

Túlio Lima Sousa Madureira Silva

**Avaliação do Risco para um Sistema de
Equações Diferenciais Ordinárias Estocásticas
Correlacionadas**

2014

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Minas Gerais

Avaliação do Risco para um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Estocásticas Correlacionadas

Dissertação apresentada para obtenção do
grau de Mestre em Estatística pela Univer-
sidade Federal de Minas Gerais.

Túlio Lima Sousa Madureira Silva

Orientador:
Prof. Sokol Ndreca

Co-orientador:
Prof. Adrian Hinojosa

Belo Horizonte- MG, Brasil

27/1/2014

Dissertação de Mestrado sob o título "Avaliação do Risco para um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Estocásticas Correlacionadas", defendida por Túlio Lima Sousa Madureira Silva e aprovada em 27/01/2013, em Belo Horizonte, Estado de Minas Gerais, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Sokol Ndreca
Orientador

Prof. Adrian Pablo Hinojosa Luna
Co-orientador

Prof.(a) Aniura Milanês Barrientos
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Luiz Henrique Duczmal
Universidade Federal De Minas Gerais

Prof.(a) Maria Eulália Vares
Universidade Federal do Rio de Janeiro

RESUMO

Nosso trabalho é uma discussão introdutória sobre solvência em companhias seguradoras. Primeiramente faremos uma revisão que a partir do modelo clássico de Crámer-Lundberg seguiremos até a visão atual de solvência. Posteriormente faremos a análise de simulações de modelos baseados no artigo "*The risk of model misspecification and its impact on solvency measurement in the insurance sector*". Concluiremos analisando as simulações do artigo "*Large Deviations for a Mean Field Model of Systemic*".

Sumário

1	Introdução	9
2	De Cramér-Lundberg à Atual Visão de Solvência	11
2.1	Processo de Poisson	11
2.2	Modelo de Cramér-Lundberg	13
2.3	Probabilidade de Ruína	15
2.4	Ruína à tempo discreto	18
2.5	Solvência e Medidas de Risco	19
2.5.1	Medidas de Risco	20
2.6	Modelagem dos Ativos	21
2.7	Modelagem dos Reclamos	23
2.8	Modelo Final	24
3	EDEs e Simulação de EDEs	28
3.1	Definições de Probabilidade	28
3.2	Movimento Browniano	29
3.3	Integral de Itô	31
3.4	Fórmula de Itô	32
3.5	Simulação de EDEs	34
3.6	Medidas de Risco	36
3.7	Propriedades das Medidas de Risco	37
4	Modelos Mal Ajustados e seus Impactos na Medidas de Risco	38
4.1	Introdução	39
4.2	Modelo	40
4.3	Análise Numérica	40
4.3.1	Parâmetros de Entrada	41
4.3.2	Simulações	41
4.4	Conclusão	44

5	Risco Sistêmico	45
5.1	Risco Sistêmico	46
5.2	Modelo	46
5.3	Análise Numérica da Média Empírica do Sistema de EDEs . .	47
5.4	Análise Numérica da Solução no Equilíbrio	49
5.5	Conclusão	52
	Apêndice A	53
	Apêndice B	56
	Bibliografia	63

Lista de Figuras

2.1	Trajectoria de um Processo de Poisson Composto em um intervalo $[0, 1]$ com intensidade $\lambda = 10$ e com $Y \sim \text{exp}(1)$	13
2.2	Trajectoria do processo de reservas em $[0, 1]$ com $c_0 = 10$, $\pi = 10$, $\lambda = 10$ e $Y \sim \text{exp}(1)$	14
2.3	Probabilidade de Ruína, no gráfico a esquerda $\pi = 2$, $\lambda = 2$, no gráfico a direita $\pi = 2$, $\theta = 1$	16
2.4	Comparação entre o limite superior para a probabilidade de ruína obtido pela Desigualdade de Lundberg e a probabilidade de ruína propriamente dita, para $\pi = 2$, $\lambda = 1$ e $\theta = 1$	18
2.5	Fluxo de caixa gerado pelo ocorrência de sinistro.	23
3.1	Exemplo de quatro diferentes trajetórias de um Movimento Browniano com $P(B_0 = 0) = 1$	31
3.2	Trajetórias do processo de Ornstein-Uhlenbeck gerados pelo esquema de Euler com parâmetros $\theta = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0, 3$ e com valores de $X_0 = 2$, $X_0 = 1$ e $X_0 = 0.4$	36
4.1	Cenário Base	42
4.2	$\lambda = 0.1$	42
4.3	m $\lambda = 0.2$	42
4.4	$\lambda = 0.3$	42
4.5	$\lambda = 0.4$	42
4.6	$\lambda = 0.5$	42
4.7	$p = 0, 1\%$	43
4.8	$p = 0, 5\%$	43
4.9	$p = 1\%$	43
5.1	Potencial $V(y)$ com diferentes alturas h	47
5.2	Simulação para valores de σ e com $N = 100$, $h = 0.1$ e $\theta = 6$.	48
5.3	Simulação para valores de θ e com $N = 100$, $h = 0.1$ e $\sigma = 1$.	48
5.4	Simulação para valores de h e com $N = 100$, $\sigma = 1$ e $\theta = 10$.	48
5.5	Simulação para valores de N e com $h = 0.1$, $\sigma = 1$ e $\theta = 10$. .	49

5.6	Simulação para valores de ξ e com $h = 0.01$, $\sigma = 1$ e $\theta = 6$. .	50
5.7	Média da distribuição assintótica $m(\xi)$, $h = 10$ e $\sigma = 2 > \sigma_c$.	51
5.8	Média da distribuição asintótica $m(\xi)$, $h = 10$ e $\sigma = 0.5 < \sigma_c$.	52

*

Capítulo 1

Introdução

“Companies make money by taking risks and lose money by not managing risks.”

Fulvio Conti

CEO da Enel, Itália no Colloquium da AFIR em Roma, 02/10/2008.

Os princípios básicos da atividade seguradora preveem a adequação do fluxo de ativos da companhia seguradora visando honrar todas as suas obrigações. Um dos temas mais discutidos nos últimos tempos no mercado segurador nacional e internacional é a solvência das companhias seguradoras que tem gerado inúmeros debates nas esferas técnica e política (Neves, 2012).

Simplificando, estar solvente é ter mais ativos que obrigações em determinado patamar com determinada confiança. Isto também pode ser interpretado como ser capaz de pagar sinistros futuros na medida em que eles são devidos.

Existem diversas variáveis que influenciam a solvência de uma seguradora. O número de sinistros ao longo do tempo, a severidade destes, o capital inicial e o fluxo de recebimento dos prêmios. “A incerteza está na essência do seguro. Lidar, gerir, pulverizar, mitigar riscos e incertezas fazem parte do negócio principal de uma companhia seguradora. Se não houvesse incerteza, não haveria seguro.” (Neves, 2012).

Esta dissertação consta uma discussão introdutória sobre solvência em companhias seguradoras. Introduziremos alguns conceitos de probabilidade, equações diferenciais ordinárias estocásticas (EDEs), simulação de EDEs e medidas de risco. Estes conceitos são utilizados em alguns estudos baseados em simulações onde analisaremos o comportamento das medidas de risco frente diferentes cenários.

No primeiro capítulo apresentaremos o modelo clássico de riscos coletivos também conhecido como modelo de Cramér-Lundberg a partir do qual prosseguiremos fazendo algumas modificações para torná-lo mais realista até chegarmos a atual visão de solvência. No segundo capítulo apresentaremos algumas definições de processos estocásticos, EDEs e simulação de EDEs bem como o conceito e algumas características de medidas de risco. No terceiro capítulo apresentaremos os resultados de algumas simulações em que avaliaremos os impactos em relação à solvência de modelos mal ajustados. No quarto capítulo apresentaremos a ideia de risco sistêmico e a análise numérica da média empírica de um sistema de EDEs que governa a carteira de ativos.

Capítulo 2

De Cramér-Lundberg à Atual Visão de Solvência

Neste capítulo faremos uma revisão sobre solvência em companhias seguradoras. Começando com o modelo clássico de Cramér-Lundberg, que data de 1930, onde trabalhamos a idéia de probabilidade de ruína, passando por modelos a tempo discreto, fazendo algumas modificações nos processos de ativos e passivos, introduzindo as medidas de risco e por fim a idéia de solvência e como esta é analisada atualmente.

2.1 Processo de Poisson

Em alguns determinados experimentos aleatórios, a lei de probabilidade pode variar ao longo do tempo. Para estes casos é usual considerar uma variável aleatória N_t à qual atribui-se uma distribuição de probabilidade para cada instante t . A essa sequência de variáveis aleatórias dá-se o nome de *processo estocástico*. De maneira mais formal podemos representar um processo estocástico $\{N_t : t \in T\}$, onde T é o conjunto de índices do processo e t é o parâmetro do processo. Quanto à natureza de T geralmente os processos são divididos em *processos estocásticos a tempo discreto*, por exemplo $T = \{1, 2, 3, \dots\}$ e *processos estocásticos a tempo contínuo*, por exemplo $T = [0, +\infty)$.

Para um dado conjunto $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \in T$ chamam-se de *incrementos do processo* as variáveis aleatórias $N_{(t_{k+1}, t_k]} = N_{t_k} - N_{t_{k+1}}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Estes incrementos são ditos *independentes* se, para $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \in T$, as variáveis aleatórias $N_{(t_1, t_2]}$, $N_{(t_2, t_3]}$, \dots , $N_{(t_n, t_{n+1}]}$ são independentes. Por último, os incrementos são *estacionários* se para $t_i < t_j$ e $\forall h > 0$ as distribuições dos incrementos $N_{(t_i, t_j]}$ e $N_{(t_i+h, t_j+h]}$ forem iguais.

Abaixo segue uma definição formal de um processo estocástico que representa o número de ocorrências de um fenômeno aleatório no intervalo $(0, t]$, ou seja, um processo de contagem conhecido como o Processo de Poisson. (Mikosch, 2009)

Definição 2.1.1 (Processo de Poisson) *Um processo estocástico $N = (N_t)_{t \geq 0}$ é dito um Processo de Poisson se as condições abaixo são válidas:*

1. *O processo se inicia em 0: $N_0 = 0$ quase certamente;*
2. *O processo tem incrementos independentes;*
3. *Existe uma função não-decrescente contínua a direita $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sendo $\mu_0 = 0$ tal que os incrementos $N_{(t_i, t_j]}$ para $0 < t_i < t_j < \infty$ tem distribuição de Poisson, $Pois(\mu_{(t_i, t_j]})$, ou seja,*

$$P(N_{(t_i, t_j]} = k) = \frac{e^{-\mu_{(t_i, t_j]}} (\mu_{(t_i, t_j]})^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde, μ é chamado de função de valor médio de N ;

4. *Com probabilidade 1, a trajetória $(N_t(\omega))_{t \geq 0}$ do processo N é contínua à direita para $t \geq 0$ e tem limites à esquerda para $t > 0$.*

O Processo de Poisson mais utilizado é quando se tem uma função de valor médio, μ linear:

$$\mu_t = \lambda t, \quad t \geq 0,$$

para algum $\lambda > 0$. Neste caso dizemos que o Processo de Poisson é *Homogêneo*. O valor λ é chamado de *intensidade* ou *taxa* do Processo de Poisson Homogêneo. Em um Processo de Poisson Homogêneo, a variável aleatória N_t , têm valores iguais para média e variância,

$$\mu_t = \lambda t = \mathbb{E}(N_t) = \text{var}(N_t),$$

uma vez que $N_0 = 0$ q.c. e $\mu_0 = 0$,

$$N_t = N_t - N_0 = N_{(0, t]} \sim Pois(\mu_{(0, t]}) = Pois(\mu_t) = Pois(\lambda t).$$

Outra propriedade que se ganha em um p Processo de Poisson Homogêneo é que os incrementos se tornam estacionários, pois, para $0 \leq i < j$ e $h > 0$,

$$N_{(t_i, t_j]} \stackrel{d}{=} N_{(t_i+h, t_j+h]} \sim Pois(\lambda(t_j - t_i)),$$

ou seja, o parâmetro da distribuição dos incrementos depende apenas do comprimento do intervalo e não de sua localização.

O modelo que iremos descrever na próxima seção trabalha não apenas com o número de reclamos mas também com suas severidades, ou seja, com o valor a pagar gerado por cada reclamo. Por este motivo definiremos um processo estocástico composto, conhecido como Processo de Poisson Composto.

Definição 2.1.2 (Processo de Poisson Composto) *Seja um Processo de Poisson Homogêneo N_t , $t \geq 0$, e uma família de variáveis aleatórias Y_i , $i = 1, 2, \dots$ independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) que são independentes de N_t . Então o Processo de Poisson Composto, L_t , $t \geq 0$, é definido como:*

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

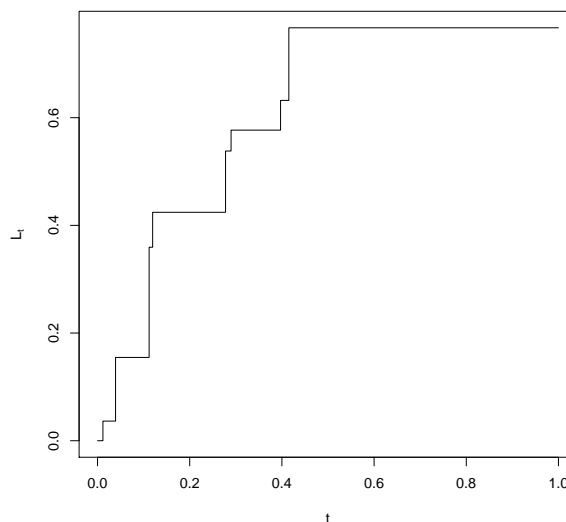


Figura 2.1: Trajetória de um Processo de Poisson Composto em um intervalo $[0, 1]$ com intensidade $\lambda = 10$ e com $Y \sim \exp(1)$.

