

# Percolação em $\infty + 1$ dimensões

Rachel Abrahão Ribeiro

Orientador: Roger William Câmara Silva

25 de março de 2015

# *Resumo*

Nesta dissertação estudamos percolação em um grafo cuja quantidade de aglomerados abertos infinitos possui três fases não-triviais, correspondentes à existência de nenhum, infinitos ou um único aglomerado. Esse grafo, denominado  $\mathbb{L}$ , é construído a partir do produto direto de uma árvore regular  $\mathbb{T}$  com a linha  $\mathbb{Z}$ , no qual cada elo da árvore está aberto com probabilidade  $\tau$  e cada elo da linha, com probabilidade  $\lambda$ . Todo o trabalho desenvolvido aqui se constitui de uma análise específica do artigo *Percolation in  $\infty + 1$  Dimensions*, de Grimmett e Newman, cujo objetivo principal é definir como se comportam as curvas que dividem as três regiões, representativas das três fases no quadrado unitário, a partir dos possíveis valores do par ordenado  $(\tau, \lambda)$ .

# *Abstract*

In this work we study percolation on a graph for which the number of infinite open clusters presents three non-trivial phases, corresponding to the existence of zero, infinite or a unique cluster. This graph, called  $\mathbb{L}$ , is the direct product of a regular tree  $\mathbb{T}$  and the line  $\mathbb{Z}$ , in which each “tree” edge is open with probability  $\tau$  and each “line” edge with probability  $\lambda$ . All work developed here is a specific analysis of the article *Percolation in  $\infty + 1$  Dimensions*, by Grimmett e Newman, whose the main purpose is define the behavior of the curves that divide the three regions, representative of three phases in the unit square, from the possible values of the ordered pair  $(\tau, \lambda)$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Modelo de percolação de elos independentes</b>	<b>8</b>
2.1	Percolação em $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	8
2.1.1	Percolação Isotrópica . . . . .	8
2.1.2	Percolação Anisotrópica em $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	18
2.2	Percolação nas árvores $k + 1$ regulares . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Modelo de percolação de elos independentes no grafo <math>\mathbb{L}</math></b>	<b>29</b>
3.1	A construção do grafo $\mathbb{L}$ . . . . .	29
3.1.1	Relação entre $\mathbb{L}$ e $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	30
3.2	Estudo de percolação no grafo $\mathbb{L}$ . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Discussão dos Resultados</b>	<b>62</b>
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>70</b>
<b>6</b>	<b>Anexos</b>	<b>71</b>
6.1	Anexo A: . . . . .	71
6.2	Anexo B: . . . . .	73

# Capítulo 1

## Introdução

Muitos sistemas do mundo real têm sua estrutura formada por uma rede complexa que pode ser modelada através de um grafo no qual os vértices correspondem às componentes elementares da rede e as arestas entre os vértices denotam as relações existentes entre tais elementos. Um exemplo da aplicação desses grafos está no mapeamento de redes de computadores em que, cada unidade terminal é considerada um vértice e cada ligação entre essas unidades é considerada uma aresta do grafo. Diversos outros exemplos podem ser citados, como unidades de telefonia, radiofrequência, etc.

Devido à diferença entre a natureza das ligações que ocorrem em cada sistema do mundo real, que pode ser determinística ou aleatória, costuma-se dividir o conjunto de grafos em dois tipos: grafos simples e aleatórios. A principal diferença entre eles é, como o próprio nome diz, a aleatoriedade das arestas. Nos grafos aleatórios, ao contrário do que acontece nos grafos simples, as arestas não são fixas, mas sim determinadas a partir de um experimento aleatório qualquer. Diferentes modelos de grafos aleatórios produzem diferentes distribuições de probabilidade nos grafos. E, sendo esse o objeto base de nosso estudo, vale a pena lembrar que o primeiro modelo de grafo aleatório, criado pelos matemáticos húngaros Paul Erdős e Alfred Rényi [7], dizia que um grafo aleatório se constituía por uma estrutura de  $n$  vértices em que cada par de vértices podia estar conectado através de uma aresta com certa probabilidade  $p$ . Mais especificamente, segundo esse modelo, um grafo aleatório devia ser gerado a partir dos seguintes passos: para cada par de vértices no conjunto de todos os pares possíveis, realiza-se um experimento aleatório a fim de decidir a existência de aresta ou não. Tomando como exemplo o lançamento de uma moeda e considerando que essa moeda apresente probabilidade  $p$  de resultar cara, para cada par de vértices lança-se a moeda e se o resultado for cara, coloca-se uma aresta ligando os dois vértices, enquanto que se o resultado for coroa, não se coloca a aresta. Assim, após as  $\frac{n(n-1)}{2}$  realizações do experimento têm-se o que é denominado por modelo binomial de grafo aleatório.

Uma das áreas que mais tem tido atenção nas últimas duas décadas é a teoria da percolação, que segue idéias muito próximas de um modelo binomial de grafo aleatório no caso em que o número de vértices do grafo, também chamados sítios, é infinito. Nesse caso, porém, a probabilidade  $p$  não define exatamente a existência da aresta, mas sim sua condição, *aberta* ou *fechada*.

A teoria da percolação foi proposta pela primeira vez em 1957 por Simon Broadbent e John Hammersley [8] como um modelo de passagem de fluido em meio poroso, em que o meio é constituído de poros e canais que os ligam. Eles imaginaram uma estrutura representativa do meio, com disposição espacial regular, na qual os poros eram simbolizados por sítios (ou vértices) e os canais, por elos. Supuseram também que cada um desses canais estivesse aberto à passagem do fluido de forma aleatória e independentemente dos demais. Por fim, definiram um parâmetro de densidade  $p$ , que representa a probabilidade de cada canal estar aberto. Como exemplos podemos imaginar o meio como sendo um tipo de solo recebendo água da chuva (fluido) ou uma região povoada onde está ocorrendo a difusão de uma epidemia.

A grande diferença entre esse novo modelo e outros modelos probabilísticos mais antigos, tais como passeios aleatórios, é que não é mais o movimento que é aleatório num meio fixo. Agora, trata-se de um movimento fixo num meio aleatório cujas propriedades dependem do parâmetro de densidade  $p$ .

Nessa nova proposta, a questão básica é a ocorrência ou não de percolação, ou seja, é a dúvida quanto à existência de caminhos que atravessem o meio e que sejam formados apenas por canais abertos. Isso permitiria a passagem do fluido através do meio. Porém, como em situações reais o meio é geralmente constituído por uma grande quantidade de poros e canais microscópicos, tal como numa situação onde queremos verificar a possibilidade da passagem de um gás através de uma rocha, é comum utilizarmos a idéia de infinito para conseguirmos representar o que seria a passagem do fluido através do meio. Assim, descrevemos a ocorrência de percolação no modelo proposto por Broadbent e Hammersley como a existência de pelo menos um aglomerado aberto infinito, ou, mais precisamente, como a existência de pelo menos um aglomerado infinito de sítios, no qual existem caminhos de elos abertos que os conectam.

Se seguirmos um pouco mais adiante, passamos a um segundo interesse da teoria da percolação, que tem como pretensão estender o conhecimento sobre a ocorrência ou não de percolação para uma informação mais ampla: a distribuição de aglomerados abertos infinitos no grafo. À quantidade de aglomerados abertos infinitos em cada grafo associamos a letra  $N$ . E o objetivo, então, passa a ser averiguar o comportamento de  $N$  em função do parâmetro de densidade  $p$  do modelo. Em uma dimensão o modelo é trivial e não há aglomerados abertos infinitos a não ser quando  $p = 1$ . Ou seja,  $N = 0$  em quase toda

realização do meio. Em  $\mathbb{Z}^2$ , Broadbent e Hammersley mostraram que existe uma densidade crítica não-trivial (estritamente entre zero e um), abaixo da qual não há aglomerados abertos infinitos em quase toda realização do meio e acima da qual há um único aglomerado aberto infinito em quase toda realização do meio. Ou seja, em duas dimensões, ou  $N = 0$  ou  $N = 1$  quase certamente. A essa mudança que ocorre ao se passar de um estado em que existem  $x$  aglomerados abertos infinitos para um estado em que existem  $y$  aglomerados abertos infinitos, onde  $x \neq y$ , chamamos transição de fase.

Nos últimos vinte anos, o mundo acadêmico tem voltado muito de sua atenção para modelos de percolação como o definido acima e, com isso, muitos avanços tem sido obtidos nessa área. Isso faz com que a teoria matemática da percolação venha se firmando hoje em dia como uma das mais ativas e influentes subáreas da teoria da probabilidade.

O nosso objetivo nessa dissertação é estudar o problema de percolação num grafo específico  $\mathbb{L}$ , construído a partir do produto direto de uma árvore regular  $\mathbb{T}$  com a linha  $\mathbb{Z}$ , no qual cada elo da árvore está aberto com probabilidade  $\tau$  e cada elo da linha, com probabilidade  $\lambda$ . Em particular, analisaremos o artigo *Percolation in  $\infty + 1$  Dimensions*, de Grimmett e Newman [1], a fim de estudar o comportamento da quantidade  $N$  de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$ , a partir dos possíveis valores que os parâmetros do modelo,  $\tau$  e  $\lambda$ , podem assumir.

A relevância desse trabalho se encontra no fato que, diferentemente do que ocorre nos grafos já muito estudados, como  $\mathbb{Z}^d$ , no grafo  $\mathbb{L}$  não há apenas uma transição de fase. Vamos ver que, dependendo dos valores dos parâmetros  $\tau$  e  $\lambda$ , o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  pode ser igual a zero, a infinito ou a um. E isso nos garante um grafo que apresenta dois momentos distintos de transição de fase.

Para isso, no capítulo 2, introduziremos formalmente o modelo de percolação em  $\mathbb{Z}^d$  e o modelo nas árvores  $k + 1$  regulares e apresentaremos importantes definições e resultados desses modelos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

No capítulo 3, introduziremos o grafo  $\mathbb{L}$  e apresentaremos e demonstraremos os resultados obtidos por Grimmett e Newman relativos à percolação no mesmo. Discutiremos os resultados no capítulo 4. Por fim, apresentaremos as nossas conclusões no capítulo 5.

# Capítulo 2

## Modelo de percolação de elos independentes

Neste capítulo introduziremos o modelo de percolação independente de sítios. Parte da notação utilizada nesta dissertação também é introduzida nesse capítulo, assim como alguns dos principais resultados da teoria de percolação que serão utilizados. A referência básica utilizada para o que será descrito aqui é o livro *Percolation*, de Grimmett [2].

### 2.1 Percolação em $\mathbb{Z}^d$

#### 2.1.1 Percolação Isotrópica

Considere o grafo ou a rede hipercúbica em  $d$  dimensões  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  em que  $\mathbb{Z}^d$  é o conjunto de sítios da rede e  $\mathbb{E}^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d; \exists! i \text{ tal que } |x_i - y_i| = 1 \text{ e } |x_j - y_j| = 0, \forall j \neq i\}$  é seu conjunto de elos. Por motivos de simplificação de notação, ao longo do texto, nos referiremos ao grafo  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  simplesmente por  $\mathbb{Z}^d$ .

