,6014	0,5795	0,6317	0,5972	0,5964	0,9176
		50	50	0,8956	0,8780	0,9078	0,8917	0,8912	0,9580
		5	10	0,1915	0,1884	0,2183	0,1951	0,1929	0,9432
		10	5	0,1939	0,1866	0,2188	0,1923	0,1917	0,9430
		15	5	0,2135	0,2072	0,2404	0,2122	0,2120	0,9400
		5	25	0,2333	0,2247	0,2605	0,2264	0,2269	0,9369
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,822 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1548	0,1472	0,1750	0,1490	0,1506	0,9520
		10	10	0,2732	0,2600	0,3007	0,2713	0,2690	0,9317
		15	15	0,3908	0,3779	0,4246	0,3917	0,3899	0,9195
		25	25	0,6035	0,5845	0,6358	0,6014	0,5997	0,9164
		50	50	0,8958	0,8811	0,9098	0,8934	0,8929	0,9575
		5	10	0,1936	0,1845	0,2171	0,1953	0,1938	0,9440
		10	5	0,1939	0,1858	0,2177	0,1907	0,1914	0,9442
		15	5	0,2155	0,2061	0,2411	0,2134	0,2128	0,9395
		5	25	0,2323	0,2210	0,2578	0,2255	0,2251	0,9376
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,655 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1553	0,1488	0,1760	0,1513	0,1515	0,9521
		10	10	0,2721	0,2626	0,3020	0,2707	0,2696	0,9306
		15	15	0,3934	0,3802	0,4269	0,3924	0,3912	0,9197
		25	25	0,6034	0,5822	0,6349	0,5991	0,5981	0,9157
		50	50	0,8959	0,8839	0,9110	0,8946	0,8940	0,9578
		5	10	0,1947	0,1847	0,2179	0,1955	0,1941	0,9436
		10	5	0,1934	0,1889	0,2197	0,1938	0,1930	0,9430
		15	5	0,2140	0,2076	0,2409	0,2144	0,2129	0,9398
		5	25	0,2349	0,2235	0,2607	0,2252	0,2265	0,9370
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,63 \\ -0,63 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1550	0,1490	0,1768	0,1514	0,1513	0,9505
		10	10	0,2704	0,2543	0,2975	0,2660	0,2637	0,9298
		15	15	0,3884	0,3712	0,4223	0,3884	0,3858	0,9151
		25	25	0,5993	0,5678	0,6289	0,5934	0,5904	0,9093
		50	50	0,8937	0,8651	0,9044	0,8875	0,8857	0,9500
		5	10	0,1931	0,1808	0,2152	0,1927	0,1909	0,9436
		10	5	0,1936	0,1866	0,2193	0,1923	0,1917	0,9417
		15	5	0,2119	0,2004	0,2364	0,2086	0,2081	0,9394
		5	25	0,2316	0,2184	0,2576	0,2227	0,2225	0,9348
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	0,25	5	5	0,0991	0,0970	0,1158	0,0967	0,0974	0,9645
		10	10	0,1549	0,1537	0,1780	0,1543	0,1543	0,9526
		15	15	0,2132	0,2106	0,2405	0,2145	0,2147	0,9429
		25	25	0,3315	0,3344	0,3680	0,3326	0,3348	0,9300
		50	50	0,6022	0,6172	0,6451	0,6089	0,6120	0,9291
		5	10	0,1180	0,1205	0,1394	0,1230	0,1216	0,9596
		10	5	0,1184	0,1160	0,1371	0,1167	0,1177	0,9602
		15	5	0,1273	0,1234	0,1456	0,1250	0,1255	0,9595
		5	25	0,1363	0,1337	0,1567	0,1314	0,1327	0,9567
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	1,0	5	5	0,2735	0,2773	0,3084	0,2727	0,2754	0,9341
		10	10	0,5027	0,5134	0,5449	0,5100	0,5111	0,9263
		15	15	0,6873	0,7021	0,7272	0,7005	0,7010	0,9351
		25	25	0,8958	0,9049	0,9153	0,9006	0,9026	0,9701
		50	50	0,9962	0,9971	0,9975	0,9967	0,9969	0,9984
		5	10	0,3530	0,3609	0,3928	0,3642	0,3634	0,9284
		10	5	0,3523	0,3554	0,3898	0,3543	0,3568	0,9280
		15	5	0,3920	0,4030	0,4348	0,3995	0,4005	0,9254
		5	25	0,4312	0,4424	0,4743	0,4360	0,4363	0,9249

Nota: Cenário 1: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.3: Estimativa do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 2.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Conc.
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,7 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1521	0,1529	0,1766	0,1528	0,1529	0,952
		10	10	0,2692	0,2689	0,3008	0,2725	0,2717	0,937
		15	15	0,3858	0,3944	0,4269	0,3951	0,3940	0,926
		25	25	0,5953	0,6076	0,6367	0,6022	0,6046	0,930
		50	50	0,8885	0,8971	0,9086	0,8953	0,8971	0,969
		5	10	0,1900	0,1917	0,2180	0,1935	0,1923	0,946
		10	5	0,1906	0,1945	0,2203	0,1958	0,1952	0,944
		15	5	0,2101	0,2128	0,2404	0,2127	0,2133	0,942
		5	25	0,2294	0,2308	0,2601	0,2318	0,2327	0,940
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1565	0,1508	0,1784	0,1548	0,1544	0,950
		10	10	0,2733	0,2624	0,3020	0,2732	0,2711	0,932
		15	15	0,3914	0,3773	0,4250	0,3896	0,3890	0,919
		25	25	0,6015	0,5869	0,6362	0,6030	0,6001	0,916
		50	50	0,8949	0,8790	0,9081	0,8950	0,8936	0,957
		5	10	0,1942	0,1900	0,2210	0,1958	0,1937	0,942
		10	5	0,1937	0,1873	0,2186	0,1933	0,1928	0,943
		15	5	0,2129	0,2043	0,2382	0,2107	0,2112	0,941
		5	25	0,2346	0,2216	0,2590	0,2323	0,2319	0,938
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,166 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1569	0,1496	0,1775	0,1543	0,1541	0,951
		10	10	0,2769	0,2631	0,3041	0,2756	0,2731	0,932
		15	15	0,3970	0,3878	0,4331	0,3976	0,3967	0,918
		25	25	0,6080	0,5926	0,6419	0,6075	0,6049	0,917
		50	50	0,8991	0,8833	0,9121	0,8998	0,8982	0,958
		5	10	0,1971	0,1906	0,2218	0,1950	0,1946	0,944
		10	5	0,1952	0,1884	0,2200	0,1950	0,1949	0,944
		15	5	0,2139	0,2051	0,2395	0,2115	0,2122	0,940
		5	25	0,2376	0,2255	0,2632	0,2347	0,2350	0,937
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1565	0,1526	0,1797	0,1569	0,1558	0,950
		10	10	0,2773	0,2686	0,3081	0,2781	0,2753	0,930
		15	15	0,3970	0,3838	0,4306	0,3957	0,3951	0,920
		25	25	0,6087	0,5927	0,6424	0,6074	0,6052	0,917
		50	50	0,9020	0,8858	0,9147	0,9019	0,9003	0,958
		5	10	0,1962	0,1873	0,2201	0,1957	0,1938	0,943
		10	5	0,1972	0,1920	0,2238	0,1987	0,1975	0,942
		15	5	0,2184	0,2110	0,2450	0,2171	0,2172	0,939
		5	25	0,2368	0,2227	0,2612	0,2324	0,2327	0,937
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1566	0,1446	0,1760	0,1532	0,1514	0,949
		10	10	0,2739	0,2470	0,2979	0,2686	0,2645	0,925
		15	15	0,3910	0,3488	0,4155	0,3809	0,3753	0,909
		25	25	0,6021	0,5344	0,6210	0,5844	0,5757	0,895
		50	50	0,8960	0,8402	0,9013	0,8875	0,8808	0,934
		5	10	0,1948	0,1778	0,2155	0,1907	0,1886	0,942
		10	5	0,1935	0,1775	0,2153	0,1912	0,1892	0,940
		15	5	0,2131	0,1980	0,2374	0,2099	0,2084	0,936
		5	25	0,2341	0,2139	0,2576	0,2283	0,2276	0,933
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,25	5	5	0,0999	0,0998	0,1182	0,0995	0,0994	0,963
		10	10	0,1553	0,1565	0,1799	0,1567	0,1563	0,952
		15	15	0,2143	0,2144	0,2432	0,2159	0,2152	0,942
		25	25	0,3327	0,3374	0,3699	0,3353	0,3363	0,930
		50	50	0,6019	0,6096	0,6407	0,6126	0,6146	0,930
		5	10	0,1178	0,1168	0,1377	0,1189	0,1178	0,959
		10	5	0,1190	0,1168	0,1380	0,1203	0,1199	0,960
		15	5	0,1279	0,1261	0,1483	0,1273	0,1278	0,958
		5	25	0,1358	0,1357	0,1564	0,1354	0,1363	0,957
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	1	5	5	0,2729	0,2782	0,3083	0,2763	0,2767	0,935
		10	10	0,5035	0,5116	0,5446	0,5125	0,5127	0,926
		15	15	0,6875	0,6955	0,7225	0,6929	0,6961	0,938
		25	25	0,8976	0,9072	0,9174	0,9029	0,9045	0,970
		50	50	0,9965	0,9975	0,9978	0,9973	0,9973	0,998
		5	10	0,3521	0,3554	0,3887	0,3568	0,3577	0,930
		10	5	0,3528	0,3558	0,3901	0,3577	0,3591	0,929
		15	5	0,3924	0,3938	0,4283	0,3947	0,3978	0,930
		5	25	0,4298	0,4372	0,4704	0,4355	0,4380	0,926

Nota: Cenário 2: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.4: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 3.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concorrência
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1565	0,1552	0,1841	0,1543	0,1562	0,945
		10	10	0,2757	0,2708	0,3103	0,2774	0,2797	0,926
		15	15	0,3959	0,4015	0,4419	0,4045	0,4081	0,914
		25	25	0,6047	0,6158	0,6529	0,6139	0,6206	0,915
		50	50	0,8981	0,9046	0,9204	0,9047	0,9080	0,962
		5	10	0,1948	0,1954	0,2274	0,1964	0,1984	0,935
		10	5	0,1952	0,2003	0,2314	0,2025	0,2024	0,933
		15	5	0,2135	0,2121	0,2461	0,2114	0,2150	0,933
		5	25	0,2345	0,2359	0,2703	0,2341	0,2371	0,930
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1557	0,1560	0,1838	0,1562	0,1576	0,944
		10	10	0,2735	0,2829	0,3182	0,2836	0,2846	0,920
		15	15	0,3926	0,3973	0,4386	0,3972	0,4022	0,913
		25	25	0,6053	0,6170	0,6543	0,6160	0,6210	0,914
		50	50	0,8983	0,9005	0,9177	0,9023	0,9062	0,963
		5	10	0,1931	0,1961	0,2273	0,1961	0,1979	0,935
		10	5	0,1949	0,1959	0,2274	0,1981	0,1993	0,936
		15	5	0,2151	0,2157	0,2495	0,2159	0,2178	0,932
		5	25	0,2351	0,2379	0,2726	0,2339	0,2374	0,928
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,2 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1556	0,1532	0,1819	0,1537	0,1552	0,945
		10	10	0,2757	0,2760	0,3137	0,2793	0,2822	0,924
		15	15	0,3942	0,4031	0,4430	0,4029	0,4063	0,911
		25	25	0,6065	0,6150	0,6526	0,6153	0,6215	0,916
		50	50	0,8983	0,9033	0,9190	0,9044	0,9078	0,964
		5	10	0,1957	0,1948	0,2274	0,1954	0,1986	0,936
		10	5	0,1953	0,1917	0,2248	0,1958	0,1981	0,938
		15	5	0,2164	0,2174	0,2504	0,2147	0,2190	0,933
		5	25	0,2338	0,2318	0,2672	0,2313	0,2343	0,931
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1566	0,1552	0,1840	0,1542	0,1569	0,944
		10	10	0,2744	0,2786	0,3154	0,2820	0,2831	0,922
		15	15	0,3964	0,4004	0,4419	0,4022	0,4062	0,913
		25	25	0,6060	0,6158	0,6533	0,6153	0,6212	0,915
		50	50	0,8984	0,9042	0,9196	0,9051	0,9083	0,963
		5	10	0,1955	0,1948	0,2269	0,1967	0,1986	0,937
		10	5	0,1941	0,1978	0,2288	0,1995	0,2006	0,934
		15	5	0,2153	0,2186	0,2509	0,2174	0,2190	0,932
		5	25	0,2368	0,2339	0,2699	0,2333	0,2365	0,931
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,69 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1583	0,1815	0,1940	0,1659	0,1725	0,952
		10	10	0,2775	0,3132	0,3250	0,2934	0,3033	0,941
		15	15	0,3985	0,4417	0,4521	0,4131	0,4281	0,936
		25	25	0,6092	0,6583	0,6649	0,6260	0,6422	0,938
		50	50	0,9016	0,9229	0,9247	0,9095	0,9165	0,975
		5	10	0,1966	0,2240	0,2365	0,2061	0,2145	0,948
		10	5	0,1971	0,2198	0,2334	0,2060	0,2140	0,950
		15	5	0,2171	0,2459	0,2587	0,2231	0,2343	0,946
		5	25	0,2375	0,2740	0,2856	0,2479	0,2580	0,940
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,43 \end{pmatrix}$	0,25	5	5	0,1011	0,0866	0,1184	0,0979	0,0945	0,951
		10	10	0,1530	0,1248	0,1743	0,1503	0,1417	0,929
		15	15	0,2099	0,1753	0,2375	0,2081	0,1967	0,910
		25	25	0,3289	0,2663	0,3593	0,3217	0,3057	0,877
		50	50	0,5880	0,4889	0,6235	0,5864	0,5661	0,840
		5	10	0,1179	0,0985	0,1361	0,1135	0,1092	0,944
		10	5	0,1184	0,0988	0,1369	0,1164	0,1109	0,944
		15	5	0,1255	0,1034	0,1444	0,1191	0,1136	0,940
		5	25	0,1357	0,1129	0,1556	0,1284	0,1231	0,937
(7) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	1	5	5	0,2722	0,1551	0,2870	0,2500	0,2187	0,853
		10	10	0,5033	0,2714	0,5136	0,4751	0,4188	0,748
		15	15	0,6879	0,3919	0,6941	0,6579	0,5968	0,692
		25	25	0,8975	0,6134	0,8991	0,8801	0,8355	0,713
		50	50	0,9965	0,9244	0,9966	0,9955	0,9913	0,928
		5	10	0,3530	0,1875	0,3646	0,3251	0,2844	0,811
		10	5	0,3539	0,1942	0,3674	0,3300	0,2896	0,813
		15	5	0,3926	0,2140	0,4051	0,3623	0,3168	0,797
		5	25	0,4310	0,2361	0,4436	0,3986	0,3502	0,780

Nota: Cenário 3: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.5: Estimativas de Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 4.

Caso de Mudanças nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concordância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1574	0,1266	0,1862	0,1485	0,1435	0,912
		10	10	0,2778	0,2142	0,3116	0,2677	0,2560	0,869
		15	15	0,3983	0,3155	0,4384	0,3831	0,3696	0,837
		25	25	0,6089	0,4903	0,6422	0,5900	0,5764	0,815
		50	50	0,9000	0,8023	0,9124	0,8896	0,8845	0,877
		5	10	0,1957	0,1570	0,2286	0,1878	0,1811	0,895
		10	5	0,1964	0,1621	0,2320	0,1930	0,1839	0,894
		15	5	0,2144	0,1660	0,2454	0,2031	0,1955	0,890
		5	25	0,2361	0,1884	0,2719	0,2289	0,2165	0,881
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1565	0,1294	0,1871	0,1498	0,1445	0,912
		10	10	0,2752	0,2215	0,3145	0,2680	0,2582	0,868
		15	15	0,3951	0,3089	0,4332	0,3802	0,3657	0,838
		25	25	0,6089	0,4939	0,6434	0,5911	0,5775	0,816
		50	50	0,9009	0,7981	0,9119	0,8898	0,8836	0,875
		5	10	0,1945	0,1582	0,2286	0,1871	0,1796	0,895
		10	5	0,1961	0,1579	0,2288	0,1903	0,1815	0,896
		15	5	0,2170	0,1719	0,2505	0,2077	0,1991	0,888
		5	25	0,2364	0,1895	0,2724	0,2298	0,2170	0,881
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,63 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1547	0,1909	0,2080	0,1688	0,1794	0,929
		10	10	0,2756	0,3370	0,3515	0,3044	0,3193	0,910
		15	15	0,3936	0,4754	0,4868	0,4290	0,4469	0,896
		25	25	0,6057	0,6829	0,6904	0,6409	0,6597	0,908
		50	50	0,8989	0,9359	0,9371	0,9190	0,9260	0,961
		5	10	0,1962	0,2447	0,2612	0,2197	0,2301	0,919
		10	5	0,1936	0,2391	0,2555	0,2129	0,2246	0,922
		15	5	0,2156	0,2671	0,2830	0,2355	0,2490	0,917
		5	25	0,2349	0,2892	0,3041	0,2589	0,2705	0,916
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,9 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1574	0,1268	0,1860	0,1487	0,1438	0,912
		10	10	0,2765	0,2208	0,3151	0,2682	0,2591	0,867
		15	15	0,3988	0,3119	0,4361	0,3823	0,3687	0,838
		25	25	0,6091	0,4950	0,6440	0,5906	0,5780	0,816
		50	50	0,8999	0,8028	0,9124	0,8895	0,8846	0,878
		5	10	0,1955	0,1572	0,2278	0,1880	0,1813	0,897
		10	5	0,1957	0,1598	0,2304	0,1894	0,1822	0,895
		15	5	0,2164	0,1744	0,2510	0,2078	0,1994	0,889
		5	25	0,2381	0,1851	0,2705	0,2288	0,2157	0,882
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,425 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1575	0,0901	0,1761	0,1398	0,1220	0,896
		10	10	0,2728	0,1298	0,2901	0,2461	0,2087	0,823
		15	15	0,3939	0,1756	0,4095	0,3569	0,3004	0,750
		25	25	0,6034	0,2791	0,6152	0,5613	0,4905	0,652
		50	50	0,8974	0,4994	0,9001	0,8751	0,8240	0,597
		5	10	0,1935	0,1022	0,2120	0,1737	0,1491	0,872
		10	5	0,1948	0,1047	0,2141	0,1762	0,1516	0,871
		15	5	0,2156	0,1099	0,2339	0,1911	0,1635	0,858
		5	25	0,2342	0,1170	0,2525	0,2122	0,1774	0,846
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,47 \\ 0,47 \end{pmatrix}$	0,25	5	5	0,0982	0,1170	0,1343	0,1042	0,1101	0,947
		10	10	0,1528	0,1904	0,2062	0,1690	0,1795	0,931
		15	15	0,2111	0,2627	0,2764	0,2343	0,2458	0,921
		25	25	0,3259	0,3999	0,4109	0,3579	0,3756	0,904
		50	50	0,5933	0,6832	0,6881	0,6414	0,6572	0,900
		5	10	0,1165	0,1466	0,1629	0,1304	0,1362	0,937
		10	5	0,1164	0,1417	0,1583	0,1285	0,1347	0,942
		15	5	0,1264	0,1533	0,1704	0,1361	0,1438	0,939
		5	25	0,1349	0,1646	0,1807	0,1479	0,1543	0,938
(7) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}$	1,0	5	5	0,2729	0,1326	0,2920	0,2438	0,2069	0,822
		10	10	0,5022	0,2205	0,5147	0,4265	0,3968	0,693
		15	15	0,6868	0,3252	0,6960	0,6473	0,5730	0,620
		25	25	0,8962	0,4996	0,8988	0,8727	0,8190	0,598
		50	50	0,9963	0,8204	0,9964	0,9948	0,9898	0,824
		5	10	0,3529	0,1648	0,3703	0,3199	0,2730	0,777
		10	5	0,3517	0,1640	0,3691	0,3193	0,2711	0,777
		15	5	0,3919	0,1808	0,4089	0,3544	0,3029	0,755
		5	25	0,4317	0,1956	0,4470	0,3963	0,3328	0,733

Nota: Cenário 4 = $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

4.1.2 Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas: Caso Trivariado

Nas Tabela 4.6 apresenta-se os resultados das estimativas médias obtidas da probabilidade do erro do tipo I para $p=3$ quando as matrizes de covariâncias são iguais e conhecidas

Tanto para o teste T^2 de Hotelling quanto para o Hayter e Tsui as estimativas são bem próximas do valor do nível de significância nominal de 0,05 usado para a construção da região de rejeição da hipótese nula em ambos os testes, para todas as matrizes de covariâncias consideradas assim como acontece para os testes de combinação de p -valores de Fisher e Tippett.

Já as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I para a combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui (**T^2 & HT Comb**) são maiores que 0,05 (valores próximos a 0,07) mas menores do que o nível que seria obtido se considerássemos os 2 testes independentes (próximos de 0,10). É importante salientar que a inflação na probabilidade de significância do teste combinado (T^2 e HT) foi maior para $p=3$ do que para $p=2$.

A partir da Tabela 4.7 até a Tabela 4.9 são apresentados os resultados de estimativas do poder do teste para $p=3$ variáveis, que correspondem, respectivamente, aos cenários 5, 6 e 7 apresentados na Seção 3.2.

Tabela 4.6: Estimativas da Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas - $p=3$.

Matrizes de Covariâncias (Cenário)	Tamanhos de Amostra		T^2 de Hotelling	Hayter & Tsui	T^2 & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
	n_1	n_2						
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,05006	0,04911	0,06900	0,05015	0,05029	0,9607
	15	15	0,05048	0,04788	0,06861	0,04917	0,04977	0,9610
	25	25	0,04931	0,04946	0,06937	0,05078	0,04994	0,9600
	50	50	0,04982	0,04962	0,06957	0,04942	0,04947	0,9603
	15	10	0,04985	0,05153	0,07110	0,05045	0,05033	0,9592
	10	15	0,05019	0,04990	0,07004	0,05004	0,05013	0,9600
	10	25	0,04932	0,04783	0,06756	0,04970	0,04939	0,9620
	25	10	0,05049	0,05175	0,07168	0,05107	0,05034	0,9589
$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	10	10	0,04992	0,05232	0,07173	0,05323	0,05291	0,9588
	15	15	0,04936	0,05028	0,06961	0,04925	0,04956	0,9604
	25	25	0,04981	0,04999	0,07004	0,05025	0,04978	0,9597
	50	50	0,05039	0,05045	0,07061	0,04977	0,04985	0,9596
	15	10	0,05031	0,05162	0,07118	0,05255	0,05140	0,9596
	10	15	0,04966	0,04981	0,06950	0,04927	0,04926	0,9605
	10	25	0,04976	0,04896	0,06906	0,04841	0,04902	0,9606
	25	10	0,04933	0,04987	0,06950	0,04942	0,04918	0,9602
$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,04938	0,05035	0,06551	0,04994	0,04981	0,9687
	15	15	0,05045	0,05091	0,06641	0,05207	0,05165	0,9686
	25	25	0,04941	0,04971	0,06513	0,04999	0,04964	0,9689
	50	50	0,05125	0,05084	0,06664	0,05094	0,05124	0,9688
	15	10	0,04956	0,04926	0,06481	0,04944	0,04963	0,9692
	10	15	0,04990	0,04968	0,06545	0,05067	0,05042	0,9687
	10	25	0,05034	0,04984	0,06572	0,04971	0,04940	0,9684
	25	10	0,04931	0,04879	0,06475	0,04931	0,04940	0,9686

A partir da análise dos resultados da Tabela 4.7 é possível observar que o teste de Hayter e Tsui possui um poder estimado inferior ao teste T^2 de Hotelling nos casos 1 a 4 de mudanças de vetores de médias, sendo superior nos cenários 5 e 6, quando a mudança no vetor de médias ocorreu, respectivamente, ora apenas na segunda população sendo na mesma direção, ora nas duas populações em apenas duas variáveis de cada população. É importante salientar que para alguns valores de n_1 e n_2 a estimativa do poder do teste de Hayter e Tsui foi bem maior que a estimativa do teste T^2 de Hotelling.

O fator desbalanceamento entre as amostras das populações não parece afetar a estimativa de poder de todos os testes aqui estudados. Isso pode estar ocorrendo devido ao fato dos valores de n_1 e n_2 serem maiores para $p=3$ quando $n_1 \neq n_2$ do que no caso de $p=2$.

O teste combinado T^2 e Hayter & Tsui (T^2 & HT comb) é sempre superior ao teste que possui maior estimativa de poder entre o T^2 de Hotelling e o

Hayter & Tsui. Mas, isso se justifica em parte pelo fato desse teste possuir uma estimativa da probabilidade do erro do tipo I acima de 0,05 (próximo a 0,07, veja Tabela 4.6). Esse resultado foi observado para todos os cenários de matrizes de covariâncias avaliados nas Tabelas 4.7 a 4.9.

Já os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher da Tabela 4.7 possuem sempre estimativas de poder muito próximos um do outro, com vantagem mínima para o Tippett, nos casos 1 a 4, onde ambos são sempre superiores ao Hayter e Tsui em poder, mas nunca superior ao T^2 de Hotelling, nesses casos. Para os casos 5 e 6, mais uma vez os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher possuem estimativas de poder bem próximas uma da outra, porém, aqui a vantagem mínima é para o teste de Fisher sobre o Tippett. Agora, ambos os testes possuem poder sempre superiores ao T^2 de Hotelling, mas nunca superiores ao Hayter e Tsui, nestes casos 5 e 6. O mesmo resultado pode ser observado para os casos simulados sob a matriz de covariâncias da Tabela 4.8. Quanto aos testes de combinação de p-valores de Tippett e Fisher as estimativas de poder desses são praticamente iguais em todos os casos de mudanças de médias quando a matriz de covariâncias é a identidade (Tabela 4.9). Eles nunca superam o T^2 Hotelling, mas são sempre superiores em poder ao Hayter e Tsui, em todos os casos de mudanças de médias Tabela 4.9 (Matriz identidade).

Quando são comparados os resultados da Tabela 4.8 e Tabela 4.9 com os resultados da Tabela 4.7, verifica-se que a estimativa do poder do teste para o T^2 de Hotelling parece não ser afetado com a diferença na estrutura das matrizes de covariâncias, ou seja, para os casos de mesma distância de Mahalanobis (d) entre os vetores de médias postuladas em H_0 e H_a e mesmos tamanhos amostrais, as estimativas de poder do teste T^2 de Hotelling são praticamente iguais, independente da matriz de covariâncias, como era teoricamente esperado. O mesmo, porém, não ocorreu com o teste de Hayter e Tsui, que é aparentemente afetado em seus valores de poder, de acordo com a estrutura da matriz de covariâncias. E, assim, conseqüentemente, será também para os testes de combinação de p-valores de Tippett e Fisher, uma vez que estes são dependentes do que ocorre com os p-valores desses 2 testes.

Comparando os resultados obtidos na simulação das Tabelas 4.7 e Tabela 4.8, pode-se verificar que as estimativas de poder do teste do Hayter e

Tsui diminuíram, indicando que possivelmente a estimativa de poder deste teste é afetado pela presença de maior variância entre as variáveis.

O teste de T^2 de Hotelling continua sendo superior em estimativa de poder ao teste de Hayter e Tsui nos casos 1 a 4, da Tabela 4.8, porém a sua vantagem aumenta sobre o Hayter e Tsui, comparado aos resultado da Tabela 4.7. Já nos casos 5 a 6, Hayter e Tsui ainda é superior ao T^2 de Hotelling, porém, a vantagem do Hayter e Tsui parece diminuir pela presença de maior variabilidade entre as variáveis.

Já na Tabela 4.9, caso em que a matriz de covariâncias das 2 populações é a matriz identidade, o que se verifica é que a estimativa do poder do teste do Hayter e Tsui aumenta em relação aos valores da Tabela 4.7 apenas nos casos de 1 a 4, mas não chegando a superar o T^2 de Hotelling. Para os casos 5 e 6, ao contrário, a estimativa do poder do teste Hayter & Tsui é mais afetada em relação aos valores do mesmo teste na Tabela 4.7, resultando em estimativa de poder inferior a do teste T^2 de Hotelling nestes dois casos.

Portanto, o que podemos concluir dessa análise é que, de acordo com os resultados para os cenários 5 e 6 de matriz de covariâncias apresentadas nas Tabelas 4.7 e 4.8, nos casos de mudanças de médias de 1 a 4, o Teste T^2 de Hotelling é o que apresenta melhor poder, seguido pelos testes de combinação de p-valores de Tippett e Fisher, respectivamente, e por fim o teste do Hayter e Tsui. Já para os casos 5 e 6, o Teste de Hayter e Tsui é o que possui o melhor poder, seguido pelo Fisher e Tippett, respectivamente, e por fim o T^2 de Hotelling. Quando a matriz de covariâncias analisada é a identidade (Tabela 4.9) o teste de T^2 de Hotelling é o que possui maior poder nos cenários citados, seguido pela combinação de p-valores Tippett e Fisher (sem preferência por um) e por fim o Hayter & Tsui, que possui menor poder em todos os casos de mudanças de vetores de médias aqui estudados para essa matriz de covariâncias.

Tabela 4.7: Estimativa do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 5 – $p=3$.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
	n_1	n_2						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,09318	0,08219	0,11930	0,09124	0,08919	0,9367
	15	15	0,11690	0,10140	0,01474	0,11450	0,11240	0,9234
	25	25	0,16950	0,13660	0,20290	0,16510	0,15880	0,9003
	50	50	0,31500	0,23890	0,35430	0,29990	0,28860	0,8454
	15	10	0,10450	0,08897	0,13130	0,10000	0,09781	0,9308
	10	15	0,10390	0,08989	0,13140	0,09893	0,09724	0,9310
	10	25	0,11360	0,09667	0,14200	0,11111	0,10780	0,9262
	25	10	0,11510	0,09714	0,14350	0,10980	0,10650	0,9252
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,09356	0,08685	0,12280	0,09262	0,09184	0,9348
	15	15	0,11790	0,10170	0,14810	0,11520	0,11310	0,9233
	25	25	0,17040	0,13870	0,20510	0,16610	0,16030	0,8988
	50	50	0,31420	0,23550	0,35190	0,29730	0,28790	0,8459
	15	10	0,10330	0,08969	0,13130	0,09896	0,09768	0,9305
	10	15	0,10260	0,09080	0,13080	0,09961	0,09760	0,9318
	10	25	0,11460	0,10010	0,14480	0,11470	0,11010	0,9252
	25	10	0,11400	0,09931	0,14420	0,11080	0,10740	0,9250
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,25400	0,19410	0,29100	0,24090	0,23310	0,8662
	15	15	0,36640	0,27560	0,40681	0,34970	0,33920	0,8284
	25	25	0,58351	0,43080	0,61480	0,56040	0,54130	0,7847
	50	50	0,89230	0,73840	0,90340	0,87520	0,86330	0,8239
	15	10	0,30060	0,22630	0,33900	0,28370	0,27470	0,8489
	10	15	0,30240	0,22790	0,34070	0,28390	0,27550	0,8489
	10	25	0,35370	0,26070	0,39070	0,33730	0,32350	0,8330
	25	10	0,35500	0,26220	0,39340	0,33341	0,32100	0,8304
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,25620	0,20250	0,29740	0,24560	0,23770	0,8640
	15	15	0,37250	0,27680	0,41090	0,35440	0,34300	0,8274
	25	25	0,58401	0,43500	0,61640	0,56160	0,54390	0,7861
	50	50	0,89190	0,73520	0,90200	0,87400	0,86160	0,8232
	15	10	0,30200	0,22870	0,34120	0,28440	0,27610	0,8484
	10	15	0,30070	0,22960	0,34080	0,28430	0,27560	0,8489
	10	25	0,35270	0,26670	0,39360	0,34050	0,32600	0,8322
	25	10	0,35360	0,26620	0,39390	0,33520	0,32330	0,8319
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,18790	0,23360	0,25340	0,20790	0,22030	0,9147
	15	15	0,26560	0,33100	0,34920	0,29520	0,31190	0,8981
	25	25	0,42800	0,50280	0,51920	0,46400	0,48350	0,8924
	50	50	0,74740	0,80530	0,81380	0,77170	0,79120	0,9250
	15	10	0,21940	0,27190	0,29080	0,24060	0,25460	0,9098
	10	15	0,21940	0,27490	0,29370	0,23990	0,25530	0,9069
	10	25	0,25520	0,31360	0,33310	0,28190	0,29660	0,9026
	25	10	0,25580	0,31470	0,33410	0,27820	0,29530	0,9023
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,18710	0,24230	0,26000	0,21210	0,22340	0,9094
	15	15	0,26820	0,33140	0,34970	0,29840	0,31410	0,9001
	25	25	0,43090	0,50750	0,52330	0,46750	0,48700	0,8920
	50	50	0,74690	0,80260	0,81170	0,76750	0,78860	0,9260
	15	10	0,21960	0,27530	0,29430	0,24110	0,25620	0,9063
	10	15	0,21940	0,27560	0,29450	0,24250	0,25630	0,9060
	10	25	0,25440	0,31860	0,33640	0,28850	0,30050	0,9001
	25	10	0,25510	0,32040	0,33800	0,28270	0,29750	0,8994

Nota: Cenário 5 = $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$.. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.8: Estimativa de Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 6 – p=3.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
	n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,53 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,09473	0,07500	0,11760	0,09229	0,08702	0,9345
	15	15	0,11850	0,09337	0,14630	0,11010	0,10530	0,9194
	25	25	0,17230	0,12620	0,20360	0,16280	0,15160	0,8914
	50	50	0,31140	0,20330	0,34350	0,28660	0,26640	0,8277
	15	10	0,10350	0,08471	0,13000	0,10110	0,09518	0,9281
	10	15	0,10280	0,08298	0,12920	0,09689	0,09260	0,9273
	10	25	0,11410	0,08596	0,13820	0,10490	0,09988	0,9236
	25	10	0,11510	0,09114	0,14270	0,10910	0,10330	0,9208
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,532 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,09533	0,07720	0,11960	0,09316	0,08861	0,9332
	15	15	0,11870	0,09273	0,14600	0,11090	0,10640	0,9195
	25	25	0,17200	0,11920	0,19930	0,15990	0,14870	0,8925
	50	50	0,31460	0,20120	0,34560	0,28890	0,26690	0,8246
	15	10	0,10320	0,08246	0,12890	0,10180	0,09388	0,9279
	10	15	0,10300	0,08102	0,12770	0,09630	0,09209	0,9285
	10	25	0,11580	0,08871	0,14160	0,10780	0,10230	0,9214
	25	10	0,11570	0,08971	0,14210	0,10880	0,10230	0,9213
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,06 \\ 1,06 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,25570	0,17290	0,28810	0,24330	0,22480	0,8524
	15	15	0,37170	0,24110	0,40370	0,34080	0,31910	0,8053
	25	25	0,58400	0,38030	0,60990	0,55280	0,51920	0,7445
	50	50	0,89260	0,67100	0,90070	0,87140	0,84670	0,7621
	15	10	0,30280	0,20030	0,33500	0,28720	0,26290	0,8331
	10	15	0,30320	0,19820	0,33450	0,27970	0,25910	0,8325
	10	25	0,35570	0,23030	0,38690	0,32760	0,30550	0,8121
	25	10	0,35500	0,22830	0,38640	0,32990	0,30480	0,8106
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,31 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,25460	0,16750	0,28540	0,24090	0,22070	0,8513
	15	15	0,37270	0,23640	0,40330	0,34120	0,31790	0,8025
	25	25	0,58550	0,37490	0,61100	0,55230	0,51790	0,7385
	50	50	0,89060	0,66570	0,89840	0,86850	0,84310	0,7594
	15	10	0,29830	0,19130	0,32820	0,28160	0,25610	0,8331
	10	15	0,30150	0,19920	0,33480	0,28070	0,25900	0,8310
	10	25	0,35310	0,22560	0,38440	0,32600	0,30140	0,8098
	25	10	0,35380	0,22500	0,38450	0,32770	0,30210	0,8099
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,184 \\ 1,184 \\ 1,184 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,18670	0,20730	0,24390	0,20390	0,20720	0,9062
	15	15	0,26740	0,30060	0,34150	0,28390	0,29290	0,8851
	25	25	0,43070	0,46040	0,50770	0,44960	0,46310	0,8757
	50	50	0,74550	0,77360	0,80740	0,76320	0,77490	0,9043
	15	10	0,21910	0,24290	0,28170	0,23680	0,24020	0,8987
	10	15	0,21920	0,24620	0,28460	0,23150	0,23860	0,8962
	10	25	0,25630	0,28283	0,32430	0,26960	0,27830	0,8905
	25	10	0,25460	0,27980	0,32090	0,26980	0,27650	0,8925
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -1,163 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 1,163 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,18550	0,20920	0,24410	0,20370	0,20790	0,9065
	15	15	0,26350	0,29180	0,33190	0,27250	0,28600	0,8916
	25	25	0,42170	0,46160	0,50470	0,44450	0,45630	0,8740
	50	50	0,73940	0,76150	0,79670	0,74960	0,76560	0,9074
	15	10	0,21540	0,23950	0,27640	0,23370	0,23760	0,9021
	10	15	0,21480	0,23880	0,27600	0,22620	0,23390	0,9016
	10	25	0,25160	0,28000	0,31850	0,26620	0,27430	0,8946
	25	10	0,25290	0,28140	0,32050	0,26880	0,27640	0,8932