2.2 Modelo de Cramér-Lundberg

O modelo clássico de risco coletivo, conhecido também como modelo de Cramér-Lundberg, foi inicialmente introduzido pelo atuário sueco Filip Lundberg em 1903 e depois desenvolvido por Harald Cramér em 1930. O modelo descreve o comportamento da reserva de uma companhia seguradora, C_t (Wüthrich, 2013).

Definição 2.2.1 (Modelo de Cramér-Lundberg) $(C_t)_{t \geq 0}$ é um processo estocástico a tempo contínuo definido como:

$$C_t = c_0 + \pi t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

onde:

- $c_0 \geq 0$ é o capital inicial,
- $\pi > 0$ é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo
- $\pi t > 0$ o total de prêmios recebidos em $(0, t]$
- $L_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \geq 0$ é um Processo de Poisson Composto que representa os reclamos ocorridos em $(0, t]$.
- C_t é a reserva da seguradora no instante t .

Quando se está estudando um modelo de risco, é sempre importante conhecer a distribuição da severidade de seus reclamos. Vamos considerar $F(y) = P(Y_i \leq y)$ a função de distribuição da severidade do i -ésimo reclamo, com $F(0) = 0$, $f(y)$ sua função densidade e $m_Y(r) = \mathbb{E}(e^{rY})$ sua função geradora de momentos. Vamos supor que a média de Y é $\mathbb{E}(Y) = \mu_Y < \infty$.

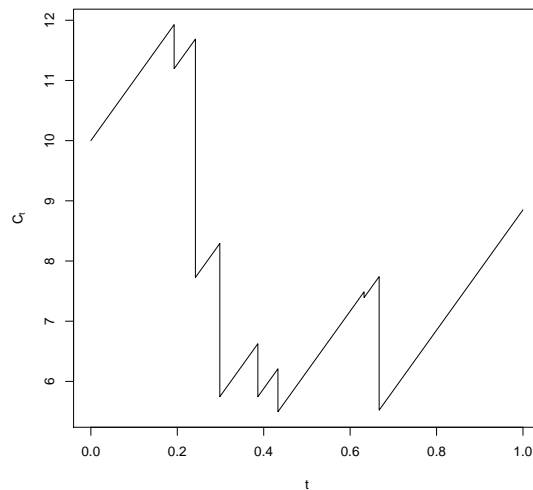


Figura 2.2: Trajetória do processo de reservas em $[0, 1]$ com $c_0 = 10$, $\pi = 10$, $\lambda = 10$ e $Y \sim \exp(1)$.

O modelo proposto por Cramér-Lundberg, definido acima, não leva em consideração alguns fatores importantes que também alteram a reserva de uma seguradora. Ele desconsidera despesas associadas com os contratos de seguros, taxas de juros, rendimentos provenientes dos investimentos feitos pela seguradora, taxas administrativas, ou seja, o modelo apenas considera prêmios e reclamos. Observe que $\pi > \mathbf{E}(L_1) = \lambda\mu_Y$, ou seja, pressupõe-se que o valor pago à seguradora por unidade de tempo é superior ao valor esperado dos reclamos agregados por unidade de tempo.

2.3 Probabilidade de Ruína

Na literatura de teoria do risco há três conceitos correlacionados quando nos referimos à ruína de uma seguradora. O primeiro é o conceito de ruína, que é o evento da reserva da seguradora ser negativa, ou seja, a seguradora não terá fundos para arcar com os reclamos. O segundo é tempo até a ruína que é o instante mínimo de tempo no qual a reserva se torna negativa. E por último a probabilidade de ruína que é a probabilidade da reserva da seguradora se tornar negativa em um horizonte finito de tempo. Uma definição mais formal segue abaixo (Mikosch, 2009).

Definição 2.3.1 (Ruína, Tempo até a Ruína, Probabilidade de Ruína)

O evento em que C_t se torna menor que zero é chamado de ruína:

$$\text{Ruína} = \{C_t < 0, \text{ para algum } t > 0\}$$

O tempo τ quando a reserva se torna negativa pela primeira vez é chamado de tempo até a ruína:

$$\tau = \inf\{t > 0 : C_t < 0\}$$

A probabilidade de ruína é dada por:

$$\psi(c_0) = P(\text{Ruína} \mid C_0 = c_0) = P_{c_0}(\tau < \infty), \quad c_0 > 0 \quad (2.2)$$

Tanto o evento de ruína quanto o tempo até a ruína dependem do valor inicial da reserva, c_0 , apesar deste fato não estar explícito na notação utilizada na definição 2.3.1. O condicional $C_0 = c_0$ em (2.2), não é uma probabilidade condicional no sentido estrito, mas uma notação comumente utilizada na literatura para indicar o valor inicial da reserva. Como por hipótese no modelo de Cramér-Lundberg temos que $\pi > \lambda\mu_Y$ então $0 \leq \psi(c_0) < 1$, caso contrário teríamos $\psi(c_0) = 1$, ou seja, se o valor recebido pela seguradora, através dos prêmios pagos pelos segurados, for inferior ao valor esperado dos reclamos agregados por unidade de tempo então a ruína da seguradora

ocorrerá de maneira quase certa (ver Mikosch, 2009, pág. 155). Para ilustrar este fato geramos os gráficos da Figura (2.3) para diferentes valores de λ e μ_Y considerando $Y \sim \exp(\theta)$.

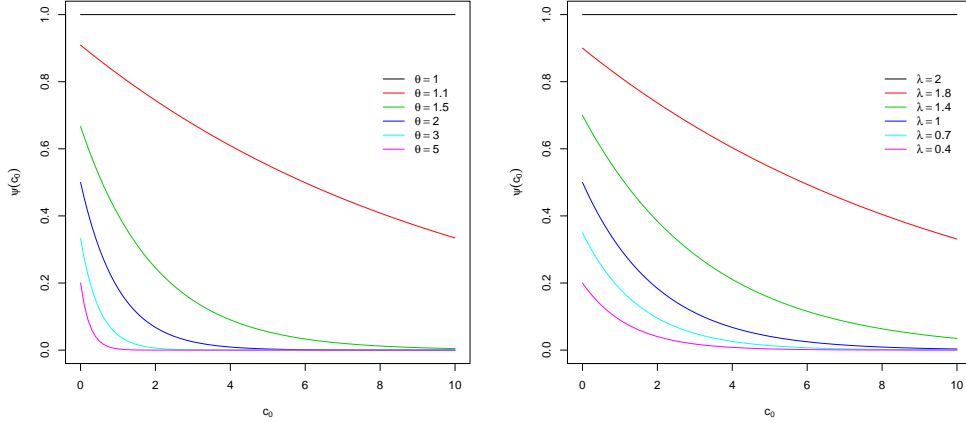


Figura 2.3: Probabilidade de Ruína, no gráfico a esquerda $\pi = 2$, $\lambda = 2$, no gráfico a direita $\pi = 2$, $\theta = 1$.

Na maior parte dos casos não é possível conseguir uma expressão fechada para a probabilidade de ruína. Logo a alternativa é procurar estimativas o mais precisas possíveis para esta.

Utilizando o modelo definido em 2.2.1 e assumindo a existência de um certo coeficiente de ajuste, que será definido a seguir, Lundberg apresentou uma desigualdade, conhecida como desigualdade de Lundberg, a qual fornece um limite superior para a probabilidade de ruína. O coeficiente de ajuste é geralmente denotado por R , na literatura. A desigualdade e o coeficiente de Lundberg serão definidos através dos dois teoremas a seguir.

Teorema 2.3.1 (Coeficiente de Ajuste ou Coeficiente de Lundberg)

Assuma que exista $E(e^{rY_i})$ para $\infty < r < \gamma$ e que o limite $\lim_{r \rightarrow \gamma} E(e^{rY_i}) = \infty$. Então existe um Coeficiente de ajuste R , que é o único número positivo satisfazendo,

$$\lambda m_Y(R) = \lambda + \pi R. \quad (2.3)$$

Teorema 2.3.2 (Desigualdade de Lundberg) Suponha que o coeficiente de Lundberg, R , existe. Então a Desigualdade de Lundberg é dada por:

$$\psi(c_0) \leq e^{-Rc_0} \quad (2.4)$$

Exemplo 2.3.1 (Desigualdade de Lundberg para reclamos exponenciais)

Considere o modelo de Cramér-Lundberg com $Y \sim \exp(\theta)$, logo a função geradora de momentos de Y , é dada por

$$m_Y(r) = \frac{\theta}{\theta - r}, \quad r < \theta.$$

Logo utilizando (2.3), temos

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\theta}{\theta - R} - \lambda - \pi R &= 0 \\ \lambda\theta - \lambda\theta + \lambda R - \pi\theta R + \pi R^2 &= 0 \\ R(\lambda - \pi\theta + \pi R) &= 0, \end{aligned}$$

isto é, temos duas raízes $R' = 0$ e

$$\begin{aligned} \pi R + \lambda - \pi\theta &= 0 \\ \pi R &= -\lambda + \pi\theta \\ R &= \frac{-\lambda + \pi\theta}{\pi} \\ R &= -\frac{\lambda}{\pi} + \theta. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Lundberg chegamos a um limite superior para a probabilidade de ruína:

$$\psi(c_0) \leq \exp \left\{ \left(\frac{\lambda}{\pi} - \theta \right) c_0 \right\}.$$

Segue abaixo o gráfico para a desigualdade calculada anteriormente.

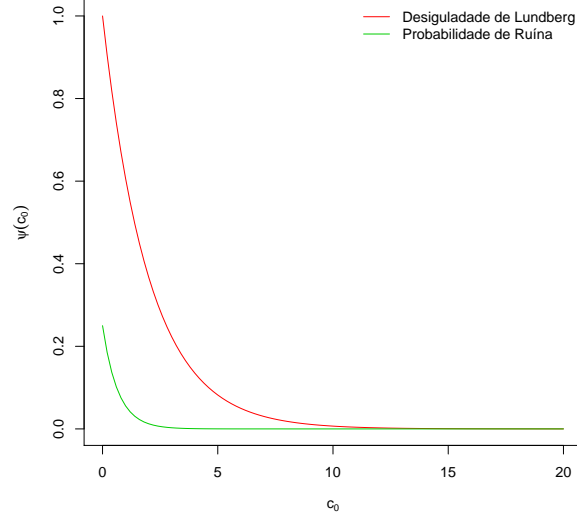


Figura 2.4: Comparação entre o limite superior para a probabilidade de ruína obtido pela Desigualdade de Lundberg e a probabilidade de ruína propriamente dita, para $\pi = 2$, $\lambda = 1$ e $\theta = 1$.

2.4 Ruína à tempo discreto

É impossível que as companhias seguradoras controlem de forma contínua seus processos de reserva. Logo o mais usual é que estas avaliem seus processos em uma escala anual (Wüthrich, 2013). Para que isto se reflita em nosso modelo faremos algumas adequações as definições apresentadas na Definição 2.3.1. Primeiramente redefinimos tempo até a ruína como

$$\tau_{\mathbb{N}} = \inf\{n \in \mathbb{N}; C_n < 0\};$$

que implica que

$$\psi(c_0) = P_{c_0}(\tau < \infty) \leq P_{c_0}(\tau_{\mathbb{N}} < \infty)$$

Isto nos leva a estudar nosso processo em função dos exercícios (período entre os balanços).

$$C_n = c_0 + \sum_{j=1}^n \left(\pi - \sum_{i=N_{(j-1)+1}}^{N_j} Y_i \right), \text{ para, } n \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

Porém o capital inicial, c_0 de uma companhia seguradora pode ser reajustado no início de cada exercício (Wüthrich, 2013), logo podemos simplificar nosso modelo para a análise da probabilidade de ruína à tempo discreto no horizonte de um ano, ou seja,

$$C_1 = c_0 + \pi - \sum_{i=1}^{N_1} Y_i. \quad (2.6)$$

Mesmo após todas estas modificações o cálculo da probabilidade de ruína continua algo complexo, quando o problema no qual estamos realmente interessados é muito mais simples. Seja:

- Valor total dos ativos no tempo 1: $A_1 = c_0 + \pi$;
- Valor total dos passivos no tempo 1: $L_1 = \sum_{i=1}^{N_1} Y_i$.

Nosso real interesse se resume em se a nossa reserva se manterá positiva ao final do primeiro ano, ou seja:

$$C_1 = c_0 + \pi - \sum_{i=1}^{N_1} Y_i = A_1 - L_1 \stackrel{?}{\geq} 0. \quad (2.7)$$

Na seção seguinte introduziremos os conceitos de solvência e de medidas de risco afim de conseguirmos uma resposta para (2.7).

2.5 Solvência e Medidas de Risco

A *International Association of Insurance Supervisors* IAIS define solvência como (Wüthrich, Bulmann, Furrer, 2010, pág. 2):

”a habilidade de uma seguradora de cumprir suas obrigações (reclamos), em relação a todos os contratos a qualquer tempo. Devido à própria natureza da atividade seguradora é impossível garantir solvência com certeza. A fim de chegar a uma definição possível, é necessário esclarecer em que circunstâncias a adequação dos ativos, para cobrir os passivos, está sendo considerada, ...”

2.5.1 Medidas de Risco

Suponha duas variáveis aleatórias positivas Z e W em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Queremos caracterizar o grau de incerteza (ou "risco") que possuem as variáveis aleatórias Z e W com o intuito de as comparar. Usar as funções de distribuição, F_Z e F_W , não é apropriado devido a sua alta complexidade (Wüthrich e Merz, 2013). Uma exceção é quando observamos dominação estocástica entre as variáveis Z e W , ou seja

$$Z \leq_{st} W, \text{ se e somente se } F_Z(z) \geq F_W(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{R}.$$

Nos casos onde não observamos a dominação estocástica temos que procurar outras formas de comparar Z e W . Para isto geralmente recorreremos à algumas medidas, que geralmente são apenas um valor, o que mostra que acabamos negligenciando grande parte das informações para a avaliação do risco. Isto nos leva a definição de medidas de risco.