A cada elo de  $\mathbb{E}^d$  associamos uma variável aleatória  $X_e$  que tem distribuição Bernoulli de parâmetro  $p$ . Essa associação é feita de modo independente para cada elo. Se  $X_e = 1$  dizemos que o elo  $e$  está aberto e se  $X_e = 0$  dizemos que o elo  $e$  está fechado. Assim temos,

$\forall e \in \mathbb{E}^d$

$$\mu_e(X_e = 1) = p = 1 - \mu_e(X_e = 0), \quad p \in [0, 1].$$

O espaço de probabilidade para esse modelo é  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ ,  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos, ou seja, a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos que dependem apenas de elos de subconjuntos finitos de  $\mathbb{E}^d$ , e  $\mathbb{P}_p$  é a medida produto, isto é,

$$\mathbb{P}_p = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e.$$

A um elemento do espaço amostral  $\omega \in \Omega$ , onde  $\omega = (X_e, e \in \mathbb{E}^d)$ , denominamos uma configuração.

**Definição 2.1.** *Um conjunto de elos de  $\mathbb{E}^d$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $n \geq 1$ , onde  $e_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , será dito um caminho auto-evitante se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  forem distintos e  $y_i = x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Um caminho será dito aberto na configuração  $\omega$  se todos os seus elos estiverem abertos, isto é, se  $X_{e_i}(\omega) = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

**Definição 2.2.** *Diremos que dois sítios da rede,  $x$  e  $y$ , estão conectados em  $\omega$  se nessa configuração existir um caminho aberto  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  com  $x_1 = x$  e  $y_n = y$ . A notação utilizada para conexão será  $x \leftrightarrow y$ .*

Vemos que a conectividade é uma relação de equivalência e às classes de equivalência em que se dividem os sítios chamaremos aglomerados. Seja então  $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\}$ . Assim,  $C_x(\omega)$  será chamado o aglomerado aberto do sítio  $x$  na configuração  $\omega$ .

O principal interesse da teoria da percolação é estudar a distribuição da variável aleatória  $|C|$  definida como a cardinalidade do aglomerado da origem, que pode assumir valores de 1 a  $\infty$ . Mais especificamente, procura-se investigar quais são as condições que deve-se impor ao parâmetro  $p$  para gerar probabilidade positiva de existência de aglomerados de tamanho infinito na rede. A probabilidade de existência de aglomerados infinitos na origem é denotada por

$$\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p(\omega \in \Omega : |C(\omega)| = \infty).$$

Já se sabe de [2] que  $\theta(p)$  é não decrescente em  $p$  e isso é claramente intuitivo já que um aumento no valor de  $p$  conduz geralmente a um aumento no número de arestas abertas em  $\mathbb{Z}^d$ , aumentando assim o comprimento de caminhos abertos que saem da origem. Além disso, sabe-se também que quando  $p = 0$  não há aglomerado aberto em  $\mathbb{Z}^d$  pois todos os elos se encontram fechados com probabilidade um e, quando  $p = 1$ , todos os elos se encontram abertos e, por essa razão, o próprio  $\mathbb{Z}^d$  se transforma num aglomerado aberto infinito único.

Como  $\theta(p)$  é não decrescente em  $p$ , faz sentido definir o ponto crítico

$$p_c := \sup \{p : \theta(p) = 0\},$$

e, então, temos que,

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c \end{cases}.$$

Observe que em  $\mathbb{Z}$  não ocorre percolação, a menos que  $p = 1$ , isto é,  $p_c(\mathbb{Z}) = 1$ . Para ver isso note que  $\mathbb{P}_p(|C| = n) = p^n$ . Além disso,  $\{|C| = n\} \uparrow \{|C| = \infty\}$ . Logo,

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(|C| = n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 \Leftrightarrow p < 1.$$

Em duas ou mais dimensões, no entanto, o ponto crítico não é encontrado de forma tão trivial. De qualquer maneira, para esse caso temos o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista em [2].

**Teorema 2.3.** *Em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ ,  $p_c \in (0, 1)$ .*

Um outro resultado que nos será útil diz que se algum vértice  $v$  de um grafo conexo qualquer  $G$  possui probabilidade estritamente positiva de pertencer a um aglomerado aberto infinito, então todos os vértices de  $G$  também possuem probabilidade estritamente positiva de pertencer a um aglomerado aberto infinito.

**Teorema 2.4.** *Se  $\theta_v(p) > 0$  para algum  $v$ , então  $\theta_y(p) > 0 \quad \forall y \in V(G)$ , onde  $G$  é um grafo conexo.*

*Demonstração.* Para nos convenceremos disso, basta percebermos que

$$\begin{aligned} \theta_y(p) &= \sum_{k \in V(G)} \mathbb{P}_p(y \in \text{aglomerado infinito} / k \in \text{aglomerado infinito}) \theta_k(p) \geq \\ &\geq \mathbb{P}_p(y \in \text{aglomerado infinito} / v \in \text{aglomerado infinito}) \theta_v(p) = \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow v) \theta_v(p) > 0. \end{aligned}$$

□

O teorema abaixo nos diz que em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , se ocorre percolação na origem com probabilidade positiva então existe,  $\mathbb{P}_p$ -quase certamente, algum aglomerado aberto infinito em algum vértice no grafo.

**Teorema 2.5.** *Existe aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , se, e somente se,  $\theta(p) > 0$ .*

*Demonstração.* Se definirmos  $\Psi(p) = \mathbb{P}_p \left( \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{|C_x(\omega)| = \infty\} \right)$ , sabemos, então, que,

$$\Psi(p) = \mathbb{P}_p \left( \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{|C_x(\omega)| = \infty\} \right) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p (|C_x(\omega)| = \infty) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \theta(p).$$

Logo, se  $\theta(p) = 0$ , então,  $\Psi(p) = 0$ . Por outro lado, veja que

$$\Psi(p) \geq \mathbb{P}_p (|C(\omega)| = \infty) = \theta(p).$$

Logo, se  $\theta(p) > 0$ , então,  $\Psi(p) > 0$ .

Como o evento {existe aglomerado aberto infinito} não depende de nenhuma quantidade finita das variáveis aleatórias  $\{X_e\}_{e \in \mathbb{E}^d}$  e essas variáveis são independentes, temos, pela Lei 0 – 1 de Kolmogorov, que  $\Psi(p) = 1$ .  $\square$

Além desses resultados, sabe-se que, em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , se existir aglomerado aberto infinito, então este é único quase certamente. Ou seja, se definirmos

$$N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$$

$$N(\omega) = \text{número de aglomerados abertos infinitos em } \omega,$$

e se  $p$  é tal que  $p > p_c$ , então,  $\mathbb{P}_p(\omega \in \Omega; N(\omega) = 1) = 1$ .

Assim, a importância dos resultados acima está no fato de que, em duas ou mais dimensões, existem duas fases distintas do processo de percolação. Na fase subcrítica, quando  $p < p_c$ , cada vértice de  $\mathbb{Z}^d$  está em um aglomerado aberto finito quase certamente. Desta forma, todos os aglomerados abertos são finitos com probabilidade 1. No entanto, na fase supercrítica, quando  $p > p_c$ , cada vértice está, com probabilidade positiva no único aglomerado aberto infinito existente.

É válido ressaltar que, como  $N$  é uma função invariante por translação em  $\Omega$ , então, por ergodicidade, sabemos que existe  $k \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$  tal que  $\mathbb{P}_p(\omega \in \Omega : N(\omega) = k) = 1$ . Ou seja,  $N$  é quase certamente igual a uma constante  $k$  e evidentemente o valor de  $k$  depende da escolha de  $p$  (teorema 1, página 408 de [12]). Utilizaremos esse fato na prova do teorema abaixo, cuja demonstração pode ser obtida em [2].

**Teorema 2.6. *Unicidade do aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{Z}^d$ .***

*Se  $p$  é tal que  $\theta(p) > 0$ , então  $\mathbb{P}_p(\omega \in \Omega : N(\omega) = 1) = 1$ .*

*Demonstração.* Se  $p = 0$ , não existirá nenhum elo aberto em  $\mathbb{Z}^d$  e obviamente será impossível a ocorrência de qualquer aglomerado aberto infinito, logo  $\theta(p) = 0$ . Caso  $p = 1$ , todos os elos de  $\mathbb{Z}^d$  estarão abertos e o único aglomerado aberto infinito será o próprio  $\mathbb{Z}^d$ . Esses são os casos triviais.

Suponhamos a partir disso, então,  $0 < p < 1$  e determinemos  $N$  como o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $B$  como um conjunto finito de vértices e  $\mathbb{E}_B$  como o conjunto de elos de  $\mathbb{Z}^d$  que têm algum de seus extremos em vértices de  $B$ .

A partir daí, vamos definir  $N_B(0)$  como o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{Z}^d$  quando todas arestas em  $\mathbb{E}_B$  estão fechadas,  $N_B(1)$  como o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{Z}^d$  quando todas as arestas em  $\mathbb{E}_B$  estão abertas e  $M_B$  como o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{Z}^d$  que interceptam  $B$ .

Chegada a discussão a esse ponto, temos então que, definida a probabilidade  $p$  de que qualquer aresta em  $\mathbb{Z}^d$  esteja aberta, o número de aglomerados abertos infinitos será igual a um valor preciso  $k$  com probabilidade 1. Poderíamos até permitir que o nosso raciocínio intuitivo desse alguns passos mais adiante para concluir que, até um certo ponto  $p_0$ , quanto maior o valor de  $p$ , maior seria também o valor de  $k$ . E a partir de  $p_0$ , quanto maior o valor de  $p$ , menor seria o valor de  $k$ , pois uma maior quantidade de elos abertos faria com que os aglomerados abertos infinitos comesçassem a se unir, reduzindo, assim, o número total de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{Z}^d$ . Esse raciocínio, porém, é falho e mostraremos que, independentemente do valor de  $p$  escolhido,  $k$  sempre satisfará  $k \in \{0, 1, \infty\}$ . Para isso, suponhamos primeiramente que  $2 \leq k < \infty$ .

Nesse caso, como cada configuração em  $\mathbb{E}_B$  tem probabilidade estritamente positiva, segue da quase certa constância de  $N$  citada anteriormente que

$$\mathbb{P}_p(N_B(0) = N_B(1) = k) = 1.$$

Para ver isso, note que  $\mathbb{P}_p(N_B(0) = k) = \mathbb{P}_p(N = k/B \text{ fechado}) = \frac{\mathbb{P}_p(N=k \cap B \text{ fechado})}{\mathbb{P}_p(B \text{ fechado})} = 1$  e que  $\mathbb{P}_p(N_B(1) = k) = \mathbb{P}_p(N = k/B \text{ aberto}) = \frac{\mathbb{P}_p(N=k \cap B \text{ aberto})}{\mathbb{P}_p(B \text{ aberto})} = 1$ , pois  $\mathbb{P}_p(\omega \in \Omega : N(\omega) = k) = 1$ .