Nota: Cenário 6: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.9: Estimativa de Poder dos Testes - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 7 – p=3.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
	n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,263 \\ 0,263 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,09366	0,09000	0,11660	0,09345	0,09334	0,9505
	15	15	0,11840	0,11220	0,14450	0,11960	0,11940	0,9415
	25	25	0,17060	0,15380	0,19890	0,16680	0,16700	0,9265
	50	50	0,31430	0,27400	0,34780	0,30280	0,30200	0,8926
	15	10	0,10330	0,09739	0,12700	0,10130	0,10210	0,9468
	10	15	0,10350	0,09861	0,12770	0,10460	0,10340	0,9467
	10	25	0,11490	0,10920	0,14060	0,11420	0,11390	0,9428
	25	10	0,11480	0,10750	0,14000	0,11310	0,11320	0,9423
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,274 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} e \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,09316	0,08808	0,11460	0,09190	0,09214	0,9520
	15	15	0,11820	0,11190	0,14410	0,11900	0,11800	0,9419
	25	25	0,16970	0,15550	0,19990	0,16740	0,16690	0,9255
	50	50	0,31280	0,27750	0,34810	0,30200	0,30190	0,8942
	15	10	0,10280	0,09643	0,12580	0,10120	0,10110	0,9476
	10	15	0,10190	0,09954	0,12730	0,10190	0,10170	0,9468
	10	25	0,11400	0,10560	0,13770	0,11010	0,11040	0,9441
	25	10	0,11410	0,10450	0,13740	0,11200	0,11160	0,9438
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,526 \\ 0,526 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,25500	0,22820	0,28900	0,24800	0,24730	0,9052
	15	15	0,36990	0,32780	0,40640	0,36150	0,36070	0,8848
	25	25	0,58470	0,51100	0,61263	0,56610	0,56560	0,8706
	50	50	0,89250	0,84180	0,90330	0,87970	0,87880	0,9276
	15	10	0,30260	0,26340	0,33580	0,29150	0,29110	0,8945
	10	15	0,30080	0,26660	0,33530	0,29210	0,29120	0,8968
	10	25	0,35670	0,31510	0,39240	0,34490	0,34310	0,8870
	25	10	0,35470	0,31060	0,39000	0,34430	0,34290	0,8853
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,20 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} e \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,25420	0,22720	0,28820	0,24950	0,24730	0,9051
	15	15	0,36950	0,32370	0,40330	0,36000	0,35940	0,8867
	25	25	0,58190	0,51740	0,61310	0,56790	0,56580	0,8731
	50	50	0,89030	0,84350	0,90170	0,87930	0,87840	0,9303
	15	10	0,30130	0,26160	0,33370	0,29020	0,28970	0,8956
	10	15	0,30030	0,26390	0,33410	0,29160	0,28980	0,8960
	10	25	0,35490	0,31170	0,38990	0,34120	0,34080	0,8869
	25	10	0,35440	0,31330	0,39060	0,34330	0,34290	0,8865
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,36 \\ 0,36 \\ 0,36 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,18880	0,16280	0,21620	0,18180	0,18030	0,9192
	15	15	0,26840	0,22530	0,29820	0,25920	0,25600	0,8972
	25	25	0,42830	0,35000	0,45740	0,41020	0,40360	0,8637
	50	50	0,74700	0,62530	0,76090	0,72100	0,70890	0,8505
	15	10	0,21760	0,18550	0,24620	0,20880	0,20733	0,9107
	10	15	0,22070	0,19150	0,25160	0,21370	0,21200	0,9090
	10	25	0,25680	0,21480	0,28600	0,24320	0,24010	0,8997
	25	10	0,25700	0,21380	0,28660	0,25540	0,24210	0,8975
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,30 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} e \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,705 \\ 0,30 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,18860	0,16340	0,21620	0,18130	0,17990	0,9197
	15	15	0,26470	0,22060	0,29400	0,25600	0,25240	0,8973
	25	25	0,42810	0,35690	0,45870	0,41160	0,40690	0,8676
	50	50	0,74760	0,62900	0,76440	0,72300	0,71370	0,8579
	15	10	0,21740	0,18350	0,24470	0,20840	0,20630	0,9115
	10	15	0,21790	0,19060	0,24890	0,21020	0,20920	0,9106
	10	25	0,25460	0,22090	0,28730	0,24530	0,24240	0,9010
	25	10	0,25450	0,21920	0,28610	0,24500	0,24290	0,9015

Nota: Cenário 7: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

4.2 Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas

Nesta seção serão avaliados os resultados obtidos dos cenários em que as matrizes de covariâncias são iguais e desconhecidas para os casos bivariados e trivariados (seções 4.2.1 e 4.2.3). E ainda será realizada a análise comparativa dos testes para as situações de matrizes de covariâncias iguais conhecidas e desconhecidas para os casos bivariados e trivariados (seções 4.2.2 e 4.2.4).

4.2.1 Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas: Caso Bivariado

Em todos os testes de todas as simulações realizadas para matrizes de covariâncias conhecidas considerou-se o nível de significância nominal de 5%. Porém, para este caso de matrizes de covariâncias desconhecidas, para que os testes propostos nesta dissertação fossem comparáveis, foi necessário alterar esse valor em função do fato de que para alguns tamanhos amostrais pequenos de n_1 e n_2 , o teste de Hayter e Tsui apresentava valores estimados da probabilidade do erro tipo I acima de 0,05. Como qualquer tentativa de correção do teste de Hayter e Tsui afetaria automaticamente o desempenho dos testes de combinação de p-valores bem como o teste T^2 e HT (comb), optou-se por realizar as simulações considerando-se como nível de significância do teste T^2 de Hotelling o valor de probabilidade do erro tipo I estimada por Hayter e Tsui quando $\alpha = 0,05$. Para os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher realizou-se as correções das constantes críticas dos testes assim como explicado na Seção 3.2.3 (Figura 3.5) de acordo com os níveis de significância utilizados neste estudo.

Na Tabela 4.10 são apresentados os resultados das estimativas médias da probabilidade do erro do tipo I para $p=2$, obtidos para o teste de Hayter e Tsui quando o nível de significância nominal de 0,05 foi utilizado nas simulações visando a comparação dos testes tratados neste trabalho.

Tabela 4.10: Estimativas da Probabilidade do Erro do Tipo I para o Teste de Hayter e Tsui usando Nível de Significância Nominal de 0,05 – $p=2$ – Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas.

Tamanhos Amostrais	Matrizes de Covariâncias			
	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$
$n_1=n_2=10$	0,0744	0,0747	0,0697	0,0677
$n_1=n_2=15$	0,0647	0,0635	0,0629	0,0591
$n_1=n_2=25$	0,0572	0,0581	0,0576	0,0551
$n_1=n_2=50$	0,0530	0,0526	0,0524	0,0491
$n_1=15 \ n_2=10$	0,0666	0,0675	0,0657	0,0626
$n_1=10 \ n_2=15$	0,0678	0,0684	0,0658	0,0625
$n_1=25 \ n_2=10$	0,0609	0,0615	0,0586	0,0569
$n_1=10 \ n_2=25$	0,0616	0,0620	0,0593	0,0568

É possível visualizar da Tabela 4.10 que a estimativa média da probabilidade do erro tipo I para o teste de Hayter e Tsui tem um acréscimo, ficando em torno de 0,052 a 0,0744, sendo o acréscimo maior quando os tamanhos de amostras são menores. As estimativas são mais próximas de 0,05 quando os tamanhos amostrais são iguais a $n_1=n_2=50$. É interessante notar que as estimativas obtidas para os casos em que se tem correlação 0,5 e 0,8 são relativamente mais próximas de 0,05 do que as obtidas para o caso de não correlação entre as variáveis.

Portanto, para que fosse possível a comparação de todos os testes com um mesmo nível de significância, optou-se por comparar todos os testes considerando-se como nível de significância os valores dados pelas estimativas da probabilidade do erro tipo I do teste de Hayter e Tsui, apresentados na Tabela 4.10 para $p=2$. Desta forma, todos os testes estarão sendo comparados sob o mesmo nível de significância nominal aproximadamente. É muito importante esclarecer que para o teste de Hayter e Tsui continuou-se utilizando o valor de $\alpha = 0,05$ já que os resultados iniciais das simulações (ver Tabela 4.10) indicaram que a constante $C_{R,\alpha}$ correspondente ao nível $\alpha = 0,05$ obtida utilizando-se o procedimento descrito na Seção 3.2.2, era na realidade relacionada aos valores de probabilidade do erro tipo I dados na Tabela 4.10, no caso de matrizes de covariâncias desconhecidas.

Com essas modificações dos níveis de significâncias, foi possível realizar apenas comparações das estimativas dos poderes dos testes para cada estrutura n_1, n_2 de tamanhos de amostras, separadamente, não sendo possível verificar como se dá a influência no poder quando os tamanhos de amostras são alterados. Isso porque têm-se níveis de significância diferentes em cada situação de tamanhos amostrais n_1 e n_2 .

Na Tabela 4.11 estão os resultados das estimativas médias obtidas da probabilidade do erro do tipo I para $p=2$ quando as matrizes de covariâncias são iguais e desconhecidas, sendo que a simulação para obtenção dos resultados da Tabela 4.11 foram feitos de acordo com os níveis de significância nominais dados nas Tabelas 4.10. Maiores detalhes do procedimento das simulações, verificar seção 3, página 43.

O valor das estimativas médias obtidas das probabilidades do erro do tipo I para os testes T^2 de Hotelling, Tippett e Fisher, e que estão na Tabela 4.11, se aproximam dos valores obtidos pelo teste do Hayter e Tsui conforme resultados da Tabela 4.10.

Como visto anteriormente para matrizes de covariâncias conhecidas as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I para a combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter & Tsui (T^2 e HT comb) foram maiores que os valores obtidos para estes testes separadamente, sendo que a inflação é bem menor do que seria obtido se os testes fossem independentes. Como ilustração, para a situação em que $n_1=n_2=10$ no cenário 1, se os testes fossem independentes a probabilidade do erro tipo I de T^2 e HT (Comb) seria $1 - [(1 - 0,07431)(1 - 0,07439)] = 0,1431$, que é muito superior à estimativa dada na Tabela 4.11 (0,09173).

Tabela 4.11: Estimativas da Probabilidade do Erro de Tipo I - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – p=2.

Matrizes de Covariâncias Desconhecidas (Cenário)	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Proporção de Concorrência
	n ₁	n ₂						
(1) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	10	10	0,07431	0,07439	0,09173	0,07487	0,07464	0,9652
	15	15	0,06400	0,06381	0,07874	0,06457	0,06442	0,9703
	25	25	0,05707	0,05865	0,07101	0,05611	0,05650	0,9737
	50	50	0,05353	0,05376	0,06583	0,05170	0,05189	0,9756
	15	10	0,06513	0,06654	0,08155	0,06679	0,06680	0,9686
	10	15	0,06753	0,06788	0,08382	0,06692	0,06724	0,9678
	25	10	0,06132	0,06161	0,07544	0,06061	0,06060	0,9720
	10	25	0,06123	0,06160	0,07548	0,05990	0,06012	0,9719
(2) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,07412	0,07298	0,09094	0,07249	0,07317	0,9652
	15	15	0,06397	0,06515	0,07975	0,06370	0,06377	0,9696
	25	25	0,05713	0,05659	0,06964	0,05745	0,05752	0,9744
	50	50	0,05216	0,05296	0,06474	0,05170	0,05196	0,9756
	15	10	0,06745	0,06771	0,08325	0,06558	0,06559	0,9687
	10	15	0,06900	0,06772	0,08407	0,06900	0,06912	0,9686
	25	10	0,06023	0,06087	0,07457	0,06014	0,06002	0,9720
	10	25	0,06140	0,06119	0,07530	0,06187	0,06229	0,9720
(3) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,06967	0,07024	0,08994	0,06825	0,06927	0,9600
	15	15	0,06261	0,06137	0,07914	0,06301	0,06301	0,9657
	25	25	0,05776	0,05525	0,07137	0,05634	0,05686	0,9703
	50	50	0,05369	0,05119	0,06611	0,05228	0,05190	0,9727
	15	10	0,06568	0,06563	0,08405	0,06712	0,06732	0,9631
	10	15	0,06626	0,06570	0,08429	0,06610	0,06610	0,9634
	25	10	0,05917	0,06050	0,07645	0,05733	0,05718	0,9668
	10	25	0,05976	0,05996	0,07661	0,05944	0,05921	0,9665
(4) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,06710	0,06606	0,09145	0,06506	0,06581	0,9503
	15	15	0,05892	0,05797	0,08021	0,05847	0,05876	0,9565
	25	25	0,05455	0,05270	0,07332	0,05646	0,05599	0,9606
	50	50	0,04936	0,04956	0,06757	0,04850	0,04822	0,9638
	15	10	0,06415	0,06262	0,08653	0,06452	0,06229	0,9537
	10	15	0,06249	0,06238	0,08586	0,06164	0,06212	0,9531
	25	10	0,05752	0,05711	0,07885	0,05587	0,05674	0,9569
	10	25	0,05667	0,05736	0,07865	0,05692	0,05676	0,9567

A partir da Tabela 4.12 inicia-se a análise dos resultados das estimativas do poder dos testes obtidos através de simulações para matrizes de covariâncias iguais e desconhecidas. O que se pode verificar das Tabelas 4.12 e 4.13, quando as variáveis tem correlação zero, é que as estimativas do poder do teste de Hayter e Tsui se aproximam bastante dos resultados de poder obtidos para o T^2 de Hotelling, ficando em alguns casos superior a este (casos 4, 6 e 7 da Tabela 4.12 e casos 1,6 e 7 da Tabela 4.13) como ocorreu na situação de matrizes de covariâncias conhecidas. Em linhas gerais as conclusões sobre os testes tratados no caso de variáveis não correlacionadas são semelhantes àquelas observadas para o caso em que as matrizes eram iguais e conhecidas (Seção 4.1.1).

Quando as variáveis tem correlação igual a 0,5 (Tabela 4.14) as estimativas do poder do teste de Hayter e Tsui ficam em alguns casos um pouco abaixo das estimativas de poder obtidos para o T^2 de Hotelling, no entanto, existem várias situações nos quais Hayter e Tsui apresentou uma estimativa de poder maior do que o teste T^2 de Hotelling: no caso 5 e casos 1 a 4 para amostras não balanceadas. Observa-se que esses casos em que o teste de Hayter e Tsui obteve um desempenho melhor do que o teste T^2 de Hotelling abrange vários tipos de situações diferentes, desde mudanças em uma única variável em uma das populações até situações de mudanças nas duas variáveis das duas populações e mudanças na mesma direção e direções contrárias.

Por fim, avaliando-se a Tabela 4.15, quando a correlação entre as variáveis é alta (0,8), observa-se que as estimativas do poder do teste para o Hayter e Tsui ficaram em sua grande maioria abaixo das estimativas do teste do T^2 de Hotelling com exceção dos casos 3 e 6, em que o teste de Hayter e Tsui superou em desempenho o teste T^2 de Hotelling.

Um resultado semelhante ao que acontece quando as matrizes de covariâncias são conhecidas para a situação de alta correlação entre as variáveis é que quando a mudança no vetor de médias ocorre em apenas uma população e nas duas variáveis na mesma direção, (casos 3 e 6 da Tabela 4.15) o teste do Hayter e Tsui possui estimativas de poder superior ao teste T^2

de Hotelling. Os testes do Tippett e Fisher também apresentam seus melhores desempenhos também nesta situação.

A diferença entre Tippett e Fisher em estimativa de poder não é muito acentuada. Os valores são praticamente os mesmos. Então, sob esse ponto de vista, os dois testes seriam alternativas equivalentes em termos de desempenho.

Para a situação de matriz de covariâncias com correlação de 0,5 (Tabela 4.14) é possível verificar que, quando a mudança no vetor de médias ocorre em apenas uma população e em apenas uma variável ou nas duas populações mas em uma delas em apenas uma variável (casos 6 e 7 respectivamente) o teste Hayter e Tsui apresentou estimativas de poder inferior ao do T^2 de Hotelling. O teste do Tippett é o menos afetado com esse tipo de mudança. O Fisher já o é mais, porém menos afetado do que o teste Hayter & Tsui. Já para o caso 5, em que a mudança do vetor de médias ocorre em apenas uma população e no mesmo sentido, o que se constata é que as estimativas do poder do teste do Hayter e Tsui são superiores ao do teste T^2 de Hotelling.

Para os casos 5 e 7 da Tabela 4.15, em que a mudança do vetor de médias ocorre em apenas uma das variáveis de uma única população, o que se constata é que as estimativas do poder do teste do Hayter e Tsui são bem menores em relação ao teste T^2 de Hotelling, chegando em alguns casos a ser a metade do poder do T^2 de Hotelling. O mesmo impacto negativo em mesmas proporções não ocorre com os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher, como era de se esperar, uma vez que esse teste é a combinação dos dois p-valores de Hayter e Tsui e T^2 de Hotelling.

Para os casos analisados a partir da Tabela 4.15 o que se pode concluir com relação aos testes propostos nessa dissertação é que eles apresentam estimativas de poder similares e equiparáveis ao usual T^2 de Hotelling na maioria dos casos, sendo o teste de Hayter e Tsui afetado pela presença de correlação entre as variáveis e pela direção da mudança dos vetores de médias.

Tabela 4.12: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 1 - p=2.

Caso de Mudanças nos vetores de médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,322 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,3029	0,2980	0,3421	0,3330	0,3061	0,9166
		15	15	0,4081	0,3974	0,4475	0,4015	0,4030	0,9106
		25	25	0,6006	0,5876	0,6382	0,5965	0,6005	0,9118
		50	50	0,8958	0,8830	0,9104	0,8938	0,8939	0,9580
		15	10	0,3340	0,3332	0,3769	0,3351	0,3390	0,9135
		10	15	0,3367	0,3322	0,3772	0,3365	0,3389	0,9145
		25	10	0,3804	0,3738	0,4205	0,3768	0,3778	0,9131
		10	25	0,3828	0,3746	0,4214	0,3787	0,3800	0,9145
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,322 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2974	0,2927	0,3361	0,2924	0,2964	0,9108
		15	15	0,4008	0,3926	0,4408	0,3906	0,3950	0,9117
		25	25	0,5963	0,5837	0,6335	0,5991	0,6017	0,9130
		50	50	0,8911	0,8778	0,9065	0,8970	0,8887	0,9558
		15	10	0,3330	0,3310	0,3747	0,3301	0,3346	0,9145
		10	15	0,3378	0,3320	0,3777	0,3330	0,3365	0,9143
		25	10	0,3782	0,3718	0,4181	0,3835	0,3824	0,9137
		10	25	0,3815	0,3735	0,4203	0,3785	0,3792	0,9143
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,822 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2991	0,2939	0,3383	0,2956	0,2994	0,9165
		15	15	0,4020	0,3928	0,4416	0,3920	0,3956	0,9116
		25	25	0,5957	0,5816	0,6323	0,5939	0,5972	0,9126
		50	50	0,8910	0,8777	0,9064	0,8880	0,8895	0,9560
		15	10	0,3305	0,3293	0,3727	0,3316	0,3342	0,9143
		10	15	0,3365	0,3301	0,3763	0,3271	0,3326	0,9140
		25	10	0,3779	0,3732	0,4193	0,3824	0,3824	0,9125
		10	25	0,3831	0,3752	0,4223	0,3803	0,3813	0,9138
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,333 \\ -1,655 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,3098	0,3100	0,3513	0,3126	0,3149	0,9171
		15	15	0,4169	0,4176	0,4602	0,4137	0,4163	0,9141
		25	25	0,6157	0,6178	0,6566	0,6229	0,6259	0,9203
		50	50	0,9032	0,9029	0,9206	0,9046	0,9059	0,9648
		15	10	0,3462	0,3515	0,3907	0,3516	0,3537	0,9165
		10	15	0,3477	0,3489	0,3905	0,3480	0,3513	0,9157
		25	10	0,3940	0,3974	0,4379	0,4020	0,4019	0,9156
		10	25	0,3952	0,3964	0,4380	0,3981	0,3988	0,9155
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,63 \\ -0,63 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2966	0,2870	0,3335	0,2944	0,2973	0,9166
		15	15	0,4007	0,3838	0,4377	0,4008	0,4021	0,9091
		25	25	0,5959	0,5688	0,6289	0,5814	0,5839	0,9070
		50	50	0,8878	0,8622	0,9006	0,8806	0,8797	0,9487
		15	10	0,3311	0,3231	0,3704	0,3224	0,3282	0,9133
		10	15	0,3336	0,3226	0,3711	0,3246	0,3304	0,9140
		25	10	0,3773	0,3640	0,4153	0,3775	0,3772	0,9106
		10	25	0,3801	0,3641	0,4172	0,3740	0,3755	0,9098
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	0,25	10	10	0,1838	0,1840	0,2151	0,1897	0,1879	0,9377
		15	15	0,2293	0,2314	0,2632	0,2359	0,2366	0,9342
		25	25	0,3372	0,3450	0,3791	0,3425	0,3437	0,9239
		50	50	0,5970	0,6105	0,6404	0,6052	0,6069	0,9266
		15	10	0,1959	0,1994	0,2299	0,1975	0,1992	0,9354
		10	15	0,1993	0,2015	0,2324	0,2015	0,2025	0,9360
		25	10	0,2157	0,2201	0,2498	0,2200	0,2197	0,9361
		10	25	0,2167	0,2180	0,2490	0,2186	0,2183	0,9366
(7) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	1,0	10	10	0,5126	0,5272	0,5649	0,5309	0,5298	0,9099
		15	15	0,6810	0,6987	0,7264	0,6984	0,6997	0,9270
		25	25	0,8875	0,9009	0,9122	0,8962	0,8968	0,9641
		50	50	0,9956	0,9967	0,9971	0,9962	0,9963	0,9980
		15	10	0,5779	0,5986	0,6317	0,5964	0,5976	0,9130
		10	15	0,5823	0,5990	0,6330	0,5934	0,5959	0,9152
		25	10	0,6577	0,6778	0,7052	0,6757	0,6754	0,9251
		10	25	0,6570	0,6746	0,7035	0,6700	0,6705	0,9247

Nota: Cenário 1: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.13: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 2 - p=2.

Caso de Mudanças nos vetores de médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,7 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2954	0,2987	0,3370	0,3009	0,3024	0,920
		15	15	0,3902	0,4014	0,4375	0,3974	0,3989	0,917
		25	25	0,5913	0,6053	0,6367	0,5974	0,6017	0,923
		50	50	0,8850	0,8960	0,9079	0,8929	0,8937	0,965
		15	10	0,3313	0,3404	0,3766	0,3307	0,3340	0,919
		10	15	0,3335	0,3397	0,3778	0,3403	0,3424	0,918
		25	10	0,3764	0,3448	0,4211	0,3832	0,3839	0,919
		10	25	0,3756	0,3845	0,4197	0,3868	0,3888	0,921
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2985	0,2932	0,3372	0,2998	0,3015	0,917
		15	15	0,3958	0,3911	0,4379	0,3977	0,4013	0,911
		25	25	0,5987	0,5816	0,6341	0,5937	0,5948	0,912
		50	50	0,8901	0,8771	0,9057	0,8887	0,8885	0,956
		15	10	0,3348	0,3306	0,3751	0,3323	0,3350	0,915
		10	15	0,3381	0,3317	0,3779	0,3380	0,3404	0,914
		25	10	0,3824	0,3736	0,4208	0,3760	0,3778	0,914
		10	25	0,3833	0,3732	0,4213	0,3827	0,3854	0,914
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,166 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,3017	0,2951	0,3398	0,3036	0,3046	0,917
		15	15	0,4026	0,3964	0,4439	0,4017	0,4057	0,911
		25	25	0,6092	0,5934	0,6454	0,6064	0,6070	0,912
		50	50	0,8948	0,8827	0,9100	0,8920	0,8924	0,958
		15	10	0,3403	0,3356	0,3800	0,3368	0,3406	0,916
		10	15	0,3395	0,3325	0,3780	0,3429	0,3446	0,916
		25	10	0,3867	0,3796	0,4267	0,3831	0,3847	0,913
		10	25	0,3866	0,3779	0,4252	0,3831	0,3874	0,914
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,3021	0,2964	0,3407	0,3009	0,3033	0,917
		15	15	0,4043	0,3983	0,4459	0,4065	0,4105	0,911
		25	25	0,6069	0,5912	0,6427	0,6082	0,6078	0,913
		50	50	0,8956	0,8838	0,9106	0,8921	0,8931	0,958
		15	10	0,3414	0,3357	0,3811	0,3381	0,3405	0,915
		10	15	0,3424	0,3360	0,3822	0,3420	0,3440	0,914
		25	10	0,3878	0,3791	0,4267	0,3830	0,3836	0,913
		10	25	0,3896	0,3796	0,4277	0,3843	0,3892	0,914
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,3002	0,2816	0,3343	0,2922	0,2957	0,913
		15	15	0,3976	0,3690	0,4311	0,3780	0,3840	0,904
		25	25	0,6000	0,5431	0,6247	0,5801	0,5808	0,894
		50	50	0,8899	0,8401	0,8977	0,8755	0,8734	0,935
		15	10	0,3371	0,3162	0,3715	0,3260	0,3296	0,910
		10	15	0,3370	0,3134	0,3703	0,3259	0,3306	0,910
		25	10	0,3797	0,3510	0,4115	0,3653	0,3671	0,908
		10	25	0,3845	0,3525	0,4155	0,3733	0,3775	0,906
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,25	10	10	0,1847	0,1830	0,2153	0,1873	0,1878	0,937
		15	15	0,2287	0,2326	0,2640	0,2270	0,2293	0,933
		25	25	0,3382	0,3435	0,3786	0,3488	0,3490	0,925
		50	50	0,5953	0,6097	0,6394	0,6057	0,6076	0,926
		15	10	0,1985	0,2006	0,2314	0,1997	0,2002	0,936
		10	15	0,1993	0,1996	0,2307	0,2018	0,2026	0,937
		25	10	0,2167	0,2194	0,2504	0,2186	0,2188	0,935
		10	25	0,2190	0,2198	0,2513	0,2199	0,2229	0,936
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	1	10	10	0,5133	0,5264	0,5645	0,5286	0,5294	0,911
		15	15	0,6791	0,6991	0,7263	0,6875	0,6905	0,926
		25	25	0,8889	0,9004	0,9120	0,8991	0,9000	0,965
		50	50	0,9957	0,9966	0,9972	0,9964	0,9964	0,998
		15	10	0,5799	0,6005	0,6330	0,5926	0,5945	0,915
		10	15	0,5853	0,6023	0,6363	0,6046	0,6042	0,915
		25	10	0,6544	0,6730	0,7020	0,6675	0,6688	0,923
		10	25	0,6586	0,6754	0,7036	0,6696	0,6745	0,927

Nota: Cenário 2: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.14: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 3 - p=2.

Caso de Mudanças nos vetores de médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2900	0,2507	0,3090	0,2962	0,3001	0,923
		15	15	0,4000	0,3484	0,4150	0,4136	0,4164	0,918
		25	25	0,6000	0,5418	0,6108	0,5964	0,6084	0,920
		50	50	0,8933	0,8656	0,8980	0,8995	0,9026	0,963
		15	10	0,3338	0,3439	0,3868	0,3451	0,3487	0,904
		10	15	0,3336	0,3431	0,3856	0,3423	0,3467	0,905
		25	10	0,3751	0,3884	0,4300	0,3747	0,3811	0,904
		10	25	0,3783	0,3889	0,4315	0,3812	0,3876	0,904
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2880	0,2486	0,3063	0,2869	0,2928	0,924
		15	15	0,3976	0,3468	0,4124	0,4077	0,4122	0,919
		25	25	0,6027	0,5441	0,6130	0,6072	0,6159	0,921
		50	50	0,8927	0,8652	0,8976	0,8962	0,9005	0,963
		15	10	0,3324	0,3418	0,3846	0,3412	0,3458	0,905
		10	15	0,3347	0,3427	0,3868	0,3416	0,3454	0,904
		25	10	0,3738	0,3865	0,4283	0,3816	0,3851	0,904
		10	25	0,3781	0,3880	0,4311	0,3830	0,3887	0,904
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,2 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2898	0,2510	0,3089	0,2922	0,2977	0,923
		15	15	0,3988	0,3467	0,4138	0,4064	0,4128	0,918
		25	25	0,6007	0,5429	0,6110	0,6023	0,6126	0,922
		50	50	0,8923	0,8643	0,8968	0,8986	0,9012	0,963
		15	10	0,3306	0,3392	0,3824	0,3416	0,3451	0,905
		10	15	0,3326	0,3412	0,3846	0,3358	0,3418	0,905
		25	10	0,3740	0,3875	0,4298	0,3826	0,3865	0,902
		10	25	0,3784	0,3896	0,4325	0,3860	0,3902	0,903
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2899	0,2510	0,3091	0,2957	0,3000	0,923
		15	15	0,4006	0,3470	0,4149	0,4104	0,4141	0,918
		25	25	0,6013	0,5438	0,6119	0,6017	0,6120	0,922
		50	50	0,8911	0,8625	0,8960	0,8963	0,8995	0,962
		15	10	0,3339	0,3429	0,3860	0,3413	0,3469	0,905
		10	15	0,3328	0,3415	0,3848	0,3430	0,3456	0,905
		25	10	0,3754	0,3889	0,4306	0,3836	0,3874	0,903
		10	25	0,3780	0,3874	0,4306	0,3836	0,3886	0,904
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,69 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2903	0,3367	0,3537	0,3166	0,3213	0,920
		15	15	0,4030	0,4527	0,4666	0,4327	0,4415	0,923
		25	25	0,6074	0,6534	0,6628	0,6193	0,6367	0,935
		50	50	0,8964	0,9160	0,9186	0,9012	0,9090	0,975
		15	10	0,3352	0,3828	0,3981	0,3572	0,3676	0,922
		10	15	0,3351	0,3830	0,3983	0,3619	0,3684	0,922
		25	10	0,3776	0,4322	0,4442	0,3994	0,4094	0,921
		10	25	0,3800	0,4321	0,4448	0,4012	0,4121	0,923
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,43 \end{pmatrix}$	0,25	10	10	0,1744	0,1506	0,2048	0,1615	0,1608	0,915
		15	15	0,2236	0,1820	0,2524	0,2123	0,2069	0,901
		25	25	0,3333	0,2659	0,3624	0,3072	0,3014	0,874
		50	50	0,5915	0,4837	0,6182	0,5729	0,5563	0,839
		15	10	0,1943	0,1626	0,2229	0,1791	0,1778	0,911
		10	15	0,1927	0,1611	0,2219	0,1817	0,1784	0,910
		25	10	0,2103	0,1747	0,2395	0,1954	0,1916	0,906
		10	25	0,2095	0,1746	0,2388	0,1991	0,1938	0,906
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	1	10	10	0,4992	0,3032	0,5192	0,4238	0,4124	0,764
		15	15	0,6747	0,4030	0,6848	0,6113	0,5808	0,708
		25	25	0,8899	0,6080	0,8927	0,8547	0,8204	0,713
		50	50	0,9958	0,9163	0,9958	0,9939	0,9891	0,920
		15	10	0,5739	0,3402	0,5887	0,5071	0,4841	0,737
		10	15	0,5763	0,3419	0,5919	0,5117	0,4885	0,735
		25	10	0,6488	0,3846	0,6600	0,5863	0,5503	0,713
		10	25	0,6523	0,3849	0,6634	0,5909	0,5549	0,710

Nota: Cenário 3 = $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.15: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 4 - p=2.