Seja $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o conjunto de todas as variáveis aleatórias Z_i definidas no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) que satisfazem $P(|Z_i| < \infty) = 1$, e seja $\mathcal{M} \subset L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o conjunto de todos os riscos que estamos interessados. Geralmente consideramos que \mathcal{M} é um "cone convexo" contendo as constantes, isto é, \mathcal{M} satisfaz:

- (1) $c \in \mathcal{M}$ para todo $c \in \mathbb{R}$;
- (2) $Z + W \in \mathcal{M}$, para todo Z e $W \in \mathcal{M}$;
- (3) $\theta Z \in \mathcal{M}$ para todo $Z \in \mathcal{M}$ e $\theta > 0$.

Os pressupostos (2) e (3) caracterizam um "cone convexo" \mathcal{M} . O pressuposto (1) afirma que os riscos determinísticos c pertencem a \mathcal{M} . Estes riscos determinísticos c podem ser interpretados como "posição do caixa" (capital líquido) da nossa companhia seguradora.

Definição 2.5.1 (Medida de Risco) *Seja $\mathcal{M} \subset L_0$ satisfazendo (1). Uma medida de risco ρ em \mathcal{M} é um mapa $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\rho(c) < \infty$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Uma "boa" medida de risco ρ deve apresentar algumas propriedades que podemos chamar de desejáveis. Estas propriedades serão descritas a seguir:

Axioma 0 (Normalização) $\rho(0) = 0$;

Axioma 1 (Monotonicidade) Para $Z, W \in \mathcal{M}$ sendo $P(Z \leq W) = 1$, temos $\rho(Z) \leq \rho(W)$;

Axioma 2 (Invariância a Translação) Para todo $Z \in \mathcal{M}$ e todo $c \in \mathbb{R}$ temos $\rho(Z + c) = \rho(Z) + c$;

Axioma 3 (Homogeneidade positiva) Para $Z, W \in \mathcal{M}$ e para todo $\theta > 0$ temos $\rho(\theta Z) = \theta\rho(Z)$;

Axioma 4 (Subaditividade) Para todo $Z, W \in \mathcal{M}$ temos $\rho(Z+W) \leq \rho(Z) + \rho(W)$;

Axioma 5 (Convexidade) Para todo $Z, W \in \mathcal{M}$ e $\theta \in [0, 1]$ temos $\rho(\theta Z + (1 - \theta)W) \leq \theta\rho(Z) + (1 - \theta)\rho(W)$

Mas qual destes axiomas acima uma "boa" medida de risco deve satisfazer? Artzner et. al. (1999) introduziu a idéia de que uma medida de risco "boa" é uma medida de risco coerente.

Definição 2.5.2 (Medida de Risco Coerente) *Uma medida de risco ρ em um cone convexo \mathcal{M} é dita coerente se satisfizer os axiomas 1 a 4.*

Definição 2.5.3 (Medida de Risco Convexa) *Uma medida de risco ρ em um cone convexo \mathcal{M} é dita convexa se satisfizer os axiomas 1,2 e 5.*

As definições e demonstrações de algumas propriedades das medidas de risco que serão utilizadas neste trabalho serão feitas no próximo capítulo. Finalizamos esta seção com uma definição técnica de solvência que será utilizada adiante.

Definição 2.5.4 (Solvência) *Definimos solvência com respeito a uma medida de risco ρ quando a desigualdade abaixo é satisfeita:*

$$\rho(L_t - A_t) \leq 0 \tag{2.8}$$

2.6 Modelagem dos Ativos

No modelo base definido em (2.6) temos que os ativos que compõem nossa reserva são apenas provenientes dos prêmios pagos pelos segurados à seguradora. Em outras palavras, um capital inicial, $c_0 > 0$, e um valor total de prêmios recebidos durante o período $[0, t]$, $\pi t > 0$, logo o valor total dos ativos no período, $t = 1$ é dado por $A_1 = c_0 + \pi$. Este valor total dos ativos ficava "parado" até que fosse necessário a utilização deste para o pagamento dos reclamos. Porém estas suposições são muito fortes e não refletem a realidade uma vez que as companhias segurados investem seus

ativos segundo um determinado plano de negócios (Wüthrich e Merz, 2013). Para obtermos um modelo mais realista introduziremos algumas modificações no modelo.

Defina o valor inicial do total de ativos como a soma do capital inicial mais os prêmios pagos no tempo 0 referentes ao primeiro exercício

$$a_0 = c_0 + \pi.$$

Este capital inicial, a_0 , será investido em diferentes ativos, $k \in \{1, \dots, K\}$, no tempo 0. Como exemplos dos possíveis investimentos podemos citar:

- capital em caixa;
- títulos de dívida (empréstimos, hipotecas, dívidas públicas);
- imóveis e propriedades;
- private equity¹;
- derivativos e fundos de hedge²;
- outros ativos.

Dado uma série de ativos escolhidos pela seguradora de acordo com seu plano de negócios, chamado de portfólio:

$$a_0 = \sum_{k=1}^K p_k S_0^k, \quad (2.9)$$

onde $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_K)' \in \mathbb{R}^K$ é o portfólio e S_t^k representa o preço do k -ésimo ativo no tempo t . Assim o valor total dos ativos no tempo t é dado por:

$$A_t = \sum_{k=1}^K p_k S_t^k = a_0(1 + \mathbf{p}'\mathbf{R}_t), \quad (2.10)$$

onde \mathbf{R}_t é um vetor aleatório de retornos até o tempo t .

¹Tipo de atividade financeira realizada por instituições que investem em empresas que ainda não são listadas em bolsa de valores com o objetivo de alavancar seu desenvolvimento.

²Forma de investimento alternativa com poucas restrições e altamente especulativa. Investidores fornecem grandes quantias de dinheiro à uma empresa especializada em economia para que ela invista segundo seus critérios e depois reparta os lucros e prejuízos conforme contrato entre as partes.

2.7 Modelagem dos Reclamos

Nesta seção faremos mais uma modificação em nosso modelo base (2.6). Esta modificação será feita com o intuito de tornar o processo de reclamos mais próximo à realidade. Em (2.6), os reclamos eram modelados como:

$$L_1 = \sum_{i=1}^{N_1} Y_i.$$

Porém este tipo de modelagem supõe que a ocorrência de um reclamo, seu reporte a companhia seguradora e os pagamentos, variações da reserva, gerados por este acontecem de maneira instantânea. Porém as indenizações pagas pelas companhias seguradoras não são conhecidas nem podem ser pagas no instante de ocorrência dos reclamos (Wüthrich, 2013).



Figura 2.5: Fluxo de caixa gerado pelo ocorrência de sinistro.

Um exemplo do que pode acontecer em uma situação mais real está demonstrado na figura (2.5). Um reclamo ocorrido no primeiro exercício só é conhecido após o término do período de cobertura e gera uma série de pagamentos ao longo dos próximos exercícios;

$$\mathbf{X}_1 = (X_{1,1}, \dots, X_{1,J})',$$

onde $X_{1,t}$ é o pagamento no exercício t referente ao reclamo ocorrido no exercício 1. Mas como podemos relacionar os passivos no tempo 1, L_1 com o fluxo de pagamentos gerados durante o primeiro exercício \mathbf{X}_1 ?

Antes de respondermos a questão anterior teremos de apresentar algumas definições.

Definição 2.7.1 (Default-Free Zero Coupon Bond) *Um default-Free Zero Coupon Bond com maturidade $m \geq 0$ é um contrato que paga uma unidade monetária no tempo m . Seu preço no tempo $t \in [0, m]$ é denotado por $I(t, m)$.*

Definimos também, $I(m, m) = 1$ e, uma vez que o capital aumenta ao longo do tempo, esperamos que $I(t, m) < 1$ para $t < m$.

Dado um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ com filtração $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{t \in \mathbb{N}_0}$ e assumamos que o fluxo de pagamentos \mathbf{X}_1 é adaptado a \mathbb{F} então podemos reescrever os passivos L_1 em função dos fluxos de pagamento \mathbf{X}_1 .

$$L_1 = X_{1,1} + \sum_{s=2}^J I(1, s) \mathbb{E}(X_{1,s} | \mathcal{F}_1), \quad (2.11)$$

onde $I(1, s)$ é o preço de um *zero coupon bond* com maturidade para a data s .

2.8 Modelo Final

O balanço de uma companhia seguradora é frequentemente difícil de interpretar. Isto ocorre principalmente pelo fato de que ativos e passivos são mensurados utilizando-se diferentes métricas, metodologias. Os ativos financeiros são geralmente mensurados com preços de mercado, enquanto os passivos, obrigações securitárias são mensurados utilizando-se métodos atuariais (Melo e Neves, 2012). Em seus documentos e diretrizes, tanto a IAIS quanto a União Europeia, através do Solvência II, colocam que ambos, ativos e passivos devem ser mensurados com preços de mercado, isto é, devem ser utilizados seus valores econômicos. Para um melhor entendimento do que é o valor econômico utilizaremos um exemplo retirado de (Melo e Neves, 2012), que apesar de se tratar de um seguro do ramo vida apresenta uma boa justificativa do porque da utilização de tal metodologia.

Exemplo 2.8.1 *Suponha uma seguradora com uma carteira de passivos a serem pagos daqui a 10 anos no valor de R\$1 milhão, corrigidos pela inflação do período. A seguradora possui títulos de renda fixa, que proveem um fluxo de caixa no valor de R\$1,32 milhão daqui a 10 anos. A taxa usada na precificação do contrato foi de 6% ao ano (a.a.). A taxa de juros quando os títulos foram comprados estava em 9% a.a. Por fim, o mercado financeiro aponta que a taxa de juros real, com base no indexador do passivo, está 5% a.a. para maturidade de 10 anos. Para facilitar a análise, os riscos de crédito e longevidade foram totalmente desconsiderados. Além disso, como a empresa está totalmente "casada" (ativos e passivos) em taxa e prazo, o risco de mercado é praticamente nulo. Montaremos então quatro diferentes demonstrações financeiras:*

1. (i) as provisões são mensuradas com a taxa do contrato fixa em 6% a.a.;
- (ii) os ativos são marcados na curva, isto é, com a taxa de 9% a.a.

2. (i) as provisões são mensuradas com a taxa do contrato fixa em 6% a.a.;
(ii) os ativos são marcados com a taxa de mercado, ou seja, com a taxa de 5% a.a.
3. (i) as provisões são mensuradas com a taxa de mercado, ou seja, 5% a.a.;
(ii) os ativos são marcados na curva, isto é, com a taxa de 9% a.a.
4. (i) as provisões são mensuradas com a taxa de mercado, ou seja, 5% a.a.;
(ii) os ativos são marcados com a taxa de mercado, ou seja, com a taxa de 5% a.a.

	Ativos na Curva		Ativos a Mercado	
	Demonstrativo 1		Demonstrativo 2	
Provisões com taxa fixa	R\$557.582	R\$558.395	R\$810.635	R\$558.395
		(R\$813)		
	Demonstrativo 3		Demonstrativo 4	
Provisões com taxa a mercado	R\$557.582	R\$613.913	R\$810.635	R\$613.913
		(R\$56.331)		

Tabela 2.1: Balanços da mesma seguradora considerando quatro situações com diferentes combinações de provisões e ativos mensurados com taxa fixa e a mercado.

Analisando a Tabela (2.1) podemos observar que o demonstrativo 2 é o que apresenta a melhor situação financeira da seguradora. Os demonstrativos 1 e 3 indicam passivo a descoberto, ou seja, ativos insuficientes para cobrir os passivos. Agora vamos considerar que a taxa de juro real para a maturidade 10 anos, observada no mercado financeiro, subiu para 12% a.a. Logo os demonstrativos passa a ser:

	Ativos na Curva		Ativos a Mercado	
Provisões com taxa fixa	Demonstrativo 1		Demonstrativo 2	
	R\$557.582	R\$558.395	R\$425.005	R\$558.395
		(R\$813)		(R\$133.390)
Provisões com taxa a mercado	Demonstrativo 3		Demonstrativo 4	
	R\$557.582	R\$321.973	R\$425.005	R\$321.973
		R\$235.609		R\$103.032

Tabela 2.2: Cenário de subida da taxa de juros real. Balanços da mesma seguradora considerando quatro situações com diferentes combinações de provisões e ativos mensurados com taxa fixa e a mercado.

Com base em um cenário de subida da taxa de juros, podemos observar uma inversão nos demonstrativos 2 e 3. Na tabela (2.1), os demonstrativos 2 e 3 apresentavam, respectivamente a "melhor" e a "pior" situação financeira. Ao contrário, na tabela (2.2), eles representam, respectivamente, a "pior" e a "melhor" situação. O demonstrativo 1 é completamente insensível à variação na taxa de juros. O estado econômico na país ou no mundo pode estar um paraíso ou em crise financeira que o demonstrativo 1 mostrará os mesmos números o que pode levar a uma falsa sensação de segurança. O único demonstrativo que independente do cenário econômico, continua mostrando a real situação financeira da seguradora é o demonstrativo 4. Afinal, com base nas hipóteses do exemplo, a seguradora está com fluxo de saídas totalmente coberto por um fluxo de entradas.

No modelo que estamos construindo nossos ativos são construídos baseados em valores de mercado, porém nossos passivos estão construídos com metodologias atuariais, isto é, L_t , não é um valor econômico. Para "corrigirmos" isto utilizaremos um fator de desconto estocástico (SDF, *stochastic Discount Factor*). A função de um SDF é trazer a valor presente um fluxo de pagamentos que serão realizados no futuro, utilizando uma certa taxa. Considere um fluxo de pagamentos $\mathbf{X}_k = (0, \dots, 0, X_k, 0, \dots, 0)$. Seu preço no tempo $t = 0$ é dado por:

$$Q_0[\mathbf{X}_k] = \mathbb{E}[\varphi_k X_k \mid \mathcal{F}_0].$$

Logo fazendo este último ajuste em nosso modelo base (2.6), onde agora mensuramos ativos e passivos com a mesma metodologia, isto é, ambos agora são tratados como valores econômicos, temos que a companhia seguradora é solvente com respeito a medida de risco ρ quando:

$$\rho(L_1 - A_1) = \rho \left(X_{1,1} + \sum_{s=2}^J \frac{1}{\varphi_1} \mathbb{E}[\varphi_0 X_{1,s} \mid \mathcal{F}_1] - a_0 (1 + \mathbf{p}'\mathbf{R}_1) \right) \leq 0 \quad (2.12)$$

Chegamos assim, a partir do modelo de Crámer-Lundberg à visão atual de como é tratada a questão da solvência em companhias seguradoras do ramo não-vida.