Voltando à suposição de que  $2 \leq k < \infty$  e ao raciocínio anterior, já temos provado agora que  $\mathbb{P}_p(N_B(0) = N_B(1) = k) = 1$ . Porém,  $N_B(0) = N_B(1)$  se, e somente se,  $B$  intercepta no máximo um aglomerado aberto infinito (e aqui é onde usamos a hipótese de que  $k < \infty$ ). Afinal se  $B$  intercepta mais de um aglomerado aberto infinito quando está todo fechado, ao abrirmos todos os elos de  $B$ , todos esses aglomerados abertos infinitos se juntarão num só e, assim,  $N_B(0)$  não será igual a  $N_B(1)$ . Dessa forma, chegamos, então, à conclusão de que  $\mathbb{P}_p(M_B \geq 2) = 0$ .

Obviamente  $M_B$  é não-decrescente em  $B$ , pois quanto maior for  $B$ , maior será o número de aglomerados abertos infinitos que serão interceptados. E é claro também que, à medida

que  $B$  cresce para  $\mathbb{Z}^d$ , o número de aglomerados abertos infinitos interceptados por  $B$  cresce para o número total de aglomerados abertos infinitos, ou seja

$$M_B \longrightarrow N \text{ quando } B \uparrow \mathbb{Z}^d.$$

A partir daí, tomamos  $B$  como  $S(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \delta(0, x) \leq n\}$  e tomamos o limite quando  $n \longrightarrow \infty$  para encontrar

$$\mathbb{P}_p(N \geq 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(M_{S(n)} \geq 2) = 0,$$

o que implica que  $k \leq 1$  quase certamente, em contradição com a hipótese de que  $2 \leq k < \infty$ . Essa parte da demonstração nos permite afirmar, então, que os únicos valores admissíveis para  $k$  são zero, um ou infinitos. Mas como ainda queremos provar que  $k$  sempre satisfará  $k \in \{0, 1\}$ , vamos então supor agora que  $k = \infty$ .

Chamamos um vértice  $x$  de trifurcação se:

- (a)  $x$  reside em um aglomerado aberto infinito;
- (b) há exatamente três arestas abertas incidentes em  $x$  e;
- (c) a eliminação de  $x$  e de suas três arestas abertas incidentes partem esse aglomerado infinito em exatamente três aglomerados infinitos disjuntos e nenhum aglomerado finito.

Denominaremos  $T_x$  o evento  $\{x \text{ é uma trifurcação}\}$ .

Sabemos que  $\mathbb{P}_p(T_x)$  é constante para todo  $x$  e, portanto,

$$\mathbb{P}_p(T_0) = \frac{1}{|B(n)|} E_p \left( \sum_{x \in B(n)} I_{T_x} \right). \quad (2.1.1)$$

Mostraremos agora que, sob a hipótese de que  $k = \infty$ ,  $\mathbb{P}_p(T_0) > 0$ .

Para isso, vamos definir  $M_B(0)$  como o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{Z}^d$  que interceptam  $B$  quando todas as arestas em  $B$  estão fechadas.

Uma vez que  $M_B(0)$  será sempre maior ou igual a  $M_B$ , temos que  $\mathbb{P}_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq \mathbb{P}_p(M_{S(n)} \geq 3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(N \geq 3) = 1$ . Note que estamos levando em conta a hipótese acima porque estamos considerando que é igual a um a probabilidade de que  $k = \infty$  (e, consequentemente é também igual a um a probabilidade de que  $N \geq 3$ ).

Então, existe  $n_0$  tal que  $\mathbb{P}_p(M_{S(n_0)}(0) \geq 3) \geq \frac{1}{2}$  e fazemos  $B = S(n_0)$ .

Note que:

- (a) O evento  $\{M_B(0) \geq 3\}$  é independente dos estados dos elos em  $\mathbb{E}_B$ .  
 (b) Se o evento  $\{M_B(0) \geq 3\}$  ocorre, então existem  $x, y, z$  residentes em distintos aglomerados abertos infinitos de  $\mathbb{E}^d - \mathbb{E}_B$ .

É fácil ver que existem caminhos que ligam  $x, y, z$  à origem, de maneira que:

- (i) A origem é o único vértice comum para quaisquer dois caminhos;  
 (ii) Cada um toca exatamente um vértice residente na fronteira  $\partial B$ .

Para ilustração da situação suponha que, na figura abaixo, somente se encontrem os vértices  $x$  pertencentes a  $S(n)$ , onde  $S(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \delta(0, x) \leq n\}$ , e três aglomerados abertos infinitos que interceptam  $S(n)$ .

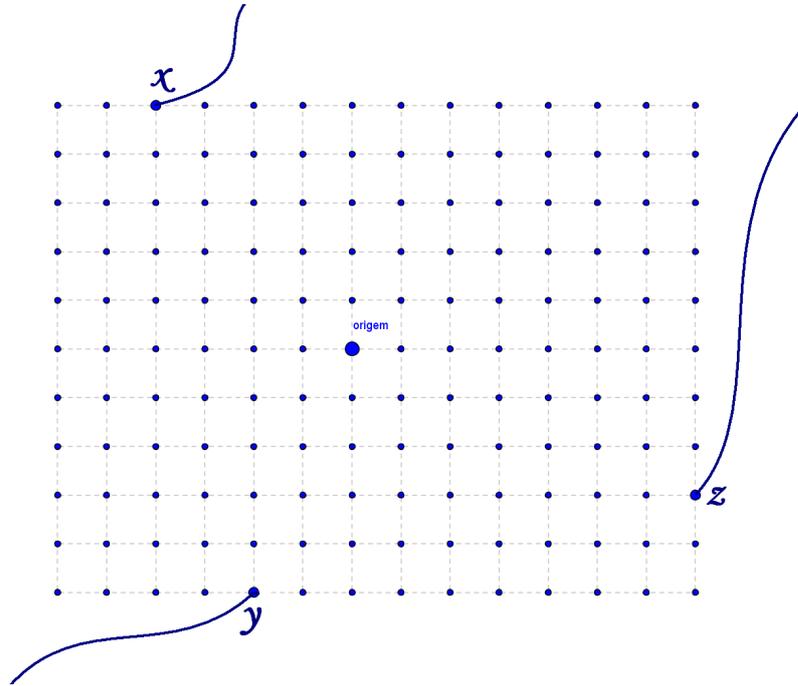


Figura 2.1:  $S(n)$  interceptando 3 aglomerados abertos infinitos.

Seja  $J_{x,y,z}$  o evento  $\{\text{todos elos nesses caminhos estão abertos e todos os outros elos em } \mathbb{E}_B \text{ estão fechados}\}$ .

Como  $B$  é finito:  $\mathbb{P}_p(J_{x,y,z}/M_B(0) \geq 3) \geq (\min\{p, 1-p\})^R > 0$ , onde  $R$  é o número de elos em  $\mathbb{E}_B$ .

Então,  $\mathbb{P}_p(0 \text{ é uma trifurcação}) \geq \mathbb{P}_p(J_{x,y,z}/M_B(0) \geq 3)\mathbb{P}_p(M_B(0) \geq 3)$ , pois  $J_{x,y,z}$  é apenas uma das combinações de caminhos que tornam a origem uma trifurcação, ou seja,

$$\{J_{x,y,z} \cap (M_B(0) \geq 3)\} \subset \{T_0\} = \{0 \text{ é uma trifurcação}\}.$$

E, pelo que já vimos acima,

$$\mathbb{P}_p(T_0) \geq \mathbb{P}_p(J_{x,y,z}/M_B(0) \geq 3)\mathbb{P}_p(M_B(0) \geq 3) \geq \frac{1}{2}(\min\{p, 1-p\})^R > 0. \quad (2.1.2)$$

Como  $\mathbb{P}_p(T_0) > 0$ , segue de (2.1.1) que o número médio de trifurcações dentro de  $B(n)$  é da ordem  $|B(n)| = n^d$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

No entanto, selecione uma trifurcação  $t_1$  de  $B(n)$  e escolha um vértice  $y_1 \in \partial B(n)$  que satisfaça  $t_1 \leftrightarrow y_1$  em  $B(n)$ . Depois selecione uma nova trifurcação  $t_2$  em  $B(n)$ . Podemos ver, utilizando a definição do termo *trifurcação*, que existe  $y_2 \in \partial B(n)$  tal que  $y_2 \neq y_1$  e  $t_2 \leftrightarrow y_2$  em  $B(n)$ . E, assim, podemos continuar selecionando a cada momento uma nova trifurcação  $t_k \in B(n)$  e um novo vértice  $y_k \in \partial B(n)$ . Se existem  $\tau$  trifurcações em  $B(n)$ , então obtemos  $\tau$  vértices distintos em  $\partial B(n)$ . Logo,  $|\partial B(n)| \geq \tau$ . Porém,  $E_p(\tau)$  é comparável a  $|B(n)|$  e isso é uma contradição para  $n$  grande, uma vez que  $|\partial B(n)|$  cresce em  $n^{d-1}$  e  $|B(n)|$  cresce em  $n^d$ .

Segue uma versão rigorosa do argumento exposto no parágrafo anterior.

Seja  $Y$  um conjunto finito com  $|Y| \geq 3$ . Definimos uma 3-partição  $\Pi = \{P_1, P_2, P_3\}$  de  $Y$  como uma partição de  $Y$  em exatamente três conjuntos não-vazios  $P_1, P_2$  e  $P_3$ .

Dizemos que  $\Pi = \{P_1, P_2, P_3\}$  e  $\Pi' = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$  são compatíveis se  $P_1 \supseteq P'_2 \cup P'_3$  (ou  $P'_1 \supseteq P_2 \cup P_3$ ).

Uma coleção  $\wp$  de 3-partições é dita compatível se cada par distinto é compatível.

**Lema:** Se  $\wp$  é uma família compatível de 3-partições distintas de  $Y$ , então

$$|\wp| \leq |Y| - 2. \quad (2.1.3)$$

*Demonstração.* Por indução em  $|Y|$ , notando primeiramente que  $|\wp| \leq 1$  se  $|Y| = 3$ . Afinal, se só existem 3 vértices, só é possível uma única partição desse conjunto em três conjuntos não-vazios, que é o caso em que cada um dos três vértices forma isoladamente um único conjunto. A partir daí assumimos verdade para  $|Y| \leq n$  e tomamos  $|Y| = n + 1$ .

Escolha  $y \in Y$  e chame  $Z = Y - \{y\}$ .

Seja  $\wp$  uma família de 3-partições compatíveis de  $Y$ . Qualquer  $\Pi \in \wp$  pode ser escrito na forma  $\Pi = \{\Pi_1 \cup \{y\}, \Pi_2, \Pi_3\}$  para subconjuntos disjuntos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  de  $Z$ , satisfazendo  $\Pi_2$  e  $\Pi_3$  não-vazios e  $\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3 = Z$ .

Seja  $\wp'$  o conjunto de todos os  $\Pi$  tal que  $\Pi_1 \neq \emptyset$  e seja  $\wp'' = \wp - \wp'$ , ou seja,  $\wp''$  é o conjunto de todos os  $\Pi$  tal que  $\Pi_1 = \emptyset$ .

É claro que, no caso em que  $\Pi_1 \neq \emptyset$ , a família de triplas  $\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$  é uma família 3- $p$  compatível de  $Z$ , logo

$$|\wp'| \leq |Z| - 2 = |Y| - 3. \text{ (pela hipótese de indução)}$$

Finalmente mostramos que  $|\wp''| \leq 1$ .