Caso de Mudanças nos vetores de médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.6 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2868	0,2351	0,3336	0,2671	0,2651	0,855
		15	15	0,3902	0,3166	0,4375	0,3672	0,3664	0,832
		25	25	0,5960	0,4771	0,6311	0,5715	0,5635	0,811
		50	50	0,8900	0,7902	0,9045	0,8747	0,8705	0,871
		15	10	0,3261	0,2664	0,3738	0,3072	0,3007	0,845
		10	15	0,3258	0,2653	0,3726	0,3054	0,3042	0,846
		25	10	0,3742	0,3015	0,4201	0,3530	0,3503	0,835
		10	25	0,3706	0,3000	0,4167	0,3482	0,3442	0,837
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2846	0,2338	0,3307	0,2603	0,2601	0,857
		15	15	0,3887	0,3134	0,4346	0,3630	0,3623	0,833
		25	25	0,5983	0,4799	0,6337	0,5794	0,5714	0,811
		50	50	0,8900	0,7891	0,9045	0,8730	0,8689	0,870
		15	10	0,3267	0,2664	0,3732	0,3112	0,3026	0,847
		10	15	0,3528	0,2644	0,3730	0,3045	0,3040	0,844
		25	10	0,3729	0,3008	0,4188	0,3503	0,3472	0,836
		10	25	0,3717	0,2998	0,4175	0,3518	0,3459	0,837
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,63 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2848	0,3555	0,3753	0,3319	0,3370	0,890
		15	15	0,3857	0,4706	0,4852	0,4286	0,4434	0,886
		25	25	0,5941	0,6764	0,6849	0,6420	0,6555	0,901
		50	50	0,8870	0,9285	0,9300	0,9095	0,9161	0,956
		15	10	0,3232	0,4014	0,4185	0,3749	0,3782	0,888
		10	15	0,3271	0,4039	0,4215	0,3705	0,3820	0,888
		25	10	0,3727	0,4542	0,4687	0,4165	0,4306	0,889
		10	25	0,3701	0,4537	0,4682	0,4225	0,4318	0,887
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,9 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2867	0,2347	0,3334	0,2697	0,2671	0,855
		15	15	0,3915	0,3146	0,4372	0,3672	0,3649	0,832
		25	25	0,5963	0,4802	0,6325	0,5741	0,5675	0,811
		50	50	0,8884	0,7876	0,9029	0,8727	0,8671	0,870
		15	10	0,3268	0,2672	0,3741	0,3062	0,3002	0,846
		10	15	0,3251	0,2659	0,3724	0,3066	0,3047	0,846
		25	10	0,3723	0,3013	0,4183	0,3471	0,3453	0,837
		10	25	0,3724	0,3015	0,4185	0,3526	0,3470	0,837
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,425 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2826	0,1511	0,3089	0,2311	0,2150	0,816
		15	15	0,3862	0,1865	0,4077	0,3259	0,2952	0,757
		25	25	0,5927	0,2736	0,6061	0,5369	0,4781	0,654
		50	50	0,8856	0,4926	0,8892	0,8526	0,7988	0,599
		15	10	0,3237	0,1637	0,3478	0,2682	0,2389	0,792
		10	15	0,3224	0,1642	0,3470	0,2677	0,2451	0,793
		25	10	0,3698	0,1779	0,3910	0,3141	0,2810	0,766
		10	25	0,3688	0,1786	0,3902	0,3151	0,2793	0,767
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,47 \\ 0,47 \end{pmatrix}$	0,25	10	10	0,1688	0,2111	0,2328	0,1958	0,1995	0,914
		15	15	0,2140	0,2724	0,2893	0,2470	0,2560	0,908
		25	25	0,3236	0,3965	0,4096	0,3695	0,3802	0,901
		50	50	0,5757	0,6678	0,6732	0,6207	0,6361	0,897
		15	10	0,1868	0,2342	0,2539	0,2152	0,2182	0,913
		10	15	0,1868	0,2360	0,2543	0,2211	0,2261	0,914
		25	10	0,2045	0,2587	0,2756	0,2343	0,2430	0,912
		10	25	0,2020	0,2584	0,2746	0,2316	0,2398	0,911
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}$	1	10	10	0,4917	0,2436	0,5142	0,4105	0,3807	0,707
		15	15	0,6641	0,3264	0,6783	0,5905	0,5445	0,634
		25	25	0,8844	0,4940	0,8885	0,8499	0,8007	0,602
		50	50	0,9955	0,8049	0,9956	0,9926	0,9857	0,809
		15	10	0,5660	0,2744	0,5836	0,4908	0,4436	0,673
		10	15	0,5661	0,2739	0,5844	0,4885	0,4484	0,671
		25	10	0,6457	0,3098	0,6592	0,5757	0,5238	0,637
		10	25	0,6443	0,3096	0,6580	0,5770	0,5238	0,628

Nota: Cenário 4 : $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

4.2.2 Matrizes de Covariâncias Conhecidas e Desconhecidas: Análise Comparativa dos Testes - Caso Bivariado.

Para se comparar os resultados das estimativas de poder dos testes para as situações de matrizes de covariâncias iguais conhecidas e desconhecidas é preciso que se observem as seguintes condições: mesma distância de Mahalanobis entre os vetores de médias postuladas nas hipóteses nula e alternativa, mesmos tamanhos amostrais e ainda, estimativas médias de probabilidades de erro do tipo I similares. Nos cenários de matrizes de covariâncias desconhecidas, somente para a situação de tamanhos amostrais $n_1=n_2=50$, essas condições são satisfeitas, sendo assim, somente para este caso foi possível realizar comparações de estimativas de poder entre os casos de matrizes conhecidas e desconhecidas, pois só nesta situação as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I são bem próximas para todos os cenários, em torno de 0,05. Os resultados para essas situações estão resumidas na Tabela 4.16

Em linhas gerais, o que se percebe (com exceção dos casos 1 e 4 do cenário 1) é que as estimativas de poder dos testes são maiores no caso de matrizes de covariâncias conhecidas em relação às estimativas observadas de quando as matrizes de covariâncias são desconhecidas, ainda que sejam sempre bem próximas. Uma explicação para se ter observado um poder maior nos casos 1 e 4 do cenário 1 quando as matrizes de covariâncias são desconhecidas deve-se a questões de aproximação nas simulações, uma vez que esse é um resultado aproximado e não exato, como os apresentados no Anexo A.

Tabela 4.16: Comparação das Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas - $p=2 - n_1=n_2=50$.

Cenário	Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Matrizes de Covariâncias Conhecidas		Matrizes de Covariâncias Desconhecidas	
			T ²	Hayter e Tsui	T ²	Hayter e Tsui
(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	Caso 1	0,5	0,8954	0,8826	0,8958	0,8830
	Caso 2	0,5	0,8956	0,8780	0,8911	0,8778
	Caso 3	0,5	0,8958	0,8811	0,8910	0,8777
	Caso 4	0,5	0,8959	0,8839	0,9032	0,9029
	Caso 5	0,5	0,8937	0,8651	0,8878	0,8622
	Caso 6	0,25	0,6022	0,6172	0,5970	0,6105
	Caso 7	1,0	0,9962	0,9971	0,9956	0,9967
(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Caso 1	0,5	0,8959	0,8813	0,8901	0,8774
	Caso 2	0,5	0,8949	0,8790	0,8911	0,8771
	Caso 3	0,5	0,8991	0,8833	0,8948	0,8827
	Caso 4	0,5	0,9020	0,8858	0,8956	0,8838
	Caso 5	0,5	0,8960	0,8402	0,8899	0,8401
	Caso 6	0,25	0,6019	0,6096	0,5953	0,6097
	Caso 7	1,0	0,9965	0,9975	0,9957	0,9966
(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	Caso 1	0,5	0,8981	0,9046	0,8933	0,8656
	Caso 2	0,5	0,8983	0,9005	0,8927	0,8652
	Caso 3	0,5	0,8983	0,9033	0,8923	0,8643
	Caso 4	0,5	0,8984	0,9042	0,8911	0,8625
	Caso 5	0,5	0,9016	0,9229	0,8964	0,9160
	Caso 6	0,25	0,5880	0,4889	0,5915	0,4837
	Caso 7	1,0	0,9965	0,9244	0,9958	0,9163
(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	Caso 1	0,5	0,9000	0,8023	0,8900	0,7902
	Caso 2	0,5	0,9009	0,7981	0,8900	0,7891
	Caso 3	0,5	0,9000	0,8045	0,8900	0,7899
	Caso 4	0,5	0,8999	0,8028	0,8884	0,7876
	Caso 5	0,5	0,8974	0,4994	0,8856	0,4926
	Caso 6	0,25	0,5933	0,6832	0,5757	0,6678
	Caso 7	1,0	0,9963	0,8204	0,9955	0,8049

4.2.3 Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas: Caso Trivariado

Do mesmo modo que no caso bivariado, para que os testes fossem comparáveis no caso trivariado com matrizes de covariâncias desconhecidas, foi necessário considerar para as simulações do teste T^2 de Hotelling e para os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher os valores das estimativas médias do erro do tipo I obtidos no teste do Hayter & Tsui quando este foi simulado com nível de significância nominal de 0,05, conforme foi explicado no caso bivariado (Seção 4.2.1).

Na Tabela 4.17 são apresentados os resultados das estimativas médias da probabilidade do erro do tipo I para $p=3$, obtidos para o teste de Hayter e Tsui quando o nível de significância nominal utilizado nas simulações foi igual a 0,05. Os valores apresentados na Tabela 4.17 foram usados como os níveis de significância do teste T^2 de Hotelling para que se pudesse comparar as estimativas de poder desse teste com os de Hayter e Tsui.

Tabela 4.17: Estimativas Médias da Probabilidade do Erro Tipo I do Teste de Hayter e Tsui usando um Nível de Significância Nominal de 0,05 – $p=3$ - Matrizes de Covariâncias Iguais.

Tamanhos Amostrais	Matrizes de Covariâncias		
	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$	$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$n_1=n_2=10$	0,0753	0,0743	0,0795
$n_1=n_2=15$	0,0637	0,0636	0,0687
$n_1=n_2=25$	0,0577	0,0562	0,0602
$n_1=n_2=50$	0,0514	0,0512	0,0547
$n_1=15 \ n_2=10$	0,0688	0,0688	0,0735
$n_1=10 \ n_2=15$	0,0689	0,0683	0,0737
$n_1=25 \ n_2=10$	0,0619	0,0618	0,0651
$n_1=10 \ n_2=25$	0,0605	0,0616	0,0659

É possível visualizar que as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I para o teste de Hayter e Tsui tem um acréscimo em relação a 0,05, ficando em torno de 0,0512 a 0,0795. O acréscimo é maior quando os tamanhos das amostras são menores e se aproximam de 0,05 quando os tamanhos amostrais são $n_1=n_2=50$.

Com essas modificações dos níveis de significâncias foi possível realizar apenas comparações das estimativas dos poderes dos testes para cada estrutura n_1, n_2 de tamanhos de amostras, separadamente, não sendo possível verificar a influência no poder quando os tamanhos de amostras são alterados.

Na Tabela 4.18 estão os resultados das estimativas médias obtidas da probabilidade do erro do tipo I para $p=3$ quando as matrizes de covariâncias são iguais e desconhecidas e os níveis de significância nominais apresentados na Tabela 4.17 são usados para o teste T^2 de Hotelling. As estimativas para os testes T^2 de Hotelling, Tippett e Fisher se aproximam dos valores obtidos pelo teste do Hayter e Tsui conforme resultados da Tabela 4.17. Também no caso trivariado, as estimativas para a combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter & Tsui (T^2 e HT comb) foram maiores que os valores obtidos para estes testes separadamente, sendo que a inflação é menor do que seria obtido se os testes fossem considerados independentes.

Tabela 4.18: Estimativa da probabilidade do Erro de Tipo I - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – p=3.

Matrizes de Covariâncias	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
	n ₁	n ₂						
(5) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,07579	0,07529	0,10710	0,07939	0,07804	0,9368
	15	15	0,06413	0,06373	0,09037	0,06452	0,06460	0,9471
	25	25	0,05783	0,05770	0,08105	0,05782	0,05850	0,9534
	50	50	0,05124	0,05139	0,07233	0,05147	0,05185	0,9580
	15	10	0,06878	0,06876	0,09745	0,06850	0,06914	0,9426
	10	15	0,06859	0,06886	0,09707	0,07015	0,06792	0,9433
	25	10	0,06212	0,06187	0,08717	0,06310	0,06230	0,9496
	10	25	0,06015	0,06053	0,08529	0,05878	0,05872	0,9501
(6) $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	10	10	0,07831	0,07433	0,10530	0,07405	0,07384	0,9376
	15	15	0,06304	0,06357	0,08962	0,06483	0,06428	0,9474
	25	25	0,06141	0,05622	0,08194	0,06254	0,06205	0,9537
	50	50	0,05102	0,05119	0,07194	0,05020	0,05007	0,9583
	15	10	0,06909	0,06884	0,09759	0,06766	0,06824	0,9427
	10	15	0,06850	0,06832	0,09672	0,06729	0,06795	0,9434
	25	10	0,06148	0,06162	0,08655	0,05993	0,06074	0,9500
	10	25	0,06284	0,06179	0,08778	0,06152	0,06186	0,9491
(7) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,07820	0,07953	0,10550	0,07776	0,07784	0,9467
	15	15	0,06854	0,06867	0,09126	0,06746	0,06740	0,9547
	25	25	0,05983	0,06016	0,07920	0,06105	0,06397	0,9616
	50	50	0,05514	0,05468	0,07239	0,05447	0,05586	0,9650
	15	10	0,07326	0,07348	0,09789	0,06964	0,07415	0,9510
	10	15	0,07415	0,07365	0,09842	0,07532	0,07438	0,9509
	25	10	0,06570	0,06590	0,08742	0,06651	0,06665	0,9568
	10	25	0,06466	0,06513	0,08661	0,06525	0,06503	0,9566

A partir da Tabela 4.19 até a Tabela 4.21 são apresentados os resultados de poder do teste para matrizes de covariâncias iguais e desconhecidas com p=3 variáveis, que correspondem, respectivamente, aos cenários 5, 6 e 7 apresentados na Seção 3.1.

Através dos resultados das Tabelas 4.19 a 4.21 chega-se, em linhas gerais, às mesmas conclusões obtidas quando as matrizes de covariâncias eram iguais e conhecidas (seção 4.1.1). A única exceção que se apresenta é que nesta situação de matrizes desconhecidas não foi possível avaliar o efeito do desbalanceamento e do aumento dos tamanhos amostrais na estimativa do poder dos testes em vista do fato de se estar usando níveis de significância nominais diferentes para tamanhos amostrais diferentes. As demais conclusões obtidas nas simulações realizadas considerando as matrizes de covariâncias conhecidas são perfeitamente estendidas para o caso em que essas matrizes são desconhecidas.

Pelas Tabelas 4.19 e 4.21 observa-se que nos casos 1 a 2 de mudanças de médias, o Teste T^2 de Hotelling apresenta estimativas de poder bem semelhantes às estimativas dos testes de Hayter e Tsui e de combinação de p-valores de Tippett e Fisher. Nos casos 3 e 4 de mudanças de médias, o Teste T^2 de Hotelling apresenta as melhores estimativas de poder, seguido pelos testes de combinação de p-valores de Tippett e Fisher, respectivamente, e por fim o teste do Hayter e Tsui. Já para os cenários 5 e 6, o teste de Hayter e Tsui é o que possui o melhor poder, seguido pelo Fisher e Tippett, respectivamente, e por fim o T^2 de Hotelling.

Quando a matriz de covariâncias é a identidade (Tabela 4.21) o teste T^2 de Hotelling apresentou uma estimativa de poder um pouco maior que o teste de Hayter e Tsui, embora os valores sejam próximos, seguido pelos testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher (sem preferência por um).

Tabela 4.19: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 5 - p=3.

Caso de Mudanças nos vetores de médias	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
	n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,1198	0,1119	0,1600	0,1213	0,1201	0,9117
	15	15	0,1298	0,1171	0,1689	0,1262	0,1262	0,9092
	25	25	0,1752	0,1450	0,2135	0,1673	0,1654	0,8932
	50	50	0,3073	0,2341	0,3487	0,2903	0,2843	0,8439
	15	10	0,1231	0,1122	0,1618	0,1196	0,1211	0,9119
	10	15	0,1235	0,1128	0,1625	0,1215	0,1176	0,9113
	10	25	0,1270	0,1122	0,1629	0,1203	0,1202	0,9133
	25	10	0,1243	0,1121	0,1620	0,1178	0,1171	0,9124
$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,1203	0,1133	0,1614	0,1207	0,1201	0,9108
	15	15	0,1316	0,1184	0,1707	0,1260	0,1268	0,9086
	25	25	0,1770	0,1466	0,2158	0,1696	0,1680	0,8921
	50	50	0,3075	0,2344	0,3486	0,2909	0,2840	0,8447
	15	10	0,1227	0,1126	0,1615	0,1202	0,1204	0,9123
	10	15	0,1230	0,1117	0,1612	0,1195	0,1159	0,9123
	10	25	0,1262	0,1120	0,1627	0,1221	0,1205	0,9128
	25	10	0,1250	0,1129	0,1624	0,1202	0,1189	0,9131
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,5526$	10	10	0,2711	0,2315	0,3298	0,2655	0,2653	0,8430
	15	15	0,3667	0,2951	0,4213	0,3441	0,3448	0,8192
	25	25	0,5698	0,4347	0,6099	0,5366	0,5332	0,7847
	50	50	0,8818	0,7275	0,8951	0,8611	0,8522	0,8191
	15	10	0,3080	0,2537	0,3632	0,2888	0,2921	0,8353
	10	15	0,3088	0,2539	0,3644	0,2910	0,2863	0,8337
	10	25	0,3508	0,2766	0,4019	0,3269	0,3260	0,8236
	25	10	0,3489	0,2787	0,4016	0,3208	0,3196	0,8245
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,5526$	10	10	0,2714	0,2308	0,3286	0,2621	0,2626	0,8449
	15	15	0,3648	0,2930	0,4191	0,3451	0,3456	0,8196
	25	25	0,5689	0,4352	0,6099	0,5360	0,5327	0,7844
	50	50	0,8797	0,7278	0,8935	0,8574	0,8502	0,8205
	15	10	0,3082	0,2512	0,3636	0,2847	0,2888	0,8321
	10	15	0,3084	0,2528	0,3638	0,2891	0,2846	0,8336
	10	25	0,3542	0,2796	0,4051	0,3334	0,3314	0,8237
	25	10	0,3467	0,2773	0,3989	0,3224	0,3213	0,8262
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,2100	0,2728	0,3018	0,2583	0,2588	0,8792
	15	15	0,2690	0,3462	0,3694	0,3208	0,3275	0,8764
	25	25	0,4207	0,5061	0,5248	0,4732	0,4870	0,8770
	50	50	0,7312	0,7960	0,8057	0,7670	0,7835	0,9158
	15	10	0,2329	0,3007	0,3263	0,2764	0,2817	0,8810
	10	15	0,2333	0,3009	0,3264	0,2789	0,2785	0,8817
	10	25	0,2598	0,3321	0,3549	0,3017	0,3088	0,8820
	25	10	0,2576	0,3323	0,3541	0,2937	0,3030	0,8817
$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,2100	0,2726	0,3011	0,2625	0,2625	0,8802
	15	15	0,2721	0,3498	0,3730	0,3236	0,3298	0,8759
	25	25	0,4236	0,5095	0,5279	0,4743	0,4891	0,8773
	50	50	0,7317	0,7958	0,8058	0,7631	0,7814	0,9160
	15	10	0,2325	0,3017	0,3265	0,2769	0,2833	0,8811
	10	15	0,2327	0,3003	0,3259	0,2823	0,2800	0,8811
	10	25	0,2593	0,3312	0,3530	0,3079	0,3132	0,8845
	25	10	0,2573	0,3322	0,3538	0,3000	0,3067	0,8819

Nota: Cenário 5: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.20: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 6 - p=3.

Caso de Mudanças nos vetores de médias	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
	n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,53 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,1193	0,1054	0,1573	0,1131	0,1118	0,9100
	15	15	0,1300	0,1070	0,1653	0,1228	0,1205	0,9064
	25	25	0,1720	0,1292	0,2070	0,1730	0,1657	0,8872
	50	50	0,3069	0,2028	0,3406	0,2756	0,2599	0,8285
	15	10	0,1233	0,1045	0,1586	0,1132	0,1122	0,9106
	10	15	0,1232	0,1045	0,1591	0,1145	0,1133	0,9095
	10	25	0,1258	0,1019	0,1582	0,1162	0,1134	0,9112
	25	10	0,1274	0,1030	0,1602	0,1169	0,1150	0,9101
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,532 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,1193	0,1058	0,1581	0,1153	0,1143	0,9088
	15	15	0,1325	0,1070	0,1671	0,1244	0,1218	0,9054
	25	25	0,1751	0,1289	0,2090	0,1736	0,1659	0,8859
	50	50	0,3081	0,2015	0,3417	0,2747	0,2588	0,8261
	15	10	0,1235	0,1036	0,1584	0,1134	0,1126	0,9102
	10	15	0,1223	0,1035	0,1580	0,1141	0,1128	0,9098
	10	25	0,1269	0,1012	0,1587	0,1189	0,1150	0,9108
	25	10	0,1269	0,1015	0,1588	0,1179	0,1151	0,9107
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,06 \\ 1,06 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,2690	0,2045	0,3194	0,2437	0,2423	0,8346
	15	15	0,3664	0,2585	0,4118	0,3308	0,3252	0,8013
	25	25	0,5660	0,3836	0,6001	0,5458	0,5269	0,7494
	50	50	0,8818	0,6668	0,8925	0,8522	0,8330	0,7637
	15	10	0,3084	0,2237	0,3556	0,2748	0,2714	0,8210
	10	15	0,3080	0,2230	0,3548	0,2732	0,2705	0,8214
	10	25	0,3545	0,2456	0,3963	0,3197	0,3106	0,8076
	25	10	0,3531	0,2461	0,3964	0,3191	0,3108	0,8063
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,31 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,2689	0,2009	0,3180	0,2417	0,2383	0,8338
	15	15	0,3638	0,2511	0,4075	0,3286	0,3193	0,7999
	25	25	0,5651	0,3763	0,5979	0,5427	0,5213	0,7455
	50	50	0,8790	0,6603	0,8893	0,8488	0,8285	0,7606
	15	10	0,3060	0,2180	0,3530	0,2695	0,2660	0,8181
	10	15	0,3064	0,2180	0,3526	0,2741	0,2685	0,8193
	10	25	0,3513	0,2393	0,3927	0,3176	0,3062	0,8052
	25	10	0,3525	0,2395	0,3933	0,3164	0,3053	0,8054
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,184 \\ 1,184 \\ 1,184 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,2082	0,2407	0,2866	0,2334	0,2348	0,8757
	15	15	0,2705	0,3121	0,3573	0,3005	0,3057	0,8680
	25	25	0,4192	0,4649	0,5115	0,4776	0,4839	0,8611
	50	50	0,7311	0,7651	0,7995	0,7491	0,7626	0,8973
	15	10	0,2325	0,2660	0,3117	0,2551	0,2606	0,8751
	10	15	0,2310	0,2645	0,3096	0,2546	0,2577	0,8762
	10	25	0,2620	0,2966	0,3423	0,2908	0,2934	0,8740
	25	10	0,2594	0,2943	0,3396	0,2857	0,2900	0,8745
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -1,163 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 1,163 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,2053	0,2414	0,2851	0,2366	0,2358	0,8766
	15	15	0,2673	0,3101	0,3537	0,3013	0,3044	0,8699
	25	25	0,4124	0,4596	0,5056	0,4708	0,4764	0,8608
	50	50	0,7249	0,7607	0,7939	0,7451	0,7595	0,8978
	15	10	0,2305	0,2662	0,3097	0,2557	0,2597	0,8773
	10	15	0,2290	0,2652	0,3093	0,2536	0,2575	0,8756
	10	25	0,2581	0,2947	0,3377	0,2829	0,2881	0,8775
	25	10	0,2549	0,2933	0,3356	0,2803	0,2869	0,8770

Nota: Cenário 6: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.21: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 7 - p=3.

Caso de Mudanças nos vetores de médias	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
	n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,263 \\ 0,263 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,1263	0,1259	0,1631	0,1249	0,1266	0,9261
	15	15	0,1376	0,1332	0,1722	0,1366	0,1388	0,9262
	25	25	0,1800	0,1683	0,2159	0,1786	0,1857	0,9166
	50	50	0,3163	0,2826	0,3542	0,3066	0,3130	0,8904
	15	10	0,1299	0,1263	0,1641	0,1244	0,1310	0,9208
	10	15	0,1306	0,1274	0,1653	0,1285	0,1310	0,9275
	10	25	0,1304	0,1260	0,1628	0,1281	0,1294	0,9308
	25	10	0,1344	0,1274	0,1661	0,1327	0,1341	0,9295
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,274 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	10	10	0,1263	0,1264	0,1636	0,1253	0,1274	0,9254
	15	15	0,1400	0,1355	0,1746	0,1393	0,1397	0,9262
	25	25	0,1816	0,1704	0,2179	0,1790	0,1862	0,9162
	50	50	0,3158	0,2816	0,3531	0,3027	0,3085	0,8911
	15	10	0,1298	0,1264	0,1644	0,1228	0,1307	0,9274
	10	15	0,1294	0,1263	0,1638	0,1300	0,1308	0,9280
	10	25	0,1308	0,1270	0,1635	0,1287	0,1307	0,9308
	25	10	0,1329	0,1274	0,1653	0,1331	0,1339	0,9296
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,526 \\ 0,526 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,2809	0,2724	0,3367	0,2754	0,2819	0,8800
	15	15	0,3812	0,3550	0,4320	0,3669	0,3759	0,8722
	25	25	0,5777	0,5266	0,6177	0,5610	0,5778	0,8690
	50	50	0,8873	0,8394	0,9003	0,8723	0,8779	0,9260
	15	10	0,3199	0,3029	0,3719	0,3029	0,3210	0,8790
	10	15	0,3209	0,3024	0,3729	0,3155	0,3205	0,8775
	10	25	0,3630	0,3361	0,4112	0,3513	0,3587	0,8767
	25	10	0,3655	0,3358	0,4124	0,3562	0,3634	0,8766
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,20 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	10	10	0,2806	0,2734	0,3362	0,2810	0,2851	0,8817
	15	15	0,3783	0,3519	0,4290	0,3651	0,3739	0,8723
	25	25	0,5778	0,5266	0,6181	0,5604	0,5761	0,8683
	50	50	0,8861	0,8373	0,8989	0,8707	0,8759	0,9255
	15	10	0,3193	0,3011	0,3718	0,3025	0,3196	0,8768
	10	15	0,3199	0,3024	0,3719	0,3135	0,3193	0,8785
	10	25	0,3610	0,3339	0,4088	0,3500	0,3567	0,8772
	25	10	0,3643	0,3358	0,4128	0,3510	0,3598	0,8744
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,36 \\ 0,36 \\ 0,36 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,2182	0,2093	0,2668	0,2102	0,2163	0,8939
	15	15	0,2848	0,2553	0,3282	0,2680	0,2741	0,8835
	25	25	0,4331	0,3650	0,4698	0,4089	0,4227	0,8585
	50	50	0,7428	0,6281	0,7605	0,7110	0,7119	0,8499
	15	10	0,2430	0,2230	0,2874	0,2240	0,2390	0,8911
	10	15	0,2419	0,2222	0,2862	0,2295	0,2358	0,8916
	10	25	0,2708	0,2414	0,3115	0,2561	0,2612	0,8892
	25	10	0,2704	0,2395	0,3104	0,2601	0,2651	0,8892
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,30 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,705 \\ 0,30 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	10	10	0,2161	0,2088	0,2650	0,2114	0,2160	0,8950
	15	15	0,2822	0,2571	0,3270	0,2705	0,2759	0,8854
	25	25	0,4285	0,3727	0,4682	0,4094	0,4230	0,8647
	50	50	0,7403	0,6430	0,7608	0,7137	0,7159	0,8618
	15	10	0,2421	0,2259	0,2869	0,2277	0,2406	0,8941
	10	15	0,2410	0,2246	0,2861	0,2350	0,2396	0,8935
	10	25	0,2681	0,2432	0,3103	0,2571	0,2616	0,8906
	25	10	0,2682	0,2415	0,3099	0,2580	0,2634	0,8898

Nota: Cenário 7: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

4.2.4 Matrizes de Covariâncias Conhecidas e Desconhecidas: Análise Comparativa dos Testes para o Caso Trivariado

Na Tabela 4.22 encontram-se os resultados das estimativas do poder dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para as situações de matrizes de covariâncias iguais conhecidas e desconhecidas, para $p=3$. Os resultados mostram que as estimativas de poder dos testes quando as matrizes de covariâncias são conhecidas são superiores às estimativas quando as matrizes de covariâncias são desconhecidas, exceto alguns casos nos quais a estimativa de poder para matrizes de covariâncias desconhecidas foi pouco superior, o que é devido às aproximações feitas nas simulações (caso 2 – cenário 6; casos 1 e 2 – cenário 7)

Tabela 4.22: Comparação das Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Iguais Conhecida e Desconhecidas - $p=3$.

Cenários	Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Matrizes de Covariâncias Conhecidas		Matrizes de Covariâncias Desconhecidas	
			T^2	Hayter e Tsui	T^2	Hayter e Tsui
(5) $\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$	Caso 1	0,138	0,3150	0,2389	0,3073	0,2341
	Caso 2	0,138	0,3142	0,2355	0,3075	0,2344
	Caso 3	0,553	0,8923	0,7384	0,8818	0,7275
	Caso 4	0,553	0,8919	0,7352	0,8797	0,7278
	Caso 5	0,338	0,7474	0,8053	0,7312	0,7960
	Caso 6	0,338	0,7469	0,8026	0,7317	0,7958
(6) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	Caso 1	0,138	0,3114	0,2033	0,3069	0,2028
	Caso 2	0,138	0,3146	0,2012	0,3081	0,2015
	Caso 3	0,553	0,8926	0,6710	0,8818	0,6668
	Caso 4	0,553	0,8906	0,6657	0,8790	0,6603
	Caso 5	0,338	0,7455	0,7736	0,7311	0,7651
	Caso 6	0,338	0,7394	0,7615	0,7249	0,7607
(7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Caso 1	0,138	0,3143	0,2740	0,3163	0,2826
	Caso 2	0,138	0,3128	0,2775	0,3158	0,2816
	Caso 3	0,553	0,8925	0,8418	0,8873	0,8394
	Caso 4	0,553	0,8903	0,8435	0,8861	0,8373
	Caso 5	0,338	0,7470	0,6253	0,7428	0,6281
	Caso 6	0,338	0,7476	0,6290	0,7403	0,6430

4.3 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas

Nesta seção foi avaliado o desempenho dos testes nas situações em que as matrizes de covariâncias são diferentes e conhecidas, nos casos bivariados e trivariados (seções 4.3.1 e 4.3.2).

Quando as matrizes de covariâncias são diferentes e a distribuição dos dados amostrais é normal multivariada, o processo de inferência a respeito da comparação das médias das duas populações é menos preciso e é conhecido como problema de Behrens-Fisher multivariado (Christensen & Rencher, 1997). Maiores detalhes podem ser vistos em Ferreira(2008).

4.3.1 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas: Caso Bivariado

Na Tabela 4.23 apresentam-se os resultados para as estimativas médias obtidas da probabilidade do erro do tipo I.

Para as matrizes de covariâncias consideradas no estudo de simulação, tanto para o teste T^2 de Hotelling quanto para o Hayter e Tsui as estimativas são bem próximas do valor do nível de significância nominal de 0,05, usado para a construção da região de rejeição da hipótese nula em ambos os testes. O mesmo ocorre para os teste de combinação de p-valores de Fisher e Tippett.

Por fim, as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I para a combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter & Tsui são pouco maiores que 0,05 (próximos a 0,065), um valor menor do que o esperado da combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter & Tsui (T^2 e HT comb) quando os testes são considerados independentes.

Tabela 4.23: Estimativas de Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas - $p=2$.

Matrizes de Covariâncias Diferentes (Cenário)	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
	n ₁	n ₂						
(8) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	5	5	0,05022	0,05032	0,06154	0,05047	0,05035	0,9775
	10	10	0,04922	0,04947	0,06025	0,05013	0,05028	0,9782
	15	15	0,05003	0,05259	0,06304	0,05126	0,05100	0,9765
	25	25	0,04928	0,05042	0,06094	0,05051	0,05081	0,9778
	50	50	0,04918	0,04903	0,05999	0,04957	0,04961	0,9782
	5	10	0,05020	0,04888	0,06071	0,04806	0,04825	0,9777
	10	5	0,04990	0,05217	0,06263	0,04990	0,05027	0,9768
	15	5	0,04923	0,04964	0,06030	0,04924	0,04992	0,9783
	5	25	0,05020	0,05045	0,06119	0,04975	0,05016	0,9783
(9) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	5	5	0,05083	0,04994	0,06196	0,05015	0,05024	0,9768
	10	10	0,05085	0,04896	0,06132	0,05050	0,05060	0,9772
	15	15	0,05077	0,05085	0,06139	0,05042	0,05027	0,9769
	25	25	0,05062	0,04965	0,06162	0,05097	0,05092	0,9770
	50	50	0,04994	0,05022	0,06158	0,05094	0,05087	0,9770
	5	10	0,05089	0,04909	0,06157	0,04942	0,04949	0,9768
	10	5	0,04966	0,05085	0,06250	0,05018	0,05058	0,9755
	15	5	0,04983	0,05052	0,06262	0,04849	0,04891	0,9751
	5	25	0,04974	0,05038	0,06143	0,04996	0,04984	0,9773
(10) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	5	5	0,05010	0,04981	0,06229	0,04924	0,04920	0,9753
	10	10	0,05083	0,04897	0,06204	0,05069	0,05122	0,9757
	15	15	0,05028	0,04900	0,06173	0,04873	0,04907	0,9758
	25	25	0,05058	0,05008	0,06280	0,04967	0,04958	0,9751
	50	50	0,05028	0,05000	0,06232	0,05031	0,05067	0,9756
	5	10	0,05073	0,04890	0,06157	0,04952	0,04965	0,9765
	10	5	0,04983	0,05109	0,06452	0,04923	0,04906	0,9719
	15	5	0,04967	0,05049	0,06498	0,04718	0,04832	0,9702
	5	25	0,04982	0,05003	0,06105	0,04867	0,04867	0,9777
(11) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	5	5	0,05045	0,05126	0,06671	0,05003	0,05054	0,9683
	10	10	0,04917	0,04958	0,06474	0,05045	0,05081	0,9693
	15	15	0,04972	0,05076	0,06616	0,05065	0,05026	0,9682
	25	25	0,04958	0,05031	0,06521	0,05056	0,05119	0,9695
	50	50	0,05017	0,04872	0,06447	0,04960	0,04954	0,9699
	5	10	0,05020	0,04995	0,06488	0,04868	0,04878	0,9704
	10	5	0,05008	0,05197	0,06814	0,04995	0,04992	0,9658
	15	5	0,05048	0,04997	0,06731	0,05104	0,05124	0,9858
	5	25	0,04913	0,04791	0,06199	0,04993	0,04987	0,9731

A partir da Tabela 4.24 até a Tabela 4.27, estão os resultados das estimativas do poder dos testes obtidos via simulação para os 4 cenários de matrizes de covariâncias diferentes conhecidas para $p=2$ variáveis, apresentados na seção 3.1. No Anexo B encontram-se outros casos de mudanças de médias que também foram avaliados para estes mesmos cenários (Tabelas B.7 a B.10).

Observando-se os resultados dessas Tabelas verifica-se que, independentemente da estrutura da matriz de covariâncias, o desempenho dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui são próximos na maioria dos casos

analisados. Há situações em que, ora T^2 de Hotelling supera Hayter e Tsui, ora é o contrário que acontece.

Para os cenários das Tabelas 4.24 e 4.27, onde se tem a situação de, respectivamente, 2 matrizes de covariâncias sem correlação (cenário 8) e 2 matrizes de covariâncias com correlação de 0,5 e 0,8 (cenário 11), o teste de T^2 de Hotelling quase sempre supera o poder do teste de Hayter e Tsui nos casos 1 a 4 de mudanças de médias avaliados. Para a o cenário 11, cujos resultados são apresentados na Tabela 4.27, esse fato também ocorre para os casos 6 e 7 de mudança nos vetores de médias. Porém, nos casos 5 e 6 da Tabela 4.24 e, apenas, no caso 5 da Tabela 4.27 é a estimativa do poder do teste do Hayter e Tsui que supera a estimativa do T^2 de Hotelling.

Já para os cenários das Tabelas 4.25 e 4.26, onde se tem a situação de, respectivamente, matriz de covariâncias identidade com correlação 0,5 (cenário 9) e matriz de covariâncias identidade com matriz de correlação 0,8 (cenário 10), o teste Hayter e Tsui supera o poder do Teste de T^2 de Hotelling nos casos de 1 a 4 de mudança de médias que foram avaliados. Para o cenário 9 da Tabela 4.25 esse fato também ocorre para os caso 5. Porém, no caso 6 da Tabela 4.25 e para os casos 5 a 7 da Tabela 4.26, é o poder do teste de T^2 de Hotelling que supera o poder do Hayter e Tsui.

Quanto ao efeito da direção da mudança do vetor de médias na estimativa do poder dos testes o que se pode verificar é que, quando há mudança em apenas uma população e nas duas variáveis dessa população, a direção da mudança parece exercer efeito sobre o poder do teste. Na Tabela Tabela 4.26 do cenário 10, o que se pode verificar é que enquanto no caso 1 de mudança de médias desta tabela, onde a mudança ocorre apenas na segunda população, nas duas variáveis e em sentido negativo, o que se percebe é que o poder do Hayter e Tsui é maior que o poder do teste T^2 de Hotelling. Porém, para os casos 5 e 7 da Tabela 4.26, quando, respectivamente, a mudança no vetor de médias continua ocorrendo apenas na segunda população, nas duas variáveis, porém uma variável em sentido positivo e outra em sentido negativo, o que se verifica é que o poder do Teste T^2 de Hotelling é superior ao do Hayter e Tsui. Assim, verifica-se que, para os cenários 9 e 10, o sentido único negativo para uma única população alterada é favorável ao teste do Hayter e

Tsui, enquanto sentido único positivo e sentido diferentes para uma única população alterada é favorável ao teste de T^2 de Hotelling.

Entretanto, quando o cenário analisado é o 11, da Tabela 4.27, o que se verifica é que, no caso 1 de mudança de médias, onde a mudança também ocorre apenas na segunda população, nas duas variáveis e em sentido negativo, e caso 6 e 7, quando a mudança ocorre apenas na segunda população, nas duas variáveis e em sentidos opostos, o que se percebe é que o poder do T^2 de Hotelling é maior que o poder do teste Hayter e Tsui, sendo bem maior do que este nos casos 6 e 7. Portanto, estas situações descritas parecem evidenciar o efeito de direção da mudança do vetor de médias exercendo algum tipo de influência nos resultados das estimativas de poder dos testes.