Capítulo 3

EDEs e Simulação de EDEs

Neste capítulo serão apresentadas de forma breve algumas definições e notações que serão necessárias para o desenvolvimento e entendimento do trabalho. Este capítulo foi escrito tendo como referências principais (Øksendal, 2003) para seções que tratam de EDEs e (Kloeden, Platen e Schurz, 2003) para a seção onde tratamos de soluções aproximadas para EDEs.

3.1 Definições de Probabilidade

Começaremos esta seção definindo de maneira formal um processo estocástico, que foi introduzido de maneira informal na seção (2.1).

Definição 3.1.1 (Processo Estocástico) *Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias do tipo*

$$\{X_t\}_{t \in T}$$

definidas em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) que assumem valores em \mathbb{R}^n .

O espaço paramétrico T é normalmente o intervalo $[0, +\infty)$, podendo vir a ser um intervalo do tipo $[a, b]$, os inteiros não-negativos (caso discreto) ou subconjuntos de \mathbb{R}^n para $n \geq 1$. Observe que, fixando $t \in T$ temos uma variável aleatória

$$\omega \rightarrow X_t(\omega); \omega \in \Omega.$$

E se fixarmos um $\omega \in \Omega$ teremos a função

$$t \rightarrow X_t(\omega); t \in T$$

que é conhecida como *trajetória* de X_t . Normalmente utiliza-se t como o “tempo”, de maneira discreta ou contínua, e cada ω pode ser interpretado

como um experimento individual, logo $X_t(\omega)$ representa o resultado de um determinado experimento ω no instante de tempo t . Podemos considerar então nosso processo como uma destas duas variáveis

$$(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega).$$

As distribuições (finito-dimensionais) do processo $X = \{X_t\}_{t \in T}$ são as medidas μ_{t_1, \dots, t_k} definidas em \mathbb{R}^{nk} , $k = 1, 2, \dots$, por:

$$\mu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k], \quad t_i \in T, \quad (3.1)$$

onde F_1, F_2, \dots, F_k são borelianos pertencentes a \mathbb{R}^n .

A família de todas as distribuições finito-dimensionais determina muitas (porém não todas) propriedades de um processo estocástico X .

Isto posto, dado uma família de medidas de probabilidade, $\{\nu_{t_1}, \dots, \nu_{t_k}; k \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ é importante que sejamos capazes de construir um processo estocástico $Y = \{Y_t\}_{t \in T}$ cujas distribuições finito dimensionais sejam dadas por $\nu_{t_1}, \dots, \nu_{t_k}$. O teorema de extensão de Kolmogorov estabelece que isto pode ser feito, uma vez provado que $\nu_{t_1}, \dots, \nu_{t_k}$ satisfazem duas condições de consistência. O teorema será enunciado a seguir, uma vez que, será utilizado na próxima seção onde nos auxiliará na construção do Movimento Browniano.

Teorema 3.1.1 (Teorema de extensão de Kolmogorogov) *Para todos $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}$, seja ν_{t_1, \dots, t_k} medidas de probabilidade em \mathbb{R}^{nk} satisfazendo:*

$$\nu_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)}) \quad (K1)$$

para todas as permutações σ em $\{1, 2, \dots, k\}$ e

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n) \quad (K2)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, onde o conjunto do lado direito da equação tem um total de $k + m$ fatores. Então existe um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e um processo estocástico $\{X_t\}$ em Ω , $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo:

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k]$$

para todos $t_i \in T$, $k \in \mathbb{N}$, e todas as σ -álgebras de Borel F_i .

3.2 Movimento Browniano

Em 1928 o botânico escocês Robert Brown observou pela primeira vez a trajetória irregular de um grão de pólen suspenso em um líquido. Einstein

explicou posteriormente que o movimento se devia às colisões aleatórias entre o grão e as moléculas do líquido. Para descrever o movimento utiliza-se o processo estocástico $B_t(\omega)$, que é interpretado como a posição do grão de pólen ω no instante de tempo t .

Construiremos agora uma generalização considerando um modelo n -dimensional. Pelo teorema de Extensão de Kolmogorov basta que especifiquemos uma família de medidas de probabilidade $\{\nu_{t_1, \dots, t_k}\}$ que satisfaça (K1) e (K2), para provarmos a existência de $\{B_t\}_{t \geq 0}$.

Seja um $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, definimos

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right)$$

para $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Então, para $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ definimos as medidas ν_{t_1, \dots, t_k} em \mathbb{R}^n como:

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k \quad (3.2)$$

Então, pelo teorema de Extensão de Kolmogorov sabemos que existe o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ e um processo estocástico $\{B_t\}_{t \geq 0}$ em Ω tal que a distribuição finito dimensional de B_t é dada por:

$$P^x(B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k} \in F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k \quad (3.3)$$

Definição 3.2.1 *O processo $\{B_t\}_{t \geq 0}$ descrito acima é chamado movimento browniano n -dimensional começando em x , ou seja, $P^x(B_0 = x) = 1$.*

O movimento Browniano como descrevemos acima goza de algumas propriedades que apresentaremos abaixo:

1. B_t é um processo Gaussiano, ou seja, para $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ o vetor aleatório $Z = (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in \mathbb{R}^{nk}$ segue uma distribuição normal multivariada.
2. B_t tem incrementos independentes, ou seja,

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \text{ são independentes para todo } 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k. \quad (3.4)$$

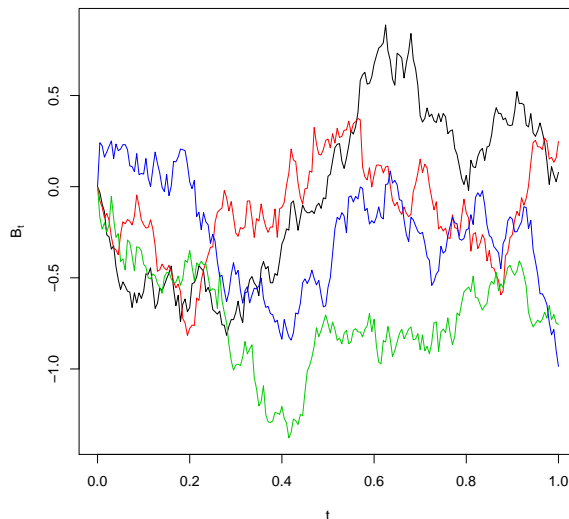


Figura 3.1: Exemplo de quatro diferentes trajetórias de um Movimento Browniano com $P(B_0 = 0) = 1$.

3.3 Integral de Itô

Visto que, utilizaremos equações diferenciais estocásticas nos capítulos subsequentes iniciaremos nesta seção uma breve revisão de cálculo estocásticos, iniciando pela definição da integral de Itô.

Definição 3.3.1 *Seja $\mathcal{V}(S, T)$ um classe de funções do tipo $f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- i) $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ é $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -mensurável, sendo \mathcal{B} a σ -álgebra de Borel em $[0, \infty)$.*
- ii) $f(t, \omega)$ é \mathcal{F}_t -adaptável*
- iii) $E \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$*

Definição 3.3.2 (Integral de Itô) *Seja $f \in \mathcal{V}(S, T)$, a integral de Itô de f de S a T é definida como:*

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega). \quad (3.5)$$

Teorema 3.3.1 (Propriedades da integral de Itô) *Sejam $f, g \in \mathcal{V}(0, T)$ e $0 \leq S < U < T$. Então:*

- i) $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t,$
- ii) $\int_S^T (cf + g) dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t,$
- iii) $E \left[\int_S^T f dB_t \right] = 0,$
- iv) $\int_S^T f dB_t$ é \mathcal{F}_T -mensurável.

3.4 Fórmula de Itô

A integral de Itô apresentada anteriormente e conseqüentemente os processos de Itô, podendo estes serem escritos em forma diferencial ou integral, não satisfazem as regras usuais do cálculo. Para solucionarmos este problema utilizamos a *Fórmula de Itô* que é uma regra de diferenciação de uma função composta, equivalente, em cálculo estocástico, à regra da cadeia conhecida do cálculo diferencial. Nesta seção daremos algumas definições sobre os processos de Itô e a fórmula de Itô.

Definição 3.4.1 (Processo de Itô unidimensional) *Seja B_t um movimento Browniano em (Ω, \mathcal{F}, P) . Um processo de Itô unidimensional é um processo estocástico X_t em (Ω, \mathcal{F}, P) da forma,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s, \quad 0 \leq t < T. \quad (3.6)$$

Se X_t é um processo de Itô da forma (3.6) então este às vezes é escrito na forma diferencial,

$$dX_t = u dt + v dB_t. \quad (3.7)$$

Apresentaremos agora a fórmula de Itô para o caso unidimensional, seguido de um exemplo.

Teorema 3.4.1 (Fórmula de Itô) *Seja X_t um processo de Itô dado por:*

$$dX_t = U(t, X_t) dt + V(t, X_t) dB_t.$$

Seja $g(t, x)$ duas vezes continuamente diferenciável em $[0, \infty) \times \mathbb{R}$.

$$Y_t = g(t, X_t)$$

O processo $\mathbf{X}(t)$ é chamado processo de Itô n -dimensional. Logo precisamos de uma fórmula de Itô mais geral para conseguirmos trabalhar com estes processos de dimensões superiores a um. Introduziremos então a fórmula geral de Itô.

Teorema 3.4.2 *Seja,*

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{u}dt + \mathbf{v}d\mathbf{B}(t), \quad (3.11)$$

um processo de Itô m -dimensional, como descrito anteriormente. Seja $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$ uma função de $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R}^p . Então o processo é novamente um processo de Itô, cujo k -ésimo componente, Y_k , é dado por,

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X)dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X)dX_i dX_j, \quad (3.12)$$

onde $dB_i dB_j = \delta_{ij}dt$, $dB_i dt = dt dB_i = 0$.

3.5 Simulação de EDEs

Achar soluções exatas para processos de Itô nem sempre é uma tarefa fácil, ou algumas vezes possível. Nesse caso recorreremos a alguns métodos numéricos que nos geram soluções aproximadas. Um dos métodos mais simples é o *Esquema de Euler*, descrito abaixo.

Seja um processo de Itô $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ satisfazendo

$$dX_t = U(t, X_t)dt + V(t, X_t)dB_t; \quad (3.13)$$

em $t_0 \leq t \leq T$ e com valor inicial $X_{t_0} = X_0$. E uma dada discretização do intervalo $t_0 \leq t \leq T$, do tipo, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$. A aproximação de Euler será um processo $Y = \{Y_t, t_0 \leq t \leq T\}$ que satisfaz:

$$Y_{\tau_{n+1}} = Y_{\tau_n} + U(\tau_n, Y_{\tau_n})(\tau_{n+1} - \tau_n) + V(\tau_n, Y_{\tau_n})(B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n}) \quad (3.14)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ com valor inicial $Y_0 = X_0$. Por questões de simplificação da notação optamos por escrever $Y_n = Y_{\tau_n}$, para nos referirmos a aproximação para o tempo discreto τ_n . Consideraremos aqui o caso onde os passos de discretização são equidistantes, ou seja

$$\tau_n = t_0 + n\Delta; \quad (3.15)$$

sendo

$$\Delta = \frac{T - t_0}{N}. \quad (3.16)$$

Agora basta gerarmos os valores dos incrementos:

$$\Delta B_n = B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n} \quad (3.17)$$

que como vimos na seção 3.2 são independentes e $\Delta B_n \sim N(0, \Delta)$, ou seja,

$$E[\Delta B_n] = 0; \quad (3.18)$$

$$E[(\Delta B_n)^2] = \Delta. \quad (3.19)$$

Logo o *Esquema de Euler* é dado pela seguinte fórmula recursiva

$$Y_{n+1} = Y_n + U(\tau_n, Y_n)\Delta + V(\tau_n, Y_n)\Delta B_n. \quad (3.20)$$

Observe que o *Esquema de Euler* gera valores aproximados apenas para os instantes $\tau_0, \dots, \tau_N \in [t_0, T]$, porém a solução de nossas equações diferenciais estocásticas são contínuas então é preciso encontrarmos valores para qualquer $t \in [t_0, T]$. Utilizamos então o método de interpolação linear, isto é, seja $t \in [t_0, T]$ e

$$n_t = \max\{n = 1, \dots, N : \tau_n < t\},$$

ou seja, n_t é o maior valor inteiro possível tal que $\tau_{n_t} < t$. Temos a fórmula da interpolação linear dada por:

$$Y_t = Y_{n_t} + \frac{t - \tau_{n_t}}{\tau_{n_t+1} - \tau_{n_t}} (Y_{n_t+1} - Y_{n_t}). \quad (3.21)$$

Abaixo segue um exemplo onde compararemos a solução aproximada dada pelo Esquema de Euler e sua solução exata.

Exemplo 3.5.1 *Considere a seguinte equação diferencial estocástica, que é satisfeita pelo processo de Ornstein-Uhlenbeck :*

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dB_t$$

com $X_0 = 0$, θ , μ e $\sigma > 0$. A equação diferencial estocástica acima possui solução exata dada por (ver apêndice):

$$X_t = X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dB_s.$$

Utilizando o esquema de Euler temos:

$$Y_{n+1} = Y_n + \theta(\mu - Y_n)\Delta + \sigma \Delta B_n.$$

O gráfico (3.2) representa a simulações obtidas utilizando o método de Euler.