Suponha por absurdo que  $\wp''$  contenha duas 3-partições distintas de  $Y$ :  $\{\{y\}, A_2, A_3\}$  e  $\{\{y\}, B_2, B_3\}$ .

Por uma reordenação adequada dos elementos, podemos assumir que  $A_2 \supseteq \{y\} \cup B_2$ , o que é uma contradição, uma vez que  $y \notin A_2$ .

Logo,  $|\wp| \leq |\wp'| + |\wp''| \leq |Y| - 3 + 1 = |Y| - 2$ . □

Voltando à demonstração do Teorema 2.3, seja  $K$  um aglomerado aberto de  $B(n)$ . Se  $x$  é uma trifurcação pertencente a  $K \cap B(n-1)$ , a remoção de  $x$  induz uma partição de  $K \cap \partial B(n)$  em três conjuntos unidos por caminhos abertos em  $x$ , cada um via um dos três elos abertos incidentes em  $x$ .

Além disso,  $x$  corresponde a uma 3-partição  $\Pi(x) = \{P_1, P_2, P_3\}$  de  $K \cap \partial B(n)$  com as propriedades:

- (a)  $P_i$  é não vazio para  $i = 1, 2, 3$ ;
- (b)  $P_i$  é um subconjunto de um subgrafo conexo aberto de  $B(n) - \{x\}$ ;
- (c)  $P_i \leftrightarrow P_j$  em  $B(n) - \{x\}$  se  $i \neq j$ .

Além do mais, se  $x$  e  $x'$  são trifurcações distintas de  $K \cap B(n-1)$ , então  $\Pi(x)$  e  $\Pi(x')$  são distintos e compatíveis.

Segue do Lema (2.1.3) que o número  $\tau(K)$  de trifurcações em  $K \cap B(n-1)$  satisfaz

$$\tau(K) \leq |K \cap \partial B(n)| - 2.$$

Somando essa inequação sobre todos os aglomerados conexos  $K$  de  $B(n)$ , obtemos

$$\sum_{x \in B(n-1)} I_{T_x} \leq |\partial B(n)|.$$

Tomando esperanças e usando (2.1.1), encontramos que

$$|B(n-1)|P_p(T_0) \leq |\partial B(n)|,$$

o que é impossível para  $n$  grande uma vez que o lado esquerdo cresce em  $n^d$  e o lado direito cresce em  $n^{d-1}$ . Essa contradição completa a prova. □

## Desigualdade de FKG

A Desigualdade de FKG será utilizada mais tarde nesta dissertação. A seguir definimos o que é variável aleatória crescente e posteriormente a desigualdade propriamente dita.

**Definição 2.7.** *Considere  $\omega$  e  $\omega' \in \Omega$ . Dizemos que  $\omega \preceq \omega'$  se  $\omega(x) \leq \omega'(x) \quad \forall x \in \mathcal{V}$ , isto é, se cada vértice que está aberto em  $\omega$  também está aberto em  $\omega'$ .*

**Definição 2.8.** *A variável aleatória  $X$  é chamada crescente se  $X(\omega) \leq X(\omega')$  sempre que  $\omega \preceq \omega'$ . Como consequência, o evento  $A$  é chamado crescente se sua função indicadora  $I_A$  for crescente.*

**Exemplo 1** Se  $v_1$  e  $v_2$  são vértices de  $\mathcal{Z}^d$ , então o evento  $\{\omega \in \Omega : v_1 \longleftrightarrow v_2 \text{ em } \omega\}$  é crescente.

Se  $A$  e  $B$  são eventos crescentes, então,  $\forall p \in (0, 1)$ , é intuitiva a idéia de que

$$P_p\{A|B\} \geq P_p\{A\},$$

pois a ocorrência do evento crescente  $B$  na configuração  $\omega_0$ , necessariamente implica na existência de sítios abertos e portanto aumenta a probabilidade de ocorrência do evento  $A$  em  $\omega_0$ . É precisamente isso o que diz o resultado abaixo. Para a demonstração, veja [2].

### **Teorema 2.9. Desigualdade de FKG**

a) *Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias crescentes com  $E_p(X^2) < \infty$  e  $E_p(Y^2) < \infty$ . Então*

$$E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y).$$

b) *Sejam  $A$  e  $B$  eventos crescentes. Então*

$$P_p\{A \cap B\} \geq P_p\{A\}P_p\{B\}. \tag{2.1.4}$$

A partir de agora as notações  $|C(\omega)|$  e  $\mathbb{P}_p(\omega \in \Omega : |C(\omega)| = \infty)$  serão substituídas respectivamente por  $|C|$  e  $\mathbb{P}_p(|C| = \infty)$ .

## 2.1.2 Percolação Anisotrópica em $\mathbb{Z}^2$

Consideremos o grafo ou a rede hipercúbica em 2 dimensões  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$  em que  $\mathbb{Z}^2$  é o conjunto de sítios da rede e  $\mathbb{E}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2; \exists! i \text{ tal que } |x_i - y_i| = 1 \text{ e } |x_j - y_j| = 0, \forall j \neq i\}$  é seu conjunto de elos.

Consideremos agora, entretanto, que a cada elo horizontal de  $\mathbb{E}^2$  associamos uma variável aleatória  $X_e$  que tem distribuição Bernoulli de parâmetro  $\tau$  e que a cada elo vertical de  $\mathbb{E}^2$  associamos uma variável aleatória  $Y_e$  que tem distribuição Bernoulli de parâmetro  $\lambda$ . Essas associações são feitas de modo independente para cada elo. Se  $X_e = 1$  dizemos que o  $\tau$ -elo  $e$  está aberto e se  $X_e = 0$  dizemos que o  $\tau$ -elo  $e$  está fechado. Da mesma forma, se  $Y_e = 1$  dizemos que o  $\lambda$ -elo  $e$  está aberto e se  $Y_e = 0$  dizemos que o  $\lambda$ -elo  $e$  está fechado.

Assim temos que,  $\forall e \in \{\mathbb{E}^2 : \langle (z_1, z_2), (z_1 + 1, z_2) \rangle\}$ ,

$$\mu_e(X_e = 1) = \tau = 1 - \mu_e(X_e = 0), \quad \tau \in [0, 1].$$

Da mesma maneira, temos que,  $\forall e \in \{\mathbb{E}^2 : \langle (z_1, z_2), (z_1, z_2 + 1) \rangle\}$ ,

$$\nu_e(Y_e = 1) = \lambda = 1 - \nu_e(Y_e = 0), \quad \lambda \in [0, 1].$$

O espaço de probabilidade para esse modelo é  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{\tau, \lambda})$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ ,  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos, ou seja, a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos que dependem apenas de elos de subconjuntos finitos de  $\mathbb{E}^2$ , e  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}$  é a medida produto em  $\Omega$ .

A um elemento do espaço amostral  $\omega \in \Omega$  denominamos uma configuração e a probabilidade de existência de aglomerados infinitos na origem é denotada por

$$\theta : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

$$\theta(\tau, \lambda) := \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\omega \in \Omega : |C(\omega)| = \infty).$$

Um dos resultados mais importantes de percolação anisotrópica em  $\mathbb{Z}^2$  é o seguinte, que pode ser encontrado em [2].

**Teorema 2.10.**  $\theta(\tau, \lambda) > 0$  se, e somente se,  $\tau + \lambda > 1$ .

E, nesse caso, assim como no modelo isotrópico, pode-se garantir que existe no grafo um, e somente um, aglomerado aberto infinito quase certamente. Ou seja, em  $\mathbb{Z}^2$ , se  $\tau + \lambda > 1$ , então,

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\omega \in \Omega; N(\omega) = 1) = 1.$$

Vamos agora introduzir a ideia de comprimento horizontal de correlação da percolação em  $\mathbb{Z}^2$ . Para isso, defina  $T_m(n)$  como

$$T_m(n) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq z_1 \leq n, |z_2| \leq m\}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

que possui comprimento  $n$  e altura  $2m$  (Figura 2.2).

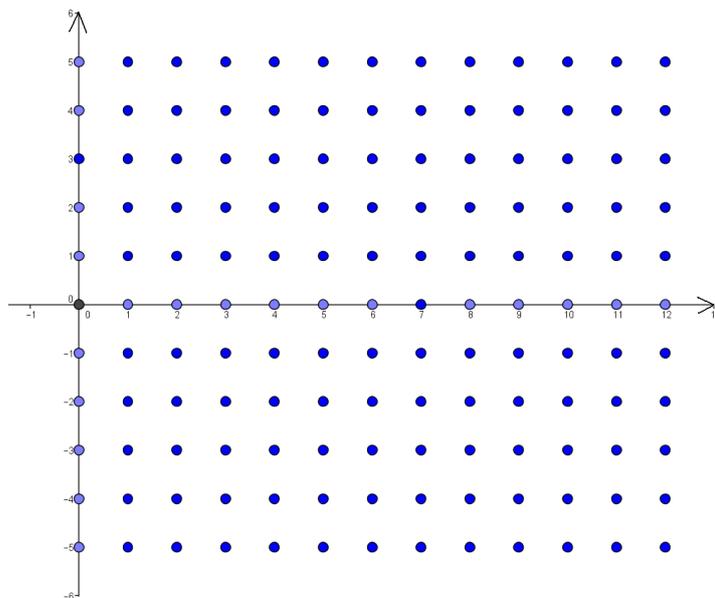


Figura 2.2:  $T_m(n)$ .

A partir desse conjunto de vértices, transformamos  $T_m(n)$  em um grafo, adicionando todas as arestas de  $\mathbb{Z}^2$  com exceção daquelas que estão à direita e à esquerda de  $T_m(n)$ , isto é, as arestas do tipo  $\langle(0, y), (0, y + 1)\rangle$  e  $\langle(n, y), (n, y + 1)\rangle$ ,  $-m < y < m - 1$  (Figura 2.3).

Defina

$$\phi_m(\tau, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (n, 0) \text{ em } T_m(n)) \right\}. \quad (2.1.5)$$

Veja que, por FKG e por invariância translacional,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (n + k, 0) \text{ em } T_m(n + k)) \geq \\ & \geq \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ ((0, 0) \leftrightarrow (n, 0) \text{ em } T_m(n)) \cap ((n, 0) \leftrightarrow (n + k, 0) \text{ em } \bar{T}_m(k)) \right] \geq \\ & \geq \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (n, 0) \text{ em } T_m(n)) \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (k, 0) \text{ em } T_m(k)), \end{aligned}$$

onde  $\bar{T}_m(k) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : n \leq z_1 \leq n + k, |z_2| \leq m\}$ .