Avaliando-se agora o comportamento dos testes de combinação de p-valores de Tippett e Fisher o que se poder verificar em quase todos os cenários das Tabelas 4.24 a 4.27 é que estes testes possuem desempenho bem próximos um do outro, sendo que ora um é superior ao outro e vice-versa.

Como as distâncias de Mahalanobis entre os vetores de médias postuladas nas hipóteses nulas e alternativas não são iguais para todos os cenários, não foi possível comparar o efeito das 4 combinações de matrizes de covariâncias diferentes nas estimativas do poder dos testes entre si.

Tabela 4.24: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 8 - p=2.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop.de Concor dância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.661 \end{pmatrix}$	0,12	5	5	0,0971	0,0933	0,1122	0,0968	0,0963	0,956
		10	10	0,1500	0,1425	0,1707	0,1514	0,1504	0,951
		15	15	0,2042	0,1895	0,2273	0,2002	0,1993	0,934
		25	25	0,3175	0,2918	0,3438	0,3130	0,3114	0,922
		50	50	0,5785	0,5363	0,6050	0,5722	0,5665	0,905
		5	10	0,1280	0,1277	0,1503	0,1278	0,1268	0,955
		10	5	0,1076	0,1017	0,1233	0,1044	0,1044	0,963
		15	5	0,1097	0,1023	0,1251	0,1073	0,1074	0,962
		5	25	0,1757	0,1656	0,1975	0,1717	0,1721	0,946
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.661 \end{pmatrix}$	0,12	5	5	0,0981	0,0962	0,1147	0,0986	0,0977	0,965
		10	10	0,1496	0,1444	0,1713	0,1520	0,1510	0,952
		15	15	0,2051	0,1950	0,2307	0,2044	0,2026	0,939
		25	25	0,3176	0,2922	0,3441	0,3145	0,3115	0,922
		50	50	0,5793	0,5346	0,6045	0,5726	0,5672	0,905
		5	10	0,1279	0,1252	0,1482	0,1265	0,1260	0,957
		10	5	0,1058	0,1019	0,1227	0,1037	0,1039	0,962
		15	5	0,1097	0,1080	0,1293	0,1104	0,1099	0,959
		5	25	0,1755	0,1704	0,2000	0,1748	0,1741	0,946
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0.166 \end{pmatrix}$	0,12	5	5	0,0989	0,0963	0,1162	0,0990	0,0983	0,963
		10	10	0,1497	0,1425	0,1703	0,1510	0,1501	0,952
		15	15	0,2049	0,1933	0,2298	0,2028	0,2013	0,939
		25	25	0,3220	0,2958	0,3482	0,3171	0,3155	0,921
		50	50	0,5850	0,5353	0,6085	0,5771	0,5704	0,903
		5	10	0,1270	0,1209	0,1461	0,1236	0,1232	0,956
		10	5	0,1053	0,0987	0,1208	0,1018	0,1017	0,962
		15	5	0,1088	0,1067	0,1278	0,1098	0,1089	0,959
		5	25	0,1780	0,1686	0,2005	0,1747	0,1749	0,946
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,12	5	5	0,0980	0,0977	0,1160	0,0999	0,0990	0,964
		10	10	0,1500	0,1427	0,1709	0,1521	0,1509	0,951
		15	15	0,2082	0,1910	0,2298	0,2031	0,2020	0,939
		25	25	0,3216	0,2961	0,3480	0,3178	0,3153	0,922
		50	50	0,5872	0,5377	0,6108	0,5769	0,5722	0,903
		5	10	0,1292	0,1264	0,1499	0,1265	0,1265	0,956
		10	5	0,1063	0,1018	0,1231	0,1043	0,1042	0,962
		15	5	0,1106	0,1074	0,1287	0,1106	0,1109	0,961
		5	25	0,1775	0,1693	0,2006	0,1750	0,1748	0,946
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,58 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,2747	0,2755	0,3075	0,2782	0,2786	0,935
		10	10	0,5011	0,5108	0,5430	0,5124	0,5146	0,926
		15	15	0,6860	0,7069	0,7299	0,6998	0,7010	0,933
		25	25	0,8965	0,9069	0,9170	0,9042	0,9058	0,969
		50	50	0,9966	0,9973	0,9977	0,9970	0,9972	0,999
		5	10	0,4312	0,4348	0,4692	0,4304	0,4337	0,927
		10	5	0,3006	0,3078	0,3384	0,3045	0,3056	0,932
		15	5	0,3100	0,3127	0,3451	0,3133	0,3156	0,933
		5	25	0,6512	0,6628	0,6902	0,6576	0,6612	0,934
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,25 \end{pmatrix}$	1,0	5	5	0,5094	0,5171	0,5503	0,5180	0,5190	0,926
		10	10	0,8199	0,8325	0,8487	0,8306	0,8328	0,955
		15	15	0,9468	0,9528	0,9586	0,9501	0,9515	0,983
		25	25	0,9967	0,9974	0,9978	0,9971	0,9973	0,999
		50	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		5	10	0,7413	0,7603	0,7806	0,7512	0,7526	0,941
		10	5	0,5553	0,5628	0,5953	0,5588	0,5623	0,927
		15	5	0,5714	0,5764	0,6089	0,5762	0,5796	0,930
		5	25	0,9288	0,9357	0,9431	0,9323	0,9342	0,978

Nota: Cenário 8: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.25: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 9 - $p=2$.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concórdância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.661 \end{pmatrix}$	0,22	5	5	0,1420	0,1460	0,1656	0,1419	0,1456	0,959
		10	10	0,2465	0,2559	0,2802	0,2509	0,2556	0,942
		15	15	0,3536	0,3693	0,3951	0,3568	0,3640	0,933
		25	25	0,5495	0,5737	0,5965	0,5599	0,5665	0,930
		50	50	0,8564	0,8685	0,8801	0,8613	0,8657	0,965
		5	10	0,1801	0,1782	0,2031	0,1757	0,1794	0,952
		10	5	0,1750	0,1824	0,2043	0,1781	0,1826	0,949
		15	5	0,1939	0,2042	0,2267	0,1968	0,2001	0,945
		5	25	0,2237	0,2208	0,2510	0,2224	0,2248	0,943
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.661 \end{pmatrix}$	0,22	5	5	0,1439	0,1487	0,1678	0,1438	0,1476	0,957
		10	10	0,2470	0,2597	0,2831	0,2548	0,2581	0,941
		15	15	0,3541	0,3673	0,3943	0,3557	0,3630	0,933
		25	25	0,5483	0,5659	0,5904	0,5536	0,5615	0,933
		50	50	0,8565	0,8696	0,8804	0,8618	0,8661	0,965
		5	10	0,1813	0,1881	0,2101	0,1831	0,1857	0,942
		10	5	0,1752	0,1831	0,2046	0,1803	0,1834	0,949
		15	5	0,1908	0,1960	0,2203	0,1896	0,1946	0,946
		5	25	0,2213	0,2207	0,2497	0,2220	0,2237	0,943
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0.166 \end{pmatrix}$	0,22	5	5	0,1448	0,1489	0,1689	0,1443	0,1477	0,951
		10	10	0,2498	0,2611	0,2852	0,2567	0,2604	0,941
		15	15	0,3585	0,3725	0,3990	0,3632	0,3692	0,933
		25	25	0,5553	0,5762	0,5990	0,5621	0,5698	0,933
		50	50	0,8622	0,8744	0,8851	0,8665	0,8710	0,966
		5	10	0,1834	0,1904	0,2128	0,1857	0,1880	0,948
		10	5	0,1763	0,1809	0,2041	0,1780	0,1826	0,949
		15	5	0,1935	0,1965	0,2217	0,1905	0,1963	0,947
		5	25	0,2280	0,2293	0,2581	0,2293	0,2302	0,941
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,22	5	5	0,1441	0,1470	0,1673	0,1433	0,1472	0,957
		10	10	0,2516	0,2703	0,2925	0,2621	0,2655	0,937
		15	15	0,3586	0,3746	0,4000	0,3629	0,3692	0,933
		25	25	0,5572	0,5720	0,5974	0,5608	0,5696	0,935
		50	50	0,8629	0,8758	0,8867	0,8687	0,8727	0,965
		5	10	0,1830	0,1862	0,2094	0,1825	0,1851	0,950
		10	5	0,1774	0,1857	0,2073	0,1827	0,1858	0,948
		15	5	0,1942	0,2006	0,2244	0,1933	0,1982	0,946
		5	25	0,2263	0,2256	0,2550	0,2284	0,2288	0,942
$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,53 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,53 \end{pmatrix}$	0,22	5	5	0,1459	0,1533	0,1702	0,1458	0,1512	0,959
		10	10	0,2467	0,2573	0,2786	0,2495	0,2566	0,947
		15	15	0,3567	0,3738	0,3972	0,3599	0,3686	0,936
		25	25	0,5559	0,5640	0,5920	0,5538	0,5649	0,936
		50	50	0,8615	0,8530	0,8755	0,8542	0,8609	0,964
		5	10	0,1890	0,1893	0,2133	0,1864	0,1903	0,952
		10	5	0,1688	0,1890	0,2017	0,1762	0,1828	0,954
		15	5	0,1803	0,1974	0,2111	0,1808	0,1903	0,955
		5	25	0,2417	0,2297	0,2665	0,2383	0,2391	0,938
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,97 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,2734	0,2609	0,3052	0,2700	0,2705	0,924
		10	10	0,5039	0,4877	0,5415	0,5073	0,5049	0,909
		15	15	0,6901	0,6721	0,7218	0,6893	0,6884	0,919
		25	25	0,8972	0,8885	0,9138	0,8981	0,8974	0,958
		50	50	0,9967	0,9961	0,9977	0,9968	0,9968	0,998
		5	10	0,3424	0,3456	0,3832	0,3459	0,3453	0,922
		10	5	0,3720	0,3395	0,4050	0,3719	0,3647	0,902
		15	5	0,4243	0,3744	0,4545	0,4122	0,4050	0,890
		5	25	0,4098	0,4120	0,4490	0,4133	0,4147	0,924

Nota: Cenário 9: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.26: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 10 - $p=2$.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.661 \end{pmatrix}$	0,22	5	5	0,1402	0,1451	0,1659	0,1408	0,1434	0,954
		10	10	0,2452	0,2529	0,2799	0,2485	0,2541	0,938
		15	15	0,3497	0,3658	0,3934	0,3524	0,3593	0,929
		25	25	0,5409	0,5620	0,5881	0,5505	0,5578	0,926
		50	50	0,8500	0,8671	0,8788	0,8582	0,8646	0,959
		5	10	0,1752	0,1812	0,2027	0,1794	0,1805	0,951
		10	5	0,1780	0,1797	0,2106	0,1792	0,1809	0,937
		15	5	0,2042	0,1984	0,2395	0,2023	0,2032	0,924
		5	25	0,2208	0,2235	0,2497	0,2184	0,2215	0,945
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.661 \end{pmatrix}$	0,22	5	5	0,1422	0,1487	0,1695	0,1440	0,1459	0,952
		10	10	0,2452	0,2514	0,2788	0,2489	0,2537	0,939
		15	15	0,3478	0,3650	0,3924	0,3520	0,3574	0,928
		25	25	0,5423	0,5629	0,5890	0,5508	0,5593	0,927
		50	50	0,8508	0,8648	0,8770	0,8573	0,8637	0,962
		5	10	0,1763	0,1844	0,2048	0,1800	0,1824	0,951
		10	5	0,1788	0,1738	0,2068	0,1754	0,1786	0,939
		15	5	0,2028	0,1966	0,2378	0,2009	0,2026	0,924
		5	25	0,2193	0,2229	0,2492	0,2174	0,2201	0,944
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0.166 \end{pmatrix}$	0,22	5	5	0,1430	0,1499	0,1710	0,1442	0,1463	0,951
		10	10	0,2470	0,2545	0,2815	0,2516	0,2562	0,939
		15	15	0,3529	0,3767	0,4033	0,3630	0,3664	0,923
		25	25	0,5501	0,5696	0,5964	0,5581	0,5662	0,927
		50	50	0,8560	0,8736	0,8845	0,8657	0,8704	0,961
		5	10	0,1774	0,1850	0,2057	0,1809	0,1834	0,951
		10	5	0,1818	0,1789	0,2114	0,1793	0,1819	0,938
		15	5	0,2076	0,2032	0,2442	0,2051	0,2077	0,922
		5	25	0,2227	0,2216	0,2496	0,2183	0,2211	0,945
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,22	5	5	0,1423	0,1458	0,1679	0,1425	0,1444	0,953
		10	10	0,2470	0,2579	0,2849	0,2536	0,2577	0,935
		15	15	0,3529	0,3635	0,3932	0,3544	0,3606	0,930
		25	25	0,5502	0,5697	0,5962	0,5590	0,5670	0,928
		50	50	0,8569	0,8736	0,8847	0,8651	0,8707	0,961
		5	10	0,1805	0,1855	0,2073	0,1825	0,1851	0,950
		10	5	0,1832	0,1862	0,2173	0,1851	0,1864	0,935
		15	5	0,2053	0,1977	0,2394	0,2024	0,2041	0,924
		5	25	0,2220	0,2277	0,2533	0,2221	0,2241	0,943
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,55 \\ -0,55 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,2757	0,1754	0,2917	0,2565	0,2319	0,868
		10	10	0,5056	0,3121	0,5172	0,4806	0,4350	0,783
		15	15	0,6919	0,4624	0,7006	0,6630	0,6123	0,753
		25	25	0,8995	0,6948	0,9019	0,8832	0,8486	0,790
		50	50	0,9965	0,9562	0,9966	0,9954	0,9922	0,960
		5	10	0,2980	0,2136	0,3149	0,2828	0,2633	0,882
		10	5	0,4444	0,2266	0,4556	0,4107	0,3588	0,760
		15	5	0,5577	0,2533	0,5654	0,5158	0,4475	0,680
		5	25	0,3139	0,2533	0,3341	0,2968	0,2851	0,899
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,92 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,2745	0,2376	0,3028	0,2656	0,2590	0,907
		10	10	0,5053	0,4461	0,5367	0,5002	0,4894	0,878
		15	15	0,6919	0,6267	0,7175	0,6808	0,6705	0,884
		25	25	0,8985	0,8554	0,9111	0,8941	0,8889	0,932
		50	50	0,9967	0,9924	0,9972	0,9964	0,9962	0,995
		5	10	0,3242	0,3249	0,3626	0,3293	0,3243	0,914
		10	5	0,4102	0,3130	0,4368	0,3920	0,3720	0,850
		15	5	0,4989	0,3493	0,5208	0,4711	0,4421	0,807
		5	25	0,3769	0,3742	0,4141	0,3734	0,3744	0,923
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,78 \\ -0,78 \end{pmatrix}$	1,0	5	5	0,5096	0,3197	0,5219	0,4798	0,4366	0,785
		10	10	0,8226	0,5805	0,8267	0,8017	0,7574	0,750
		15	15	0,9470	0,7849	0,9482	0,9364	0,9123	0,836
		25	25	0,9969	0,9563	0,9970	0,9960	0,9926	0,959
		50	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,200
		5	10	0,5479	0,4042	0,5632	0,5277	0,4956	0,826
		10	5	0,7571	0,4311	0,7618	0,7243	0,6603	0,665
		15	5	0,8657	0,4849	0,8678	0,8393	0,7803	0,615
		5	25	0,5729	0,4731	0,5905	0,5512	0,5325	0,865

Nota: Cenário 10: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de

Mahalanobis.

Tabela 4.27: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 11 - $p=2$.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.7 \end{pmatrix}$	0,281	5	5	0,1689	0,1542	0,1984	0,1657	0,1634	0,926
		10	10	0,3038	0,2730	0,3402	0,2993	0,3002	0,896
		15	15	0,4353	0,4005	0,4783	0,4309	0,4303	0,879
		25	25	0,6591	0,6113	0,6937	0,6550	0,6566	0,883
		50	50	0,9298	0,9019	0,9410	0,9267	0,9284	0,950
		5	10	0,2044	0,1944	0,2383	0,2004	0,2004	0,922
		10	5	0,2258	0,1963	0,2602	0,2194	0,2141	0,907
		15	5	0,2600	0,2204	0,2976	0,2518	0,2481	0,885
		5	25	0,2389	0,2367	0,2774	0,2442	0,2459	0,921
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.7 \end{pmatrix}$	0,281	5	5	0,1701	0,1576	0,2018	0,1707	0,1670	0,924
		10	10	0,3016	0,2754	0,3409	0,3023	0,3011	0,895
		15	15	0,4347	0,3992	0,4772	0,4223	0,4305	0,879
		25	25	0,6579	0,6179	0,6967	0,6563	0,6584	0,883
		50	50	0,9290	0,9058	0,9422	0,9283	0,9291	0,950
		5	10	0,2028	0,1918	0,2352	0,1979	0,1990	0,924
		10	5	0,2250	0,1954	0,2602	0,2194	0,2140	0,900
		15	5	0,2612	0,2205	0,2976	0,2546	0,2499	0,887
		5	25	0,2409	0,2404	0,2801	0,2460	0,2484	0,921
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,2 \end{pmatrix}$	0,281	5	5	0,1709	0,1562	0,2015	0,1695	0,1659	0,924
		10	10	0,3060	0,2810	0,3468	0,3045	0,3043	0,894
		15	15	0,4350	0,3968	0,4759	0,4307	0,4284	0,880
		25	25	0,6571	0,6126	0,6941	0,6524	0,6563	0,882
		50	50	0,9307	0,9071	0,9435	0,9297	0,9306	0,951
		5	10	0,2045	0,1987	0,2412	0,2015	0,2024	0,921
		10	5	0,2251	0,1942	0,2584	0,2181	0,2126	0,903
		15	5	0,2621	0,2211	0,2995	0,2558	0,2499	0,884
		5	25	0,2397	0,2331	0,2745	0,2426	0,2448	0,924
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,281	5	5	0,1706	0,1555	0,2000	0,1680	0,1664	0,926
		10	10	0,3034	0,2790	0,3442	0,3022	0,3029	0,895
		15	15	0,4339	0,4003	0,4776	0,4323	0,4296	0,879
		25	25	0,6562	0,6202	0,6976	0,6557	0,6587	0,881
		50	50	0,9292	0,9077	0,9426	0,9287	0,9296	0,952
		5	10	0,2056	0,1943	0,2387	0,2008	0,2008	0,923
		10	5	0,2256	0,1993	0,2623	0,2199	0,2152	0,900
		15	5	0,2599	0,2186	0,2957	0,2528	0,2471	0,887
		5	25	0,2408	0,2380	0,2789	0,2452	0,2474	0,921
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,7 \end{pmatrix}$	0,25	5	5	0,1558	0,1782	0,1961	0,1636	0,1705	0,942
		10	10	0,2682	0,3065	0,3240	0,2872	0,2993	0,927
		15	15	0,3874	0,4429	0,4577	0,4166	0,4274	0,915
		25	25	0,5982	0,6561	0,6667	0,6256	0,6429	0,921
		50	50	0,8924	0,9190	0,9221	0,9038	0,9118	0,967
		5	10	0,1943	0,2211	0,2366	0,1982	0,2096	0,942
		10	5	0,1908	0,2162	0,2376	0,2005	0,2084	0,932
		15	5	0,2095	0,2375	0,2610	0,2217	0,2325	0,925
		5	25	0,2277	0,2709	0,2840	0,2507	0,2624	0,941
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	1	5	5	0,5144	0,2128	0,5223	0,4749	0,4019	0,683
		10	10	0,8268	0,3943	0,8291	0,7999	0,7283	0,563
		15	15	0,9508	0,5664	0,9513	0,9391	0,8983	0,615
		25	25	0,9973	0,8323	0,9973	0,9962	0,9909	0,835
		50	50	1,0000	0,9969	1,0000	1,0000	1,0000	0,997
		5	10	0,5845	0,2749	0,5929	0,5433	0,4753	0,674
		10	5	0,7172	0,2772	0,7209	0,6767	0,5876	0,553
		15	5	0,8085	0,3076	0,8105	0,7750	0,6873	0,495
		5	25	0,6346	0,3206	0,6410	0,6023	0,5346	0,673
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,42 \\ -0,42 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,2756	0,1295	0,2897	0,2495	0,2095	0,826
		10	10	0,5082	0,2074	0,5160	0,4711	0,4025	0,684
		15	15	0,6925	0,3063	0,6978	0,6562	0,5755	0,603
		25	25	0,8984	0,4702	0,8994	0,8782	0,8213	0,570
		50	50	0,9968	0,8284	0,9968	0,9957	0,9891	0,832
		5	10	0,3171	0,1573	0,3313	0,2858	0,2451	0,812
		10	5	0,4099	0,1601	0,4200	0,3693	0,3048	0,730
		15	5	0,4868	0,1771	0,4956	0,4449	0,3694	0,673
		5	25	0,3465	0,1825	0,3608	0,3224	0,2796	0,807

Nota: Cenário 11: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de

Mahalanobis.

4.3.2 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas: Caso Trivariado

Na Tabela 4.28 apresentam-se os resultados para as estimativas médias obtidas da probabilidade do erro do tipo I para $p=3$. Para todos os testes as estimativas de poder são bem próximas do nível de significância nominal de 0,05 para todas as matrizes de covariâncias consideradas. Assim como nos casos tratados anteriormente para os testes de combinação de p-valores de Fisher e Tippett usou-se a correção da combinação de p-valores como discutido na Seção 3.2.3 (página 58). Já para a combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui (T^2 e HT comb) as estimativas da probabilidade do erro tipo I são pouco maiores que 0,05, obtendo-se valores próximos a 0,07, uma inflação semelhante ao ocorrido nos modelos discutidos anteriormente.

Tabela 4.28: Estimativas da Probabilidade do Erro Tipo I - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas - $p=3$.

Matrizes de Covariâncias Diferentes (Cenário)	Tamanhos de Amostra		T^2 de Hotelling	Hayter & Tsui	T^2 & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor dância
	n_1	n_2						
(12) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	5	5	0,04965	0,04946	0,06838	0,05005	0,04913	0,9624
	10	10	0,05024	0,05119	0,06982	0,05022	0,04983	0,9618
	15	15	0,04926	0,05092	0,06927	0,04994	0,05007	0,9616
	25	25	0,05020	0,04959	0,06865	0,04902	0,04884	0,9627
	50	50	0,04901	0,04954	0,06807	0,04938	0,04904	0,9624
	15	10	0,05023	0,05122	0,07039	0,05140	0,05169	0,9610
	10	15	0,05076	0,05102	0,06947	0,05223	0,05160	0,9628
	25	10	0,04929	0,04988	0,06876	0,05011	0,05092	0,9617
	10	25	0,05114	0,05138	0,06935	0,05145	0,05079	0,9638
(13) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$	5	5	0,04950	0,05185	0,06784	0,05021	0,05054	0,9657
	10	10	0,04997	0,05047	0,06700	0,05020	0,05071	0,9664
	15	15	0,04951	0,05133	0,06736	0,05125	0,05114	0,9661
	25	25	0,04983	0,04972	0,06649	0,04988	0,04915	0,9666
	50	50	0,04964	0,05122	0,06747	0,05153	0,05128	0,9659
	15	10	0,05054	0,04942	0,06706	0,05019	0,05003	0,9658
	10	15	0,05057	0,05062	0,06706	0,04933	0,04981	0,9671
	25	10	0,04956	0,04889	0,06654	0,04999	0,04998	0,9654
	10	25	0,05052	0,05051	0,06640	0,04965	0,05022	0,9682
(14) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	5	5	0,05038	0,05278	0,07228	0,05026	0,05001	0,9586
	10	10	0,04985	0,04878	0,06885	0,04900	0,04781	0,9609
	15	15	0,04931	0,04986	0,06955	0,05009	0,04811	0,9601
	25	25	0,04981	0,05015	0,06973	0,05036	0,04892	0,9605
	50	50	0,04945	0,05079	0,07014	0,05034	0,04932	0,9600
	15	10	0,05094	0,04949	0,06972	0,05037	0,04895	0,9610
	10	15	0,05086	0,05028	0,07065	0,05158	0,05031	0,9598
	25	10	0,04963	0,04860	0,06865	0,05017	0,04922	0,9609
	10	25	0,05051	0,04970	0,06990	0,05118	0,04907	0,9604

Nas Tabelas 4.29 a 4.31 são apresentados os resultados de estimativa de poder dos testes para $p=3$ variáveis, que correspondem, respectivamente, aos cenários 12, 13 e 14 apresentados na seção 3.1.

Através desses resultados observa-se que o teste de Hayter e Tsui possui uma estimativa de poder inferior ao teste T^2 de Hotelling em praticamente todas as situações dos 4 primeiros casos de mudanças de vetores de médias. Porém, nos cenários 5 e 6, quando a mudança no vetor de médias ocorre, respectivamente, ora apenas na segunda população para todas as variáveis sempre na mesma direção, ora nas duas populações em apenas duas variáveis de cada população, a estimativa do poder do teste do Hayter e Tsui supera a do T^2 de Hotelling.

Nos casos de 1 a 4, verifica-se que quanto maior o tamanho da amostra e a distância de Mahalanobis (d) maior é a diferença nas estimativas do poder dos testes a favor do T^2 de Hotelling sobre o Hayter e Tsui para todos os cenários das Tabelas 4.29, 4.30 e 4.31. Já nos casos 5 e 6, onde o teste de Hayter e Tsui possui uma estimativa de poder superior ao teste T^2 de Hotelling, essa diferença de estimativas de poder a favor do teste Hayter e Tsui não pareceu crescer tanto com o aumento do tamanho da amostra como ocorreu com os casos 1 a 4, para o teste T^2 de Hotelling. A exceção é o caso de amostras grandes ($n_1=n_2=50$), onde as estimativas de poder do teste de Hayter e Tsui se aproximam bastante do poder do T^2 de Hotelling em todos os 6 casos de mudança de vetores de médias.

O Teste combinado T^2 de Hotelling e Hayter & Tsui (T^2 & HT comb) é sempre superior ao teste que possui melhor poder entre o T^2 e o Hayter e Tsui. Mas, isso se justifica, em partes, pelo fato desse teste possuir uma estimativa da probabilidade do erro do tipo I acima de 0,05 (próximo a 0,07), conforme Tabela 4.28. Esse resultado foi observado para todos os cenários de matrizes de covariâncias avaliados nas Tabelas 4.29 a 4.31.

Já os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher para os cenários das Tabelas 4.29, 4.30 e 4.31 possuem sempre valores das estimativas de poder muito próximas uma das outras, com vantagem mínima para o Tippett nos casos 1 a 4 para as Tabelas 4.29 e 4.31, onde ambos são sempre superiores ao teste Hayter e Tsui em poder, mas nunca superior ao T^2 de Hotelling. Para os casos 5 e 6, mais uma vez os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher possuem estimativas de poder bem próximos um do

outro, porém, aqui a vantagem mínima é para o teste do Fisher sobre o Tippett para os cenários das Tabelas 4.29 e 4.31. Para o cenário da Tabela 4.30 o teste de combinação de p-valores de Fisher é superior em poder em todos os casos de mudanças de vetores de médias – exceto em alguns tamanhos de amostras do caso 2 - quando comparado com o teste de Tippett.

O fator de desbalanceamento afeta a estimativa do poder dos testes. Como as matrizes de covariâncias são diferentes, é possível perceber que se ora a primeira população tem um tamanho amostral maior que a segunda, ora é a segunda população que o tem maior que a primeira, os poderes de todos os testes são afetados. Por exemplo, no cenário 12 da Tabela 4.29, no caso 1 de mudanças nos vetores de médias, tem-se a situação em que os tamanhos amostrais são $n_1=n_2=15$, onde se tem um $n=n_1+n_2=30$. Na situação em que as amostras são desbalanceadas $n_1=10$ e $n_2=25$, onde $n=n_1+n_2=35$, se obtém estimativa de poder maior do que a situação balanceada e quando $n_1=25$ e $n_2=10$, onde também $n=35$ se obtém estimativa de poder menor do que o caso balanceado.

Quando são comparados os resultados da Tabela 4.30 e Tabela 4.31 com os resultados da Tabela 4.29, conclui-se que a estimativa do poder do teste para o T^2 de Hotelling não é afetado com a diferença na estrutura das matrizes de covariâncias diferentes para as situações onde há balanceamento entre as populações, ou seja, para os casos de mesma distância de Mahalanobis, mesmos tamanhos amostrais e, ainda, balanceamento entre as populações as estimativas dos poderes do teste do T^2 de Hotelling são praticamente iguais, independente da matriz de covariâncias. Esse comportamento só não é verdadeiro para a situação em que ocorre o desbalanceamento, pois neste caso, a estimativa do poder do teste é afetado pela combinação dos tamanho de amostras e estrutura das matrizes de covariâncias diferentes.

O mesmo, porém, não ocorre com o teste de Hayter e Tsui, que parecem ser afetado em seus valores estimados de poder, de acordo com a estrutura da matriz de covariâncias. O mesmo ocorre para os testes de combinação de p-valores de Tippett e Fisher, uma vez que estes são

dependentes do que ocorre com os p-valores dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui.

Comparando os resultados da situação da Tabela 4.30 com os resultados da matriz da Tabela 4.29, pode-se verificar que a estimativa de poder do teste do Hayter e Tsui aumentou, parecendo indicar que a estimativa de poder deste teste é afetado negativamente pela presença de maior variância e covariância entre as variáveis, como ocorre no cenário da Tabela 4.29.

O teste de T^2 de Hotelling continua sendo superior em poder ao Hayter e Tsui nos casos 1 a 4, da Tabela 4.30 (exceto caso 4 dessa Tabela), porém a sua vantagem diminui sobre o Hayter e Tsui, comparado aos resultados da Tabela 4.29. Já nos casos 5 a 6, Hayter e Tsui ainda é superior ao T^2 de Hotelling, porém, a vantagem do Hayter e Tsui diminui pela presença de menor variabilidade entre as variáveis para uma das matrizes de covariâncias, sendo a outra igual para ambas as situações das Tabelas 4.29 e 4.30.

Já para a Tabela 4.31, onde não há independência entre as variáveis em nenhuma das duas matrizes de covariâncias diferentes, o que se verifica é que o poder do teste do Hayter e Tsui diminui em relação aos valores da Tabela 4.29 apenas nos casos de 1 a 3 e 5 a 6, mas chega a superar o T^2 de Hotelling somente nos casos 5 e 6. E para o caso 4, ao contrário, o poder do Hayter e Tsui aumenta em relação aos valores do mesmo teste na Tabela 4.29.

Portanto, o que podemos concluir dessa análise é que, para os cenários de matriz de covariâncias apresentados nas Tabelas 4.29 a 4.31, nos casos de mudanças de médias de 1 a 4, o Teste T^2 de Hotelling é o que apresenta melhor poder, seguido pelos testes de combinação de p-valores de Tippett e Fisher e por fim o teste do Hayter e Tsui. Já para os cenários 5 e 6 o Teste de Hayter e Tsui é, na maioria das situações, o que possui o melhor poder, seguido pelo Fisher e Tippett, respectivamente, e por fim o T^2 de Hotelling.

Tabela 4.29: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 12 - $p=3$.

Caso de Mudanças nos vetores de Médias	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concorância
	n_1	n_2						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,64 \\ 0,64 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	5	5	0,09484	0,08300	0,11990	0,09370	0,08949	0,9381
	10	10	0,14440	0,11750	0,17290	0,13930	0,13290	0,9162
	15	15	0,19850	0,15870	0,23280	0,19050	0,18460	0,8916
	25	25	0,31520	0,24200	0,35290	0,29660	0,28660	0,8514
	50	50	0,58530	0,45060	0,61810	0,56070	0,54460	0,7996
	15	10	0,15600	0,12670	0,18770	0,15040	0,14430	0,9073
	10	15	0,18080	0,15190	0,21520	0,17870	0,17220	0,9022
	25	10	0,16850	0,12980	0,20000	0,16430	0,15480	0,8983
	10	25	0,23360	0,20360	0,27340	0,22950	0,22420	0,8902
$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,65 \\ 0,35 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,9 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	5	5	0,09405	0,08254	0,12000	0,09280	0,08851	0,9367
	10	10	0,14440	0,11870	0,17540	0,14130	0,13420	0,9122
	15	15	0,19640	0,14760	0,22660	0,18570	0,17700	0,8909
	25	25	0,31300	0,23310	0,34920	0,29420	0,28090	0,8476
	50	50	0,58310	0,43480	0,61310	0,55530	0,53600	0,7916
	15	10	0,15610	0,12230	0,18740	0,14970	0,14220	0,9037
	10	15	0,17610	0,14360	0,20810	0,17130	0,16560	0,9035
	25	10	0,17080	0,12570	0,20090	0,16380	0,15420	0,8946
	10	25	0,22380	0,19090	0,26040	0,21730	0,21250	0,8938
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,277 \\ 1,277 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	5	5	0,25360	0,19740	0,28950	0,24300	0,23230	0,8719
	10	10	0,48190	0,36060	0,51640	0,46010	0,44280	0,8097
	15	15	0,67190	0,52160	0,70000	0,64810	0,63250	0,7934
	25	25	0,89290	0,75290	0,90300	0,87470	0,86270	0,8397
	50	50	0,99680	0,97220	0,99720	0,99550	0,99440	0,9746
	15	10	0,52580	0,38210	0,55760	0,50140	0,48220	0,7927
	10	15	0,60960	0,49140	0,64420	0,59340	0,58000	0,8125
	25	10	0,57100	0,40130	0,60000	0,54690	0,52280	0,7724
	10	25	0,75790	0,65290	0,78270	0,74180	0,73330	0,8454
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,123 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	5	5	0,25470	0,19410	0,29040	0,24500	0,23000	0,8679
	10	10	0,48160	0,35700	0,51660	0,46130	0,44170	0,8054
	15	15	0,67270	0,51570	0,69990	0,65070	0,63010	0,7886
	25	25	0,89210	0,75050	0,90310	0,87480	0,86160	0,8363
	50	50	0,99660	0,97310	0,99700	0,99540	0,99440	0,9756
	15	10	0,53050	0,37490	0,56030	0,50550	0,48150	0,7849
	10	15	0,60470	0,47700	0,63720	0,58750	0,57210	0,8074
	25	10	0,57660	0,39870	0,60520	0,55270	0,52550	0,7650
	10	25	0,74750	0,64160	0,77380	0,73220	0,72240	0,8414
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,324 \\ 1,324 \\ 1,324 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	5	5	0,18670	0,21610	0,24200	0,20160	0,20670	0,9189
	10	10	0,34880	0,39870	0,42620	0,37320	0,38570	0,8952
	15	15	0,50630	0,56320	0,58870	0,53190	0,55030	0,8921
	25	25	0,74550	0,78870	0,80540	0,76430	0,77910	0,9234
	50	50	0,97130	0,97970	0,98230	0,97490	0,97820	0,9865
	15	10	0,36950	0,41300	0,44550	0,38970	0,40480	0,8914
	10	15	0,47220	0,53410	0,55560	0,50310	0,51850	0,8951
	25	10	0,38760	0,42910	0,46490	0,41380	0,42750	0,8868
	10	25	0,65750	0,69950	0,71780	0,66830	0,68940	0,9215
$\mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,165 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	5	5	0,18780	0,22070	0,24620	0,20430	0,20990	0,9161
	10	10	0,34850	0,39310	0,42090	0,36780	0,38320	0,8998
	15	15	0,50420	0,56000	0,58470	0,52680	0,54670	0,8947
	25	25	0,74470	0,78740	0,80500	0,75930	0,77820	0,9252
	50	50	0,97130	0,97810	0,98110	0,97310	0,97750	0,9873
	15	10	0,36070	0,40720	0,43660	0,38140	0,39720	0,8947
	10	15	0,48180	0,53130	0,55680	0,50390	0,52280	0,8995
	25	10	0,36910	0,41610	0,44680	0,39310	0,41110	0,8915
	10	25	0,68360	0,72480	0,74400	0,69850	0,71520	0,9204

Nota: Cenário 12: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a

distância de Mahalanobis.