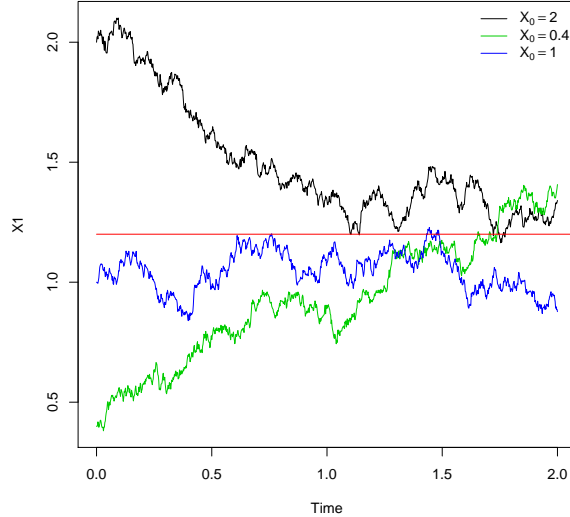


Figura 3.2: Trajetórias do processo de Ornstein-Uhlenbeck gerados pelo esquema de Euler com parâmetros $\theta = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0,3$ e com valores de $X_0 = 2$, $X_0 = 1$ e $X_0 = 0.4$.

3.6 Medidas de Risco

As medidas de risco que iremos utilizar têm como objetivo nos trazer informações sobre a cauda das nossas distribuições, podendo ser utilizadas local ou globalmente. Nós optaremos por uma análise mais local.

A primeira medida é o p -quantil conhecido também como *VaR* (*Value at Risk*) com nível p nas literaturas de atuária e finanças. O *VaR* pode ser definido da seguinte forma.

Seja $p \in (0, 1)$ e a variável aleatória X temos:

$$VaR_p = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\} \quad (3.22)$$

onde $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Agora defina o capital econômico, SC , como sendo o menor capital possível tal que a companhia seguradora seja tecnicamente solvente, ou seja, que a companhia se torne insolvente com probabilidade menor que p , logo:

$$SC = VaR_p - P \quad (3.23)$$

sendo P as provisões da companhia seguradora e p o nível do *VaR* definido anteriormente.

O VaR nos informa qual o valor que dá a nossa companhia a probabilidade p de ficar insolvente mas outra pergunta muito importante é "Se ficarmos insolventes em quanto ficaremos?" para responder esta pergunta introduzimos o $TVaR_p(X)$, ou seja, o $TVaR$ nos dá a esperança das perdas dado que se está tecnicamente insolvente considerando um nível p . O $TVaR_p$ pode ser expresso como:

$$TVaR_p = \frac{1}{p} \int_0^p VaR_q \, dq, \quad p \in (0, 1) \quad (3.24)$$

Pode-se pensar ainda qual a probabilidade da companhia ficar insolvente, a essa probabilidade damos o nome de probabilidade de ruína, denotada por SP , e definida como:

$$P(X \leq 0) = F_X(0) \quad (3.25)$$

3.7 Propriedades das Medidas de Risco

Lemma 3.1 *Seja X uma variável aleatória com suporte igual a \mathbb{R} e $0 < p < 1$. Para qualquer função g , não-decrescente e contínua a esquerda vale que:*

$$VaR_p[g(X)] = g(VaR_p[X]) \quad (3.26)$$

Lemma 3.2 *Seja X uma variável aleatória e $0 < p < 1$ vale que:*

$$\lim_{p \rightarrow 1} TVaR_p[X] = E[X] \quad (3.27)$$

Capítulo 4

Modelos Mal Ajustados e seus Impactos na Medidas de Risco

Desde os anos de 1990 órgãos reguladores de seguros de diferentes países tem introduzido o sistema de capital baseado em risco. Os primeiros países a fazerem isto foram, o Canadá em 1992 com *Minimum Continuing Capital and Surplus Requirements*, os Estados Unidos em 1994 com *NAIC risk-based capital approach*. Em 1996 o Japão instituiu o *Solvency Margin Standard* e em 2001 a Austrália passou pela *General Insurance Reform Act*. Na União Européia podemos citar o Solvência II de 2009 que passa a valer a partir de 2016.

Embora os capitais baseados em risco possam reduzir a insolvência em companhias seguradoras (Holzmüller, 2009), a recente crise financeira iniciada em 2008 mostrou que alguns modelos podem dar uma falsa sensação de segurança as seguradoras, reguladores e segurados. Acadêmicos, profissionais da área e reguladores tem, recentemente, criticado alguns modelos pois estes fazem boas estimativas em tempos "normais", porém seus desempenhos em períodos de crise são "pobres" (CEIOPS, 2009). Portanto o risco de se trabalhar com modelos mal ajustados não deve ser subestimado.

Este capítulo é baseado no trabalho de *Schmeiser at al.*. Os autores primeiramente fazem uma revisão histórica de quando e onde começaram a ser introduzidas as exigências de capitais baseado em risco por órgãos reguladores de vários países, no que tange a solvência de companhias seguradoras. Posteriormente analisa os impactos gerados no capital requerido por diferentes modelagens de ativos e passivos. Esta análise é feita através da comparação dos valores de algumas medidas de risco que foram calculadas para o que os autores chamam de "cenário base" e os valores das mesmas para alguns "cenários alternativos". Conclui-se ao final que a modelagem errada de passivos e ativos pode levar seguradora, reguladores e segurados a uma

falsa sensação de segurança, onde aparentemente o risco da companhia ficar insolvente está de acordo com os padrões exigidos, quando na verdade não está. Tal erro pode ser minimizado de maneira significativa com a adoção de uma frequência maior de envio de relatórios sobre a situação de solvência das companhias para os órgãos fiscalizadores. Estes relatórios são enviados, normalmente de forma anual. No artigo os autores fazem a comparação com envios anuais, semestrais, trimestrais, e mensais, concluindo que quanto maior a frequência de envio, menores são os erros gerados pelo modelo. Nas próximas seções deste capítulo trabalharemos com alguns cenários descritos no artigo, porém não cobriremos todos os pontos citados acima e focaremos apenas nas partes que serão aproveitadas mais adiante no texto. Utilizaremos a construção de um "cenário base", igual ao criado no artigo, e um de seus "cenários alternativos" no qual os autores incorporam um processo de saltos ao processo de evolução dos passivos. Para tanto adotaremos os mesmos valores para os parâmetros citados no artigo. Realizaremos nossas simulações utilizando o software estatístico **R**. Optamos por utilizar o esquema de Euler para a simulação de nossas EDEs, mesmo estas tendo soluções exatas facilmente obtidos pela fórmula de Itô, pois no próximo capítulo trabalharemos com EDEs que não possuem solução exata o que nos obriga a adotar um método de aproximação. As soluções exatas para as EDEs utilizadas neste capítulo podem ser vistas no apêndice. As medidas de risco que utilizaremos assim como a definição de solvência são as descritas anteriormente nas seções (2.5.1) e (3.6).

4.1 Introdução

Foram analisadas a sensibilidade das medidas de risco, VaR e TVaR, frente a modificação feita no "cenário base". Esta análise foi feita através de uma razão simples entre a medida de risco calculada para o "cenário base" e a medida de risco calculada para o "cenário alternativo". A razão entre as medidas de risco reflete o poder explicativo do cenário base quando na realidade tem-se um cenário alternativo. Para a construção do cenário alternativo será adicionado um processo de saltos ao processo de passivos. Os autores criam também dois outros cenários alternativos no artigo, introduzindo correlações, linear e não linear entre os ativos, porém não faremos estas análises pelo motivos ditos anteriormente. Na próxima seção descreveremos de maneira formal os cenários base e alternativo.

4.2 Modelo

Consideraremos uma companhia seguradora com valor econômico dos passivos L_t e valor econômico dos ativos A_t em um horizonte de tempo de um ano, $t \in [0, 1]$. Os ativos serão divididos em dois grupos, os de alto risco, $A_{1,t}$ e os de baixo risco, $A_{2,t}$, tais que,

$$A_t = A_{1,t} + A_{2,t}.$$

No cenário base consideraremos que o valor econômico dos ativos, $A_{i,t}$, $i = 1, 2$, e o valor econômico dos passivos, L_t , são governados pelas seguintes equações diferenciais estocásticas,

$$dA_{i,t} = \mu_{A_i} A_{i,t} dt + \sigma_{A_i} A_{i,t} dB_{A_{i,t}} \quad i = 1, 2; \quad (4.1)$$

$$dL_t = \mu_L L_t dt + \sigma_L L_t dB_{L_t}, \quad (4.2)$$

onde $t \in [0, 1]$, μ_{A_i} e μ_L representam os *drifts*, σ_{A_i} e σ_L representam as volatilidades e $B_{A_{i,t}}$ e B_{L_t} representam movimentos Brownianos padrão.

Uma vez que existem vários seguros que expõem a companhia seguradora a grandes saltos em seus processos de passivos¹ estamos interessados em avaliar a razão entre as medidas de risco quando temos em nosso cenário alternativo um processo de passivos contendo saltos, isto é,

$$\frac{dL_t}{L_{t-}} = \mu_L L_t dt + \sigma_L L_t dB_{L_t} + dJ_t \quad (4.3)$$

com *drift* μ_L , volatilidade σ_L e sendo $L_{t-} = \lim_{\nu \uparrow t} L_\nu$. O processo J_t é um Processo de Poisson Composto independente de B_t , isto é,

$$J_t = \sum_{i=1}^{N_t} (Y_i - 1),$$

onde N_t é um Processo de Poisson Homogêneo com intensidade λ e $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $Y_i \sim \text{Log} - \text{Normal}(a, b^2)$.

4.3 Análise Numérica

Nesta seção serão apresentados os valores dos parâmetros que utilizaremos em nossas simulações assim como uma série de gráficos e tabelas que visam o melhor entendimento do comportamento das medidas de risco em cada um dos cenários.

¹Por exemplo, quando seguradoras oferecem coberturas para catástrofes ou quando seguradoras do ramo vida se deparam com uma pandemia (Cummins, 1988).

4.3.1 Parâmetros de Entrada

Os exemplos foram gerados utilizando-se o esquema de Euler descrito na seção (3.5). Foram geradas amostras de tamanho 50000 para cada uma das equações em cada um dos cenários. A tabela abaixo contém os valores dos parâmetros que foram utilizados.

Parâmetros	Notação	Valor inicial em $t = 0$
Horizonte de Tempo	T	1
Comprimento dos passos em $[0, T]$	dT	1,1/2,1/4,1/12
Valor Econômico dos Ativos de Alto Risco	$A_{1,0}$	UM 0,5 bilhões
Valor Econômico dos Ativos de Baixo Risco	$A_{2,0}$	UM 9,5 bilhões
Valor Econômico dos Passivos	L_0	UM 8,0 bilhões
<i>Drift</i> do Processo de Ativos de Alto Risco	μ_{A_1}	0,08
<i>Drift</i> do Processo de Ativos de Baixo Risco	μ_{A_2}	0,04
<i>Drift</i> do Processo de Passivos	μ_L	0,03
Volatilidade do Processo de Ativos de Alto Risco	σ_{A_1}	0.2
Volatilidade do Processo de Ativos de Baixo Risco	σ_{A_2}	0.08
Volatilidade do Processo de Passivos	σ_L	0.05
Valor esperado de Y_i	$\mathbb{E}(Y_i)$	1,05
Volatilidade de Y_i	σ_{Y_i}	0,05
Intensidade do Processo de Saltos	λ	[0;0,5]
Parâmetro da Distribuição Log-Normal de Y_i	a	0,048
Parâmetro da Distribuição Log-Normal de Y_i	b^2	0,023
Probabilidade de Exceder o Valor em Risco	α	0,1%, 0,5%, 1%

Tabela 4.1: Valores utilizados para as simulações.

4.3.2 Simulações

Nesta seção serão apresentados alguns gráficos gerados através dos métodos e utilizando os valores descritos anteriormente. Os gráficos abaixo mostram a evolução do VaR_p e do $TVaR_p$ da reserva ao longo do ano, começando com o cenário base e analisando cinco cenários alternativos onde foram adicionados processos de saltos com intensidade variando de $\lambda = 0,1$ a $\lambda = 0,5$. Fazendo a comparação entre os gráficos abaixo é possível observar que a adição do processo de saltos causa grande impacto em nossas medidas de risco chegando a caracterizar insolvência em todos os cinco cenários alternativos para ambas medidas de risco quando considerado um $p = 0,1\%$, ou seja, em todos os cenários alternativos observamos $VaR_{0,001} > 0$ e $TVaR_{0,001} > 0$, que considerando a definição (2.5.4) caracteriza uma companhia insolvente.