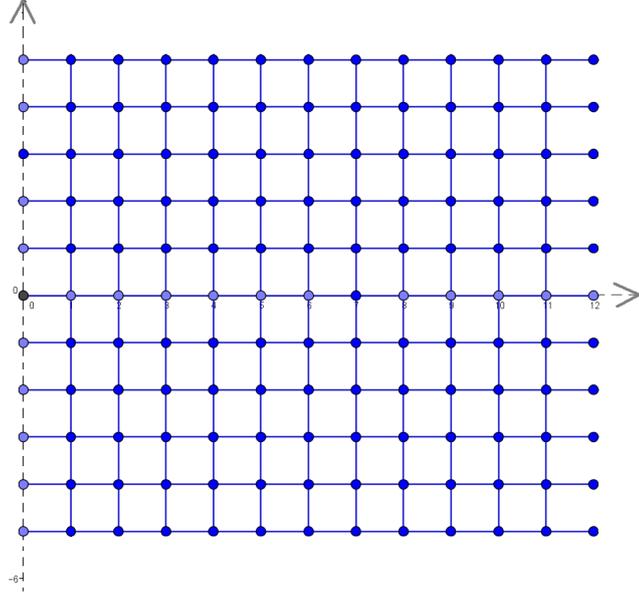


Figura 2.3: Grafo gerado a partir de  $T_m(n)$ .

Temos então que a sequência

$$a_n = -\log \mathbb{P}_{\tau,\lambda}((0,0) \leftrightarrow (n,0)) \text{ em } T_m(n)$$

é subaditiva. Dessa forma, o limite em (2.1.5) existe por subaditividade (ver anexo 1) e, além disso

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}[(0,0) \leftrightarrow (n,0) \text{ em } T_m(n)] \leq e^{-n\phi_m(\tau,\lambda)} \quad \forall n. \quad (2.1.6)$$

Deste modo

$$p_m(n) := \mathbb{P}_{\tau,\lambda}[(0,0) \leftrightarrow (n,0) \text{ em } T_m(n)] \leq e^{-n\phi_m(\tau,\lambda)} \quad \forall n. \quad (2.1.7)$$

Para obter uma cota inferior para  $p_m(n)$  considere  $r$  e  $s$  inteiros positivos e  $A$  o evento em que todas as arestas da forma  $\langle (r-1, y), (r-1, y+1) \rangle$  e  $\langle (r+1, y), (r+1, y+1) \rangle$  para  $-m \leq y < m$  junto com as arestas  $\langle (r-1, 0), (r, 0) \rangle$  e  $\langle (r, 0), (r+1, 0) \rangle$  estejam abertas. Como  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(A) = \lambda^{4m}\tau^2$ , então, pela desigualdade de FKG, temos

$$\lambda^{4m}\tau^2 p_m(r+s) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}((0,0) \longleftrightarrow (r+s,0) \text{ em } T_m(r+s) \cap A).$$

Observe que a ocorrência do evento  $A$  e a existência de um caminho aberto conectando  $(0,0)$  a  $(r+s,0)$  em  $T_m(r+s)$  necessariamente implica na ocorrência de um caminho aberto conectando  $(0,0)$  a  $(r,0)$  em  $T_m(r)$  e de um caminho aberto conectando  $(r,0)$  a  $(r+s,0)$  em  $\bar{T}_m(s) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : r \leq z_1 \leq r+s, |z_2| \leq m\}$ . Logo, pela invariância

translacional temos

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}((0,0) \longleftrightarrow (r+s,0) \text{ em } T_m(r+s) \cap A) \leq p_m(r)p_m(s)$$

e isso implica que

$$\lambda^{4m}\tau^2 p_m(r+s) \leq p_m(r)p_m(s).$$

Logo,

$$\log [\lambda^{4m}\tau^2 p_m(r+s)] \leq \log [p_m(r)p_m(s)],$$

ou seja,

$$\underbrace{\log \lambda^{4m}\tau^2}_{-d} + \underbrace{\log p_m(r+s)}_{a_{r+s}} \leq \underbrace{\log p_m(r)}_{a_r} + \underbrace{\log p_m(s)}_{a_s}.$$

Usando o Teorema do limite da subaditividade que se encontra no anexo A, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n + d}{n} - d \right) = \lambda = \inf \left\{ \frac{a_n + d}{n} - d \right\} \Rightarrow a_n \geq (\lambda + d)n - d, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.8)$$

Mas como,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} + \frac{d}{n} - d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} - d$ , podemos, então, afirmar também que

$$a_n \geq \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} - d + d \right) n - d$$

E, assim, podemos concluir que

$$\log p_m(n) \geq n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_m(n)}{n} + \log \lambda^{4m}\tau^2,$$

que é equivalente a

$$\log p_m(n) \geq n(-\phi_m(\tau, \lambda)) + \log \lambda^{4m}\tau^2,$$

ou seja,

$$p_m(n) \geq e^{-n\phi_m(\tau,\lambda)} \lambda^{4m}\tau^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.9)$$

Já sabemos a partir de agora, então, que  $p_m(n) \geq \lambda^{4m}\tau^2 e^{-n\phi_m(\tau,\lambda)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , e além disso, sabemos também que

$$p_m(n) \geq \tau^n, \quad (2.1.10)$$

pois  $\tau^n$  representa a probabilidade de que o caminho formado pelos elos  $\langle (i, 0), (i + 1, 0) \rangle$ , com  $i = 0, \dots, n - 1$ , esteja aberto.

Então, por (2.1.7) e por (2.1.10), temos que  $\tau^n \leq p_m(n) \leq e^{-n\phi_m(\tau, \lambda)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . E isso implica que

$$e^{-\phi_m(\tau, \lambda)} \geq \tau. \quad (2.1.11)$$

Assim como no caso de percolação isotrópica em  $\mathbb{Z}^2$ , temos de [2] que

$$\phi_m(\tau, \lambda) \downarrow \phi(\tau, \lambda) \quad (2.1.12)$$

quando  $m \rightarrow \infty$ , onde

$$\phi(\tau, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (n, 0)) \right\}, \quad (2.1.13)$$

que é a recíproca do comprimento de correlação horizontal.

Note que  $\phi(\tau, \lambda)$  é estritamente decrescente em  $\tau$  e  $\lambda$ , quando  $\tau + \lambda < 1$  e  $\phi(\tau, \lambda) \downarrow 0$  quando  $\lambda \uparrow (1 - \tau)$  ou quando  $\tau \uparrow (1 - \lambda)$ . A prova pode ser consultada em [2].

Então, por (2.1.11) e por (2.1.12), quando  $m \rightarrow \infty$  podemos afirmar que

$$e^{-\phi(\tau, \lambda)} \geq \tau. \quad (2.1.14)$$

Essa cota inferior para  $\phi(\tau, \lambda)$ , entretanto, pode ser melhorada. Para isso, vamos definir, equivalentemente a (2.1.13),

$$\phi(\tau, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow L_n \text{ em } H) \right\}, \quad (2.1.15)$$

onde  $L_n$  é a linha vertical  $\{(n, z) : z \in \mathbb{Z}\}$  e  $H = \{(x, y) : x \geq 0, y \in \mathbb{Z}\}$ . Para verificar essa equivalência, veja [2].

Note que é possível encontrar caminhos abertos em  $H$  da origem até  $L_n$  observando a linha vertical de arestas que saem da origem e encontrando alguma aresta aberta na horizontal que leve em direção a  $L_1$  e continuando a observar a linha vertical do novo ponto e assim sucessivamente.

Afirmamos que a probabilidade de que essa construção chegue a  $L_n$  é

$$\{1 - E((1 - \tau)^L)\}^n,$$

onde  $L$  é o número de vértices na linha vertical de arestas abertas que saem da origem.

Para ver isso, seja

$$A = \bigcap_{z \in \mathbb{Z}} \{(0, 0) \leftrightarrow (1, z)\},$$

ou seja  $A$  representa o evento em que, ao se sair da origem, não há caminhos abertos que possibilitem alcançar  $L_1$ .

Então,

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A/L = k) \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(L = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \tau)^k \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(L = k) = E[(1 - \tau)^L].$$

Note que,

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(L = k) = k \lambda^{k-1} (1 - \lambda)^2.$$

$$\text{Então, } \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \tau)^k k \lambda^{k-1} (1 - \lambda)^2 = (1 - \tau)(1 - \lambda)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ \underbrace{(1 - \tau)\lambda}_q \right]^{k-1}.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^k = \frac{d}{dq} \frac{q}{1 - q} = \frac{(1 - q) + q}{(1 - q)^2} = \frac{1}{(1 - q)^2},$$

temos que

$$(1 - \tau)(1 - \lambda)^2 \frac{1}{(1 - \lambda(1 - \tau))^2} = E[(1 - \tau)^L].$$

Veja que  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow L_n \text{ em } H) \geq \{1 - E[(1 - \tau)^L]\}^n$ . Por subaditividade e (2.1.15) temos

$$e^{-n\phi(\tau, \lambda)} \geq \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow L_n \text{ em } H).$$

Assim,

$$e^{-n\phi(\tau, \lambda)} \geq \{1 - E[(1 - \tau)^L]\}^n,$$

o que implica que

$$e^{-\phi(\tau, \lambda)} \geq \{1 - E[(1 - \tau)^L]\}.$$

Logo,

$$e^{-\phi(\tau, \lambda)} \geq 1 - \frac{(1 - \tau)(1 - \lambda)^2}{(1 - \lambda(1 - \tau))^2}. \quad (2.1.16)$$

## 2.2 Percolação nas árvores $k + 1$ regulares

Um dos tipos mais frequentes e importantes de grafos são as árvores, definidas informalmente como grafos conexos sem ciclos. Um grafo é dito conexo quando existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices. Ciclos são caminhos de comprimento mínimo três, em que o primeiro e o último vértice coincidem, mas nenhum outro vértice é repetido. Ao reunirmos essas duas propriedades, concluímos que uma árvore é um grafo que possui um único caminho conectando quaisquer dois pares de vértices. E mais do que isso, para um dado número de vértices  $n$ , uma árvore é também o grafo conexo com o menor número de arestas. As várias caracterizações das árvores podem ser reunidas no teorema a seguir, cuja demonstração pode ser consultada em [10].

**Teorema 2.11.** *Seja  $T$  um grafo com  $n$  vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $T$  é uma árvore;
- (ii)  $T$  não contém ciclos e tem  $n - 1$  arestas;
- (iii)  $T$  é conexo e tem  $n - 1$  arestas;
- (iv)  $T$  é conexo e toda aresta é uma ponte, ou seja, a remoção de qualquer aresta separa o grafo em duas componentes conexas sem ligação entre si, aumentando, assim, o número de componentes conexas do grafo;
- (v) Todo par de vértices de  $T$  é ligado por um único caminho;
- (vi)  $T$  não contém ciclos, mas a adição de uma aresta produz um ciclo.

Um grafo é dito ser regular quando todos os seus vértices tem o mesmo grau, ou seja, quando o número de arestas incidentes em cada um dos vértices é o mesmo. Uma árvore é chamada  $k + 1$  regular quando todos os seus vértices possuem grau  $k + 1$ .

A figura abaixo nos dá um exemplo de uma árvore 3-regular.