Tabela 4.30: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 13 - p=3.

Caso de Mudanças nos vetores de Médias	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor
	n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,393 \\ 0,393 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	5	5	0,09362	0,09178	0,11790	0,09294	0,09347	0,9495
	10	10	0,14310	0,13760	0,17370	0,14270	0,14410	0,9333
	15	15	0,19870	0,18860	0,23480	0,19730	0,20060	0,9177
	25	25	0,31110	0,28480	0,35090	0,30220	0,30550	0,8942
	50	50	0,58110	0,54430	0,62330	0,57760	0,58010	0,8788
	15	10	0,16650	0,15610	0,19940	0,16290	0,16590	0,9239
	10	15	0,16530	0,15960	0,19870	0,16500	0,16510	0,9275
	25	10	0,19490	0,17650	0,23130	0,19440	0,19370	0,9089
	10	25	0,19160	0,18110	0,22510	0,18760	0,19000	0,9226
$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,472 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,138$	5	5	0,09345	0,09033	0,11850	0,09314	0,09310	0,9467
	10	10	0,14530	0,13400	0,17480	0,14310	0,14370	0,9296
	15	15	0,19770	0,18650	0,23540	0,19720	0,19760	0,9134
	25	25	0,31290	0,28940	0,35680	0,31110	0,30930	0,8887
	50	50	0,58300	0,54940	0,63030	0,58570	0,58350	0,8720
	15	10	0,17130	0,15880	0,20670	0,17150	0,16890	0,9167
	10	15	0,16170	0,15770	0,19640	0,16150	0,16120	0,9267
	25	10	0,20840	0,17840	0,24510	0,20780	0,20180	0,8966
	10	25	0,18650	0,18250	0,22350	0,18680	0,18790	0,9220
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,787 \\ 0,787 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	5	5	0,25500	0,23560	0,29310	0,24910	0,25230	0,9045
	10	10	0,48360	0,44730	0,52680	0,47580	0,47980	0,8773
	15	15	0,67280	0,62180	0,70560	0,66060	0,66560	0,8835
	25	25	0,89230	0,84850	0,90580	0,88280	0,88460	0,9293
	50	50	0,99640	0,99190	0,99700	0,99580	0,99590	0,9943
	15	10	0,56670	0,51390	0,60620	0,55420	0,55820	0,8683
	10	15	0,56500	0,52120	0,60200	0,55060	0,55590	0,8822
	25	10	0,66460	0,58990	0,69970	0,65530	0,65310	0,8550
	10	25	0,65670	0,61010	0,68810	0,64150	0,64730	0,8905
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,565 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d = 0,553$	5	5	0,25530	0,25340	0,29980	0,25570	0,26030	0,9092
	10	10	0,48210	0,49030	0,54230	0,49210	0,49810	0,8878
	15	15	0,67250	0,67960	0,72630	0,68610	0,69150	0,8995
	25	25	0,89140	0,89530	0,91820	0,89640	0,90140	0,9502
	50	50	0,99680	0,99680	0,99800	0,99730	0,99750	0,9975
	15	10	0,56370	0,56700	0,62200	0,57110	0,57940	0,8866
	10	15	0,56800	0,56920	0,62210	0,57240	0,57840	0,8929
	25	10	0,65000	0,65120	0,70590	0,65560	0,67020	0,8893
	10	25	0,65550	0,65950	0,70780	0,66280	0,66830	0,8993
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,621 \\ 0,621 \\ 0,621 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	5	5	0,18740	0,20670	0,23030	0,19360	0,20160	0,9334
	10	10	0,34910	0,37100	0,40230	0,35370	0,37070	0,9155
	15	15	0,50460	0,51850	0,55450	0,50390	0,52530	0,9141
	25	25	0,74780	0,75220	0,78250	0,74170	0,75890	0,9351
	50	50	0,97070	0,96760	0,97600	0,96820	0,97240	0,9863
	15	10	0,39010	0,43120	0,45470	0,40240	0,42150	0,9119
	10	15	0,43890	0,44420	0,48690	0,43500	0,45030	0,9092
	25	10	0,43160	0,48460	0,50320	0,45130	0,47190	0,9099
	10	25	0,55010	0,51920	0,58540	0,53490	0,54610	0,8985
$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,863 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $d = 0,388$	5	5	0,18680	0,20430	0,23050	0,19150	0,19970	0,9301
	10	10	0,34900	0,37170	0,40430	0,35520	0,36970	0,9121
	15	15	0,50390	0,52280	0,55870	0,51040	0,52740	0,9093
	25	25	0,74490	0,75060	0,78210	0,74100	0,75780	0,9313
	50	50	0,97150	0,97090	0,97800	0,97100	0,97440	0,9865
	15	10	0,39730	0,43030	0,45880	0,40830	0,42450	0,9100
	10	15	0,43280	0,43460	0,48050	0,42820	0,44250	0,9064
	25	10	0,44180	0,48470	0,51060	0,46340	0,48130	0,9083
	10	25	0,53600	0,51190	0,57530	0,52550	0,53560	0,8973

Nota: Cenário 13: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$ $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a

distância de Mahalanobis.

Tabela 4.31: Estimativas do Poder dos Testes - Matriz de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 14 - p=3.

Caso de Mudanças nos vetores de Médias	Tamanhos de Amostra	T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop de Concor
----------------------------------------	---------------------	-----------------------------	---------------	----------------------------	---------	--------	----------------

	n_1	n_2						dância
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix}$ Distância = 0,138	5	5	0,09332	0,07763	0,11760	0,08808	0,08410	0,9357
	10	10	0,14320	0,10960	0,17200	0,13460	0,12570	0,9089
	15	15	0,19680	0,14200	0,22830	0,18420	0,17060	0,8822
	25	25	0,31230	0,21130	0,34430	0,29010	0,26990	0,8349
	50	50	0,58210	0,40120	0,61130	0,55350	0,52160	0,7607
	15	10	0,15140	0,11320	0,18020	0,14240	0,13200	0,9043
	10	15	0,18030	0,13790	0,21360	0,17510	0,16150	0,8909
	25	10	0,16030	0,12080	0,19080	0,15330	0,14350	0,8994
	10	25	0,24180	0,17930	0,27710	0,23250	0,21490	0,8669
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,15 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$ Distância = 0,138	5	5	0,09363	0,08018	0,11940	0,08957	0,08518	0,9351
	10	10	0,14350	0,11320	0,17420	0,13600	0,12770	0,9083
	15	15	0,19750	0,14560	0,23080	0,18920	0,17310	0,8815
	25	25	0,31270	0,21310	0,34540	0,29190	0,27060	0,8351
	50	50	0,58020	0,39430	0,60670	0,54880	0,51840	0,7611
	15	10	0,15230	0,11390	0,18110	0,14280	0,13320	0,9039
	10	15	0,18130	0,13650	0,21400	0,17190	0,15970	0,8897
	25	10	0,16070	0,11930	0,19080	0,15460	0,14360	0,8985
	10	25	0,24160	0,17620	0,27540	0,22980	0,21280	0,8670
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,202 \\ 1,202 \\ 0 \end{pmatrix}$ Distância = 0,553	5	5	0,25590	0,18220	0,29020	0,23810	0,22290	0,8577
	10	10	0,48340	0,32660	0,51530	0,45390	0,42540	0,7794
	15	15	0,67040	0,46280	0,69280	0,63900	0,60500	0,7476
	25	25	0,89120	0,69760	0,90000	0,87190	0,85010	0,7887
	50	50	0,99660	0,95200	0,99700	0,99520	0,99320	0,9547
	15	10	0,51520	0,34980	0,54710	0,48660	0,45620	0,7708
	10	15	0,62130	0,43500	0,64780	0,59350	0,56300	0,7607
	25	10	0,54590	0,36350	0,57450	0,51920	0,48650	0,7604
	10	25	0,78110	0,58860	0,79940	0,75930	0,73100	0,7709
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,05 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Distância = 0,553	5	5	0,25540	0,23200	0,30320	0,24970	0,25010	0,8810
	10	10	0,48090	0,42360	0,53120	0,46930	0,46860	0,8420
	15	15	0,67140	0,60230	0,71420	0,66250	0,65850	0,8452
	25	25	0,89140	0,82990	0,90970	0,88250	0,88260	0,9019
	50	50	0,99670	0,98910	0,99760	0,99630	0,99630	0,9907
	15	10	0,50390	0,44680	0,55570	0,49630	0,49340	0,8393
	10	15	0,63680	0,57460	0,68300	0,63170	0,62900	0,8453
	25	10	0,52500	0,45730	0,57330	0,51810	0,51670	0,8357
	10	25	0,82030	0,76840	0,85140	0,81840	0,81640	0,8860
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,333 \\ 1,333 \\ 1,333 \end{pmatrix}$ Distância = 0,388	5	5	0,18550	0,20940	0,24080	0,19410	0,20190	0,9133
	10	10	0,34880	0,39880	0,43260	0,37460	0,38260	0,8823
	15	15	0,50580	0,55600	0,58940	0,53460	0,54290	0,8829
	25	25	0,74680	0,78730	0,80960	0,76830	0,78000	0,9149
	50	50	0,97120	0,97990	0,98350	0,97650	0,97880	0,9840
	15	10	0,37250	0,42150	0,45760	0,39640	0,40680	0,8787
	10	15	0,46300	0,52210	0,55110	0,49800	0,50680	0,8828
	25	10	0,39550	0,43820	0,47830	0,42470	0,43300	0,8771
	10	25	0,62270	0,69300	0,71140	0,66390	0,67120	0,8932
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,15 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,85 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ Distância = 0,388	5	5	0,18630	0,18890	0,23350	0,18660	0,19130	0,9083
	10	10	0,34760	0,34900	0,41100	0,35260	0,35790	0,8746
	15	15	0,50390	0,49520	0,56540	0,50710	0,51250	0,8683
	25	25	0,74270	0,72910	0,79010	0,74390	0,75290	0,8917
	50	50	0,97050	0,96130	0,97870	0,97040	0,97260	0,9745
	15	10	0,36530	0,36560	0,42990	0,37100	0,37590	0,8712
	10	15	0,46900	0,46910	0,53460	0,47890	0,48460	0,8690
	25	10	0,38100	0,37590	0,44450	0,38870	0,39480	0,8679
	10	25	0,64200	0,64790	0,70400	0,65470	0,66080	0,8820

Nota: Cenário 14: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a

distância de Mahalanobis.

4.4 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas

Nesta seção serão avaliados os resultados das situações nas quais as matrizes de covariâncias eram diferentes e desconhecidas para os casos bivariados e trivariados (seções 4.4.1 e 4.4.2, respectivamente).

Foram simulados apenas situações para amostras balanceadas já que para amostras não balanceadas, principalmente para $p=3$, as estimativas das probabilidades do erro tipo I resultaram em valores muito distantes de 0,05, ora maior e ora menor que esse valor, tanto para o teste T^2 de Hotelling quanto para o teste Hayter e Tsui.

4.4.1 Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas: Caso Bivariado

Para o caso de matrizes de covariâncias diferentes e desconhecidas, a mesma correção nos níveis de significância dos testes T^2 de Hotelling e combinação de p-valores Tippett e Fisher, feitas quando as matrizes eram iguais (ver seção 4.2.1), continuaram sendo necessárias.

Segundo Johnson & Wichern (2002), no caso de testes de hipótese para comparação dos vetores de médias de uma única população, é bem sabido que o efeito de variâncias diferentes é mínimo quando $n_1 = n_2$ e maior quando n_1 é maior do que n_2 ou vice versa. Isso foi verificado nesta seção para os cenários estudados. No caso de matrizes de covariâncias diferentes e desconhecidas, o desbalanceamento afetou bastante as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I tanto do teste T^2 de Hotelling, quanto do teste de Hayter e Tsui, conforme os resultados da Tabela 4.32. Sendo assim, para $p=2$ variáveis, optou-se por realizar as simulações para se obter as estimativas de poder dos teste apenas para os casos em que as amostras eram balanceadas.

Na Tabela 4.32 estão os resultados das estimativas médias de probabilidade do erro do tipo I de $p=2$ para os testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui quando usou-se um nível de significância nominal de 0,05.

É possível observar que, assim como aconteceu no caso de matrizes de covariâncias iguais e desconhecidas, as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I para o teste de Hayter e Tsui não são próximas a 0,05 quando os tamanhos amostrais das duas amostras são balanceados e pequenos. Todos os testes balanceados foram comparados nos níveis de significância dado na Tabela 4.32. Apenas para o teste Hayter e Tsui o nível de significância de 5% foi mantido nas simulações. Sendo assim, a comparação dos testes fica restrita a cada estrutura de tamanho de amostra fixa, não sendo possível comparar os resultados para estrutura distintas já que não se tem o mesmo nível de significância em todas as estruturas.

Tabela 4.32: Estimativas da Probabilidade do Erro do Tipo I para os Testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui usando Nível de Significância Nominal de 0,05- p=2- Matrizes de Covariâncias diferentes e Desconhecidas.

Tamanhos Amostrais	Matrizes de Covariâncias							
	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$		$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$		$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$		$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	
	T^2	HT	T^2	HT	T^2	HT	T^2	HT
$n_1=n_2=10$	0,0507	0,0714	0,0526	0,0717	0,0509	0,0689	0,0527	0,0766
$n_1=n_2=15$	0,0507	0,0642	0,0520	0,0619	0,0500	0,0603	0,0532	0,0682
$n_1=n_2=25$	0,0498	0,0572	0,0511	0,0558	0,0500	0,0550	0,0511	0,0581
$n_1=n_2=50$	0,0506	0,0531	0,0511	0,0523	0,0512	0,0509	0,0500	0,0531
$n_1=15; n_2=10$	0,0622	0,0673	0,0462	0,0662	0,0431	0,0637	0,0749	0,0983
$n_1=10; n_2=15$	0,0781	0,0664	0,0694	0,0665	0,0626	0,0641	0,0382	0,0532
$n_1=25; n_2=10$	0,0502	0,0598	0,0455	0,0586	0,0367	0,0567	0,1107	0,1298
$n_1=10; n_2=25$	0,0733	0,0617	0,1045	0,0608	0,0830	0,0610	0,0270	0,0374

Na Tabela 4.33 estão os resultados das estimativas médias obtidas da probabilidade do erro do tipo I para $p=2$ quando as matrizes de covariâncias são diferentes e desconhecidas e os tamanhos amostrais balanceados. Tanto para o teste T^2 de Hotelling quanto para o Hayter e Tsui e testes de combinação de p-valores de Tippett e Fisher as estimativas são bem próximas uma das outras e dos valores da Tabela 4.32.

Assim como observado nas análises anteriores as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I para a combinação direta dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui (T^2 e HT comb) foram maiores que os valores obtidos para estes testes separadamente, embora com uma inflação menor do que seria observado se os 2 testes fossem independentes.

Tabela 4.33: Estimativas da probabilidade do erro tipo I Para Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas - p=2.

Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas (Cenários)	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
	n ₁	n ₂						
(8) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	10	10	0,07981	0,07694	0,09550	0,07780	0,07698	0,966
	15	15	0,07128	0,06697	0,08427	0,07110	0,07100	0,970
	25	25	0,05907	0,05866	0,07221	0,05799	0,05782	0,973
	50	50	0,05374	0,05334	0,06515	0,05443	0,05430	0,976
(9) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,07230	0,07243	0,09104	0,07175	0,07214	0,9627
	15	15	0,06494	0,06400	0,07991	0,06600	0,06565	0,9691
	25	25	0,05654	0,05634	0,06983	0,05720	0,05694	0,9732
	50	50	0,05278	0,05181	0,06481	0,05290	0,05242	0,9750
(10) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,07526	0,07126	0,09330	0,07014	0,07107	0,9599
	15	15	0,06487	0,06295	0,08125	0,06199	0,06243	0,9653
	25	25	0,05731	0,05624	0,07150	0,05659	0,05657	0,9706
	50	50	0,05377	0,05287	0,06674	0,05389	0,05344	0,9732
(11) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	10	10	0,07068	0,06869	0,09241	0,06856	0,06900	0,9546
	15	15	0,06112	0,06059	0,08070	0,06078	0,06062	0,9603
	25	25	0,05549	0,05500	0,07225	0,05620	0,05576	0,9660
	50	50	0,05124	0,05101	0,06725	0,05073	0,05106	0,9677

As Tabelas 4.34 a 4.37 apresentam os resultados das estimativas de poder dos testes obtidos para 4 cenários de matrizes de covariâncias diferentes e desconhecidas, para $p=2$ variáveis. Os cenários que foram analisados são os cenários de 8 a 11, apresentados na seção 3.1. No Anexo B encontram-se os resultados de outros casos de mudanças de médias para avaliação das estimativas do poder dos testes para estes mesmos cenários (Tabelas B.11 a B.14).

O que se pode observar dos resultados obtidos é que, independentemente da estrutura das matrizes de covariâncias, o desempenho do testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui são próximos na maioria dos casos analisados, sendo que em muitos o teste de Hayter e Tsui é superior ao T^2 de Hotelling. Todas as conclusões obtidas para as matrizes diferentes e conhecidas são aplicáveis a esta situação.

Destaca-se aqui o fato de que nos resultados das estimativas de poder obtidos para os 6 casos de mudanças de médias para o cenário 9, em 5 casos (casos 1 a 4 e caso 6 do Anexo B, Tabela B.12) o teste Hayter e Tsui supera o teste T^2 de Hotelling na estimativa de poder.

Por fim, não é possível comparar o efeito das 4 combinações de matrizes de covariâncias diferentes no poder dos testes entre si, pois as distâncias de Mahalanobis não são iguais para todos os cenários.

Tabela 4.34: Estimativas do Poder do Teste - Matriz de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 8 – p=2.

Caso de Mudanças nos vetores de Médias	Dist. Mah.	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,12	10	10	0,1869	0,1775	0,2132	0,1781	0,1802	0,938
		15	15	0,2328	0,2157	0,2586	0,2306	0,2312	0,931
		25	25	0,3273	0,3071	0,3579	0,3168	0,3173	0,919
		50	50	0,5742	0,5309	0,6004	0,5631	0,5604	0,904
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,12	10	10	0,1875	0,1802	0,2142	0,1815	0,1834	0,939
		15	15	0,2338	0,2163	0,2589	0,2276	0,2292	0,932
		25	25	0,3261	0,3046	0,3563	0,3132	0,3145	0,918
		50	50	0,5771	0,5333	0,6039	0,5642	0,5619	0,902
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,166 \end{pmatrix}$	0,12	10	10	0,1903	0,1810	0,2168	0,1815	0,1838	0,937
		15	15	0,2381	0,2206	0,2634	0,2357	0,2356	0,939
		25	25	0,3302	0,3082	0,3605	0,3179	0,3191	0,917
		50	50	0,5831	0,5391	0,6093	0,5698	0,5680	0,904
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix}$ $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,12	10	10	0,1911	0,1813	0,2169	0,1835	0,1845	0,939
		15	15	0,2359	0,2186	0,2608	0,2298	0,2313	0,933
		25	25	0,3319	0,3106	0,3625	0,3185	0,3198	0,918
		50	50	0,5820	0,5386	0,6088	0,5725	0,5694	0,903
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,58 \end{pmatrix}$	0,50	10	10	0,5216	0,5289	0,5682	0,5263	0,5274	0,914
		15	15	0,6882	0,6954	0,7261	0,7001	0,7010	0,931
		25	25	0,8869	0,8981	0,9101	0,8964	0,8961	0,965
		50	50	0,9958	0,9967	0,9972	0,9965	0,9966	0,998
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,25 \end{pmatrix}$	1	10	10	0,8091	0,8222	0,8436	0,8187	0,8200	0,944
		15	15	0,9395	0,9453	0,9536	0,9465	0,9467	0,977
		25	25	0,9956	0,9967	0,9971	0,9962	0,9963	0,998
		50	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,000

Nota: Cenário 8: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.35: Estimativas do Poder do Teste - Matriz de covariâncias diferentes e desconhecidas – Cenário 9 – p=2.

Caso de Mudanças nos vetores de Médias	Dist. Mah.	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n1	n2						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,22	10	10	0,2688	0,2865	0,3158	0,2790	0,2818	0,924
		15	15	0,3661	0,3827	0,4133	0,3813	0,3842	0,922
		25	25	0,5433	0,5663	0,5921	0,5509	0,5577	0,925
		50	50	0,8527	0,8664	0,8785	0,8619	0,8649	0,962
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,22	10	10	0,2660	0,2835	0,3128	0,2708	0,2753	0,924
		15	15	0,3633	0,3818	0,4116	0,3769	0,3802	0,922
		25	25	0,5468	0,5693	0,5950	0,5635	0,5676	0,926
		50	50	0,8511	0,8658	0,8774	0,8582	0,8625	0,962
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,166 \end{pmatrix}$	0,22	10	10	0,2706	0,2879	0,3174	0,2773	0,2814	0,924
		15	15	0,3685	0,3861	0,4157	0,3804	0,3854	0,923
		25	25	0,5515	0,5737	0,5988	0,5649	0,5695	0,928
		50	50	0,8569	0,8711	0,8826	0,8671	0,8703	0,963
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,22	10	10	0,2718	0,2898	0,3193	0,2831	0,2851	0,923
		15	15	0,3700	0,3873	0,4172	0,3832	0,3871	0,923
		25	25	0,5533	0,5757	0,6014	0,5644	0,5710	0,926
		50	50	0,8565	0,8701	0,8819	0,8644	0,8679	0,963
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,53 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,53 \end{pmatrix}$	0,22	10	10	0,2681	0,2904	0,3149	0,2787	0,2837	0,929
		15	15	0,3652	0,3811	0,4087	0,3754	0,3827	0,929
		25	25	0,5536	0,5626	0,5923	0,5488	0,5617	0,932
		50	50	0,8554	0,8491	0,8714	0,8508	0,8583	0,962
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,97 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,5053	0,5026	0,5581	0,5030	0,5068	0,892
		15	15	0,6812	0,6715	0,7222	0,6882	0,6880	0,908
		25	25	0,8886	0,8830	0,9091	0,8937	0,8933	0,954
		50	50	0,9959	0,9951	0,9971	0,9961	0,9961	0,997

Nota: Cenário 9: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.36: Estimativas do Poder do Teste - Matriz de covariâncias diferentes e desconhecidas – Cenário 10 – p=2.

Caso de Mudanças nos vetores de Médias	Dist. Mah.	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,22	10	10	0,2695	0,2808	0,3171	0,2758	0,2784	0,916
		15	15	0,3564	0,3763	0,4099	0,3704	0,3736	0,913
		25	25	0,5330	0,5587	0,5869	0,5380	0,5486	0,918
		50	50	0,8444	0,8619	0,8745	0,8567	0,8610	0,957
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,22	10	10	0,2666	0,2777	0,3137	0,2658	0,2714	0,917
		15	15	0,3532	0,3743	0,4067	0,3650	0,3689	0,914
		25	25	0,5365	0,5612	0,5904	0,5502	0,5572	0,917
		50	50	0,8432	0,8605	0,8735	0,8516	0,8577	0,958
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,166 \end{pmatrix}$	0,22	10	10	0,2720	0,2823	0,3189	0,2720	0,2771	0,917
		15	15	0,3586	0,3797	0,4123	0,3702	0,3746	0,914
		25	25	0,5414	0,5656	0,5940	0,5539	0,5601	0,919
		50	50	0,8501	0,8666	0,8795	0,8620	0,8662	0,958
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,22	10	10	0,2724	0,2826	0,3197	0,2777	0,2808	0,916
		15	15	0,3605	0,3803	0,4139	0,3726	0,3763	0,913
		25	25	0,5431	0,5682	0,5966	0,5511	0,5614	0,918
		50	50	0,8491	0,8661	0,8787	0,8602	0,8643	0,958
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,55 \\ -0,55 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,5113	0,3450	0,5335	0,4483	0,4390	0,789
		15	15	0,6756	0,4655	0,6894	0,6227	0,6011	0,762
		25	25	0,8854	0,6837	0,8897	0,8555	0,8302	0,789
		50	50	0,9958	0,9512	0,9959	0,9940	0,9908	0,955
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,92 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,5111	0,4625	0,5554	0,4863	0,4901	0,863
		15	15	0,6776	0,6253	0,7144	0,6653	0,6635	0,874
		25	25	0,8875	0,8481	0,9046	0,8815	0,8804	0,926
		50	50	0,9958	0,9909	0,9967	0,9954	0,9953	0,993
(7) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,78 \\ -0,78 \end{pmatrix}$	1	10	10	0,7970	0,5936	0,8091	0,7335	0,7274	0,772
		15	15	0,9314	0,7723	0,9348	0,9045	0,8929	0,834
		25	25	0,9952	0,9504	0,9953	0,9924	0,9894	0,955
		50	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,000

Nota: Cenário 10: $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

Tabela 4.37: Estimativas do Poder do Teste - Matriz de covariâncias diferentes e desconhecidas – Cenário 11 – p=2.

Caso de Mudanças nos vetores de Médias	Dist. Mah.	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,28	10	10	0,3168	0,2996	0,3708	0,3083	0,3136	0,875
		15	15	0,4322	0,4066	0,4862	0,4270	0,4307	0,866
		25	25	0,6427	0,6061	0,6867	0,6348	0,6388	0,875
		50	50	0,9222	0,8992	0,9374	0,9207	0,9236	0,947
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,28	10	10	0,3143	0,2961	0,3667	0,3006	0,3068	0,877
		15	15	0,4302	0,4049	0,4835	0,4214	0,4257	0,868
		25	25	0,6462	0,6075	0,6895	0,6445	0,6461	0,875
		50	50	0,9232	0,8994	0,9379	0,9187	0,9222	0,947
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,2 \end{pmatrix}$	0,28	10	10	0,3161	0,2986	0,3694	0,3050	0,3114	0,876
		15	15	0,4353	0,4053	0,4837	0,4205	0,4262	0,868
		25	25	0,6431	0,6061	0,6871	0,6414	0,6429	0,875
		50	50	0,9230	0,8981	0,9371	0,9199	0,9226	0,947
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,28	10	10	0,3167	0,2974	0,3687	0,3104	0,3137	0,877
		15	15	0,4315	0,4052	0,4848	0,4255	0,4286	0,867
		25	25	0,6439	0,6072	0,6882	0,6385	0,6425	0,875
		50	50	0,9220	0,8972	0,9369	0,9188	0,9218	0,945
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,7 \end{pmatrix}$	0,25	10	10	0,2844	0,3312	0,3552	0,3114	0,3174	0,905
		15	15	0,3840	0,4435	0,4626	0,4158	0,4249	0,902
		25	25	0,5856	0,6448	0,6579	0,6145	0,6277	0,915
		50	50	0,8842	0,9136	0,9170	0,8976	0,9057	0,964
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	1	10	10	0,7994	0,4186	0,8066	0,7145	0,6825	0,604
		15	15	0,9347	0,5704	0,9362	0,8998	0,8647	0,633
		25	25	0,9959	0,8146	0,9959	0,9928	0,9859	0,819
		50	50	1,0000	0,9946	1,0000	1,0000	1,0000	0,994
(7) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,42 \\ -0,42 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,5010	0,2398	0,5177	0,4105	0,3852	0,706
		15	15	0,6725	0,3119	0,6811	0,5960	0,5451	0,622
		25	25	0,8859	0,4714	0,8879	0,8487	0,7942	0,582
		50	50	0,9964	0,8088	0,9964	0,9940	0,9868	0,812

Nota: Cenário 11 : $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$. $d = (\mu_1 - \mu_0)^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$ é a distância de Mahalanobis.

4.4.2 Matrizes Desconhecidas: Caso Trivariado

No caso de matrizes de covariâncias diferentes e desconhecidas para $p=3$ variáveis, o desbalanceamento e tamanhos amostrais pequenos afetaram as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I tanto do teste T^2 de Hotelling quanto do teste de Hayter e Tsui. Isso se deve principalmente ao fato de que, no caso de matrizes de covariâncias diferentes a distribuição da estatística T^2 é aproximada e não exata, como ocorre no caso de matrizes de covariâncias iguais. Mesmo no caso balanceado, foi possível realizar apenas as comparações para a situação em de $n_1=n_2=50$, pois como pode ser visto na Tabela 4.38, apenas nessa situação as estimativas da probabilidade do erro tipo I para o teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui são próximas e em torno de 0,05.

Tabela 4.38: Estimativas da Probabilidade do Erro Tipo I do Teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para Matrizes de Covariâncias Diferentes Usando um Nível de Significância Nominal de 0,05 – $p=3$.

Tamanhos Amostrais	Matrizes de Covariâncias							
	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$		$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$		$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	
	T^2	HT	T^2	HT	T^2	HT		
$n_1=n_2=10$	0,0693	0,0928	0,0528	0,0797	0,0778	0,0901		
$n_1=n_2=15$	0,0622	0,0757	0,0522	0,0677	0,0679	0,0721		
$n_1=n_2=25$	0,0584	0,0577	0,0515	0,0603	0,0600	0,0611		
$n_1=n_2=50$	0,0536	0,0533	0,0505	0,0537	0,0559	0,0526		
$n_1=15; n_2=10$	0,1341	0,1625	0,0462	0,0716	0,1558	0,1571		
$n_1=10; n_2=15$	0,0296	0,0358	0,0645	0,0732	0,0277	0,0339		
$n_1=25; n_2=10$	0,2525	0,2740	0,0451	0,0637	0,2972	0,2697		
$n_1=10; n_2=25$	0,0096	0,0075	0,0908	0,0649	0,0049	0,0068		

Na Tabela 4.39 se encontram as estimativas médias da probabilidade do erro tipo I na situação em que de $n_1=n_2=50$, quando todos os testes são simulados com um nível de significância nominal de 0,05. Observa-se que para todos os 3 cenários as estimativas estão muito próximas de 0,05 para todos os testes, exceto para o teste que combina o T^2 de Hotelling e o Hayter e Tsui (T^2 e HT comb), que apresenta estimativas de 0,07 a 0,075.

Tabela 4.39: Estimativas da Probabilidade do Erro Tipo I para Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas - $p=3 - n_1=n_2=50$.

Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas (Cenário)	T^2 de Hotelling	Hayter & Tsui	T^2 & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
(12) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	0,0533	0,0536	0,0739	0,0502	0,0501	0,959
(13) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$	0,0505	0,0537	0,0704	0,0537	0,0532	0,964
(14) $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	0,0559	0,0526	0,0755	0,0559	0,0517	0,957

Na Tabela 4.40 estão os resultados das estimativas de poder do teste para os cenários 12 a 14. As estimativas de poder dos testes de Hayter e Tsui e T^2 de Hotelling são bem próximas, exceto para a situação em que as distâncias de Mahalanobis são menores (casos 1 e 2), onde Hayter e Tsui é afetado nos cenários cujas matrizes de covariâncias são muito diferentes (cenários 12 e 14). Nos casos 5 e 6 as estimativas de poder do teste de Hayter e Tsui supera o de T^2 de Hotelling, assim como aconteceu na situação de matrizes conhecidas, para todos os cenários avaliados.

Os testes de combinação de p-valores Tippett e Fisher também são comparáveis ao T^2 de Hotelling. Mais uma vez o teste de combinado de T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui apresenta a maior estimativa de poder. Porém, ressalta-se que isso pode ser explicado, em partes, pelo fato da estimativa da probabilidade do erro tipo I para esse teste ter sido superior a 0,05, sendo que para o cenário 14 ela foi de 0,0755.

Os cenários e os casos de mudanças de vetores de médias da Tabela 4.40 encontram-se especificados na Tabela 4.41.

Tabela 4.40: Estimativas do Poder do Teste - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenários 12 a 14 – $n_1=n_2=50$ – $p=3$.

Casos de Mudanças nos Vetores de Médias*	Cenários	<i>d</i>	T² de Hotelling	Hayter & Tsui	T² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop Concor dância
(1)	12	0,138	0,5712	0,4467	0,6100	0,5364	0,5259	0,7978
	13		0,5633	0,5393	0,6141	0,5663	0,5724	0,8745
	14		0,5679	0,3874	0,5985	0,5376	0,5010	0,7583
(2)	12	0,138	0,5680	0,4366	0,6062	0,5321	0,5181	0,7923
	13		0,5646	0,5459	0,6224	0,5730	0,5747	0,8656
	14		0,5706	0,3879	0,6008	0,5388	0,5021	0,7569
(3)	12	0,553	0,9955	0,9692	0,9964	0,9935	0,9929	0,9721
	13		0,9956	0,9916	0,9967	0,9950	0,9955	0,9939
	14		0,9951	0,9439	0,9958	0,9936	0,9912	0,9474
(4)	12	0,553	0,9956	0,9688	0,9964	0,9936	0,9926	0,9716
	13		0,9954	0,9961	0,9975	0,9962	0,9966	0,9966
	14		0,9957	0,9863	0,9969	0,9951	0,9949	0,9881
(5)	12	0,388	0,9649	0,9768	0,9798	0,9694	0,9731	0,9821
	13		0,9652	0,9655	0,9732	0,9640	0,9693	0,9844
	14		0,9650	0,9754	0,9799	0,9728	0,9738	0,9805
(6)	12	0,388	0,9646	0,9765	0,9793	0,9690	0,9733	0,9824
	13		0,9642	0,9674	0,9739	0,9656	0,9701	0,9839
	14		0,9635	0,9548	0,9745	0,9652	0,9665	0,9693

*Para cada cenário há um caso diferente de mudança nos vetores de médias, conforme foi apresentado nas Tabelas 4.29 a 4.31 para os cenários 12 a 14, respectivamente.

Tabela 4.41: Cenários e Casos de Mudanças nos Vetores de Médias Apresentados na Tabela 4.40.

Casos de Mudanças nos Vetores de Médias	Cenários		
	12	13	14
	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$
(1)	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,64 \\ 0,64 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,393 \\ 0,393 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix}$
(2)	$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,65 \\ 0,35 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,9 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,472 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,15 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$
(3)	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,277 \\ 1,277 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,787 \\ 0,787 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,202 \\ 1,202 \\ 0 \end{pmatrix}$
(4)	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,123 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,565 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,05 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
(5)	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,324 \\ 1,324 \\ 1,324 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,621 \\ 0,621 \\ 0,621 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,333 \\ 1,333 \\ 1,333 \end{pmatrix}$
(6)	$\mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,165 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,863 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	$\mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,15 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,85 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

4.5 Resumo Geral dos Resultados

Nas Tabelas 4.42 e 4.43 apresenta-se um resumo geral dos resultados encontrados nesta dissertação para a situação de matrizes de covariâncias iguais e diferentes, conhecidas e desconhecidas para $p=2$ e $p=3$. Nestas tabelas são destacados os tipos de mudanças nos vetores de médias em que cada um dos testes, T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui, apresentaram maiores estimativas de poder do teste dentre todos os cenários simulados.

Pela Tabela 4.42, situação em que $p=2$, o que se pode observar é que os resultados obtidos não mudam quando as matrizes são conhecidas ou desconhecidas, ou seja, o teste que possui melhor estimativa de poder em determinado caso de mudança nos vetores de médias para a situação de matrizes de covariâncias iguais e conhecidas, também possui melhor estimativa de poder para aquele mesmo caso de mudança nos vetores de médias para a situação de matrizes de covariâncias iguais e desconhecidas. O mesmo fato se observa para a situação de matrizes de covariâncias diferentes.

Tabela 4.42: Resumo das Situações de Melhores Resultados de Estimativas de Poder do Teste obtidos para os Testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui - Matrizes de Covariâncias Iguais e Diferentes- $p=2$.