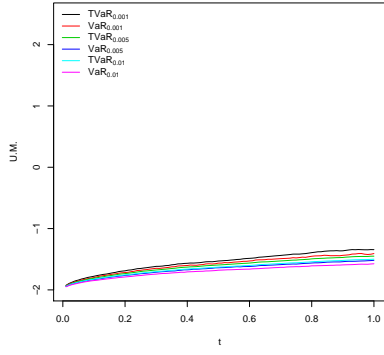


Figura 4.1: Cenário Base

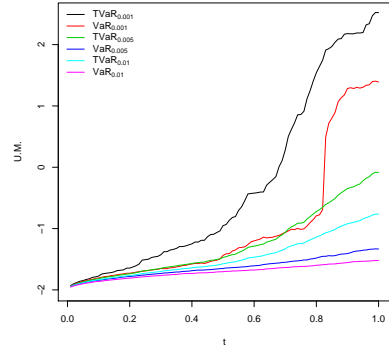


Figura 4.2: $\lambda = 0.1$

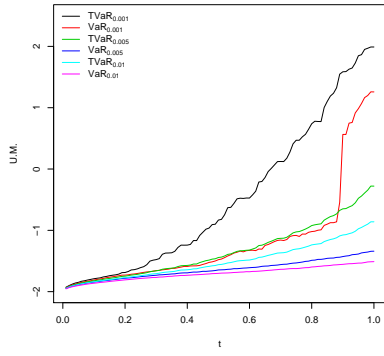


Figura 4.3: $m \lambda = 0.2$

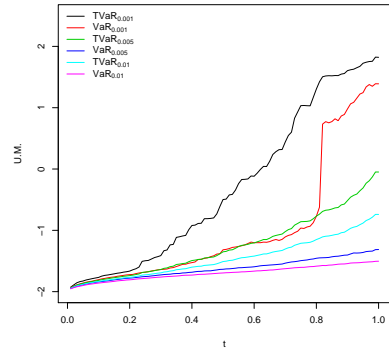


Figura 4.4: $\lambda = 0.3$

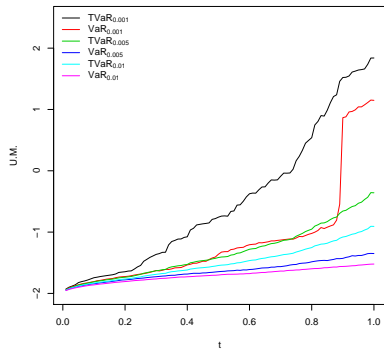


Figura 4.5: $\lambda = 0.4$

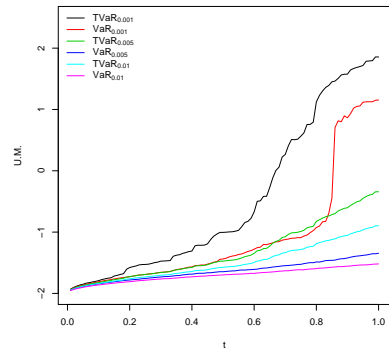


Figura 4.6: $\lambda = 0.5$

Faremos agora uma análise comparativa na qual queremos observar a capacidade explicativa do nosso cenário base quando temos um cenário real ditado por algum de nossos cenários alternativos. Para isso utilizamos um metodologia semelhante à original porém introduzindo algumas adaptações necessárias. Para analisarmos o poder explicativo do cenário base frente algum cenário alternativo, ao invés de utilizarmos a razão simples entre as medidas de risco utilizaremos a seguinte razão:

$$\frac{|2 - \rho^{CB}(L_t - A_{1,t} - A_{2,t})|}{|2 - \rho^{CA}(L_t - A_{1,t} - A_{2,t})|}, \quad (4.4)$$

onde ρ^{CB} representa uma medida de risco para o cenário base e ρ^{CA} representa uma medida de risco para algum cenário alternativo.

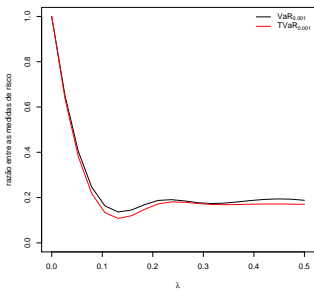


Figura 4.7: $p = 0,1\%$

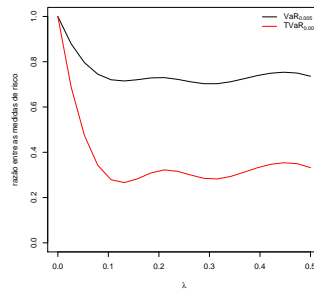


Figura 4.8: $p = 0,5\%$

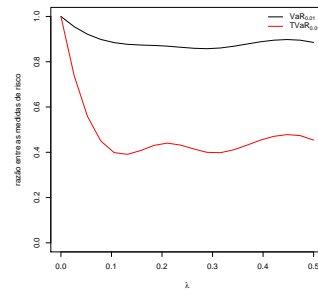


Figura 4.9: $p = 1\%$

Nos três gráficos anteriores estão colocados o valor da razão definida em (4.4) em função da intensidade, λ , dos processos de saltos. Consideramos os valores das medidas de risco em $t = 1$, uma vez que nossa intenção é estudar a capacidade de nossa companhia chegar solvente ao final do ano.

Observando os três gráficos podemos constatar uma queda acentuada no poder explicativo do cenário base para valores de, $0 \leq \lambda \leq 1$, após os quais o poder explicativo parece se estabilizar. Outra característica que observamos é que quanto menor o valor de p menor é o poder explicativo do cenário base. Este varia em torno de 19% para o $VaR_{0,001}$ e para o $TVaR_{0,001}$, em quanto para o $VaR_{0,01}$ varia em torno de 90% e para o $TVaR_{0,01}$ varia em torno de 42%, sendo em todos os três casos o $TVaR$ mais sensível a adição do processo de saltos.

4.4 Conclusão

Concluimos que o cenário base não consegue explicar de maneira satisfatória um contexto onde se está sujeito a processos de saltos no processo de passivos. Em relação as medidas de risco concluímos que o $TVaR$ é mais sensível a este tipo de modificação quando comparado com o VaR e em ambos casos quanto menor o valor de p maior a sensibilidade da medida de risco a modificações.

Capítulo 5

Risco Sistêmico

Neste capítulo apresentaremos o artigo "*Large deviations for a mean field model of systemic risk*", de *Josselin Garnier, George Papanicolaou e Tzu-Wei Yang, 2012*. No artigo os autores consideram um modelo onde existe uma interação entre seus agentes, modelo este no qual o risco sistêmico pode ser avaliado analiticamente. Cada agente pode estar em apenas dois diferentes estados, um que foi considerado o estado "normal" e o outro chamaremos de "estresse", podendo transitar livremente entre estes. Foram consideradas algumas características no processo de evolução de cada agente. Primeiro, existe um mecanismo de estabilização que tende a manter o agente próximo ao estado de normalidade. Segundo, existem forças desestabilizadoras externas que tendem a afastar o agente do estado de normalidade, estas foram modeladas por processos estocásticos. Terceiro, há uma cooperação entre os agentes que funciona como um estabilizador individual. Os autores apresentam detalhadamente a parte analítica, ao encontrarem uma distribuição para a solução assintótica do sistema que será apresentado de maneira formal ao longo das próximas seções, e para a obtenção de um valor crítico do qual depende o comportamento do sistema. Além disso apresentam os resultados de algumas simulações, feitas utilizando o esquema de Euler, para diferentes cenários, afim de exemplificar o comportamento do sistema. A definição formal de risco sistêmico, o modelo utilizado pelos autores e alguns resultados obtidos por eles serão apresentados nas próximas seções deste capítulo.

Assim como no capítulo anterior, não entraremos em detalhes sobre os resultados analíticos dos autores, trabalharemos utilizando simulações. Todos os resultados apresentados nas seções seguintes foram obtidos por nós, utilizando os modelos e parâmetros dados pelo artigo. Todas as simulações foram feitas no software estatístico **R**.

5.1 Risco Sistêmico

Existem várias definições diferentes de risco sistêmico. O Banco Central Europeu (ECB, 2010) o define como o risco de uma instabilidade financeira de tal forma generalizada que prejudica o funcionamento de um sistema financeiro ao ponto que o crescimento e o bem-estar econômicos sofram perdas materiais. Outra definição semelhante é "qualquer conjunto de circunstâncias que ameaçam a estabilidade ou a confiança do público no sistema financeiro" (Billio, Getmansky, Lo, and Pelizzon, 2010). Existem ainda outras definições trabalhadas por diferentes autores que focaram seus trabalhos e definições em alguns mecanismos mais específicos.

Nós trabalharemos com a definição "em um sistema onde se tem agentes interligados, o risco de uma falha individual ou de um grupo de agentes acarreta a falha de outros agentes o que leva a uma falha total do sistema" (Garnier, Papanicolaou, Yang, 2012).

5.2 Modelo

Neste trabalho consideraremos uma carteira de ativos na qual o preço dos nossos ativos S_t^k serão modelados como um processo estocástico a tempo contínuo que é solução do sistema de equações diferenciais estocásticas:

$$dS_t^k = -hU(S_t^k)dt + \theta(\bar{S}_t - S_t^k)dt + \sigma dW_t^k \quad (5.1)$$

onde, os movimentos Brownianos padrões, $\{W_t^k\}_{k=1}^K$, são independentes e σ é a escala da volatilidade. A tendência ou deriva (drift), θ do ativo S^k está correlacionada com os demais ativos através de um campo médio, isto é,

$$\theta(\bar{S}_t - S_t^k)$$

onde $\bar{S}_t = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_t^k$. $-hU(y) = -hV'(y)$ é a força restauradora, sendo, V é uma função com dois mínimos locais chamada potencial e h podemos chamar de altura do potencial, ou seja, o valor de h dita a dificuldade de se transitar entre os dois mínimos. A figura (5.1) exemplifica nossa função $hV(y)$.

$$V(y) = \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + c$$

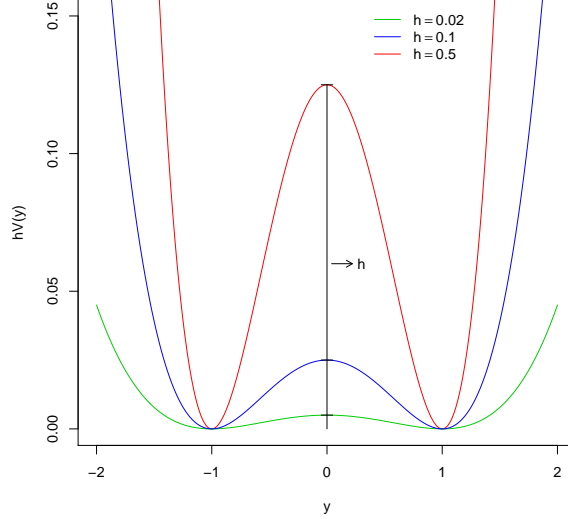


Figura 5.1: Pontencial $V(y)$ com diferentes alturas h .

5.3 Análise Numérica da Média Empírica do Sistema de EDEs

Para uma demonstração do comportamento da média empírica do sistema (5.1), faremos uma simulação do sistema utilizando esquema de Euler, no software estatístico **R**:

$$S_{n+1}^k = S_n^k - hU(S_n^k)\Delta t + \sigma\Delta W_n^k + \theta(\bar{S}_n - S_n^k)\Delta t. \quad (5.2)$$

Utilizamos $U(y) = y^3 - y$, $S_t^0 = -1$, $\Delta t = 0,02$ e seja $\{\Delta W_j^k\}_{j,k}$ são variáveis aleatórias normais com média zero e variância Δt .

As figuras (5.2) e (5.3) ilustram a média empírica do sistema iniciando-se na situação onde temos dois valores diferentes de estabilidade, ± 0.87 e ± 0.84 respectivamente, até a situação em que temos apenas um, em torno do zero, valores os quais estão sendo controlados pelos valores de σ e θ , com $N = 100$ e $h = 0.01$ sendo mantidos fixos.

Podemos ver que, embora a variação dos parâmetros não seja igual o comportamento resultante é similar. Como θ é a força do campo médio temos que quanto maior o valor de θ a média empírica da sistema converge para uma solução biestável. Interpretação semelhante pode ser feita em relação a σ que por sua vez é a força desestabilizadora, assim sendo quanto menor σ a média do sistema também converge para uma solução biestável.

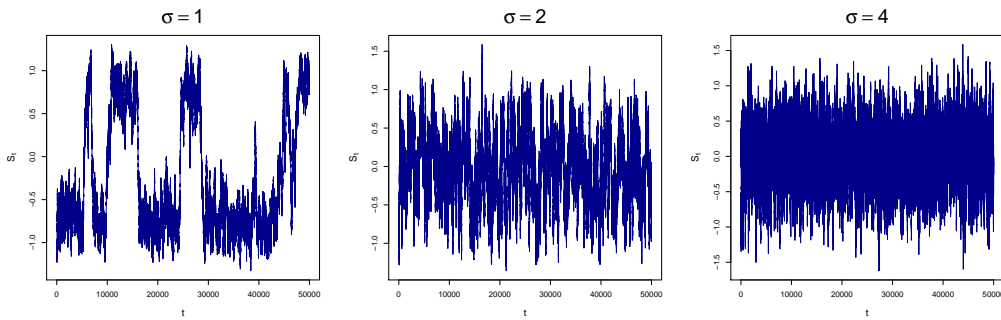


Figura 5.2: Simulação para valores de σ e com $N = 100$, $h = 0.1$ e $\theta = 6$

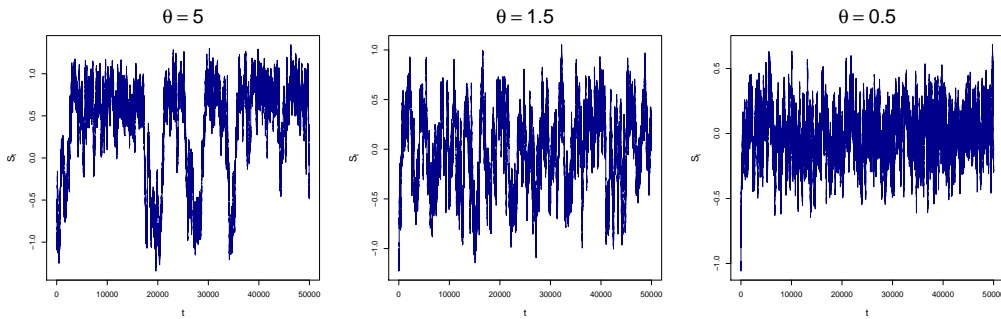


Figura 5.3: Simulação para valores de θ e com $N = 100$, $h = 0.1$ e $\sigma = 1$

A figura (5.4) mostra o efeito na média empírica do sistema quando aumentamos o valor de h , (0.02; 0.1; 0.5), sendo os outros parâmetros fixos, $N = 100$, $\theta = 10$ e $\sigma = 1$. Observe que h é a altura do potencial que cada uma das equações do nosso sistema tem de "vencer", no sentido de que os valores da equação de um mínimo ao outro mínimo, assim sendo, quanto maior for o valor de h , menos transições entre os dois valores de estabilidade teremos.