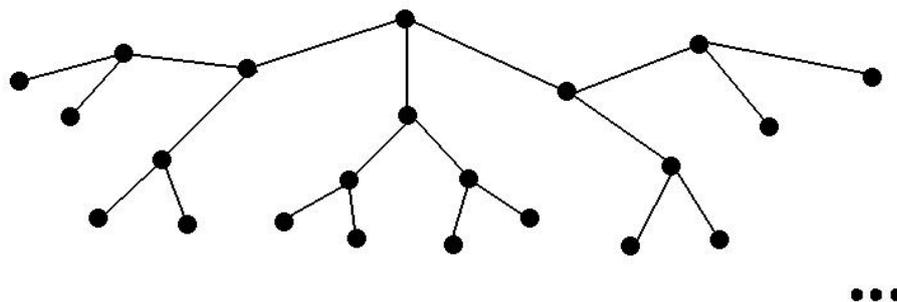


Figura 2.4: Árvore 3-regular.

Devido à estrutura que as árvores apresentam, é muito comum utilizarmos de uma analogia com um modelo estocástico de crescimento populacional a fim de analisarmos a questão da ocorrência de percolação independente nos seus elos. Esse modelo estocástico é denominado processo de ramificação e a semelhança entre a sua estrutura e a estrutura das árvores poderá ser percebida a seguir.

Considere uma população de indivíduos e seja  $X_n$  a quantidade de indivíduos nessa população no tempo  $n$ . Essa quantidade de indivíduos não é fixa e varia a cada intervalo de tempo de acordo com as seguintes regras: cada indivíduo gera um número aleatório de filhos e, após gerar seus descendentes, o indivíduo morre e deixa a população. Além disso, cada indivíduo gera seus filhos independentemente dos demais, mas o número de filhos gerado por cada um deles segue uma mesma distribuição de probabilidade, em que  $p_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , representa a probabilidade de que o indivíduo produza exatamente  $k$  filhos e  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$ .

Denotamos por  $\mu$  o número médio de filhos gerados por um indivíduo, ou seja:

$$\mu = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i.$$

Ao adaptarmos tais definições para o caso de uma árvore  $k + 1$ -regular em que a probabilidade de cada um de seus elos estar aberto é  $\tau$ , podemos tomar  $\tau$  como a probabilidade de nascimento de cada filho, a origem da árvore como o primeiro indivíduo da população e cada um dos demais vértices como um filho em potencial de alguma geração. Nesse caso, com a finalidade de seguir as regras do processo de reprodução listadas acima, podemos estabelecer as seguintes probabilidades para o primeiro indivíduo da população.

Seja  $C_{n,m}$  a combinação de  $n$  elementos agrupados  $m$  a  $m$ , onde  $n \geq m$ . Então, temos,

- (i)  $P(\text{primeiro indivíduo não gere nenhum filho}) = C_{k+1,0}(1 - \tau)^{k+1}$ ;
- (ii)  $P(\text{primeiro indivíduo gere exatamente um filho}) = C_{k+1,1}\tau(1 - \tau)^k$ ;
- (iii)  $P(\text{primeiro indivíduo gere exatamente dois filhos}) = C_{k+1,2}\tau^2(1 - \tau)^{k-1}$ ;
- (iv) E, assim sucessivamente, até  $P(\text{primeiro indivíduo gere } k + 1 \text{ filhos}) = C_{k+1,k+1}\tau^{k+1}$ .

Dessa forma,

$$\sum_{i=0}^{k+1} p_i = 1.$$

Abaixo temos o exemplo quando  $k + 1 = 3$  (Figura 2.5).

Porém essas probabilidades se referem apenas aos filhos do primeiro indivíduo da população (no caso, a origem da árvore). Para todos os demais vértices a situação se modifica um pouco, uma vez que, a partir desses primeiros nascidos, uma das arestas incidentes em cada vértice sempre será a conexão com o seu gerador. Assim sendo, a partir da segunda geração

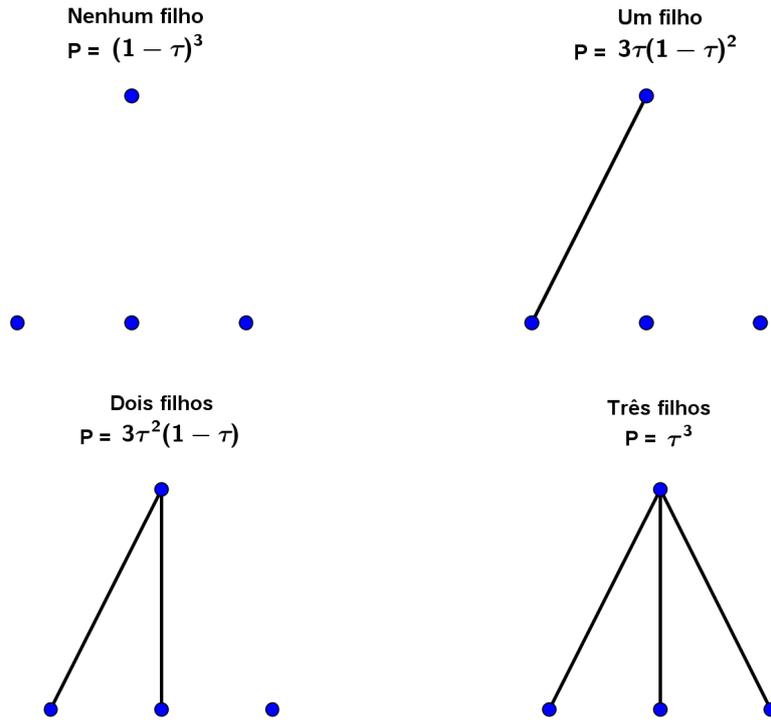


Figura 2.5: Ilustração das possibilidades de filhos para  $k + 1 = 3$ .

(se considerarmos que a origem da árvore representa a primeira geração) cada indivíduo, representado por um vértice, poderá ter no máximo  $k$  filhos. E, portanto, as probabilidades estabelecidas para os demais indivíduos devem ser:

- (i)  $P(\text{indivíduo não gere nenhum filho}) = C_{k,0}(1 - \tau)^k$ ;
- (ii)  $P(\text{indivíduo gere exatamente um filho}) = C_{k,1}\tau(1 - \tau)^{k-1}$ ;
- (iii)  $P(\text{indivíduo gere exatamente dois filhos}) = C_{k,2}\tau^2(1 - \tau)^{k-2}$ ;
- (iv) E, assim sucessivamente, até  $P(\text{indivíduo gere } k \text{ filhos}) = C_{k,k}\tau^k$ .

Mais uma vez seguimos a hipótese do processo de reprodução, pois:

$$\sum_{i=0}^k p_i = 1.$$

Além disso, é fácil verificar que, com esses ajustes, o número de filhos gerado por cada indivíduo segue uma distribuição binomial de parâmetros  $k$  e  $\tau$ . Logo, nesse caso:

$$\mu = \sum_{i=0}^k i p_i = k\tau.$$

Denote por  $\gamma$  a probabilidade de extinção de um processo de ramificação. Um dos principais resultados da teoria de processo de ramificação que usaremos nessa dissertação é o seguinte, que se encontra enunciado e demonstrado em [5].

**Teorema 2.12.** *Se  $\mu \leq 1$  a probabilidade de extinção  $\gamma$  é igual a um, ou seja, a população eventualmente se extingue. Se, por outro lado,  $\mu > 1$ , então, a probabilidade de extinção  $\gamma$  é estritamente menor que um.*

No nosso caso, como  $\mu = k\tau$ , sabemos que a população se tornará extinta caso  $k\tau \leq 1$ , ou seja, caso  $\tau$  seja menor ou igual que  $1/k$ . Por outro lado, se  $\tau$  for estritamente maior que  $1/k$ , então, a probabilidade  $\gamma$  de extinção da população é estritamente menor que um. Sob uma outra perspectiva, podemos fazer a interpretação de que, se  $\tau \leq 1/k$ , então não existirá nenhum aglomerado aberto infinito, o que, por definição, nos leva à conclusão de que, nessas condições, não ocorre percolação. Enquanto que, se  $\tau > 1/k$ , então haverá probabilidade estritamente positiva de ocorrência de percolação.

Num modelo de percolação independente em  $T_{k+1}$  com parâmetro  $\tau$  já se sabe, então, que  $\tau_c = 1/k$  e que, se  $\tau \leq \tau_c$ , então  $P_\tau(\omega \in \Omega; N(\omega) = 0) = 1$ , onde  $N(\omega)$  denota o número de aglomerados abertos infinitos na configuração  $\omega$ . Vamos supor agora que,  $\tau_c < \tau < 1$ . Dada essa condição, veremos a seguir que é possível demonstrar que  $P_\tau(\omega \in \Omega; N(\omega) = \infty) = 1$ , ou seja, no caso em que  $\tau$  é estritamente maior que  $1/k$  e estritamente menor que 1, existem infinitos aglomerados abertos infinitos em  $T_{k+1}$  com probabilidade 1. Essa é uma das razões pelas quais as árvores são às vezes consideradas com infinitas dimensões. O teorema que garante a existência de infinitos aglomerados infinitos no caso supercrítico do modelo de percolação na árvore  $T_{k+1}$  e sua demonstração seguem abaixo.

**Teorema 2.13.** *Seja  $T_{k+1}$  uma árvore  $k + 1$ -regular e  $\tau$  a probabilidade de que cada elo de  $T_{k+1}$  esteja aberto. Assim, se  $1/k < \tau < 1$ , então,  $P_\tau(\omega \in \Omega; N(\omega) = \infty) = 1$ .*

*Demonstração.* Considere o conjunto de vértices de  $T_{k+1}$  à distância  $n$  da origem, enumerados arbitrariamente  $1, 2, \dots, k^n$ . Para cada  $1 \leq i \leq k^n$ , seja  $A_i$  o evento em que o elo conectando o vértice  $i$  ao vértice vizinho de  $i$  mais próximo da origem está fechado e que o aglomerado de  $i$  é infinito. É fácil notar que, dada a estrutura geométrica e de independência de  $T_{k+1}$ , os eventos  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq k^n$ , são independentes e equiprováveis, afinal dependem de elos distintos apesar de apresentarem todos a mesma estrutura. Podemos observar, além disso, que  $P(A_i) = (1 - \tau)\beta$ , com  $\beta$  igual à probabilidade de sobrevivência do processo de ramificação com distribuição de descendência individual Binomial( $k, \tau$ ). Estamos supondo aqui que  $\beta > 0$  ou, equivalentemente, que  $\tau > 1/k$ .

A partir disso, seja  $X_n = \sum_{i=1}^{k^n} I(A_i)$  o número de ocorrências dos eventos  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq k^n$ . Então,  $X_n$  tem distribuição Binomial( $k^n, (1 - \tau)\beta$ ). Considerando  $N$  como o número de

aglomerados abertos infinitos, facilmente notamos que dados  $l, n$  fixos,  $X_n > l$  implica  $N > l$ . Essa afirmação pode ser verificada ao percebermos que, como elo conectando o vértice  $i$  ao vértice vizinho de  $i$  mais próximo da origem está fechado para todo  $1 \leq i \leq k^n$  em que  $A_i$  ocorre, então os aglomerados abertos infinitos dos vértices  $i$  contados em  $X_n$  não terão conexão entre si e, por consequência, existirão na árvore *pelo menos*  $X_n$  aglomerados abertos infinitos (pode ser que haja mais aglomerados abertos infinitos nos vértices  $i$  em que  $A_i$  não ocorre).