Teste	Matrizes Iguais Conhecidas e Desconhecidas
T^2 de Hotelling	Mudança em apenas uma população em uma única variável – casos 6 do Cenário 3 e casos 5 e 7 do Cenário 4. Mudança nas duas populações nas duas variáveis da segunda população e em apenas uma variável na primeira população – caso 7 do Cenário 3.
Hayter e Tsui	Mudança em apenas uma população em uma única variável – casos 6 e 7 do Cenário 1 e casos 1, 6 e 7 do Cenário 2. Mudança em apenas uma população nas duas variáveis na mesma direção – caso 5 do Cenário 3 e casos 3 e 6 do Cenário 4.
Teste	Matrizes Diferentes Conhecidas e Desconhecidas
T^2 de Hotelling	Mudança em apenas uma população nas duas variáveis em direções diferentes – casos 5 e 7 do Cenário 10 e casos 6 e 7 do Cenário 11.
Hayter e Tsui	Mudança em apenas uma população em uma única variável – casos 5 e 6 do Cenário 8. Todos os casos de mudanças de médias (casos 1 a 5-exceto caso 6) do Cenário 9. Mudanças diversas - casos 1 a 4 do Cenário 10. Mudanças em uma população nas duas variáveis no mesmo sentido – caso 5 do Cenário 11.

Pela Tabela 4.43 o que se pode observar é que as conclusões também não mudam muito quando as matrizes são conhecidas ou desconhecidas, ainda que existam algumas poucas diferenças para o caso de matrizes de covariâncias diferentes.

Os casos de mudanças nos vetores de médias que não são apresentados nas Tabelas 4.42 e 4.43 correspondem às situações em que os desempenhos dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui foram semelhantes.

Tabela 4.43: Resumo das Situações de Melhores Resultados de Estimativas de Poder do Teste obtidos para os Testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui - Matrizes de Covariâncias Iguais e Diferentes- $p=3$.

Teste	Matrizes Iguais Conhecidas e Desconhecidas	
T^2 de Hotelling	<p>Mudança em apenas uma população em 2 variáveis na mesma direção.</p> <p>Mudança nas duas populações em apenas uma variável da segunda população e em 2 variáveis da primeira população</p> <p>(Casos 3 e 4 dos Cenários 5 e 6)</p>	
Hayter e Tsui	<p>Mudança em apenas uma população nas 3 variáveis em mesma direção.</p> <p>Mudança nas duas populações em apenas duas variáveis de cada população.</p> <p>(Casos 5 e 6 dos Cenários 5 e 6).</p>	
Teste	Matrizes Diferentes	
	Conhecidas	Desconhecidas
T^2 de Hotelling	<p>Mudança em apenas uma população em duas variáveis na mesma direção e mudança nas duas populações em apenas uma variável da segunda população e em duas variáveis da primeira população – casos 3 e 4 (Apenas para o Cenário 12)</p> <p>Mudança em apenas uma população em duas variáveis na mesma direção e mudança nas duas populações em apenas uma variável da segunda população e em duas variáveis da primeira população – casos 1 a 3 (Apenas para o Cenário 14)</p>	<p>Mudança em apenas uma população em duas variáveis na mesma direção e mudança nas duas populações em apenas uma variável da segunda população e em duas variáveis da primeira população – casos 1 e 2 (Para os Cenários 12 e 14)</p>
Hayter e Tsui	<p>Mudança em apenas uma população, nas três variáveis em mesma direção e dimensão e mudança nas duas populações em apenas duas variáveis de cada população – casos 5 e 6 (Em todos os Cenários - 12 a 14).</p> <p>Mudanças nas duas populações, em apenas uma variável na segunda população e em duas variáveis na primeira população – caso 4 – (Apenas para o Cenário 13)</p>	<p>Mudança em apenas uma população, nas três variáveis em mesma direção e dimensão e mudança nas duas populações em apenas duas variáveis de cada população – casos 5 e 6 (Em todos os Cenários - 12 a 14).</p>

Capítulo 5

Considerações Finais

Como o objetivo principal desta dissertação era estender o teste Hayter e Tsui (1994) para comparação de vetores de médias de 2 populações independentes para os casos de matrizes de covariâncias iguais e diferentes, conhecidas e desconhecidas, pode-se concluir que o objetivo foi alcançado. A justificativa para tal extensão de Hayter e Tsui é que ele identifica automaticamente quais variáveis seriam as responsáveis pela rejeição da hipótese nula, evitando-se assim a necessidade do uso de comparações múltiplas, como ocorre no usual teste de T^2 de Hotelling, quando este rejeita a hipótese nula. A desvantagem de se aplicar comparações múltiplas é que nesse procedimento em geral os níveis de significância individuais para cada comparação de pares de tratamentos precisa ser alterado de modo a manter o nível de significância global desejado para todas as comparações em conjunto, algo que enfraquece a qualidade deste teste, enquanto o teste de Hayter e Tsui preserva o α global.

Construiu-se, ainda, 3 outros testes, o Tippett, Fisher e T^2 combinado com Hayter e Tsui, que foram combinações dos testes T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui, aproveitando-se assim a qualidade destes dois.

No Capítulo 4 foi possível avaliar o comportamento destes novos testes, quando comparando-os com o usual T^2 de Hotelling, no que tange ao poder dos mesmos. Verificou-se que na grande maioria dos cenários e casos avaliados a extensão do Hayter e Tsui, bem como a proposta dos testes de combinação de p-valores foram equiparáveis ao T^2 de Hotelling, sendo que em muitos casos, foram superiores a este. Destaca-se principalmente o desempenho do teste Hayter e Tsui na situação em que as matrizes de covariâncias são diferentes e desconhecidas, onde ele apresenta melhor desempenho nos cenários e casos avaliados nesta dissertação. Esse fator favorece ainda mais o teste de Hayter e Tsui uma vez que nas situações reais na maioria das vezes se trabalha com matrizes de covariâncias desconhecidas. Uma razão da vantagem do Hayter e Tsui na situação de matrizes de

covariâncias diferentes vem do fato da distribuição da estatística do teste T^2 de Hotelling sob a hipótese nula não ter uma distribuição matemática exata, mas ser aproximada pelas distribuições qui-quadrado ou F sendo que a aproximação não é muito adequada para alguns tamanhos de amostra.

O teste combinado de T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui (T^2 e HT comb) apresentou estimativas médias da probabilidade do erro tipo I maiores do que 0,05 (em torno de 0,06 a 0,07). O interessante dessa combinação direta dos dois testes é que ambos foram feitos a 5%, mas a estimativa da probabilidade do erro tipo I não ficou inflacionada da forma como ocorre para dois testes independentes (em geral próximo a 0,10).

A combinação de p-valores dos testes de Tippett e Fisher também se mostraram boas alternativas em termos de poder comparados ao T^2 de Hotelling superando inclusive o teste de Hayter e Tsui para os casos em que T^2 de Hotelling tinha um poder maior que este. Apesar disso, esse fato pode não ser suficiente ao incentivo do uso desses testes de comparação fundamentados na combinação de p-valores, pois para implementá-los é necessário proceder as correções das constantes críticas, uma vez que os teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui são dependentes o que impede o uso imediato das distribuições de referência que se tem quando os testes são independentes. Isso gera um trabalho considerável, conforme descrito na seção 3.2.3. Além do mais, uma outra questão a ser acentuada é o fato da necessidade do uso de comparações múltiplas, como ocorre no usual teste de T^2 de Hotelling, quando estes testes de combinação de p-valores rejeitam a hipótese nula. Isso pode ser um fator desmotivador para o uso desses testes em situações práticas. Seria, então, necessário implementar novos estudos no sentido de tentar modelar a distribuição das estatísticas de testes no caso de testes dependentes, tornando o uso dos testes de combinação de p-valores mais atrativo.

A grande vantagem da extensão do teste de Hayter e Tsui que foi proposta nessa dissertação é que ele se mostra melhor ou semelhante em desempenho ao teste T^2 de Hotelling na maioria das situações estudadas. Além do mais, o teste de Hayter e Tsui elimina a necessidade das comparações múltiplas na detecção de qual(is) variável(is) testada(s) é(são) responsável(is) pela rejeição da hipótese nula, pois esse teste já detecta automaticamente a(s) variável(is) que apresentaram médias significativamente diferentes. Com isso,

elimina-se a perda de poder advinda das comparações múltiplas, como correções de Bonferroni (Johnson e Wichern, 2002), Teste HSD de Tuckey (1953) ou teste de Scheffé (Montgomery, 1976).

- **Contribuições dessa Dissertação**

Podemos dizer que esta dissertação colabora com a produção do conhecimento científico no aspecto que nela se apresentam as propostas de 4 novos testes de hipóteses para comparação de vetores de médias de duas populações independentes e que podem ser implementados na prática, tendo esses testes estimativas de poder comparativos ao teste mais conhecido da área que é o T^2 de Hotelling (1947). Além disso, a extensão proposta do teste de Hayter e Tsui (1994) elimina a necessidade de se realizar testes de comparações múltiplas para identificação das variáveis responsáveis pela rejeição da hipótese nula, algo inevitável quando se utiliza o Teste T^2 de Hotelling ou os testes de combinação de p-valores.

Os testes multivariados que foram estudados nesta dissertação podem ser aplicados em várias áreas do conhecimento, como Agronomia, Controle de Qualidade, Psicologia, dentre outras, como Bioestatística, para se verificar, por exemplo, se os pacientes de um grupo controle possuem valores médios de variáveis de interesse iguais aos valores médios de um grupo que foi submetido a um novo tratamento.

Considerando-se a qualidade do teste de Hayter e Tsui observada nesta dissertação, disponibilizamos no Anexo C quatro programas computacionais na linguagem R, para que qualquer usuário possa realizar comparações de vetores de médias de duas populações independentes, usando-se o teste de Hayter e Tsui proposto nessa dissertação, bem como o teste T^2 de Hotelling. Para usar tais programas o usuário terá que repassar à função algumas informações como o nível de significância a ser considerado para a realização dos testes estatísticos, os vetores de médias amostrais e as matrizes de covariâncias teóricas ou amostrais, iguais ou diferentes, conforme cada situação. Com isso, os programas retornarão ao usuário as estatísticas de cada teste (T^2 e Hayter e Tsui), os valores críticos, os p-valores e a indicação de tomada de decisão com relação à hipótese nula. Na Figura 5.1 apresenta-se um fluxograma com os passos para execução dos programas do Anexo C.

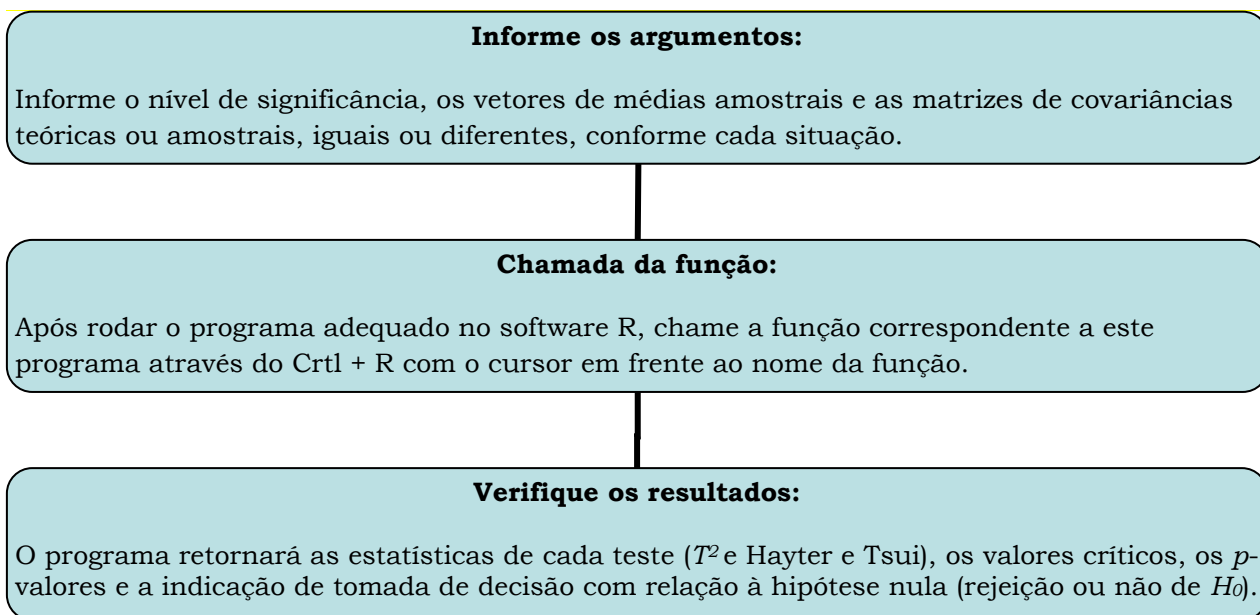


Figura 5.1: Fluxograma de execução dos programas computacionais do Anexo C.

- **Trabalhos Futuros**

Como trabalhos futuros, poderíamos explorar:

- a) O comportamento dos testes discutidos nessa dissertação em situações em que se tem um número maior de variáveis, por exemplo, $p=5$.
- b) A possibilidade de estender o teste de Hayter e Tsui para um número maior de populações independentes.
- c) O comportamento das estimativas de poder do teste T^2 de Hotelling e dos novos testes, nas situações de populações com distribuições diferentes da distribuição normal multivariada.
- d) O desenvolvimento de estudos com vista a corrigir o teste de Hayter e Tsui para comparação de médias no caso de matrizes de covariâncias desconhecidas (iguais e diferentes) já que este estudo mostrou que nessas situações a constante usualmente utilizada para $\alpha=0,05$ na construção do teste era na realidade referente a um nível em torno de 0,07, fato visto quando se simulou os modelos sob a hipótese nula. Nesta dissertação para se comparar os testes nessa situação optou-se

por construir a regra de rejeição do teste T^2 de Hotelling usando a estimativa da probabilidade do erro do tipo I observado para o teste de Hayter e Tsui. No entanto o melhor seria buscar uma forma de correção padrão para a distribuição da estatística de teste de Hayter e Tsui nessas situações.

- e) Formas de correção para os testes nos casos em que se tem matrizes de covariâncias diferentes e desconhecidas para dados não balanceados, pois o que se observa é que a distorção na probabilidade do erro tipo I é grande nesses casos, tanto para o teste T^2 de Hotelling quanto para o teste de Hayter e Tsui, principalmente quando se eleva o número de variáveis de $p=2$ para $p=3$.
- f) O desenvolvimento de estudos para correção das distribuições das estatísticas do teste combinado de Hayter e Tsui com T^2 de Hotelling (T^2 e HT comb) de modo a levar em consideração a correlação existente entre esses testes.

ANEXOS

Anexo A: Poder Teórico e Simulado do Teste T^2 de Hotelling – Caso de Matrizes Iguais

É importante salientar aqui que não é possível comparar os poderes da situação de matrizes de covariâncias conhecidas com desconhecidas, pois o nível de significância das simulações não foram os mesmos. Enquanto na situação de matrizes conhecidas o nível de significância nominal foi sempre 0,05, na situação de matrizes desconhecidas esse nível foi estabelecido de acordo com a estimativa média da probabilidade do erro I do teste do Hayter e Tsui, conforme explicado na seção 4.2, página 79.

Tabela A.1: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 1 – $p=2$.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Matrizes Conhecidas				Matrizes Desconhecidas			
		Tamanhos de Amostra		T^2 Simulado	T^2 Teórico	Tamanhos de Amostra		T^2 Simulado	T^2 Teórico
		n_1	n_2			n_1	n_2		
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1563	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2729	0,2735	10	10	0,2987	0,2998
		15	15	0,3915	0,3924	15	15	0,3970	0,3983
		25	25	0,6019	0,6028	25	25	0,6004	0,6003
		50	50	0,8959	0,8962	50	50	0,8901	0,8906
		5	10	0,1935	0,1939	15	10	0,3355	0,3358
		10	5	0,1951	0,1939	10	15	0,3375	0,3382
		15	5	0,2140	0,2136	25	10	0,3829	0,3818
		5	25	0,2329	0,2335	10	25	0,3821	0,3833
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1565	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2733	0,2735	10	10	0,2985	0,2998
		15	15	0,3914	0,3924	15	15	0,3958	0,3983
		25	25	0,6015	0,6028	25	25	0,5987	0,6003
		50	50	0,8949	0,8962	50	50	0,8901	0,8906
		5	10	0,1942	0,1939	15	10	0,3348	0,3358
		10	5	0,1937	0,1939	10	15	0,3381	0,3382
		15	5	0,2129	0,2136	25	10	0,3824	0,3818
		5	25	0,2346	0,2335	10	25	0,3833	0,3833
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,166 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1569	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2769	0,2735	10	10	0,3017	0,2998
		15	15	0,3970	0,3924	15	15	0,4026	0,3983
		25	25	0,6080	0,6028	25	25	0,6092	0,6003
		50	50	0,8991	0,8962	50	50	0,8948	0,8906
		5	10	0,1971	0,1939	15	10	0,3403	0,3358
		10	5	0,1952	0,1939	10	15	0,3395	0,3382
		15	5	0,2139	0,2136	25	10	0,3867	0,3818
		5	25	0,2376	0,2335	10	25	0,3866	0,3833
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1565	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2773	0,2735	10	10	0,3021	0,2998
		15	15	0,3970	0,3924	15	15	0,4043	0,3983
		25	25	0,6087	0,6028	25	25	0,6069	0,6003
		50	50	0,9020	0,8962	50	50	0,8956	0,8906
		5	10	0,1962	0,1939	15	10	0,3414	0,3358
		10	5	0,1972	0,1939	10	15	0,3424	0,3382
		15	5	0,2184	0,2136	25	10	0,3878	0,3818
		5	25	0,2368	0,2335	10	25	0,3896	0,3833

Cenário 1: $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Quando as matrizes são desconhecidas: $n_1=10$ e $n_2=10$, $\alpha = 0,0744$; $n_1=15$ e $n_2=15$, $\alpha = 0,0647$; $n_1=25$ e $n_2=25$, $\alpha = 0,0572$; $n_1=50$ e $n_2=50$, $\alpha = 0,0530$; $n_1=15$ e $n_2=10$, $\alpha = 0,0666$; $n_1=10$ e $n_2=15$, $\alpha = 0,0678$; $n_1=25$ e $n_2=10$, $\alpha = 0,0609$; $n_1=10$ e $n_2=25$, $\alpha = 0,0616$.

Tabela A.2: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 2 – p=2.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Matrizes Conhecidas				Matrizes Desconhecidas			
		Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico	Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico
		n ₁	n ₂			n ₁	n ₂		
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,322 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1554	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2733	0,2735	10	10	0,3029	0,2991
		15	15	0,3935	0,3924	15	15	0,4081	0,4019
		25	25	0,6016	0,6028	25	25	0,6006	0,5975
		50	50	0,8954	0,8962	50	50	0,8958	0,8912
		5	10	0,1930	0,1939	15	10	0,3340	0,3334
		10	5	0,1941	0,1939	10	15	0,3367	0,3366
		15	5	0,2120	0,2136	25	10	0,3804	0,3801
		5	25	0,2334	0,2335	10	25	0,3828	0,3821
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,322 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1555	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2722	0,2735	10	10	0,2974	0,2991
		15	15	0,3905	0,3924	15	15	0,4008	0,4019
		25	25	0,6014	0,6028	25	25	0,5963	0,5975
		50	50	0,8956	0,8962	50	50	0,8911	0,8912
		5	10	0,1915	0,1939	15	10	0,3330	0,3334
		10	5	0,1939	0,1939	10	15	0,3378	0,3366
		15	5	0,2135	0,2136	25	10	0,3782	0,3801
		5	25	0,2333	0,2335	10	25	0,3815	0,3821
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,822 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1548	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2732	0,2735	10	10	0,2991	0,2991
		15	15	0,3908	0,3924	15	15	0,4020	0,4019
		25	25	0,6035	0,6028	25	25	0,5957	0,5975
		50	50	0,8958	0,8962	50	50	0,8910	0,8912
		5	10	0,1936	0,1939	15	10	0,3305	0,3334
		10	5	0,1939	0,1939	10	15	0,3365	0,3366
		15	5	0,2155	0,2136	25	10	0,3779	0,3801
		5	25	0,2323	0,2335	10	25	0,3831	0,3821
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,655 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1553	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2721	0,2735	10	10	0,3098	0,2991
		15	15	0,3934	0,3924	15	15	0,4169	0,4019
		25	25	0,6034	0,6028	25	25	0,6157	0,5975
		50	50	0,8959	0,8962	50	50	0,9032	0,8912
		5	10	0,1947	0,1939	15	10	0,3462	0,3334
		10	5	0,1934	0,1939	10	15	0,3477	0,3366
		15	5	0,2140	0,2136	25	10	0,3940	0,3801
		5	25	0,2349	0,2335	10	25	0,3952	0,3821

$$\text{Cenário 2: } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando as matrizes são desconhecidas: n₁=10 e n₂= 10, $\alpha = 0,0747$; n₁=15 e n₂=15, $\alpha = 0,0635$; n₁=25 e n₂=25, $\alpha = 0,0581$; n₁=50 e n₂=50, $\alpha = 0,0526$. n₁=15 e n₂=10, $\alpha = 0,0675$; n₁=10 e n₂=15, $\alpha = 0,0684$; n₁=25 e n₂=10, $\alpha = 0,0615$; n₁=10 e n₂= 25, $\alpha = 0,0620$.

Tabela A.3: Poder Teórico e Simulado para matrizes de covariâncias iguais conhecidas e desconhecidas – Cenário 3 - p=2.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Matrizes Conhecidas				Matrizes Desconhecidas			
		Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico	Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico
		n ₁	n ₂			n ₁	n ₂		
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1565	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2757	0,2735	10	10	0,2900	0,2877
		15	15	0,3959	0,3924	15	15	0,4000	0,3966
		25	25	0,6047	0,6028	25	25	0,6000	0,5987
		50	50	0,8981	0,8962	50	50	0,8933	0,8903
		5	10	0,1948	0,1939	15	10	0,3338	0,3310
		10	5	0,1952	0,1939	10	15	0,3336	0,3312
		15	5	0,2135	0,2136	25	10	0,3751	0,3732
		5	25	0,2345	0,2335	10	25	0,3783	0,3753
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1557	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2735	0,2735	10	10	0,2880	0,2877
		15	15	0,3926	0,3924	15	15	0,3976	0,3966
		25	25	0,6053	0,6028	25	25	0,6027	0,5987
		50	50	0,8983	0,8962	50	50	0,8927	0,8903
		5	10	0,1931	0,1939	15	10	0,3324	0,3310
		10	5	0,1949	0,1939	10	15	0,3347	0,3312
		15	5	0,2151	0,2136	25	10	0,3738	0,3732
		5	25	0,2351	0,2335	10	25	0,3781	0,3753
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,2 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1556	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2757	0,2735	10	10	0,2898	0,2877
		15	15	0,3942	0,3924	15	15	0,3988	0,3966
		25	25	0,6065	0,6028	25	25	0,6007	0,5987
		50	50	0,8983	0,8962	50	50	0,8923	0,8903
		5	10	0,1957	0,1939	15	10	0,3306	0,3310
		10	5	0,1953	0,1939	10	15	0,3326	0,3312
		15	5	0,2164	0,2136	25	10	0,3740	0,3732
		5	25	0,2338	0,2335	10	25	0,3784	0,3753
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1566	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2744	0,2735	10	10	0,2899	0,2877
		15	15	0,3964	0,3924	15	15	0,4006	0,3966
		25	25	0,6060	0,6028	25	25	0,6013	0,5987
		50	50	0,8984	0,8962	50	50	0,8911	0,8903
		5	10	0,1955	0,1939	15	10	0,3339	0,3310
		10	5	0,1941	0,1939	10	15	0,3328	0,3312
		15	5	0,2153	0,2136	25	10	0,3754	0,3732
		5	25	0,2368	0,2335	10	25	0,3780	0,3753

$$\text{Cenário 3: } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando as matrizes são desconhecidas: n₁=10 e n₂= 10, $\alpha = 0,0697$; n₁=15 e n₂=15, $\alpha = 0,0629$; n₁=25 e n₂=25, $\alpha = 0,0576$; n₁=50 e n₂=50, $\alpha = 0,0524$. n₁=15 e n₂=10, $\alpha = 0,0657$; n₁=10 e n₂=15, $\alpha = 0,0658$; n₁=25 e n₂=10, $\alpha = 0,0586$; n₁=10 e n₂= 25, $\alpha = 0,0593$.

Tabela A.4: Poder Teórico e Simulado para matrizes de covariâncias iguais conhecidas e desconhecidas – Cenário 4 - p=2.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Matrizes Conhecidas				Matrizes Desconhecidas			
		Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico	Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico
		n ₁	n ₂			n ₁	n ₂		
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1574	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2778	0,2735	10	10	0,2868	0,2827
		15	15	0,3983	0,3924	15	15	0,3902	0,3851
		25	25	0,6089	0,6028	25	25	0,5960	0,5908
		50	50	0,9000	0,8962	50	50	0,8900	0,8848
		5	10	0,1957	0,1939	15	10	0,3261	0,3224
		10	5	0,1964	0,1939	10	15	0,3258	0,3222
		15	5	0,2144	0,2136	25	10	0,3742	0,3679
		5	25	0,2361	0,2335	10	25	0,3706	0,3676
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1565	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2752	0,2735	10	10	0,2846	0,2827
		15	15	0,3951	0,3924	15	15	0,3887	0,3851
		25	25	0,6089	0,6028	25	25	0,5983	0,5908
		50	50	0,9009	0,8962	50	50	0,8900	0,8848
		5	10	0,1945	0,1939	15	10	0,3267	0,3224
		10	5	0,1961	0,1939	10	15	0,3528	0,3222
		15	5	0,2170	0,2136	25	10	0,3729	0,3679
		5	25	0,2364	0,2335	10	25	0,3717	0,3676
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,1 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1564	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2772	0,2735	10	10	0,2863	0,2827
		15	15	0,3960	0,3924	15	15	0,3891	0,3851
		25	25	0,6101	0,6028	25	25	0,5965	0,5908
		50	50	0,9000	0,8962	50	50	0,8900	0,8848
		5	10	0,1966	0,1939	15	10	0,3275	0,3224
		10	5	0,1966	0,1939	10	15	0,3249	0,3222
		15	5	0,2171	0,2136	25	10	0,3741	0,3679
		5	25	0,2354	0,2335	10	25	0,3712	0,3676
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,9 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1574	0,1553	-	-	-	-
		10	10	0,2765	0,2735	10	10	0,2867	0,2827
		15	15	0,3988	0,3924	15	15	0,3915	0,3851
		25	25	0,6091	0,6028	25	25	0,5963	0,5908
		50	50	0,8999	0,8962	50	50	0,8884	0,8848
		5	10	0,1955	0,1939	15	10	0,3268	0,3224
		10	5	0,1957	0,1939	10	15	0,3251	0,3222
		15	5	0,2164	0,2136	25	10	0,3723	0,3679
		5	25	0,2381	0,2335	10	25	0,3724	0,3676

Cenário 4: $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$

Quando as matrizes são desconhecidas: n₁=10 e n₂= 10, $\alpha = 0,0677$; n₁=15 e n₂=15, $\alpha =0,0591$; n₁=25 e n₂=25, $\alpha =0,0551$; n₁=50 e n₂=50, $\alpha = 0,0491$; n₁=15 e n₂=10, $\alpha = 0,0626$; n₁=10 e n₂=15, $\alpha =0,0625$; n₁=25 e n₂=10, $\alpha =0,0569$; n₁=10 e n₂= 25, $\alpha =0,0568$.

Tabela A.5: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 5 - p=3.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Matrizes Conhecidas				Matrizes Desconhecidas			
		Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico	Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico
		n ₁	n ₂			n ₁	n ₂		
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,263 \\ 0,263 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,138	10	10	0,09366	0,0939	10	10	0,1263	0,1263
		15	15	0,11840	0,1182	15	15	0,1376	0,1395
		25	25	0,17060	0,1704	25	25	0,1800	0,1816
		50	50	0,31430	0,3124	50	50	0,3163	0,3151
		15	10	0,10330	0,1034	15	10	0,1299	0,1300
		10	15	0,10350	0,1034	10	15	0,1306	0,1303
		10	25	0,11490	0,1146	10	25	0,1304	0,1317
		25	10	0,11480	0,1146	25	10	0,1344	0,1330
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,274 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,138	10	10	0,09316	0,0939	10	10	0,1263	0,1263
		15	15	0,11820	0,1182	15	15	0,1400	0,1395
		25	25	0,16970	0,1704	25	25	0,1816	0,1816
		50	50	0,31280	0,3124	50	50	0,3158	0,3151
		15	10	0,10280	0,1034	15	10	0,1298	0,1300
		10	15	0,10190	0,1034	10	15	0,1294	0,1303
		10	25	0,11400	0,1146	10	25	0,1308	0,1317
		25	10	0,11410	0,1146	25	10	0,1329	0,1330
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,526 \\ 0,526 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,553	10	10	0,25500	0,2550	10	10	0,2809	0,2803
		15	15	0,36990	0,3708	15	15	0,3812	0,3802
		25	25	0,58470	0,5836	25	25	0,5777	0,5780
		50	50	0,89250	0,8920	50	50	0,8873	0,8860
		15	10	0,30260	0,3013	15	10	0,3199	0,3198
		10	15	0,30080	0,3013	10	15	0,3209	0,3203
		10	25	0,35670	0,3544	10	25	0,3630	0,3616
		25	10	0,35470	0,3544	25	10	0,3655	0,3639
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,20 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,553	10	10	0,25420	0,2550	10	10	0,2806	0,2803
		15	15	0,36950	0,3708	15	15	0,3783	0,3802
		25	25	0,58190	0,5836	25	25	0,5778	0,5780
		50	50	0,89030	0,8920	50	50	0,8861	0,8860
		15	10	0,30130	0,3013	15	10	0,3193	0,3198
		10	15	0,30030	0,3013	10	15	0,3199	0,3203
		10	25	0,35490	0,3544	10	25	0,3610	0,3616
		25	10	0,35440	0,3544	25	10	0,3643	0,3639
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,36 \\ 0,36 \\ 0,36 \end{pmatrix}$	0,388	10	10	0,18880	0,1874	10	10	0,2182	0,2179
		15	15	0,26840	0,2671	15	15	0,2848	0,2835
		25	25	0,42830	0,4284	25	25	0,4331	0,4300
		50	50	0,74700	0,7468	50	50	0,7428	0,7407
		15	10	0,21760	0,2189	15	10	0,2430	0,2429
		10	15	0,22070	0,2189	10	15	0,2419	0,2433
		10	25	0,25680	0,2555	10	25	0,2708	0,2685
		25	10	0,25700	0,2555	25	10	0,2704	0,2705
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,30 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,705 \\ 0,30 \end{pmatrix}$	0,383	10	10	0,18860	0,1874	10	10	0,2161	0,2179
		15	15	0,26470	0,2671	15	15	0,2822	0,2835
		25	25	0,42810	0,4284	25	25	0,4285	0,4300
		50	50	0,74760	0,7468	50	50	0,7403	0,7407
		15	10	0,21740	0,2189	15	10	0,2421	0,2429
		10	15	0,21790	0,2189	10	15	0,2410	0,2433
		10	25	0,25460	0,2555	10	25	0,2681	0,2685
		25	10	0,25450	0,2555	25	10	0,2682	0,2705

$$\text{Cenário 5: } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando as matrizes são desconhecidas: n₁=10 e n₂= 10, α = 0,07953; n₁=15 e n₂=15, α =0,06867; n₁=25 e n₂=25, α =0,06016; n₁=50 e n₂=50, α = 0,05468. n₁=15 e n₂=10, α = 0,07348; n₁=10 e n₂=15, α =0,07365; n₁=10 e n₂= 25, α =0,06513; n₁=25 e n₂=10, α =0,06590.

Tabela A.6: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 6 - p=3.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Matrizes Conhecidas				Matrizes Desconhecidas			
		Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico	Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico
		n ₁	n ₂			n ₁	n ₂		
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,138	10	10	0,09318	0,0939	10	10	0,1198	0,1204
		15	15	0,11690	0,1182	15	15	0,1298	0,1314
		25	25	0,16950	0,1704	25	25	0,1752	0,1763
		50	50	0,31500	0,3124	50	50	0,3073	0,3052
		15	10	0,10450	0,1034	15	10	0,1231	0,1230
		10	15	0,10390	0,1034	10	15	0,1235	0,1232
		10	25	0,11360	0,1146	10	25	0,1270	0,1265
		25	10	0,11510	0,1146	25	10	0,1243	0,1242
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,138	10	10	0,09356	0,0939	10	10	0,1203	0,1204
		15	15	0,11790	0,1182	15	15	0,1316	0,1314
		25	25	0,17040	0,1704	25	25	0,1770	0,1763
		50	50	0,31420	0,3124	50	50	0,3075	0,3052
		15	10	0,10330	0,1034	15	10	0,1227	0,1230
		10	15	0,10260	0,1034	10	15	0,1230	0,1232
		10	25	0,11460	0,1146	10	25	0,1262	0,1265
		25	10	0,11400	0,1146	25	10	0,1250	0,1242
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,553	10	10	0,25400	0,2550	10	10	0,2711	0,2708
		15	15	0,36640	0,3708	15	15	0,3667	0,3661
		25	25	0,58351	0,5836	25	25	0,5698	0,5702
		50	50	0,89230	0,8920	50	50	0,8818	0,8806
		15	10	0,30060	0,3013	15	10	0,3080	0,3079
		10	15	0,30240	0,3013	10	15	0,3088	0,3082
		10	25	0,35370	0,3544	10	25	0,3508	0,3525
		25	10	0,35500	0,3544	25	10	0,3489	0,3484
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,553	10	10	0,25620	0,2550	10	10	0,2714	0,2708
		15	15	0,37250	0,3708	15	15	0,3648	0,3661
		25	25	0,58401	0,5836	25	25	0,5689	0,5702
		50	50	0,89190	0,8920	50	50	0,8797	0,8806
		15	10	0,30200	0,3013	15	10	0,3082	0,3079
		10	15	0,30070	0,3013	10	15	0,3084	0,3082
		10	25	0,35270	0,3544	10	25	0,3542	0,3525
		25	10	0,35360	0,3544	25	10	0,3467	0,3484
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,388	10	10	0,18790	0,1874	10	10	0,2100	0,2095
		15	15	0,26560	0,2671	15	15	0,2690	0,2710
		25	25	0,42800	0,4284	25	25	0,4207	0,4222
		50	50	0,74740	0,7468	50	50	0,7312	0,7317
		15	10	0,21940	0,2189	15	10	0,2329	0,2325
		10	15	0,21940	0,2189	10	15	0,2333	0,2327
		10	25	0,25520	0,2555	10	25	0,2598	0,2605
		25	10	0,25580	0,2555	25	10	0,2576	0,2569
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,388	10	10	0,18710	0,1874	10	10	0,2100	0,2095
		15	15	0,26820	0,2671	15	15	0,2721	0,2710
		25	25	0,43090	0,4284	25	25	0,4236	0,4222
		50	50	0,74690	0,7468	50	50	0,7317	0,7317
		15	10	0,21960	0,2189	15	10	0,2325	0,2325
		10	15	0,21940	0,2189	10	15	0,2327	0,2327
		10	25	0,25440	0,2555	10	25	0,2593	0,2605
		25	10	0,25510	0,2555	25	10	0,2573	0,2569

$$\text{Cenário 6: } \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5,6 \\ 3 & 9 & 3,6 \\ 5,6 & 3,6 & 16 \end{bmatrix}$$

Quando as matrizes são desconhecidas: n₁=10 e n₂= 10, α = 0,07529; n₁=15 e n₂=15, α =0,06373; n₁=25 e n₂=25, α=0,05770; n₁=50 e n₂=50, α = 0,05139. n₁=15 e n₂=10, α = 0,06876; n₁=10 e n₂=15, α =0,06886; n₁=10 e n₂= 25, α =0,06187; n₁=25 e n₂=10, α =0,06053.

Tabela A.7: Poder Teórico e Estimado - Matrizes de Covariâncias Iguais Conhecidas e Desconhecidas – Cenário 7 - p=3.