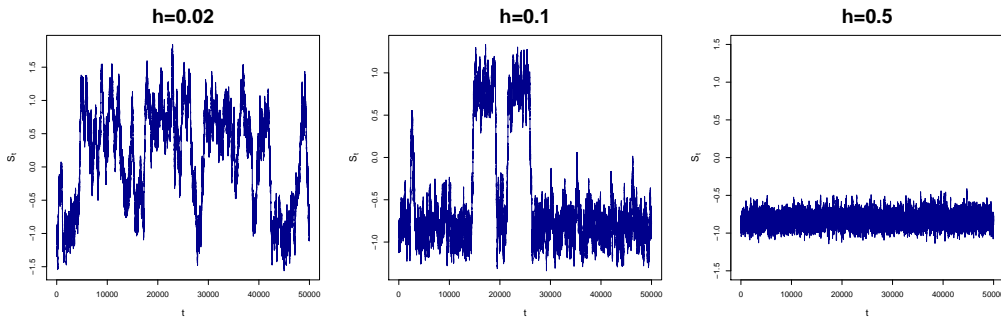


Figura 5.4: Simulação para valores de h e com $N = 100$, $\sigma = 1$ e $\theta = 10$

A figura(5.5) mostra a influência de N , número total de equações que compõem o sistema, na média empírica deste. Podemos observar que a medida que aumentamos o valor de N obtemos um sistema no qual ocorrem menos transição entre os valores de equilíbrio, pois todas as trajetórias acompanham o campo médio.

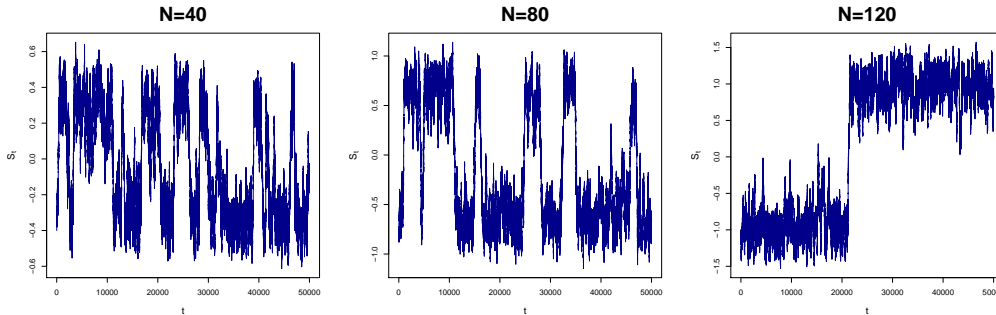


Figura 5.5: Simulação para valores de N e com $h = 0.1$, $\sigma = 1$ e $\theta = 10$

Sabemos que S_t^k neste sistema de equações diferenciais estocásticas não é estável, ou seja, o processo não se mantém variando em torno de uma mesma média, e que sua solução assintótica é biestável, ou seja, existem duas médias em torno das quais ela variam de forma alternada. Este fenômeno é o que chamamos de risco sistêmico e é o principal foco de estudo deste projeto.

Os autores apresentam o resultado para a situação em que $N \rightarrow \infty$. A solução do sistema converge para a equação de "Fokker-Planck", apresentada pelo seguinte teorema.

Teorema 5.3.1 *Assuma que $U(y) = y^3 - y$ e que X_0^N converge fracamente para a medida de probabilidade ν_0 . Então o processo X_t^N converge em distribuição para um processo determinístico $u(t, \cdot) \in C([0, T], M_1(\mathbb{R}))$, o qual é a única solução da equação de Fokker-Planck com condição inicial ν_0 .*

$$\frac{\partial}{\partial t} u = h \frac{\partial}{\partial y} [U(y)u] - \theta \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\int y u(t, u) dy - y \right] u \right\} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u. \quad (5.3)$$

5.4 Análise Numérica da Solução no Equilíbrio

Quando queremos entender o comportamento (estacionário) da densidade de $u(t, \cdot)$ estudamos a solução no equilíbrio da equação (5.3), que tem a seguinte expressão:

$$u_\xi^e(y) = \frac{1}{Z_\xi \sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\theta}}} \exp \left\{ -\frac{(y - \xi)^2}{2 \frac{\sigma^2}{2\theta}} - h \frac{2}{\sigma^2} V(y) \right\}, \quad (5.4)$$

onde Z_ξ é uma constante de normalização:

$$Z_\xi = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\theta}}} \exp \left\{ -\frac{(y - \xi)^2}{2 \frac{\sigma^2}{2\theta}} - h \frac{2}{\sigma^2} V(y) \right\}, \quad (5.5)$$

e para o equilíbrio ξ deve satisfazer a seguinte condição:

$$\xi = m(\xi) := \int y u_\xi^e(y) dy. \quad (5.6)$$

Logo encontrar as soluções no equilíbrio reduz-se a encontrar soluções para a equação (5.6). Para mais detalhes ver (Garnier, Papanicolaou, Yang, 2012).

Utilizando o algoritmo Metropolis Hastings para $h = 0.01$, $\theta = 6$, $\sigma = 1$, e $\xi \in \{-1, 0, 1\}$, temos as seguintes realizações de u_{-1} , u_0 e u_1 .

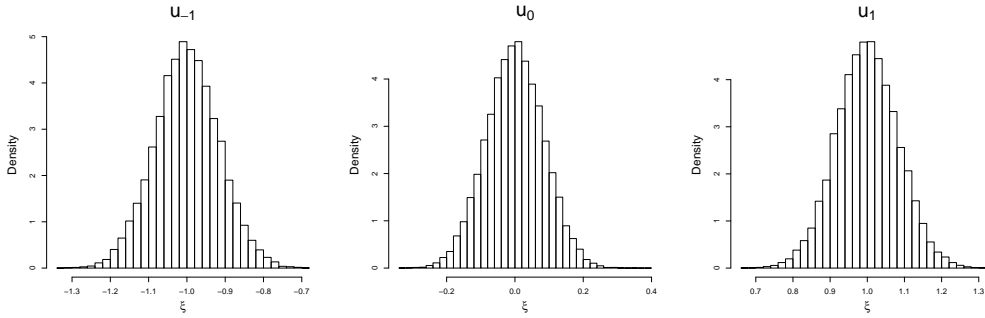


Figura 5.6: Simulação para valores de ξ e com $h = 0.01$, $\sigma = 1$ e $\theta = 6$

Dados valores de θ e h , existe um valor crítico $\sigma_c(h, \theta)$ tal que, para valores de $\sigma \geq \sigma_c$, a volatilidade do ativo domina a interação entre os ativos logo o sistema se comporta como N equações independentes e devido a simetria de $V(y)$, em um dado instante de tempo, alguns ativos se mantém entorno de -1 e outros em torno de 1 logo a média empírica do sistema permanece entorno de uma média 0 . Por outro lado, se $\sigma < \sigma_c$ a volatilidade σdW_t^k se torna menos importante e a interação entre os ativos passa a governar o sistema e devido à simetria de $V(y)$ o sistema se mantém em torno de duas diferentes médias $-\xi$ e $+\xi$ de maneira alternada. Os valores de σ_c e $\pm\xi$ são dados pela seguinte proposição.

Proposição 5.4.1 *Para valores pequenos de h , σ_c pode ser expandido como*

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\theta}{3}} + O(h), \quad (5.7)$$

e os valores de $\pm\xi$ são dados por

$$\pm\xi = \pm\sqrt{1 - 3\frac{\sigma^2}{2\theta}} \left(1 + h\frac{6}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2\theta}\right)^2 \frac{1 - 2(\sigma^2/2\theta)}{1 - 3(\sigma^2/2\theta)} \right) + O(h^2). \quad (5.8)$$

Considerando a média da distribuição u_ξ^e ,

$$m(\xi) = \int y u_\xi^e(y) dy.$$

Para $\sigma = 2 > \sigma_c$, $\theta = 1$, $h = 10$ obtemos o seguinte gráfico da função $m(\xi)$.

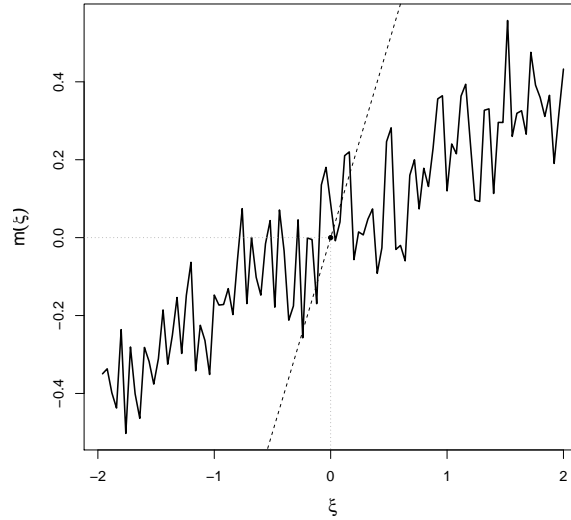


Figura 5.7: Média da distribuição assintótica $m(\xi)$, $h = 10$ e $\sigma = 2 > \sigma_c$

Observe que neste caso $\xi \neq m(\xi)$, $\forall \xi$.

Agora considere $\sigma = 0.5 < \sigma_c$, $\theta = 1$, $h = 10$, neste caso podemos ver que $\xi = m(\xi)$ para $\xi = -1, 0, 1$

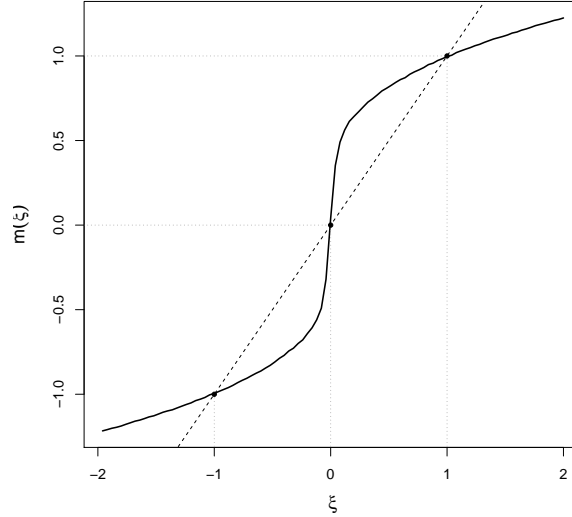


Figura 5.8: Média da distribuição assintótica $m(\xi)$, $h = 10$ e $\sigma = 0.5 < \sigma_c$

5.5 Conclusão

Nós utilizamos um sistema de equações diferenciais ordinários estocásticas, compostas por um potencial, um campo médio, e uma volatilidade i.i.d.. Demonstramos através de simulações o comportamento da média empírica da sistema e como esta é afetada por um valor σ_c que pode ser escrito em função de θ e h que determina se temos um sistema biestável ou estável. Exemplificamos também, através de simulações, o comportamento do sistema quando variamos apenas um parâmetro, N ou h ou σ ou θ , e conservamos os outros fixos. Concluimos que quanto maior o valor de h menor é o número de transições entre os estados e que quanto maior o N também, menor é o número de transições entre os estados.

Apêndice A

Prova (Existência de raiz positiva (Coeficiente de Lundberg)):

Seja $h(r) = \lambda + \pi r - \lambda m_Y(r)$, logo, $h(0) = 0$, pois:

$$\begin{aligned} m_Y(0) &= \mathbb{E}(e^{0Y}) \\ &= \mathbb{E}(e^0) \\ &= \mathbb{E}(1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Seja $m'_Y(r) = \mathbb{E}(Ye^{rY})$, então, $m'_0(r) = \mathbb{E}(Ye^{0Y}) = \mathbb{E}(Y)$ e tem-se que $h'(r) = \pi - \lambda m'_Y(r)$ e $h'(0) = \pi - \lambda \mathbb{E}(Y) = \pi - \lambda p_1 > 0$, por hipótese, ou seja, ela é crescente no ponto 0. Agora observe que:

$$\begin{aligned} h''(r) &= -\lambda m''_Y(r) \\ &= -\lambda \mathbb{E}(Y^2 e^{rY}) < 0 \end{aligned}$$

logo a função $h(r)$ é uma função côncava. E como $\lim_{r \rightarrow \gamma} h(r) = -\infty$, podemos concluir que $h(r) = 0$ tem duas soluções, a primeira é $r = 0$ e a outra é um número $\in \mathbb{R}_+$.

Prova (Solução Exata do processo de Ornstein-Uhlenbeck)): Seja

$Y_t = X_t e^{\theta t}$, logo temos:

$$g(t, x) = x e^{\theta t}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \theta x e^{\theta t}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = e^{\theta t}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) = 0,$$

então, pela fórmula de Itô temos,

$$\begin{aligned} dY_t &= \theta X_t e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX_t \\ &= \theta X_t e^{\theta t} dt + e^{\theta t} [\theta(\mu - X_t) dt + \sigma dB_t] \\ &= \theta \mu e^{\theta t} dt + \sigma e^{\theta t} dB_t. \end{aligned}$$

Integrando de 0 à t e substituindo Y_t por $X_t e^{\theta t}$ chegamos a:

$$\begin{aligned} X_t e^{\theta t} &= X_0 + \int_0^t \theta \mu e^{\theta s} ds + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dB_s \\ &= X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dB_s. \end{aligned}$$

Prova (Soluções exatas para as equações cenários base primeiro artigo): Tanto a equação dos ativos quanto a equação dos passivos são processos difusivos do tipo,

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

logo demonstrarei a solução exata apenas para o caso genérico acima. Seja $Y_t = \ln(X_t)$, logo temos:

$$g(t, x) = \ln(x)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) = -\frac{1}{x^2},$$

então pela fórmula de Itô temos,

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} (dX_t)^2 \\ &= \frac{1}{X_t} \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t - \frac{1}{2X_t^2} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t)^2 \\ &= \mu dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2X_t^2} (\mu^2 X_t^2 dt + 2\mu\sigma X_t^2 dt dB_t + \sigma^2 X_t^2 dB_t dB_t) \\ &= \mu dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t temos,

$$\begin{aligned} \int_0^t dY_t &= \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \int_0^t \sigma dB_t \\ Y_t &= Y_0 + t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma B_t, \end{aligned}$$

por fim, substituímos Y_t por $\ln(X_t)$ e chegamos a,

$$\begin{aligned}\ln(X_t) &= \ln(X_0) + t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma B_t, \\ X_t &= X_0 \exp \left\{ t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma B_t \right\}.\end{aligned}$$