Dessa forma, concluímos que  $\{X_n > l\} \subset \{N > l\}$  e, portanto,  $P(X_n > l) \leq P(N > l)$ ,  $\forall n, l$ .

Veja que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq l) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-\tau)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-\tau)^{n-1}\tau + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{l} \tau^l (1-\tau)^{n-l}$ .

Mas,  $\forall r = 1, \dots, l$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{r} (\tau)^r (1-\tau)^{n-r} &= \frac{1}{r!} \left( \frac{\tau}{1-\tau} \right)^r \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-r)!} (1-\tau)^n = \\ &= \frac{1}{r!} \left( \frac{\tau}{1-\tau} \right)^r \lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) \dots (n-r+1) (1-\tau)^n \leq \\ &\leq \frac{1}{r!} \left( \frac{\tau}{1-\tau} \right)^r \lim_{n \rightarrow \infty} n^r (1-\tau)^n = 0. \end{aligned}$$

Como vimos acima que  $P(N > l) \geq P(X_n > l)$  para todo  $n, l$  e como  $P(X_n > l) \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos, então, que  $P(N > l) = 1 \forall l$ , pois  $P(N > l) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > l) = 1$  e a distribuição de  $N$  não depende de  $n$ . Como  $l$  é arbitrário, concluímos que  $P(N = \infty) = 1$ . □

# Capítulo 3

## Modelo de percolação de elos independentes no grafo $\mathbb{L}$

Apesar da diferença quanto à cardinalidade de  $N$ , uma vez que, em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $N$  só assume os valores 0 ou 1 e em  $T_{k+1}$  ele só assume os valores 0 ou  $\infty$ , podemos verificar que ambos os grafos apresentam uma única transição de fase não-trivial. Isto é, ou o número de aglomerados infinitos é 0 ou é um único outro valor determinado. E nesse momento surge a questão: existe algum grafo que admita três possíveis valores distintos para  $N$ ? Ou, em outras palavras, existe algum grafo que apresente mais de uma transição de fase não-trivial? Apresentamos a resposta nos próximos tópicos.

### 3.1 A construção do grafo $\mathbb{L}$

Seja  $\mathbb{T}_{k+1}$  uma árvore regular infinita com grau  $k+1$  (ou seja, cada sítio possui  $k+1$  primeiros vizinhos), onde  $k \geq 2$ . A distância  $\delta_{\mathbb{T}}(t_1, t_2)$  entre dois vértices  $t_1$  e  $t_2$  é definida como o número de elos no único caminho em  $\mathbb{T}_{k+1}$  de  $t_1$  a  $t_2$ . Seja a linha  $\mathbb{Z} = \{z : z = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$  com função distância  $\delta_{\mathbb{Z}}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ . Definimos o grafo  $\mathbb{L} = \mathbb{T}_{k+1} \times \mathbb{Z}$  como o par  $(V(\mathbb{L}), \mathbb{E}(\mathbb{L}))$ , onde  $V(\mathbb{L}) = \{(t, z) : t \in V(\mathbb{T}_{k+1}), z \in \mathbb{Z}\}$  e o conjunto de elos  $\mathbb{E}(\mathbb{L})$  é dado pela relação de adjacência  $(t_1, z_1) \sim (t_2, z_2)$  se, e somente se,  $\delta_{\mathbb{T}_{k+1}}(t_1, t_2) + \delta_{\mathbb{Z}}(z_1, z_2) = 1$ . Isto é, dois vértices de  $\mathbb{L}$  são vizinhos se, e somente se, suas componentes- $\mathbb{T}$  são iguais e suas componentes- $\mathbb{Z}$  são adjacentes ou vice-versa.

Definimos a probabilidade de um elo estar aberto como  $\tau$  se ele for um elo- $\mathbb{T}$ , ou seja, se ele for um elo da árvore e como  $\lambda$  se ele for um elo- $\mathbb{Z}$ , isto é, se for um elo da linha  $\mathbb{Z}$ . O espaço de probabilidade para esse modelo é  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{\tau, \lambda})$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}(\mathbb{L})}$ ,  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos, ou seja, a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos que dependem apenas de

elos de subconjuntos finitos de  $\mathbb{E}(\mathbb{L})$ , e  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}$  é a medida produto em  $\Omega$ . Como anteriormente, definimos

$$\theta : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

$$\theta(\tau, \lambda) = P_{\tau,\lambda}(\omega \in \Omega : |C(\omega)| = \infty).$$

A figura abaixo nos dá uma idéia do grafo  $\mathbb{L}$  quando  $k = 2$  (Figura 3.1).

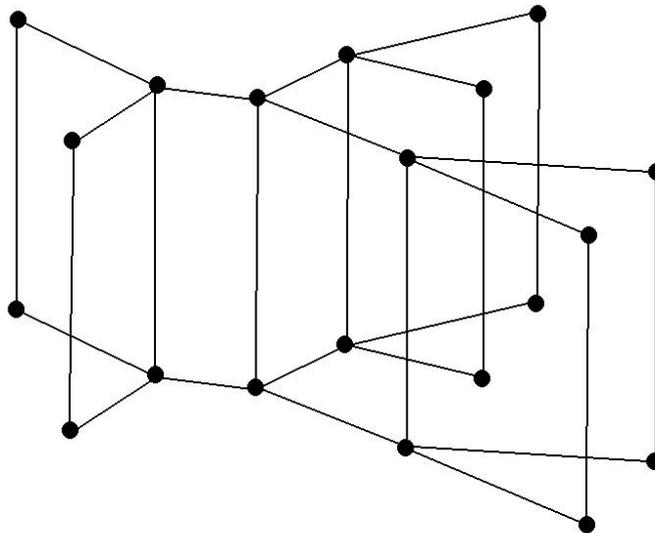


Figura 3.1: Grafo  $\mathbb{L}$  com  $k = 2$ .

### 3.1.1 Relação entre $\mathbb{L}$ e $\mathbb{Z}^2$

Ao fazermos uma analogia entre as definições do modelo de percolação em  $\mathbb{L}$  explicitadas acima e o modelo de percolação tradicional em  $\mathbb{Z}^2$ , não é difícil notar que, nesse último caso, estaríamos interessados em percolação anisotrópica em  $\mathbb{Z}^2$ , em que cada aresta do tipo  $\langle (z_1, z_2), (z_1 + 1, z_2) \rangle$  está aberta com probabilidade  $\tau$  e cada aresta do tipo  $\langle (z_1, z_2), (z_1, z_2 + 1) \rangle$  está aberta com probabilidade  $\lambda$ . Para isso, vejamos o seguinte.

**Definição 3.1.** Dizemos que  $\pi$  é um caminho duplamente infinito quando ele não possui um vértice final em nenhuma das direções.

Assim sendo, seja  $\pi$  um caminho duplamente infinito em  $\mathbb{T}$  (Figura 3.2).



## 3.2 Estudo de percolação no grafo $\mathbb{L}$

Veremos que no grafo  $\mathbb{L}$ , para qualquer valor de  $(\tau, \lambda)$ , quase certamente: ou  $N = 0$ , ou  $N = \infty$ , ou  $N = 1$ . Assim, o conjunto de possíveis valores de  $(\tau, \lambda)$  pode ser dividido em três regiões não-vazias correspondentes aos três possíveis casos. Mas como são as curvas que dividem essas três regiões? É evidente que  $P_{\tau, \lambda}(\omega \in \Omega; N(\omega) = 0) = 1$  para  $\tau$  e  $\lambda$  suficientemente pequenos. Com o aumento dos parâmetros, entretanto, se torna intuitivo concluir que o valor de  $N$  deixa de ser 0 e passa a ser  $\infty$ , afinal permite-se, com tal aumento, ocorrência de percolação nas árvores, utilizando, para isso, elos de  $\mathbb{Z}$  para desviar de alguns elos das árvores que estejam fechados. Obviamente, se  $\tau$  passa do valor  $1/k$ , é certa a ocorrência de infinitos aglomerados infinitos, a não ser que  $\lambda$  também seja suficientemente grande a ponto de unir todos os aglomerados num só. Os resultados a seguir nos darão condições de definir melhor o comportamento de  $N$  a partir da relação entre  $\tau$  e  $\lambda$ .

A proposição 1, abaixo, fornece um limite inferior para a curva que divide a região onde existem infinitos aglomerados abertos infinitos da região onde não há aglomerado aberto infinito (Figura 3.4). Ou seja, se o par ordenado  $(\tau, \lambda)$  estiver localizado abaixo da curva gerada pela proposição 1, sabemos que não ocorre percolação em  $\mathbb{L}$ .

**Proposição 1:** Se  $\tau k(1 + \lambda + \sqrt{2\lambda(1 + \lambda)}) < 1 - \lambda$ , então quase certamente não há nenhum aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{L}$ , ou seja,  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\omega \in \Omega; N(\omega) = 0) = 1$ .

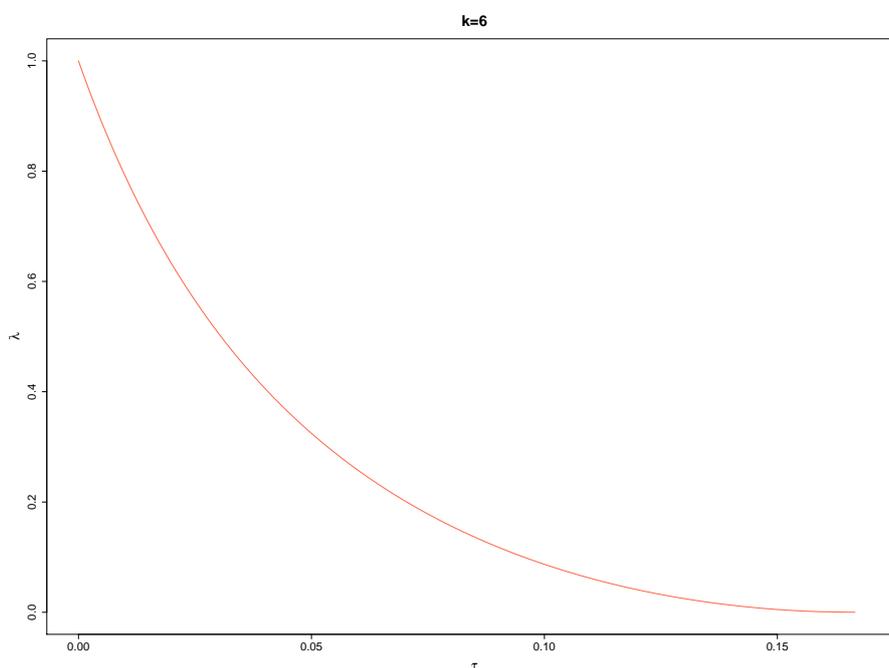


Figura 3.4: Curva gerada pela proposição 1 quando  $k = 6$ .