Caso de Mudanças nos Vetores de Médias	d	Matrizes Conhecidas				Matrizes Desconhecidas			
		Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico	Tamanhos de Amostra		T ² Simulado	T ² Teórico
		n ₁	n ₂			n ₁	n ₂		
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,53 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,138	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,09473 0,11850 0,17230 0,31140 0,10350 0,10280 0,11410 0,11510	0,0939 0,1182 0,1704 0,3124 0,1034 0,1034 0,1146 0,1146	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,1193 0,1300 0,1720 0,3069 0,1233 0,1232 0,1258 0,1274	0,1191 0,1312 0,1731 0,3046 0,1230 0,1222 0,1263 0,1260
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,532 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,138	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,09533 0,11870 0,17200 0,31460 0,10320 0,10300 0,11580 0,11570	0,0939 0,1182 0,1704 0,3124 0,1034 0,1034 0,1146 0,1146	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,1193 0,1325 0,1751 0,3081 0,1235 0,1223 0,1269 0,1269	0,1191 0,1312 0,1731 0,3046 0,1230 0,1222 0,1263 0,1260
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,06 \\ 1,06 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,553	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,25570 0,37170 0,58400 0,89260 0,30280 0,30320 0,35570 0,35500	0,2550 0,3708 0,5836 0,8920 0,3013 0,3013 0,3544 0,3544	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,2690 0,3664 0,5660 0,8818 0,3084 0,3080 0,3545 0,3531	0,2685 0,3658 0,5653 0,8802 0,3079 0,3066 0,3522 0,3516
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,31 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,553	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,25460 0,37270 0,58550 0,89060 0,29830 0,30150 0,35310 0,35380	0,2550 0,3708 0,5836 0,8920 0,3013 0,3013 0,3544 0,3544	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,2689 0,3638 0,5651 0,8790 0,3060 0,3064 0,3513 0,3525	0,2685 0,3658 0,5653 0,8802 0,3079 0,3066 0,3522 0,3516
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1,184 \\ 1,184 \\ 1,184 \end{pmatrix}$	0,388	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,18670 0,26740 0,43070 0,74550 0,21910 0,21920 0,25630 0,25460	0,1874 0,2671 0,4284 0,7468 0,2189 0,2189 0,2555 0,2555	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,2082 0,2705 0,4192 0,7311 0,2325 0,2310 0,2620 0,2594	0,2075 0,2708 0,4174 0,7310 0,2325 0,2313 0,2603 0,2597
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -1,163 \\ 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 1,163 \end{pmatrix}$	0,388	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,18550 0,26350 0,42170 0,73940 0,21540 0,21480 0,25160 0,25290	0,1874 0,2671 0,4284 0,7468 0,2189 0,2189 0,2555 0,2555	10 15 25 50 15 10 10 25	10 15 25 50 10 15 25 10	0,2053 0,2673 0,4124 0,7249 0,2305 0,2290 0,2581 0,2549	0,2075 0,2708 0,4174 0,7310 0,2325 0,2313 0,2603 0,2597

$$\text{Cenário 7: } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando as matrizes são desconhecidas: n₁=10 e n₂= 10, α = 0,07433; n₁=15 e n₂=15, α =0,06357; n₁=25 e n₂=25, α =0,05622; n₁=50 e n₂=50, α = 0,05119. n₁=15 e n₂=10, α = 0,06884; n₁=10 e n₂=15, α =0,06832; n₁=10 e n₂= 25, α =0,06179; n₁=25 e n₂=10, α =0,06162.

Anexo B: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados

B.1: Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas

Tabela B.1: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 2 – p=2.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1563	0,1488	0,1771	0,1540	0,1535	0,959
		10	10	0,2729	0,2581	0,2997	0,2716	0,2693	0,932
		15	15	0,3915	0,3743	0,4239	0,3891	0,3881	0,918
		25	25	0,6019	0,5832	0,6345	0,5992	0,5969	0,916
		50	50	0,8959	0,8813	0,9095	0,8960	0,8947	0,958
		5	10	0,1935	0,1889	0,2194	0,1945	0,1923	0,944
		10	5	0,1951	0,1859	0,2184	0,1941	0,1937	0,944
		15	5	0,2140	0,2013	0,2372	0,2095	0,2102	0,941
		5	25	0,2329	0,2236	0,2597	0,2311	0,2317	0,937
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1561	0,1458	0,1766	0,1526	0,1520	0,949
		10	10	0,2732	0,2434	0,2959	0,2658	0,2616	0,925
		15	15	0,3933	0,3535	0,4190	0,3837	0,3779	0,909
		25	25	0,6033	0,5387	0,6225	0,5868	0,5787	0,897
		50	50	0,8961	0,8422	0,9020	0,8879	0,8817	0,934
		5	10	0,1944	0,1779	0,2157	0,1907	0,1881	0,941
		10	5	0,1941	0,1803	0,2167	0,1917	0,1900	0,941
		15	5	0,2134	0,1944	0,2357	0,2064	0,2056	0,937
		5	25	0,2331	0,2168	0,2588	0,2291	0,2281	0,932
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1556	0,1465	0,1766	0,1524	0,1520	0,949
		10	10	0,2715	0,2434	0,2945	0,2643	0,2605	0,926
		15	15	0,3925	0,3450	0,4149	0,3801	0,3754	0,908
		25	25	0,6021	0,5304	0,6198	0,5833	0,5750	0,893
		50	50	0,8960	0,8404	0,9020	0,8820	0,8811	0,933
		5	10	0,1939	0,1807	0,2169	0,1910	0,1895	0,941
		10	5	0,1958	0,1779	0,2161	0,1924	0,1909	0,941
		15	5	0,2126	0,1970	0,2363	0,2100	0,2083	0,937
		5	25	0,2347	0,2080	0,2549	0,2265	0,2244	0,933
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	5	5	0,5022	0,4477	0,5265	0,4881	0,4810	0,898
		10	10	0,8143	0,7503	0,8246	0,8011	0,7922	0,915
		15	15	0,9439	0,9047	0,9472	0,9373	0,9324	0,954
		25	25	0,9962	0,9910	0,9965	0,9954	0,9948	0,994
		50	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,700
		5	10	0,6344	0,5711	0,6542	0,6217	0,6123	0,897
		10	5	0,6316	0,5678	0,6511	0,6190	0,6105	0,897
		15	5	0,6871	0,6194	0,7038	0,6704	0,6638	0,899
		5	25	0,7357	0,6636	0,7493	0,7188	0,7121	0,901

Cenário 2: $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes nos casos apresentados na Tabela B.1.

Tabela B.2: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 3 – p=2.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,33	5	5	0,1185	0,1355	0,1470	0,1209	0,1274	0,960
		10	10	0,1955	0,2319	0,2408	0,2115	0,2188	0,946
		15	15	0,2747	0,3143	0,3230	0,2882	0,3011	0,943
		25	25	0,4291	0,4793	0,4856	0,4472	0,4645	0,937
		50	50	0,7361	0,7713	0,7757	0,7458	0,7627	0,956
		5	10	0,1426	0,1636	0,1745	0,1488	0,1562	0,957
		10	5	0,1414	0,1605	0,1717	0,1477	0,1549	0,958
		15	5	0,1549	0,1757	0,1867	0,1602	0,1678	0,957
		5	25	0,1694	0,1890	0,2009	0,1691	0,1807	0,957
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,33	5	5	0,1172	0,0989	0,1361	0,1117	0,1074	0,944
		10	10	0,1933	0,1543	0,2157	0,1881	0,1777	0,916
		15	15	0,2738	0,2235	0,3036	0,2669	0,2537	0,890
		25	25	0,4320	0,3445	0,4602	0,4203	0,4015	0,856
		50	50	0,7347	0,6251	0,7550	0,7247	0,7067	0,850
		5	10	0,1411	0,1184	0,1629	0,1373	0,1313	0,934
		10	5	0,1431	0,1153	0,1617	0,1373	0,1307	0,935
		15	5	0,1549	0,1273	0,1763	0,1479	0,1416	0,930
		5	25	0,1683	0,1379	0,1905	0,1588	0,1522	0,925
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,33	5	5	0,1179	0,1355	0,1468	0,1220	0,1280	0,960
		10	10	0,1933	0,2260	0,2353	0,2050	0,2145	0,949
		15	15	0,2750	0,3101	0,3195	0,2836	0,2986	0,946
		25	25	0,4304	0,4840	0,4898	0,4490	0,4654	0,935
		50	50	0,7361	0,7723	0,7762	0,7466	0,7627	0,956
		5	10	0,1429	0,1627	0,1740	0,1489	0,1561	0,958
		10	5	0,1432	0,1630	0,1743	0,1475	0,1565	0,958
		15	5	0,1559	0,1820	0,1923	0,1630	0,1710	0,953
		5	25	0,1684	0,1936	0,2041	0,1721	0,1871	0,954
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,61 \\ 0,61 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1559	0,1792	0,1901	0,1615	0,1697	0,955
		10	10	0,2710	0,3054	0,3149	0,2793	0,2954	0,947
		15	15	0,3898	0,4423	0,4484	0,4094	0,4239	0,935
		25	25	0,5992	0,6431	0,6485	0,6078	0,6292	0,945
		50	50	0,8924	0,9094	0,9118	0,8967	0,9059	0,978
		5	10	0,1930	0,2248	0,2344	0,2040	0,2133	0,949
		10	5	0,1924	0,2165	0,2276	0,1993	0,2098	0,954
		15	5	0,2134	0,2443	0,2543	0,2177	0,2307	0,949
		5	25	0,2330	0,2705	0,2792	0,2396	0,2532	0,945
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$	1	5	5	0,2744	0,1520	0,2870	0,2503	0,2182	0,852
		10	10	0,5030	0,2674	0,5124	0,4736	0,4170	0,746
		15	15	0,6879	0,3958	0,6945	0,6584	0,5959	0,695
		25	25	0,8955	0,6142	0,8976	0,8789	0,8355	0,715
		50	50	0,9963	0,9245	0,9963	0,9953	0,9905	0,982
		5	10	0,3555	0,1977	0,3697	0,3297	0,2905	0,814
		10	5	0,3534	0,1940	0,3672	0,3291	0,2875	0,813
		15	5	0,3927	0,2124	0,4051	0,3623	0,3182	0,795
		5	25	0,4307	0,2347	0,4429	0,3972	0,3508	0,780

$$\text{Cenário 3: } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes nos casos apresentados na Tabela B.2. Porém, o teste de Hayter e Tsui possui melhor desempenho nos casos 1, 3 e 4.

Tabela B.3: Estimativas de Poder dos Testes para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas – Cenário 4 – p=2.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,28	5	5	0,1064	0,1288	0,1459	0,1138	0,1213	0,944
		10	10	0,1680	0,2083	0,2238	0,1874	0,1974	0,929
		15	15	0,2335	0,2936	0,3075	0,2621	0,2739	0,912
		25	25	0,3666	0,4361	0,4469	0,3924	0,4149	0,909
		50	50	0,6506	0,7370	0,7410	0,6973	0,7130	0,906
		5	10	0,1273	0,1536	0,1706	0,1368	0,1458	0,940
		10	5	0,1261	0,1540	0,1707	0,1365	0,1450	0,939
		15	5	0,1363	0,1689	0,1853	0,1487	0,1580	0,935
		5	25	0,1468	0,1843	0,2000	0,1653	0,1709	0,931
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,28	5	5	0,1048	0,1271	0,1436	0,1120	0,1192	0,945
		10	10	0,1674	0,2077	0,2229	0,1854	0,1964	0,929
		15	15	0,2324	0,2927	0,3042	0,2553	0,2699	0,915
		25	25	0,3657	0,4423	0,4526	0,3958	0,4170	0,903
		50	50	0,6498	0,7362	0,7405	0,6968	0,7115	0,905
		5	10	0,1262	0,1546	0,1710	0,1372	0,1454	0,939
		10	5	0,1252	0,1559	0,1725	0,1397	0,1457	0,936
		15	5	0,1370	0,1689	0,1853	0,1491	0,1581	0,935
		5	25	0,1462	0,1792	0,1954	0,1599	0,1678	0,935
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,1 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,1564	0,1246	0,1843	0,1473	0,1429	0,912
		10	10	0,2772	0,2181	0,3128	0,2672	0,2570	0,870
		15	15	0,3960	0,3147	0,4365	0,3824	0,3686	0,838
		25	25	0,6101	0,4895	0,6421	0,5902	0,5782	0,816
		50	50	0,9000	0,8045	0,9127	0,8902	0,8850	0,879
		5	10	0,1966	0,1567	0,2288	0,1857	0,1803	0,896
		10	5	0,1966	0,1559	0,2277	0,1882	0,1808	0,897
		15	5	0,2171	0,1746	0,2519	0,2065	0,2001	0,888
		5	25	0,2354	0,1828	0,2674	0,2264	0,2143	0,883
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,69	5	5	0,2001	0,1071	0,2200	0,1783	0,1547	0,867
		10	10	0,3669	0,1699	0,3839	0,3347	0,2827	0,769
		15	15	0,5218	0,2280	0,5335	0,4793	0,4104	0,683
		25	25	0,7533	0,3667	0,7604	0,7154	0,6449	0,599
		50	50	0,9697	0,6502	0,9704	0,9609	0,9362	0,679
		5	10	0,2562	0,1257	0,2747	0,2303	0,1958	0,832
		10	5	0,2530	0,1267	0,2721	0,2293	0,1945	0,835
		15	5	0,2815	0,1325	0,2979	0,2508	0,2131	0,818
		5	25	0,3134	0,1437	0,3292	0,2836	0,2361	0,799
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,25 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \end{pmatrix}$	0,69	5	5	0,1994	0,1060	0,2188	0,1768	0,1521	0,868
		10	10	0,3662	0,1692	0,3831	0,3337	0,2833	0,769
		15	15	0,5208	0,2331	0,5337	0,4786	0,4115	0,686
		25	25	0,7540	0,3666	0,7607	0,7172	0,6453	0,599
		50	50	0,9702	0,6536	0,9709	0,9614	0,9364	0,682
		5	10	0,2531	0,1244	0,2717	0,2265	0,1931	0,834
		10	5	0,2550	0,1246	0,2732	0,2296	0,1946	0,833
		15	5	0,2830	0,1374	0,3014	0,2531	0,2157	0,818
		5	25	0,3098	0,1451	0,3268	0,2814	0,2346	0,801

$$\text{Cenário 4: } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes na maioria dos casos apresentados na Tabela B.3. Porém, o teste de Hayter e Tsui possui melhor desempenho nos casos 1 e 2.

B.2: Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas

Tabela B.4: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 2 – $p=2$.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n_1	n_2						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,661 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2987	0,2922	0,3367	0,2978	0,2996	0,918
		15	15	0,3970	0,3908	0,4385	0,3999	0,4028	0,911
		25	25	0,6004	0,5836	0,6357	0,5924	0,5944	0,913
		50	50	0,8901	0,8774	0,9056	0,8867	0,8874	0,956
		15	10	0,3355	0,3313	0,3761	0,3340	0,3364	0,915
		10	15	0,3375	0,3311	0,3768	0,3407	0,3417	0,915
		25	10	0,3829	0,3749	0,4219	0,3794	0,3815	0,914
		10	25	0,3821	0,3734	0,4207	0,3798	0,3843	0,914
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2994	0,2801	0,3328	0,2929	0,2959	0,914
		15	15	0,3986	0,3696	0,4325	0,3814	0,3859	0,903
		25	25	0,6010	0,5433	0,6248	0,5811	0,5840	0,895
		50	50	0,8912	0,8417	0,8987	0,8776	0,8752	0,936
		15	10	0,3354	0,3145	0,3697	0,3202	0,3257	0,911
		10	15	0,3385	0,3152	0,3720	0,3315	0,3340	0,910
		25	10	0,3823	0,3514	0,4139	0,3650	0,3676	0,906
		10	25	0,3818	0,3495	0,4133	0,3704	0,3733	0,905
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,3002	0,2823	0,3344	0,2945	0,2976	0,914
		15	15	0,3961	0,3674	0,4296	0,3771	0,3819	0,904
		25	25	0,6008	0,5447	0,6243	0,5772	0,5802	0,897
		50	50	0,8908	0,8407	0,8984	0,8769	0,8752	0,935
		15	10	0,3355	0,3152	0,3704	0,3229	0,3269	0,910
		10	15	0,3402	0,3166	0,3738	0,3306	0,3349	0,909
		25	10	0,3841	0,3529	0,4157	0,3710	0,3728	0,906
		10	25	0,3827	0,3525	0,4146	0,3746	0,3780	0,906
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	10	10	0,7998	0,7573	0,8210	0,7792	0,7998	0,915
		15	15	0,9339	0,9037	0,9409	0,9204	0,9247	0,956
		25	25	0,9954	0,9895	0,9958	0,9938	0,9939	0,993
		50	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,700
		15	10	0,8679	0,8285	0,8822	0,8456	0,8538	0,932
		10	15	0,8690	0,8280	0,8828	0,8517	0,8579	0,931
		25	10	0,9230	0,8880	0,9304	0,9095	0,9122	0,950
		10	25	0,9236	0,8882	0,9310	0,9099	0,9140	0,950

$$\text{Cenário 2: } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes em todos os casos apresentados na Tabela B.4.

Tabela B.5: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas – Cenário 3 – p=2.

Caso de Mudanças nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,33	10	10	0,2129	0,2525	0,2673	0,2338	0,2378	0,931
		15	15	0,2844	0,3282	0,3404	0,3097	0,3167	0,932
		25	25	0,4316	0,4783	0,4876	0,4460	0,4619	0,935
		50	50	0,7291	0,7665	0,7713	0,7380	0,7534	0,953
		15	10	0,2401	0,2802	0,2936	0,2631	0,2700	0,933
		10	15	0,2410	0,2809	0,2947	0,2628	0,2685	0,932
		25	10	0,2647	0,3118	0,3224	0,2857	0,2934	0,932
		10	25	0,2671	0,3127	0,3235	0,2856	0,2955	0,933
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,33	10	10	0,2124	0,1815	0,2463	0,1973	0,1971	0,901
		15	15	0,2841	0,2313	0,3155	0,2688	0,2639	0,884
		25	25	0,4308	0,3451	0,4609	0,4085	0,3996	0,854
		50	50	0,7277	0,6154	0,7489	0,7095	0,6943	0,845
		15	10	0,2397	0,1992	0,2717	0,2282	0,2244	0,896
		10	15	0,2389	0,1981	0,2700	0,2240	0,2214	0,897
		25	10	0,2648	0,2189	0,2981	0,2472	0,2419	0,888
		10	25	0,2673	0,2187	0,2988	0,2469	0,2435	0,889
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,33	10	10	0,2139	0,2532	0,2680	0,2348	0,2390	0,931
		15	15	0,2835	0,3262	0,3385	0,3026	0,3120	0,933
		25	25	0,4343	0,4819	0,4901	0,4429	0,4622	0,934
		50	50	0,7285	0,7666	0,7713	0,7421	0,7555	0,953
		15	10	0,2401	0,2803	0,2940	0,2639	0,2695	0,932
		10	15	0,2419	0,2826	0,2962	0,2639	0,2701	0,932
		25	10	0,2663	0,3135	0,3245	0,2871	0,2949	0,931
		10	25	0,2674	0,3125	0,3236	0,2886	0,2969	0,933
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,61 \\ 0,61 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2851	0,3374	0,3501	0,3091	0,3173	0,922
		15	15	0,3949	0,4483	0,4586	0,4210	0,4317	0,926
		25	25	0,5941	0,6426	0,6496	0,6115	0,6272	0,937
		50	50	0,8888	0,9087	0,9111	0,8964	0,9044	0,975
		15	10	0,3289	0,3810	0,3928	0,3571	0,3661	0,924
		10	15	0,3285	0,3801	0,3919	0,3592	0,3660	0,925
		25	10	0,3690	0,4268	0,4357	0,3939	0,4041	0,924
		10	25	0,3727	0,4273	0,4369	0,3911	0,4038	0,926
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$	1	10	10	0,4970	0,3023	0,5173	0,4224	0,4105	0,765
		15	15	0,6756	0,4062	0,6860	0,6150	0,5829	0,710
		25	25	0,8884	0,6081	0,8910	0,8527	0,8171	0,714
		50	50	0,9958	0,9155	0,9959	0,9938	0,9888	0,920
		15	10	0,5751	0,3424	0,5909	0,5069	0,4832	0,736
		10	15	0,5754	0,3408	0,5907	0,5085	0,4839	0,735
		25	10	0,6482	0,3851	0,6598	0,5872	0,5503	0,714
		10	25	0,6521	0,3832	0,6633	0,5913	0,5546	0,709

$$\text{Cenário 3: } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes na maioria dos casos apresentados na Tabela B.5. Porém, o teste de Hayter e Tsui possui melhor desempenho nos casos 1, 3 e 4.

Tabela B.6: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas - Cenário 4 – p=2.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,28	10	10	0,1829	0,2296	0,2507	0,2116	0,2161	0,911
		15	15	0,2348	0,2978	0,3141	0,2703	0,2801	0,905
		25	25	0,3662	0,4451	0,4569	0,4101	0,4240	0,898
		50	50	0,6358	0,7227	0,7272	0,6843	0,6961	0,904
		15	10	0,2031	0,2560	0,2750	0,2303	0,2349	0,909
		10	15	0,2020	0,2555	0,2740	0,2342	0,2413	0,910
		25	10	0,2258	0,2860	0,3021	0,2598	0,2695	0,908
		10	25	0,2229	0,2854	0,3010	0,2603	0,2670	0,906
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,28	10	10	0,1829	0,2298	0,2512	0,2136	0,2177	0,910
		15	15	0,2359	0,2999	0,3161	0,2723	0,2817	0,904
		25	25	0,3604	0,4393	0,4513	0,4097	0,4209	0,897
		50	50	0,6337	0,7215	0,7258	0,6772	0,6913	0,904
		15	10	0,2039	0,2565	0,2756	0,2355	0,2388	0,909
		10	15	0,2039	0,2583	0,2762	0,2416	0,2470	0,910
		25	10	0,2253	0,2856	0,3018	0,2582	0,2675	0,907
		10	25	0,2228	0,2844	0,3002	0,2552	0,2639	0,907
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,1 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,2863	0,2352	0,3332	0,2648	0,2641	0,855
		15	15	0,3891	0,3140	0,4350	0,3631	0,3633	0,833
		25	25	0,5965	0,4795	0,6318	0,5763	0,5679	0,813
		50	50	0,8900	0,7899	0,9041	0,8756	0,8694	0,872
		15	10	0,3275	0,2674	0,3744	0,3112	0,3037	0,846
		10	15	0,3249	0,2634	0,3710	0,3066	0,3052	0,846
		25	10	0,3741	0,3017	0,4199	0,3503	0,3480	0,836
		10	25	0,3712	0,2993	0,4167	0,3535	0,3476	0,837
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	0,69	10	10	0,3674	0,1864	0,3924	0,3006	0,2780	0,769
		15	15	0,5046	0,2408	0,5237	0,4348	0,3947	0,698
		25	25	0,7412	0,3611	0,7499	0,6896	0,6273	0,603
		50	50	0,9643	0,6385	0,9656	0,9501	0,9213	0,672
		15	10	0,4236	0,2070	0,4456	0,3593	0,3216	0,739
		10	15	0,4234	0,2053	0,4449	0,3557	0,3249	0,739
		25	10	0,4874	0,2283	0,5051	0,4213	0,3786	0,706
		10	25	0,4862	0,2288	0,5049	0,4228	0,3767	0,705
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,25 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \end{pmatrix}$	0,69	10	10	0,3662	0,1860	0,3914	0,3015	0,2790	0,769
		15	15	0,5051	0,2409	0,5239	0,4357	0,3931	0,698
		25	25	0,7393	0,3603	0,7482	0,6885	0,6267	0,603
		50	50	0,9647	0,6367	0,9657	0,9498	0,9216	0,670
		15	10	0,4237	0,2062	0,4459	0,3595	0,3220	0,738
		10	15	0,4211	0,2047	0,4427	0,3537	0,3231	0,741
		25	10	0,4854	0,2280	0,5039	0,4208	0,3761	0,706
		10	25	0,4846	0,2275	0,5029	0,4203	0,3751	0,706

$$\text{Cenário 4: } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$$

O teste de Hayter e Tsui obteve melhor desempenho das estimativas de poder nos casos 1 e 2 da Tabela B.6.

B.3: Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas

Tabela B.7: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 8 – $p=2$.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n_1	n_2						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,322 \end{pmatrix}$	0,38	5	5	0,2159	0,2101	0,2425	0,2161	0,2158	0,941
		10	10	0,3997	0,3906	0,4341	0,4043	0,4037	0,922
		15	15	0,5606	0,5587	0,6006	0,5654	0,5653	0,918
		25	25	0,7945	0,7883	0,8213	0,7988	0,7992	0,940
		50	50	0,9804	0,9776	0,9841	0,9805	0,9807	0,990
		5	10	0,3314	0,3223	0,3628	0,3259	0,3266	0,928
		10	5	0,2399	0,2366	0,2701	0,2399	0,2395	0,936
		15	5	0,2484	0,2402	0,2769	0,2475	0,2349	0,935
5	25	0,5128	0,5087	0,5497	0,5139	0,5149	0,922		
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,332 \end{pmatrix}$	0,38	5	5	0,2186	0,2120	0,2454	0,2193	0,2180	0,940
		10	10	0,4026	0,3945	0,4376	0,4074	0,4070	0,922
		15	15	0,5679	0,5549	0,6011	0,5675	0,5678	0,921
		25	25	0,8022	0,7913	0,8258	0,8035	0,8045	0,942
		50	50	0,9820	0,9804	0,9859	0,9828	0,9827	0,991
		5	10	0,3382	0,3407	0,3773	0,3405	0,3399	0,924
		10	5	0,2447	0,2351	0,2717	0,2415	0,2411	0,936
		15	5	0,2516	0,2385	0,2771	0,2486	0,2488	0,935
5	25	0,5192	0,5138	0,5552	0,5198	0,5215	0,923		
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,822 \end{pmatrix}$	0,38	5	5	0,2162	0,2132	0,2449	0,2181	0,2175	0,940
		10	10	0,3986	0,3918	0,4346	0,4050	0,4045	0,921
		15	15	0,5625	0,5559	0,5995	0,5665	0,5650	0,919
		25	25	0,7944	0,7828	0,8183	0,7964	0,7960	0,941
		50	50	0,9809	0,9789	0,9849	0,9814	0,9815	0,990
		5	10	0,3341	0,3321	0,3697	0,3343	0,3340	0,927
		10	5	0,2396	0,2325	0,2682	0,2373	0,2376	0,936
		15	5	0,2482	0,2444	0,2791	0,2498	0,2490	0,934
5	25	0,5113	0,5127	0,5518	0,5169	0,5171	0,920		
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,655 \end{pmatrix}$	0,38	5	5	0,2164	0,2113	0,2439	0,2189	0,2171	0,939
		10	10	0,3964	0,3850	0,4296	0,4014	0,3999	0,922
		15	15	0,5616	0,5504	0,5962	0,5615	0,5608	0,920
		25	25	0,7947	0,7833	0,8183	0,7966	0,7973	0,941
		50	50	0,9810	0,9788	0,9851	0,9814	0,9812	0,990
		5	10	0,3336	0,3288	0,3677	0,3322	0,3322	0,927
		10	5	0,2416	0,2360	0,2708	0,2398	0,2394	0,936
		15	5	0,2480	0,2392	0,2757	0,2478	0,2475	0,936
5	25	0,5142	0,5066	0,5493	0,5128	0,5151	0,922		

$$\text{Cenário 8: } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes na maioria dos casos apresentados na Tabela B.7.

Tabela B.8: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 9 – $p=2$.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T^2 de Hotelling	Hayter & Tsui	T^2 & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n_1	n_2						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,25	5	5	0,1553	0,1579	0,1794	0,1540	0,1582	0,954
		10	10	0,2717	0,2807	0,3063	0,2760	0,2813	0,939
		15	15	0,3886	0,4007	0,4282	0,3909	0,3981	0,933
		25	25	0,6004	0,6211	0,6437	0,6107	0,6159	0,934
		50	50	0,8950	0,9084	0,9165	0,9013	0,9040	0,971
		5	10	0,1954	0,1982	0,2225	0,1952	0,1975	0,949
		10	5	0,1912	0,1983	0,2215	0,1941	0,1985	0,947
		15	5	0,2098	0,2166	0,2420	0,2089	0,2141	0,942
		5	25	0,2450	0,2454	0,2755	0,2477	0,2481	0,940
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,25	5	5	0,1537	0,1587	0,1793	0,1544	0,1577	0,954
		10	10	0,2716	0,2797	0,3062	0,2760	0,2808	0,939
		15	15	0,3897	0,4072	0,4331	0,3954	0,4017	0,931
		25	25	0,5980	0,6245	0,6453	0,6095	0,6161	0,932
		50	50	0,8945	0,9034	0,9129	0,8979	0,9015	0,972
		5	10	0,1955	0,1994	0,2237	0,1967	0,1989	0,947
		10	5	0,1912	0,1937	0,2186	0,1932	0,1972	0,948
		15	5	0,2087	0,2215	0,2456	0,2146	0,2170	0,939
		5	25	0,2433	0,2437	0,2739	0,2453	0,2463	0,939
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,2 \end{pmatrix}$	0,25	5	5	0,1541	0,1624	0,1815	0,1560	0,1598	0,954
		10	10	0,2732	0,2786	0,3059	0,2730	0,2800	0,940
		15	15	0,3901	0,4081	0,4337	0,3979	0,4031	0,931
		25	25	0,5986	0,6148	0,6358	0,6050	0,6113	0,936
		50	50	0,8939	0,9049	0,9138	0,8990	0,9024	0,971
		5	10	0,1964	0,1999	0,2241	0,1970	0,1994	0,948
		10	5	0,1908	0,1987	0,2220	0,1963	0,1997	0,946
		15	5	0,2110	0,2200	0,2454	0,2125	0,2171	0,940
		5	25	0,2451	0,2408	0,2730	0,2453	0,2465	0,940
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,25	5	5	0,1527	0,1549	0,1759	0,1513	0,1557	0,956
		10	10	0,2716	0,2819	0,3072	0,2769	0,2814	0,939
		15	15	0,3873	0,4058	0,4312	0,3955	0,3997	0,930
		25	25	0,5933	0,6179	0,6409	0,6035	0,6123	0,935
		50	50	0,8931	0,9056	0,9140	0,8979	0,9018	0,970
		5	10	0,1975	0,2016	0,2256	0,1977	0,2002	0,948
		10	5	0,1926	0,1991	0,2228	0,1968	0,2003	0,946
		15	5	0,2110	0,2197	0,2446	0,2110	0,2161	0,941
		5	25	0,2436	0,2475	0,2765	0,2479	0,2483	0,938
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,47 \\ -0,74 \end{pmatrix}$	0,5	5	5	0,2747	0,2115	0,2950	0,2618	0,2488	0,896
		10	10	0,5069	0,3841	0,5242	0,4879	0,4633	0,843
		15	15	0,6915	0,5510	0,7044	0,6701	0,6423	0,834
		25	25	0,8974	0,7792	0,9016	0,8843	0,8644	0,873
		50	50	0,9967	0,9811	0,9969	0,9959	0,9941	0,984
		5	10	0,3258	0,2697	0,3498	0,3138	0,3025	0,896
		10	5	0,3938	0,2746	0,4115	0,3773	0,3495	0,845
		15	5	0,4590	0,3089	0,4756	0,4326	0,3989	0,817
		5	25	0,3654	0,3205	0,3916	0,3582	0,3483	0,903
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1,12 \\ 1,12 \end{pmatrix}$	1,0	5	5	0,5040	0,5051	0,5367	0,4978	0,5110	0,936
		10	10	0,8186	0,8103	0,8361	0,8131	0,8204	0,957
		15	15	0,9457	0,9394	0,9519	0,9413	0,9447	0,981
		25	25	0,9966	0,9954	0,9970	0,9962	0,9964	0,998
		50	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,999
		5	10	0,6667	0,6415	0,6906	0,6556	0,6605	0,929
		10	5	0,6059	0,6209	0,6415	0,6082	0,6221	0,944
		15	5	0,6459	0,6710	0,6849	0,6466	0,6625	0,947
		5	25	0,7983	0,7526	0,8114	0,7862	0,7845	0,928

$$\text{Cenário 9: } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes na maioria dos casos apresentados na Tabela B.8. Porém, o teste de Hayter e Tsui possui melhor desempenho nos casos 1, 2, 3 e 4.

Tabela B.9: Estimativas de Poder dos testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 10.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,18	5	5	0,1254	0,1291	0,1486	0,1248	0,1272	0,957
		10	10	0,2060	0,2136	0,2375	0,2098	0,2140	0,945
		15	15	0,2938	0,3052	0,3317	0,2956	0,3016	0,936
		25	25	0,4603	0,4822	0,5067	0,4682	0,4770	0,929
		50	50	0,7722	0,7938	0,8078	0,7805	0,7899	0,950
		5	10	0,1531	0,1572	0,1771	0,1540	0,1567	0,956
		10	5	0,1526	0,1585	0,1842	0,1549	0,1569	0,943
		15	5	0,1707	0,1716	0,2052	0,1710	0,1732	0,932
		5	25	0,1900	0,1927	0,2170	0,1883	0,1906	0,948
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,18	5	5	0,1230	0,1257	0,1452	0,1221	0,1249	0,958
		10	10	0,2080	0,2207	0,2435	0,2150	0,2183	0,941
		15	15	0,2943	0,3115	0,3363	0,2989	0,3048	0,933
		25	25	0,4622	0,4890	0,5118	0,4736	0,4815	0,928
		50	50	0,7706	0,7938	0,8074	0,7816	0,7894	0,950
		5	10	0,1536	0,1595	0,1790	0,1556	0,1574	0,955
		10	5	0,1528	0,1588	0,1847	0,1558	0,1573	0,942
		15	5	0,1705	0,1712	0,2042	0,1689	0,1729	0,933
		5	25	0,1895	0,1931	0,2174	0,1858	0,1898	0,948
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,1 \end{pmatrix}$	0,18	5	5	0,1240	0,1295	0,1485	0,1249	0,1273	0,957
		10	10	0,2071	0,2175	0,2413	0,2123	0,2167	0,942
		15	15	0,2910	0,3061	0,3315	0,2935	0,2996	0,934
		25	25	0,4612	0,4863	0,5102	0,4690	0,4789	0,927
		50	50	0,7710	0,7956	0,8091	0,7811	0,7899	0,948
		5	10	0,1539	0,1570	0,1772	0,1547	0,1573	0,957
		10	5	0,1530	0,1592	0,1848	0,1558	0,1571	0,943
		15	5	0,1721	0,1697	0,2034	0,1699	0,1733	0,935
		5	25	0,1922	0,1933	0,2184	0,1895	0,1922	0,948
$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,9 \end{pmatrix}$	0,18	5	5	0,1230	0,1293	0,1474	0,1247	0,1268	0,957
		10	10	0,2068	0,2212	0,2435	0,2150	0,2181	0,941
		15	15	0,2934	0,3110	0,3355	0,2952	0,3027	0,933
		25	25	0,4591	0,4826	0,5070	0,4685	0,4771	0,928
		50	50	0,7709	0,7892	0,8048	0,7758	0,7866	0,951
		5	10	0,1550	0,1583	0,1790	0,1566	0,1589	0,955
		10	5	0,1513	0,1563	0,1822	0,1530	0,1550	0,943
		15	5	0,1733	0,1720	0,2060	0,1704	0,1743	0,933
		5	25	0,1890	0,1895	0,2144	0,1854	0,1885	0,950

$$\text{Cenário 10: } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes em todos os casos apresentados na Tabela B.9. Porém, o teste de Hayter e Tsui possui melhor desempenho em todos os 4 casos.