Dessa forma temos que as soluções exatas para as equações 4.1 e 4.2 são dadas por:

$$\begin{aligned}A_{i,t} &= A_{i,0} \exp \left\{ t \left(\mu_{A_i} - \frac{\sigma_{A_i}^2}{2} \right) + \sigma_{A_i} B_{A_{i,t}} \right\} \quad i = 1, 2; \\ L_t &= L_0 \exp \left\{ t \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2} \right) + \sigma_L B_{L_t} \right\}.\end{aligned}$$

Apêndice B

Algoritmos implementados em R

Algoritmos Utilizados na Análise Numérica do Primeiro Artigo

```
library(sde)
library(fExtremes)
t <- seq(0.01,1,1/100)
N <- 50000
#Ativos Alto Risco
d <- expression(0.08)
s <- expression(0.2)
A1 <- sde.sim(X0=0.5,N=100,drift=d, sigma=s,M=N)
#plot(X,main="Ativos de alto Risco")
#write.table(A1,file="Ativos Alto Risco 2.txt",sep=" ")

#Ativos Baixo Risco
d <- expression(0.04)
s <- expression(0.08)
A2 <- sde.sim(X0=9.5,N=100,drift=d, sigma=s,M=N)
#plot(X,main="Ativos de alto Risco")
#write.table(A2,file="Ativos Baixo Risco 2.txt",sep=" ")

#Passivos
d <- expression(0.03)
s <- expression(0.05)
L <- sde.sim(X0=8,N=100,drift=d, sigma=s,M=N)
#plot(X,main="Passivos")
#write.table(L,file="Passivos 2.txt",sep=" ")

#Processo Reservas
C <- L-A1-A2
```



```

#Medidas de Risco
#Programa TVaR
CVaR <- function(x, alpha = 0.05, type = "sample", tail = c("lower",
  "upper"))
{
  x = as.matrix(x)
  tail = match.arg(tail)
  VaR = VaR(x, alpha, type, tail)
  if (type == "sample") {
    CVaR = NULL
  if (tail=="lower"){
    for (i in 1:ncol(x)) {
      X = as.vector(x[, i])
Z <- VaR[i] - X
      CVaR = c(CVaR, VaR[i] - 0.5 * mean((Z +
        abs(Z)))/alpha)
    }
  }else{
    for (i in 1:ncol(x)) {
      X = as.vector(x[, i])
Z <- VaR[i] - X
      CVaR = c(CVaR, VaR[i] - 0.5 * mean((Z -
        abs(Z)))/alpha)
    }
  }
  CVaR
}

#adicionando saltos
saltos <- function(lambda,L){
  LS <- matrix(0,nrow=101,ncol=N)
  for(i in 1:N){
    ns <- rpois (1,0.5)
    if(ns>0){
      LS1[,i]<-L[,i]
      pos <- sort(runif(ns,0,100)%/1)
      amp <- rlnorm(ns, meanlog = 1.05, sdlog = 0.05)
      for (j in 1:ns){
        LS[(pos[j]+1):101,i] <- LS[(pos[j]+1):101,i]+amp[j]
      }
    }
  }
}

```

```

        }
        else{
            LS[,i]<-L[,i]
        }
    }
    return(LS)
}

LS1<-matrix(0,101,N)
LS2<-matrix(0,101,N)
LS3<-matrix(0,101,N)
LS4<-matrix(0,101,N)
LS5<-matrix(0,101,N)

LS1<-saltos(0.01,L)
LS2<-saltos(0.02,L)
LS3<-saltos(0.03,L)
LS4<-saltos(0.04,L)
LS5<-saltos(0.05,L)

#Processo de reservas com Saltos
CS1 <- LS1-A1-A2
CS2 <- LS2-A1-A2
CS3 <- LS3-A1-A2
CS4 <- LS4-A1-A2
CS5 <- LS5-A1-A2

#Gráficos
grafico <- function(C,t,nome){
VaR1 <- numeric(100)
TVaR1 <- numeric(100)
VaR5 <- numeric(100)
TVaR5 <- numeric(100)
VaR10 <- numeric(100)
TVaR10 <- numeric(100)
for(i in 1:100){
    VaR1[i] <- VaR(C[i+1,], alpha = 0.001, type = "sample", tail = "upper")
    TVaR1[i] <- CVaR(C[i+1,], alpha = 0.001, type = "sample", tail = "upper")
    VaR5[i] <- VaR(C[i+1,], alpha = 0.005, type = "sample", tail = "upper")
    TVaR5[i] <- CVaR(C[i+1,], alpha = 0.005, type = "sample", tail = "upper")
    VaR10[i] <- VaR(C[i+1,], alpha = 0.01, type = "sample", tail = "upper")
}
}

```

```

    TVaR10[i] <- CVaR(C[i+1,], alpha = 0.01, type = "sample", tail = "upper")
}

pdf(nome)
plot(t,TVaR1,type="l",ylab="U.M.",ylim=c(-2,2.5))
lines(t,VaR1,type="l",col=2)
lines(t,TVaR5,type="l",col=3)
lines(t,VaR5,type="l",col=4)
lines(t,TVaR10,type="l",col=5)
lines(t,VaR10,type="l",col=6)
legend("topleft", legend=c(expression(TVaR[0.001]),expression(VaR[0.001]),
expression(TVaR[0.005]),expression(VaR[0.005]),expression(TVaR[0.01]),
expression(VaR[0.01])), lty=1, col=c(1,2,3,4,5,6), lwd=1, bty="n")
dev.off()

grafico(C,t,"medidasderiscocenariobase.pdf")
grafico(CS1,t,"medidasderiscocenariobase1.pdf")
grafico(CS2,t,"medidasderiscocenariobase2.pdf")
grafico(CS3,t,"medidasderiscocenariobase3.pdf")
grafico(CS4,t,"medidasderiscocenariobase4.pdf")
grafico(CS5,t,"medidasderiscocenariobase5.pdf")
}

```

Algoritmos Utilizados na Análise Numérica da Média Empírica do Sistema de EDEs do Segundo Artigo

```

T      <- 5000
delta <- 0.1
N      <- 100
sigma <- 1
h      <- 0.1
theta <- 6
t0     <- -1

sim.sde <- function(t0,T,delta,N,sigma,h,theta){
  sim<- matrix(t0,(T/delta)+1,N)
  for( i in 2:(T/delta+1)){
    for( j in 1:N){
      sim[i,j] <- sim[i-1,j]-h*(sim[i-1,j]^3-sim[i-1,j])*delta+
sigma*rnorm(1,0,sqrt(delta))+theta*(1/N*sum(sim[i-1,])-
sim[i-1,j])*delta
    }
  }
}

```

```

    }
  }
  return(sim)
}
xi <- function(h,sigma,theta){
  tau <- sigma^2/(2*theta)
  xi <- (1-3*tau)^0.5*(1+h*(6/sigma^2)*tau^2*((1-2*tau)/(1-3*tau)))
  return(xi)
}

X1 <- sim.sde(t0,T,delta,N,1,0.1,6)
Y1 <- numeric(T/delta+1)
for(i in 1 :length(Y1)){
  Y1[i]<-1/N*sum(X1[i,])
}
pdf("simulacaosegundoartigo1.pdf")
plot(Y1,type="l",xlab="t",ylab=expression(bar(S)[t]),col="darkblue",main=
substitute(sigma ==1),cex.main=2.5,cex.lab=1.25)
dev.off()

```

Algoritmos Utilizados na Análise Numérica da Solução no Equilíbrio do Segundo Artigo para o caso $\sigma = 2 > \sigma_c$

```

n=10000
sigma=2
theta=1
h=10
L=4
xi=(-L/2)+c(1:100)/100*(L)
meanxi=c(1:100)
M=c(1:100)%*%t(c(1:(n)))

xlimit=function(x,xi,sigma,theta,h){
  tau=(sigma^2)/(2*theta)
  xlimit=dnorm(x,xi,tau)*exp(-2*h/(sigma^2)* (((1/4)*x^4)-((1/2)*x^2)) )
  return(xlimit)
}
for (i in 1:100){
  M[i,1]=xi[i]
  for (j in 1:(n-1))
  {

```

```

x=rnorm(1,M[i,j],0.2)
a=xlimit(x,xi[i],sigma,theta,h)
b=xlimit(M[i,j],xi[i],sigma,theta,h)
if (b > 0) {alpha=min(a/b,1)}
else {alpha=1}
u=runif(1)
if( alpha < u)
{M[i,j+1]=M[i,j]}
else {M[i,j+1]=x}
}
meanxi[i]=mean(M[i,])
}
plot(xi,meanxi,"l")
d=c(1:100)
count=1
e=(xi-meanxi)*100
for (i in 1:100)
  if (abs(e[i]) < 0.05){d[count]=i
                        count=count+1}
#plot(xi[d[1:(count-1)]], meanxi[d[1:(count-1)]])
pdf("meanxi_supercritico.pdf")
plot(xi,meanxi,type="l",lwd=1.75,xlab=substitute(xi),
ylab=substitute(m(xi)),cex.lab=1.25)
lines(x=c(-3,3),y=c(-3,3),lty=2)
lines(x=c(-3,0),y=c(0,0),lty=3,col="darkgray")
lines(x=c(0,0),y=c(-3,0),lty=3,col="darkgray")
points(x=c(-1,0,1),y=c(-1,0,1),pch=20)
dev.off()

```

Algoritmos Utilizados na Análise Numérica da Solução no Equilíbrio do Segundo Artigo para o caso $\sigma = 0.5 < \sigma_c$

```

n=10000
sigma=0.5
theta=1
h=10
L=4
xi=(-L/2)+c(1:100)/100*(L)
meanxi=c(1:100)
M=c(1:100)%*%t(c(1:(n)))

```

```

xlimit=function(x,xi,sigma,theta,h){
  tau=(sigma^2)/(2*theta)
  xlimit=dnorm(x,xi,tau)*exp(-2*h/(sigma^2)* (((1/4)*x^4)-((1/2)*x^2)) )
  return(xlimit)
}
for (i in 1:100){
  M[i,1]=xi[i]
  for (j in 1:(n-1))
  {
    x=rnorm(1,M[i,j],0.2)
    a=xlimit(x,xi[i],sigma,theta,h)
    b=xlimit(M[i,j],xi[i],sigma,theta,h)
    if (b > 0) {alpha=min(a/b,1)}
    else {alpha=1}
    u=runif(1)
    if( alpha < u)
    {M[i,j+1]=M[i,j]}
    else {M[i,j+1]=x}
  }
  meanxi[i]=mean(M[i,])
}
plot(xi,meanxi,"l")
d=c(1:100)
count=1
e=(xi-meanxi)*100
for (i in 1:100)
  if (abs(e[i]) < 0.05){d[count]=i
                        count=count+1}
#plot(xi[d[1:(count-1)]], meanxi[d[1:(count-1)]])
pdf("meanxi_subcritico.pdf")
plot(xi,meanxi,type="l",lwd=1.75,xlab=substitute(xi),
ylab=substitute(m(xi)),cex.lab=1.25)
lines(x=c(-3,3),y=c(-3,3),lty=2)
lines(x=c(-3,-1),y=c(-1,-1),lty=3,col="darkdarkgray")
lines(x=c(-1,-1),y=c(-3,-1),lty=3,col="darkgray")
lines(x=c(-3,0),y=c(0,0),lty=3,col="darkgray")
lines(x=c(0,0),y=c(-3,0),lty=3,col="darkgray")
lines(x=c(-3,1),y=c(1,1),lty=3,col="darkgray")
lines(x=c(1,1),y=c(-3,1),lty=3,col="darkgray")
points(x=c(-1,0,1),y=c(-1,0,1),pch=20)
dev.off()

```

Referências Bibliográficas

- Artzner, P. & Delbaen, F. & Eber, J.M. & Heath, D. (1999). *Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance Vol. 9 No.3, 1999 pp. 203-228.
- Artzner, P. & Delbaen, F. & Koch-Medina, P. (2009). *Risk Measures and Efficient use of Capital*.
- Billio, M. & Getmansky, M. & Lo, A.W. & Pelizzon, L. (2010). *Econometric measures of systemic risk in the finance and insurance sectors*. NBER Working Paper 16223, NBER.
- Bisias, D. & Flood, M. & Lo, A. & Valavanis, S. (2012). *EA Survey of Systemic Risk Analytics*. [bigdata.csail.mit.edu/sites/bigdata/files/sites/Lo abstract and paper - Systemic_ OFR1_ final.pdf](http://bigdata.csail.mit.edu/sites/bigdata/files/sites/Lo_abstract_and_paper_Systemic_OFR1_final.pdf).
- Eling, M. & Toplek, D.(2009). *Modeling and management of nonlinear dependencies: copulas in dynamic financial analysis*. The Journal of Risk and Insurance Vol. 76 No.3, 2009 pp. 651-681.
- Embrechts, P. & McNeil, F. & Straumann, A.(2002). *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press, pp. 176-223.
- Garnier, J. & Papanicolaou, G. & Yang,T.(2012). *Large Deviations for a Mean Field Model of Systemic*.
- Kloeden, P.E. & Platen, E. & Schurz,H.(1995). *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. Springer.
- Melo, E.F.L. & Neves, C. R.(2012) *Solvência no Mercado de Seguro e Previdência Coletânea de Estudos 1ª ed*. FUNENSEG.
- Mikosch, T. (2009). *Non-Life Insurance Mathematics: an introduction with the Poisson Process 2nd ed*. Springer.

- Neves, C.R.(2010). *Solvência II no Mercado Brasileiro de Seguros: Requisito de Capital de Solvência*.
- Øksendal, B.K. (2003). *Stochastic differential equations: an introduction with applications 6th ed.* Springer.
- Schmeiser, H. & Siegel, C. & Wagner, J.(2012). *The risk of model misspecification and its impact on solvency measurement in the insurance sector*. The Journal of Risk Finance Vol. 13 No.4, 2012 pp. 285-308.
- Wüthrich, M.V. & Bühlmann, H. & Furrer, H. (2010). *Market-Consistent Actuarial Valuation 2nd ed.* Springer.
- Wüthrich, M.V. & Merz, M.(2013) *Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance 1st ed.* Springer.