Tabela B.10: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas – Cenário 11.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n ₁	n ₂						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,20	5	5	0,1311	0,1267	0,1595	0,1308	0,1305	0,939
		10	10	0,2239	0,2146	0,2614	0,2275	0,2283	0,916
		15	15	0,3155	0,3105	0,3646	0,3245	0,3227	0,897
		25	25	0,4964	0,4835	0,5471	0,5019	0,5067	0,886
		50	50	0,8103	0,7941	0,8413	0,8122	0,8157	0,922
		5	10	0,1561	0,1540	0,1857	0,1520	0,1552	0,939
		10	5	0,1675	0,1532	0,1986	0,1653	0,1632	0,924
		15	5	0,1890	0,1677	0,2221	0,1870	0,1843	0,912
		5	25	0,1806	0,1847	0,2145	0,1849	0,1882	0,936
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,20	5	5	0,1310	0,1276	0,1597	0,1315	0,1308	0,939
		10	10	0,2227	0,2166	0,2622	0,2247	0,2278	0,915
		15	15	0,3165	0,3041	0,3600	0,3192	0,3197	0,901
		25	25	0,4952	0,4811	0,5444	0,4977	0,5043	0,888
		50	50	0,8092	0,7975	0,8423	0,8159	0,8178	0,922
		5	10	0,1573	0,1596	0,1915	0,1586	0,1588	0,934
		10	5	0,1695	0,1567	0,2021	0,1667	0,1647	0,922
		15	5	0,1902	0,1687	0,2230	0,1684	0,1847	0,913
		5	25	0,1817	0,1843	0,2136	0,1833	0,1886	0,939
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,1 \end{pmatrix}$	0,20	5	5	0,1320	0,1285	0,1613	0,1334	0,1318	0,938
		10	10	0,2232	0,2117	0,2592	0,2255	0,2269	0,917
		15	15	0,3191	0,3137	0,3683	0,3233	0,3247	0,896
		25	25	0,4975	0,4780	0,5429	0,4978	0,5045	0,890
		50	50	0,8073	0,7950	0,8408	0,8116	0,8146	0,921
		5	10	0,1573	0,1606	0,1913	0,1580	0,1594	0,935
		10	5	0,1676	0,1574	0,2018	0,1662	0,1650	0,922
		15	5	0,1890	0,1723	0,2254	0,1875	0,1863	0,911
		5	25	0,1811	0,1889	0,2181	0,1890	0,1914	0,934
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,9 \end{pmatrix}$	0,20	5	5	0,1325	0,1271	0,1607	0,1331	0,1321	0,938
		10	10	0,2213	0,2098	0,2568	0,2237	0,2253	0,917
		15	15	0,3156	0,3082	0,3626	0,3210	0,3213	0,897
		25	25	0,4975	0,4840	0,5471	0,5020	0,5080	0,887
		50	50	0,8105	0,7920	0,8401	0,8119	0,8157	0,922
		5	10	0,1546	0,1507	0,1834	0,1505	0,1529	0,939
		10	5	0,1671	0,1529	0,1991	0,1630	0,1624	0,922
		15	5	0,1882	0,1699	0,2228	0,1850	0,1843	0,912
		5	25	0,1823	0,1884	0,2180	0,1870	0,1914	0,935

$$\text{Cenário 11: } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes em todos os casos apresentados na Tabela B.10.

B.4: Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas

Tabela B.11: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 8.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n_1	n_2						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,332 \end{pmatrix}$	0,38	10	10	0,4285	0,4208	0,4693	0,4208	0,4249	0,911
		15	15	0,5762	0,5622	0,6118	0,5809	0,5808	0,915
		25	25	0,7863	0,7802	0,8152	0,7817	0,7839	0,932
		50	50	0,9780	0,9757	0,9807	0,9788	0,9787	0,988
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,332 \end{pmatrix}$	0,38	10	10	0,4255	0,4184	0,4663	0,4134	0,4189	0,911
		15	15	0,5751	0,5606	0,6104	0,5747	0,5775	0,915
		25	25	0,7874	0,7810	0,8158	0,7874	0,7891	0,937
		50	50	0,9785	0,9764	0,9831	0,9789	0,9792	0,989
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,822 \end{pmatrix}$	0,38	10	10	0,4278	0,4210	0,4869	0,4175	0,4223	0,911
		15	15	0,5752	0,5602	0,6106	0,5746	0,5778	0,914
		25	25	0,7868	0,7796	0,8151	0,7836	0,7856	0,936
		50	50	0,9787	0,9768	0,9835	0,9798	0,9799	0,988
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,333 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,655 \end{pmatrix}$	0,38	10	10	0,4277	0,4203	0,4685	0,4205	0,4242	0,911
		15	15	0,5765	0,5628	0,6129	0,5778	0,5800	0,914
		25	25	0,7851	0,7795	0,8140	0,7831	0,7853	0,937
		50	50	0,9787	0,9769	0,9832	0,9794	0,9795	0,989

$$\text{Cenário 8: } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes em todos os casos apresentados na Tabela B.11.

Tabela B.12: Estimativas de Poder dos Testes Para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 9.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n_1	n_2						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,25	10	10	0,2930	0,3110	0,3417	0,3077	0,3089	0,920
		15	15	0,4005	0,4181	0,4286	0,4169	0,4194	0,921
		25	25	0,5934	0,6165	0,6407	0,6076	0,6121	0,929
		50	50	0,8887	0,9013	0,9104	0,8967	0,8994	0,969
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	0,25	10	10	0,2914	0,3103	0,3403	0,3025	0,3049	0,921
		15	15	0,3981	0,4167	0,4467	0,4149	0,4173	0,921
		25	25	0,5934	0,6164	0,6409	0,6070	0,6114	0,928
		50	50	0,8885	0,9006	0,9098	0,8953	0,8986	0,970
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,2 \end{pmatrix}$	0,25	10	10	0,2909	0,3099	0,3400	0,3056	0,3073	0,921
		15	15	0,3979	0,4172	0,4476	0,4104	0,4149	0,920
		25	25	0,5943	0,6169	0,6413	0,6074	0,6125	0,929
		50	50	0,8898	0,9022	0,9114	0,8979	0,9009	0,969
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$	0,25	10	10	0,2918	0,3111	0,3414	0,3032	0,3067	0,920
		15	15	0,3985	0,4173	0,4474	0,4159	0,4181	0,921
		25	25	0,5938	0,6168	0,6413	0,6103	0,6140	0,928
		50	50	0,8900	0,9015	0,9113	0,8960	0,8995	0,969
(5) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,47 \\ -0,74 \end{pmatrix}$	0,5	10	10	0,5067	0,4124	0,5381	0,4648	0,4661	0,843
		15	15	0,6808	0,5532	0,6995	0,6453	0,6374	0,835
		25	25	0,8884	0,7777	0,8950	0,8691	0,8564	0,876
		50	50	0,9960	0,9789	0,9962	0,9947	0,9930	0,983
(6) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1,12 \\ 1,12 \end{pmatrix}$	1,0	10	10	0,7948	0,8111	0,8312	0,8004	0,8094	0,944
		15	15	0,9340	0,9342	0,9456	0,9321	0,9379	0,977
		25	25	0,9955	0,9949	0,9963	0,9949	0,9956	0,998
		50	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,000

$$\text{Cenário 9: } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes na maioria dos casos apresentados na Tabela B.12. Porém, o teste de Hayter e Tsui possui melhor desempenho nos casos 1, 2, 3, 4 e 5.

Tabela B.13: Estimativas de Poder dos Testes Para outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 10.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T ² de Hotelling	Hayter & Tsui	T ² & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n_1	n_2						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,18	10	10	0,2415	0,2387	0,2918	0,2436	0,2465	0,897
		15	15	0,3202	0,3156	0,3749	0,3222	0,3247	0,886
		25	25	0,4870	0,4768	0,5416	0,4924	0,4973	0,881
		50	50	0,7996	0,7849	0,8329	0,7985	0,8071	0,919
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,18	10	10	0,2396	0,2363	0,2894	0,2379	0,2421	0,897
		15	15	0,3197	0,3144	0,3737	0,3186	0,3233	0,887
		25	25	0,4899	0,4777	0,5437	0,4935	0,4984	0,880
		50	50	0,7982	0,7839	0,8325	0,7983	0,8061	0,917
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,1 \end{pmatrix}$	0,18	10	10	0,2403	0,2382	0,2911	0,2376	0,2426	0,896
		15	15	0,3175	0,3135	0,3718	0,3140	0,3193	0,887
		25	25	0,4888	0,4768	0,5429	0,4926	0,4976	0,880
		50	50	0,8012	0,7868	0,8347	0,8020	0,8094	0,919
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,9 \end{pmatrix}$	0,18	10	10	0,2399	0,2365	0,2899	0,2370	0,2416	0,897
		15	15	0,3197	0,3148	0,3727	0,3220	0,3242	0,889
		25	25	0,4874	0,4760	0,5416	0,4953	0,4991	0,880
		50	50	0,7975	0,7825	0,8314	0,7964	0,8056	0,917

$$\text{Cenário 10: } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes em todos os casos apresentados na Tabela B.13.

Tabela B.14: Estimativas de Poder dos Testes para Outros Casos Simulados - Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas – Cenário 11.

Caso de Mudança nos vetores de Médias	d	Tamanhos de Amostra		T^2 de Hotelling	Hayter & Tsui	T^2 & HT (Comb)	Tippett	Fisher	Prop. Concor dância
		n_1	n_2						
(1) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,20	10	10	0,2415	0,2387	0,2918	0,2436	0,2465	0,897
		15	15	0,3202	0,3156	0,3749	0,3222	0,3247	0,886
		25	25	0,4870	0,4768	0,5416	0,4924	0,4973	0,881
		50	50	0,7996	0,7849	0,8329	0,7985	0,8071	0,919
(2) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix}$	0,20	10	10	0,2396	0,2363	0,2894	0,2379	0,2421	0,897
		15	15	0,3197	0,3144	0,3737	0,3186	0,3233	0,887
		25	25	0,4899	0,4777	0,5437	0,4935	0,4984	0,880
		50	50	0,7982	0,7839	0,8325	0,7983	0,8061	0,917
(3) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,1 \end{pmatrix}$	0,20	10	10	0,2403	0,2382	0,2911	0,2376	0,2426	0,896
		15	15	0,3175	0,3135	0,3718	0,3140	0,3193	0,887
		25	25	0,4888	0,4768	0,5429	0,4926	0,4976	0,880
		50	50	0,8012	0,7868	0,8347	0,8020	0,8094	0,919
(4) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,9 \end{pmatrix}$	0,20	10	10	0,2399	0,2365	0,2899	0,2370	0,2416	0,897
		15	15	0,3197	0,3148	0,3727	0,3220	0,3242	0,889
		25	25	0,4874	0,4760	0,5416	0,4953	0,4991	0,880
		50	50	0,7975	0,7825	0,8314	0,7964	0,8056	0,917

$$\text{Cenário 11: } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$$

As estimativas de poder dos testes são muito semelhantes em todos os casos apresentados na Tabela B.14.

Anexo C: Programas em R para se realizar os teste T^2 de Hotelling e Hayter e Tsui para 2 populações independentes.

Para que o usuário tenha condições de usar o programa ele terá que fornecer algumas informações que são indispensáveis para a execução do algoritmo. A seguir apresentamos a chamada da função para o caso de matrizes de covariâncias iguais e conhecidas:

`T2eHT.Iguais.Conhecidas(alfa,med1,med2,sigma,n1,n2)`

onde `T2eHT.Iguais.Conhecidas` é o nome da função e `(alfa,med1,med2,sigma,n1,n2)` são os argumentos que precisam ser informados de maneira correta para que o programa seja executado.

- `alfa` → Argumento do tipo numérico: É o nível de significância em que os testes serão executados.
- `med1` e `med2` → Argumento do tipo vetor: São os vetores amostrais das populações independentes 1 e 2, respectivamente.
- `n1` e `n2` → Argumento do tipo numérico : É o tamanho da amostra, ou seja, a quantidade de observações que o usuário possui em cada uma das variáveis.
- `sigma` → Argumento do tipo matriz: É a matriz de covariâncias teóricas iguais.

C.1: Matrizes de Covariâncias Iguais e Conhecidas

```
#=====#
# Realiza os teste de Hayter e Tsui e T2 de Hotelling para dados informados
#=====#
T2eHT.Iguais.Conhecidas=function(alfa,med1,med2,sigma,n1,n2){ # É necessário
informar: alfa=nível de significância do teste;
# med1 e med2= vetores de médias amostrais das populações 1 e 2. # sigma =
matriz de covariância conhecida (teórica).
require(mvtnorm) # Pacote que gera a distribuição Normal Multivariada para a
simulação do Cr-alfa.
p=length(med1) # Verificando a quantidade de variáveis.
dif=matrix(rep(0),1,p)
p.valor.t2=0
p.valor.ht=0

##== Função que calcula o valor crítico do teste de Hayter e Tsui - Cr.alfa ==#
limite.critico.HT=function(p,sigma,alfa){          ## Usando a matriz de
covariâncias(igual e conhecida) sigma.
  sigma = cov2cor(sigma) ## transforma a matriz de covariância em matriz de
correlação.
  media=rep(0,p)
  y=rmvnorm(50000,mean=media, sigma=sigma) ##Gerando 50000 normais m. p/
obtenção de Cr.alfa.
  EME = apply(abs(y),1,max) ## Distribuição d'onde provêm o valor Cr-alfa.
  Cr=quantile(EME,(1-alfa))          ## Obtém-se o quantil de ordem 1-
alfa como sendo o Cr-alfa.
  return(EME,Cr)
}
limite=limite.critico.HT(p,sigma,alfa) ## Usando a matriz de covariâncias
teórica para o #cálculo do Cr-alfa.

#####=====Teste de Hayter & Tsui=====#####
dif=(med1-med2) # Diferença dos vetores de médias das duas populações
independentes.
vari=c(sqrt((diag(sigma)[1]/n1)+(diag(sigma)[1]/n2)),
sqrt((diag(sigma)[2]/n1)+(diag(sigma)[2]/n2))) # Cálculo da variabilidade do
Teste Hayter e Tsui.
ht=abs(dif/vari) ## Verificando os valores absolutos das variáveis
padronizadas
teste.ht=max(abs(dif/vari)) ## Teste de Hayter e Tsui.
p.valor.ht=(sum(limite$EME>teste.ht)/50000) ## Cálculo do p.valor do Teste
Hayter e Tsui.

#####=====Teste T2 Hotelling=====#####
df1=p #Obtenção do grau de liberdade do teste Qui-quadrado.
```

```

teste.t2=((n1*n2)/(n1+n2))*((t(dif))**solve(sigma)**(dif)) ## Estatística
de teste do T2 de Hotelling.
p.valor.t2=1-pchisq(teste.t2,df1, ncp=0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
# Cálculo do p-valor do teste de T2 de Hotelling com base na distribuição Qui-
quadrado.
lc.teste.t2=qchisq(1-alfa, df1, ncp=0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) #
Limite crítico para o teste T2 de Hotelling com base na distribuição acumulada
da Qui-quadrado.

##### Verificando as Hipóteses dos Testes #####
if(teste.ht>=limite$Cr) decisao.HT="Rejeito Ho" ## Verificando se a
Estatística do Teste Hayter e Tsui é superior ao valor crítico Cr-alfa. Se
sim, Rejeito H0.
else decisao.HT="Não Rejeito Ho" ## Senão, Não Rejeito H0.
if (teste.t2>=lc.teste.t2) decisao.T2="Rejeito Ho" ## Verificando se a
Estatística do #Teste T2 de Hotelling é superior ao limite crítico da
distribuição Qui-quadrado. Se sim, Rejeito H0.
else decisao.T2="Não Rejeito Ho" ## Senão, Não Rejeito H0.

##### Apresentação dos Resultados #####
list(Estatística.TESTE.HAYTEReTSUI=teste.ht,Valores.Absolutos=ht,Valor.Crítico
.Cralfa=limite$Cr,p.valor.HT=p.valor.ht,decisao.HT=decisao.HT,
Estatística.TESTE.T2deHOTELLING=teste.t2,Valor.Crítico.T2=lc.teste.t2,p.valor.
T2=p.valor.t2,decisão.T2=decisao.T2)
} # Listando a Estatística dos Testes, os valores críticos, os p-valores e a
decisão quanto a Hipótese nula.

T2eHT.Iguais.Conhecidas(alfa,med1,med2,sigma,n1,n2) # Chamada da função com os
argumentos que são necessários informar.

```

C.2: Matrizes de Covariâncias Iguais e Desconhecidas

```
#=====#
# Realiza os teste de Hayter e Tsui e T2 de Hotelling para dados informados #
#=====#

T2eHT.Iguais.Desconhecidas=function(alfa,med1,med2,sigma.d1,sigma.d2,n1,n2){

# É necessário informar: alfa=nível de significância dos testes;
# med1 e med2 são os vetores de médias amostrais da primeira e segunda
população, respectivamente;
# sigma.d1 e sigma.d2 são as matrizes de covariâncias amostrais das populações
independentes 1 e 2, respectivamente;
# n1 e n2 são os tamanhos amostrais das populações independentes 1 e 2,
respectivamente.

require(mvtnorm) # Pacote que gera a distribuição Normal Multivariada para a
simulação do Cr-alfa.
p=length(med1) # Verificando a quantidade de variáveis.
dif=matrix(rep(0),1,p)
p.valor.t2=0
p.valor.ht=0
sigma.dc=((n1-1)*sigma.d1+((n2-1)*sigma.d2)/(n1+n2-2)) # Matriz combinada
amostral(desconhecida). (Matrizes iguais e Desconhecidas)

##=Função que calcula o valor crítico do teste de Hayter e Tsui - Cr.alfa ==##
limite.critico.HT=function(p,sigma.dc,alfa){ ## Usando a matriz de
covariâncias combinada amostral.
  sigma = cov2cor(sigma.dc) ## Transforma a matriz de covariâncias combinada
amostral em matriz de correlação.
  media=rep(0,p)
  y=rmvnorm(50000,mean=media, sigma=sigma) ##Gerando 50 mil normais
multivariadas para obtenção de Cr.alfa.
  EME = apply(abs(y),1,max) ## Distribuição d'onde provêm o valor Cr-alfa.
  Cr=quantile(EME,(1-alfa)) ## Obtém-se o quantil de ordem 1-alfa como sendo
o Cr-alfa.
  return(EME,Cr)
}
limite=limite.critico.HT(p,sigma.dc,alfa) ## Usando a matriz combinada
amostral para o cálculo do Cr-alfa.

#####Teste de Hayter & Tsui====#####
dif=(med1-med2) # Diferença dos vetores de médias das duas populações
independentes.
vari=c(sqrt((diag(sigma.dc)[1]/n1)+(diag(sigma.dc)[1]/n2)),sqrt((diag(sigma.dc)
)[2]/n1)+(diag(sigma.dc)[2]/n2))) # Cálculo da variância amostral
```



```

ht=abs(dif/vari) ## Verificando os valores absolutos das variáveis
padronizadas.
teste.ht=max(abs(dif/vari)) ## Teste de Hayter e Tsui.
p.valor.ht=(sum(limite$EME>teste.ht)/50000) ## Cálculo do p.valor do Teste
Hayter & Tsui.

#####=====Teste T2 Hotelling=====#####
df1=p # Obtenção do Grau de Liberdade 1
df2=(n1+n2-1-p) # Obtenção do Grau de Liberdade 2
teste.t2=((n1*n2)/(n1+n2))*((t(dif))%*%solve(sigma.dc)%*(dif)) ###
Estatística de teste do T2 de Hotelling usando matrizes de covariâncias
amostrais combinada.
estat.f=((n1+n2-1-p)/((n1+n2-2)*p))*teste.t2 ## Fazendo a correção da
estatística do teste para compará-la com a distribuição F na obtenção do p-
valor.
p.valor.t2=1-pf(estat.f,df1 , df2, ncp=0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
# Cálculo do p-valor do teste com base na distribuição F.
lc.teste.t2=((n1+n2-2)*p)/(n1+n2-1-p)*qf(1-alfa, df1, df2, lower.tail =
TRUE, log.p = FALSE) # Limite crítico do teste T2 de Hotelling com base na
dist. F.

####== Tomada de Decisão dos Testes ==####
if(teste.ht>=limite$Cr) decisao.HT="Rejeito Ho" ## Verificando se a
Estatística do Teste Hayter e Tsui é superior ao valor crítico Cr-alfa. Se
sim, Rejeito H0.
else decisao.HT="Não Rejeito Ho" ## Senão, Não Rejeito H0.
if (teste.t2>=lc.teste.t2) decisao.T2="Rejeito Ho" ## Verificando se a
Estatística do Teste T2 de Hotelling é superior ao limite crítico da
distribuição Qui-quadrado. Se sim, Rejeito H0.
else decisao.T2="Não Rejeito Ho" ## Senão, Não Rejeito H0.

##### Apresentação dos Resultados #####
list(Estatística.TESTE.HAYTEReTSUI=teste.ht,Valores.Absolutos=ht,Valor.Crítico
.Cralfa=limite$Cr,p.valor.HT=p.valor.ht,decisao.HT=decisao.HT,
Estatística.TESTE.T2deHOTELLING=teste.t2,Valor.Crítico.T2=lc.teste.t2,p.valor.
T2=p.valor.t2,decisão.T2=decisao.T2)
} # Listando a Estatística dos Testes, os valores críticos, os p-valores e a
decisão quanto a Hipótese nula.

T2eHT.Iguais.Desconhecidas(alfa,med1,med2,sigma.d1,sigma.d2,n1,n2) # Chamada
da função com os argumentos que são necessários informar.

```

C.3: Matrizes de Covariâncias Diferentes e Conhecidas

```
#=====#
# Realiza os teste de Hayter e Tsui e T2 de Hotelling para dados informados #
#=====#

T2eHT.Diferentes.Conhecidas=function(alfa,med1,med2,sigma1,sigma2,n1,n2){ # É
necessário informar: alfa=nível de significância do teste;
#med1 e med2 = vetores de médias amostrais das populações independentes 1 e 2.
#sigma1 e sigma 2 = matrizes de covariâncias Diferentes e conhecidas(teórica).

require(mvtnorm) # Pacote que gera a distribuição Normal Multivariada para a
simulação do Cr-alfa.
p=length(med1) # Verificando a quantidade de variáveis.
dif=matrix(rep(0),1,p)
p.valor.t2=0
p.valor.ht=0
sigma=((sigma1/n1)+(sigma2/n2)) # Calculando a matriz de covariâncias
combinada teórica quando elas são diferentes.

##== Função que calcula do limite crítico do Hayter e Tsui - Cr-alfa ==###
limite.critico.HT=function(p,sigma,alfa){ ## Usando a matriz de covariâncias
teórica combinada(Diferentes).
sigma = cov2cor(sigma1) ## Transforma a matriz de covariância teórica
combinada em matriz de correlação.
media=rep(0,p)
y=rmvnorm(50000,mean=media, sigma=sigma) ##Gerando 50 mil normais
multivariadas para obtenção de Cr.alfa.
EME = apply(abs(y),1,max) ## Distribuição d'onde provêm o valor Cr-alfa.
Cr=quantile(EME,(1-alfa)) ## Obtém-se o quantil de ordem 1-
alfa como sendo o Cr-alfa.
return(EME,Cr)
}
limite=limite.critico.HT(p,sigma,alfa) ## Usando a matriz de covariâncias
teórica combinada para o cálculo do Cr-alfa.

#####=====Teste de Hayter & Tsui=====#####
dif=(med1-med2) # Diferença dos vetores de médias das duas populações
independentes.
vari=c(sqrt((diag(sigma1)[1]/n1)+(diag(sigma2)[1]/n2)),sqrt((diag(sigma1)[2]/n
1)+(diag(sigma2)[2]/n2))) # Cálculo da variabilidade do Teste Hayter e Tsui.
ht=abs(dif/vari) ## Verificando os valores absolutos das variáveis
padronizadas
teste.ht=max(abs(dif/vari)) ## Teste de Hayter e Tsui.
```

```

p.valor.ht=(sum(limite$EME>teste.ht)/50000) ## Cálculo do p.valor do Teste
Hayter & Tsui.

#####=====Teste T2 Hotelling=====#####
df1=p      #Obtenção do grau de liberdade do teste Qui-quadrado.
teste.t2=((t(dif))**%solve(sigma)**%(dif)) ## Estatística de teste do T2 de
Hotelling quando as matrizes são diferentes e conhecidas.
p.valor.t2=1-pchisq(teste.t2,df1, ncp=0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) #
Cálculo do p-valor do teste de T2 de Hotelling com base na distribuição Qui-
quadrado.
lc.teste.t2=qchisq(1-alfa, df1, ncp=0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) #
Limite crítico para o teste T2 de Hotelling com base na distribuição acumulada
da Qui-quadrado.

##### Verificando as Hipóteses dos Testes #####
if(teste.ht>=limite$Cr) decisao.HT="Rejeito Ho" ## Verificando se a
Estatística do Teste Hayter e Tsui é superior ao valor crítico Cr-alfa. Se
sim, Rejeito H0.
else decisao.HT="Não Rejeito Ho" ## Senão, Não Rejeito H0.
if (teste.t2>=lc.teste.t2) decisao.T2="Rejeito Ho" ## Verificando se a
Estatística do Teste T2 de Hotelling é superior ao limite crítico da
distribuição Qui-quadrado. Se sim, Rejeito H0.
else decisao.T2="Não Rejeito Ho" ## Senão, Não Rejeito H0.

##### Apresentação dos Resultados #####
list(Estatística.TESTE.HAYTEReTSUI=teste.ht,Valores.Absolutos=ht,Valor.Crítico
.Cralfa=limite$Cr,p.valor.HT=p.valor.ht,decisao.HT=decisao.HT,
Estatística.TESTE.T2deHOTELLING=teste.t2,Valor.Crítico.T2=lc.teste.t2,p.valor.
T2=p.valor.t2,decisão.T2=decisao.T2)
} # Listando a Estatística dos Testes, os valores críticos, os p-valores e a
decisão quanto a Hipótese nula.

T2eHT.Diferentes.Conhecidas(alfa,med1,med2,sigma1,sigma2,n1,n2) # Chamada da
função com os argumentos que são necessários informar.

```

C.4: Matrizes de Covariâncias Diferentes e Desconhecidas

```
#=====#
# Realiza os teste de Hayter e Tsui e T2 de Hotelling para dados informados #
#=====#

T2eHT.Diferentes.Desconhecidas=function(alfa,med1,med2,sigma.d1,sigma.d2,n1,n2
){ # alfa=nível de significância do teste;
# med1 e med2: vetores de médias amostrais das populações independentes 1 e 2,
respectivamente.
# sigma.d1 e sigma.d2: matrizes de covariâncias amostrais diferentes das
populações independentes 1 e 2, respectivamente.
# n1 e n2: os tamanhos amostrais das populações 1 e 2 independentes,
respectivamente.

require(mvtnorm) # Pacote que gera a distribuição Normal Multivariada para
a simulação do Cr-alfa.
p=length(med1) # Verificando a quantidade de variáveis.
dif=matrix(rep(0),1,p)
p.valor.t2=0
p.valor.ht=0
sigma.c=((sigma.d1/n1)+(sigma.d2/n2)) # Matriz combinada DIFERENTES E
DESCONHECIDA (amostral).

### Função que calcula do limite crítico do Hayter e Tsui - Cr-alfa ===###
limite.critico.HT=function(p,sigma1,alfa){ # Usando a matriz de covariâncias
combinada DIFERENTES E DESCONHECIDA (amostral).
sigma = cov2cor(sigma1) ## Transforma a matriz de covariância em matriz de
correlação
media=rep(0,p)
y=rmvnorm(50000,mean=media, sigma=sigma) ##Gerando 50 mil normais
multivariadas para obtenção de Cr.alfa.
EME = apply(abs(y),1,max) ## Distribuição d'onde provêm o valor Cr-alfa.
Cr=quantile(EME,(1-alfa)) ## Obtém-se o quantil de ordem 1-alfa como sendo
o Cr-alfa.
return(EME,Cr)
}
limite=limite.critico.HT(p,sigma.c,alfa) ## Usando a matriz combinada
DIFERENTES E DESCONHECIDA para o cálculo do Cr-alfa.

#####Teste de Hayter & Tsui#####
dif=(med1-med2) # Diferença dos vetores de médias das duas populações
independentes.
```

```

vari=c(sqrt((diag(sigma.d1)[1]/n1)+(diag(sigma.d2)[1]/n2)),sqrt((diag(sigma.d1)
)[2]/n1)+(diag(sigma.d2)[2]/n2))) # Cálculo da variabilidade do Teste Hayter e
Tsui.
ht=abs(dif/vari) ## Verificando os valores absolutos das variáveis
padronizadas
teste.ht=max(abs(dif/vari)) ## Teste de Hayter e Tsui.
p.valor.ht=(sum(limite$EME>teste.ht)/50000) ## Cálculo do p.valor do Teste
Hayter & Tsui.

#####=====Teste T2 Hotelling=====#####
df1=p # Obtenção do Grau de Liberdade 1
df2=(n1+n2-1-p) # Obtenção do Grau de Liberdade 1
teste.t2=((t(dif))%*%solve(sigma.c)%*(dif)) ## Estatística de teste do T2
de Hotelling quando as matrizes são diferentes e desconhecidas.
estat.f=((n1+n2-1-p)/((n1+n2-2)*p))*teste.t2 ## Fazendo a correção da
estatística do teste para compará-la com a distribuição F na obtenção do p-
valor.
p.valor.t2=1-pf(estat.f,df1 , df2, ncp=0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
# Cálculo do p-valor do teste com base na distribuição F.
lc.teste.t2=((n1+n2-2)*p)/(n1+n2-1-p)*qf(1-alfa, df1, df2, lower.tail =
TRUE, log.p = FALSE) # Limite crítico do teste T2 de Hotelling com base na
dist. F.

###=== Tomada de Decisão dos Testes ===###
if(teste.ht>=limite$Cr) decisao.HT="Rejeito Ho" ## Verificando se a
Estatística do Teste Hayter e Tsui é superior ao valor crítico Cr-alfa. Se
sim, Rejeito H0.
else decisao.HT="Não Rejeito Ho" ## Senão, Não Rejeito H0.
if (teste.t2>=lc.teste.t2) decisao.T2="Rejeito Ho" ## Verificando se a
Estatística do Teste T2 de Hotelling é superior ao limite crítico da
distribuição F. Se sim, Rejeito H0.
else decisao.T2="Não Rejeito Ho" ## Senão, Não Rejeito H0.

###=== Apresentação dos Resultados ===###
list(Estatística.TESTE.HAYTEReTSUI=teste.ht,Valores.Absolutos=ht,Valor.Crítico
.Cralfa=limite$Cr,p.valor.HT=p.valor.ht,decisao.HT=decisao.HT,
Estatística.TESTE.T2deHOTELLING=teste.t2,Valor.Crítico.T2=lc.teste.t2,p.valor.
T2=p.valor.t2,decisão.T2=decisao.T2)
} # Listando a Estatística dos Testes, os valores críticos, os p-valores e a
decisão quanto a Hipótese nula.

T2eHT.Diferentes.Desconhecidas(alfa,med1,med2,sigma.d1,sigma.d2,n1,n2) #
Chamada da função com os argumentos que são necessários informar.

```

Referências

ANDERSON, T. W. An introduction to multivariate statistical analysis. 2^a ed. New York: Wiley, 1984.

BECHHOFER, R. E.; DUNNETT, C. W. Percentage points of multivariate student t distributions. Selected Tables in Mathematical Statistics, vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

CHRISTENSEN, W.F.; RENCHER, A.C. A comparison of type I rates and Power levels for seven solutions to the multivariate Behrens-Fisher problem. Communication in Statistics – Simula, [s.l.], v. 26, n.4, p. 1251-1273, 1997.

COLENGHI, F. K. R. Estudo Comparativo de Testes de Hipótese Multivariados para o Vetor de Médias via Simulação de Monte Carlo. UFMG, 2008. Dissertação de Mestrado.

FERREIRA, D. F. Estatística Multivariada. 1^a ed. Lavras: Ed. UFLA, 2008.

FERREIRA, G. U. A. Estudo de Testes Estatísticos para o Vetor de Médias em Controle de Processos Multivariados sob Amostragem Dupla. UFMG, 2010. Dissertação de Mestrado.

FISHER, R. A. Statistical Methods for Research Workers, 11^a ed., Oliver and Boyd, London, 1950.

GLÓRIA, F. A. A., Uma Avaliação do Desempenho de Núcleo-Estimadores no Controle de Processos Multivariados. Departamento de Estatística da UFMG, Belo Horizonte, 2006 (Dissertação de Mestrado).

HAYTER, A. J.; TSUI, K. L. Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems. Journal of Quality Technology, Atlanta, vol. 26, n^o 3, p. 197-208, 1994.

HOTELLING, H. Multivariate Quality Control. Techniques of Statistical Analysis, editado por Eisenhart, Hastay, e Wallis, MacGraw-Hill, New York, 1947.

JOBSON, J. D. Applied Multivariate Data Analysis. New York: Springer, vol. 2, p. 731, 1992.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, W. D. Applied Multivariate Statistical Analysis. 4^a ed. New Jersey, 2002.

LAZAR, N. A.; LUNA, B.; SWEENEY, J. A.; EDDY, W. F.; Combining Brans: A Survey of Methods for Statistical Pooling of Information. NeuroImage, vol.16, p.358-550, 2002.

MAHALANOBIS, P. C. On the generalized distance in statistics. Proceedings of the National Institute of Sciences of India, New Delhi, vol. 2, p. 49-55, 1936.

MINGOTI, S. A. Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005. 295 p.

MINGOTI, S. A.; GLORIA, F. A. A. Comparando os métodos paramétrico e não-paramétrico na determinação do valor crítico do teste estatístico de médias proposto por Hayter e Tsui. Prod., São Paulo, v. 15, n. 2, Aug. 2005.

MONTGOMERY, D. C. Design and Analysis of Experiments, John Wiley and Sons, 1976.

MONTGOMERY, D. C. Introdução ao Controle estatístico da qualidade. 4ª ed. Rio de Janeiro, 2004.

MORRISON, D. F. Multivariate Statistical Methods. New York, 1976.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. Robust analogs of Hotelling two sample 2 T. Communications in Statistics-Theory and Methods, vol. 29, nº 12, p. 2717-2749 2000a.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. A class of robust stepwise alternatives to Hotelling's 2 T tests. Journal of Applied Statistics, New York, vol. 27, nº 5, p. 599-619, 2000b.

MUDHOLKAR, G. S.; SUBBAIAH, P. Testing a significance of a mean vector a possible alternative Hotelling's T2. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, vol. 32, nº 1, p. 43-52, 1980.

R Development Core Team. R: A language and environment for statistical computing. R. *Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>, 2009.

RUNGER, G. C.; ALT, F. B.; MONTGOMERY, D. C. Contributors to a multivariate statistical process control signal. Communications in Statistics-Theory and Methods, vol. 25, nº 10, p. 2203-2213, 1996.

TIKU, M. L.; BALAKRISHNAN, N., Robust Hotelling-type 2 T statistics based on modified maximum likelihood estimators. Communications in Statistics-Theory and Methods, vol. 17, nº 6, p. 1789-1810, 1988.

TIKU, M. L.; SINGH, M. Robust statistics for testing mean vectors of multivariate distributions. Communications in Statistics-Theory and Methods, vol. 11, nº 9, p. 985-1001, 1982.

TIMM, N. H. Applied multivariate analysis. New York, 2002.

TIMM, N. H. Multivariate quality control using finite intersection tests. Journal of Quality Technology, vol. 28, nº 2, p. 233-243, 1996.

TIPPETT, L. H. C. The Method of Statistics, 1ª ed., Williams and Nor-gate, London, 1931.

TRIOLA, M.F. Introdução à Estatística, 9ª ed. Rio de Janeiro, Ed. LTC, 2005.

TUKEY, J.W. The problem of multiple comparisons. Unpublished manuscript, Princeton University, 1953.

WILLIAMS, J. D.; WOODALL, W. H.; BIRCK, J. B.; SULLIVAN, J. H. Distribution of Hotelling's T² statistic based on the successive differences estimator. Journal of Quality Technology, n. 3, p. 217-229, 2006.