*Demonstração.* Para demonstrar a proposição 1, vamos denotar por  $\chi(\tau, \lambda)$  o número médio de vértices no aglomerado aberto  $C$  na origem de  $\mathbb{L}$  e encontrar um limite superior para ele. Em seguida, vamos mostrar, a partir desse limite, que  $\chi(\tau, \lambda) < \infty$  se é verificada a desigualdade proposta pela proposição. Isso garante que o aglomerado aberto  $C$  é finito. E, como o evento “o número médio de vértices no aglomerado aberto  $C$  na origem é finito” é um evento invariante por translação da origem em  $\mathbb{L}$ , é possível garantir que qualquer aglomerado aberto nesse grafo também é finito sob as condições dadas pela proposição 1. O que, conseqüentemente, finaliza a demonstração.

Defina:

$$I(t, z) = \begin{cases} 1 & \text{se } (\emptyset, 0) \longleftrightarrow (t, z) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

E lembre que o evento  $\{(\emptyset, 0) \longleftrightarrow (t, z)\}$  ocorre se, e somente se, existe pelo menos um caminho aberto auto-evitante em  $\mathbb{L}$  que conecte o vértice  $(\emptyset, 0)$  ao vértice  $(t, z)$ .

Definiremos  $|C|$  como o tamanho (número de vértices) do aglomerado aberto  $C$  na origem de  $\mathbb{L}$  e  $\chi(\tau, \lambda)$  como o tamanho médio (número médio de vértices) do aglomerado  $C$ , ou seja,  $\chi(\tau, \lambda) = E_{\tau, \lambda}(|C|)$ .

Dessa forma, temos, então, que:

$$|C| = \sum_{(t, z) \in V(\mathbb{L})} I(t, z) \text{ e } \chi(\tau, \lambda) = E_{\tau, \lambda}(|C|) = E\left(\sum_{(t, z) \in V(\mathbb{L})} I(t, z)\right).$$

Utilizando uma versão de séries do Teorema de Convergência Monótona, como as variáveis indicadoras dentro do somatório são não-negativas, podemos inverter a ordem entre o valor esperado e a soma infinita sem alterar o resultado. Dessa forma:

$$\chi(\tau, \lambda) = E_{\tau, \lambda}(|C|) = E\left(\sum_{(t, z) \in V(\mathbb{L})} I(t, z)\right) = \sum_{(t, z) \in V(\mathbb{L})} E(I(t, z)).$$

Temos então que

$$\chi(\tau, \lambda) = \sum_{(t, z) \in V(\mathbb{L})} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \longleftrightarrow (t, z)). \quad (3.2.1)$$

Obviamente existem infinitos caminhos em  $\mathbb{L}$  que conectam  $(\emptyset, 0)$  a  $(t, z)$ , lembrando, é claro, que nessa contagem não levamos em consideração se os mesmos se encontram abertos ou não. Dessa forma, concluímos que o evento “ $(\emptyset, 0)$  está conectado a  $(t, z)$ ” é equivalente

ao evento “pelo menos um desses infinitos caminhos que conecta  $(\emptyset, 0)$  a  $(t, z)$  está aberto” e, conseqüentemente, suas probabilidades também são iguais. Assim sendo, denotaremos um caminho em  $\mathbb{L}$  que conecta  $(\emptyset, 0)$  a  $(t, z)$  por  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  e o analisaremos da seguinte forma:  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  segue por elos- $\mathbb{Z}$  de  $(\emptyset, 0)$  para algum  $(\emptyset, z_0)$ , depois por elos- $\mathbb{T}$  para algum  $(t_1, z_0)$ , depois novamente por elos- $\mathbb{Z}$  para algum  $(t_1, z_1)$ , depois para  $(t_2, z_1)$ , depois para  $(t_2, z_2)$ , depois para  $(t_3, z_2)$ , depois para  $(t_3, z_3)$ , e assim sucessivamente até chegar em  $(t_n, z_n) = (t, z)$ . Abaixo segue um exemplo.

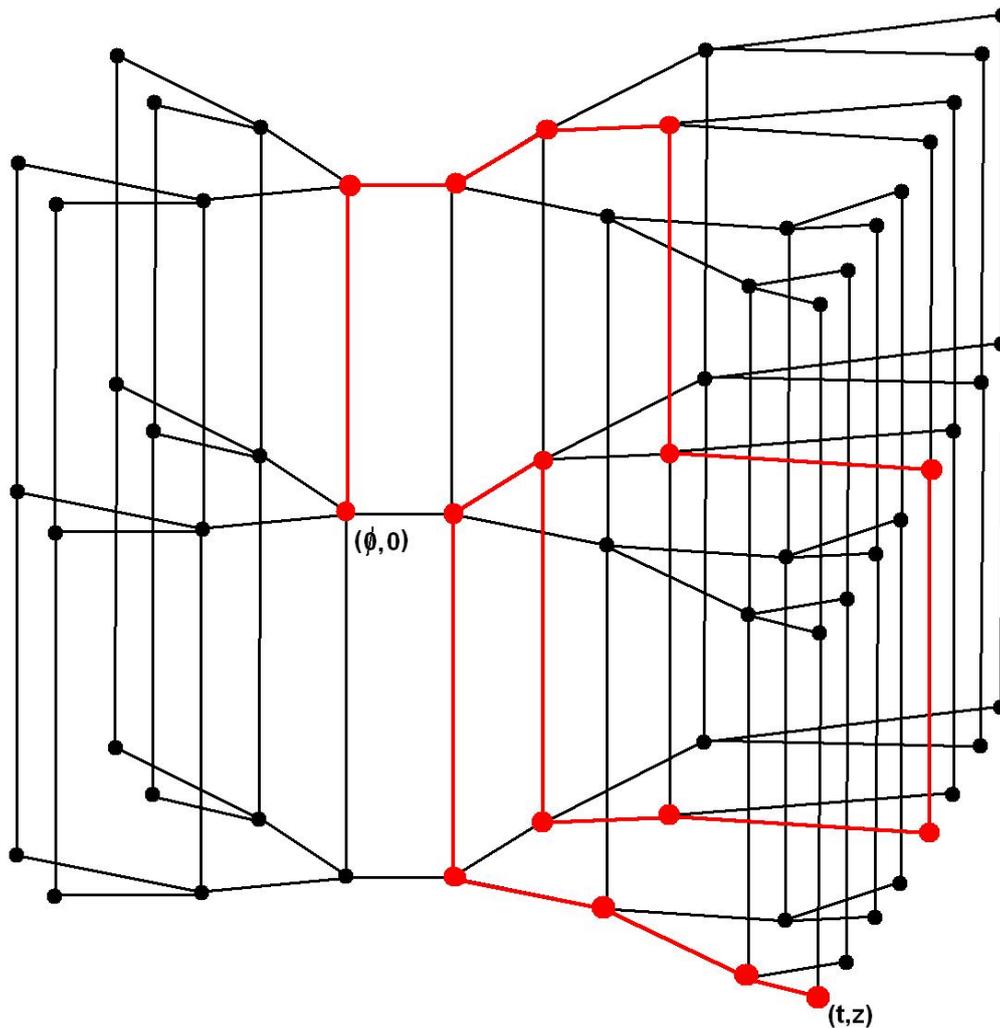


Figura 3.5:  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ .

Qualquer desses caminhos que conecte  $(\emptyset, 0)$  a  $(t, z)$  contém elos- $\mathbb{T}$  e elos- $\mathbb{Z}$ , mas ele pode ser projetado na seção  $\mathbb{T} \times \{0\}$  para fornecer uma *rota* do vértice  $(\emptyset, 0)$  ao vértice  $(t, 0)$ , em que rotas são caminhos com a condição auto-evitante retirada. Essa rota é uma sequência

$(t_0, 0), (t_1, 0), \dots, (t_n, 0)$ , onde  $t_0 = \emptyset$ ,  $t_n = t$ , e  $t_i$  é adjacente a  $t_{i+1}$  em  $\mathbb{T}$  para  $0 \leq i < n$ . Denotamos essa rota por  $\pi_t = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ , que representa uma rota em  $\mathbb{T}$  de  $\emptyset$  a  $t$ . Abaixo segue a rota  $\pi_t$  do exemplo acima.

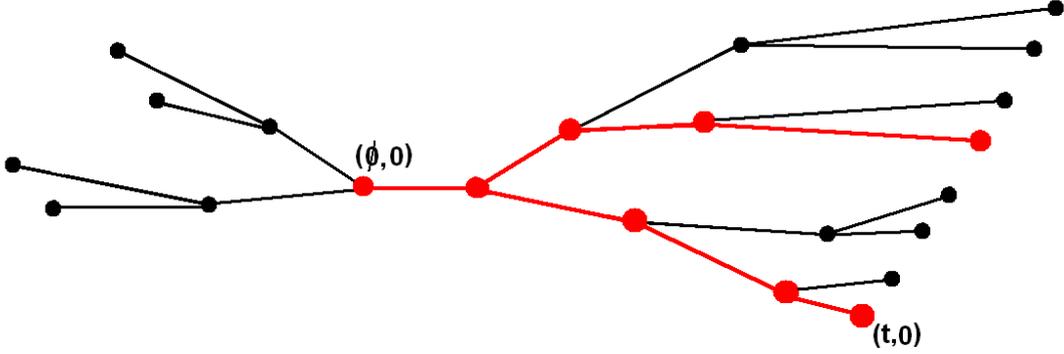


Figura 3.6: Rota  $\pi_t$  gerada a partir de  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ .

Voltando ao  $\chi(\tau, \lambda)$ , já sabemos que ele é igual à soma das probabilidades do vértice  $(t, z)$  estar conectado à origem  $(\emptyset, 0)$  para todo  $(t, z) \in V(\mathbb{L})$ . Como discutimos acima, a probabilidade de  $(t, z)$  estar conectado à origem  $(\emptyset, 0)$  é equivalente à probabilidade de que pelo menos um caminho  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  esteja aberto. Dessa forma, podemos concluir, então, que  $\chi(\tau, \lambda)$  é igual à soma das probabilidades, para todo  $(t, z) \in V(\mathbb{L})$ , da união de todos os caminhos  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  estarem abertos. Ou seja:

$$\chi(\tau, \lambda) = \sum_{(t,z) \in V(\mathbb{L})} \mathbb{P}_{\tau,\lambda} \left( \bigcup_{\substack{\mathbf{t}: t_n=t \\ \mathbf{z}: z_n=z}} \pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto} \right). \quad (3.2.2)$$

É claro que os eventos contidos na união não são disjuntos dois a dois, afinal, pode haver interseção de elos entre dois caminhos distintos que unem  $(\emptyset, 0)$  a  $(t, z)$ . Portanto, como a probabilidade da união de eventos não necessariamente disjuntos dois a dois é sempre menor ou igual que a soma das probabilidades dos eventos, segue que

$$\chi(\tau, \lambda) \leq \sum_{(t,z) \in V(\mathbb{L})} \sum_{\mathbf{t}: t_n=t} \sum_{\mathbf{z}: z_n=z} \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}),$$

onde as duas somas finais são sobre todas as possíveis sequências  $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ ,  $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ , onde  $(t_0, z_0) = (\emptyset, 0)$ .

Também podemos pensar de outra forma e, ao invés de fixar cada vértice  $(t, z)$  e analisar todos os caminhos que levam  $(\emptyset, 0)$  a  $(t, z)$ , podemos fixar um tamanho e analisar todos os

caminhos que partem da origem e que possuem exatamente esse tamanho. E, assim, podemos reescrever o limite superior do tamanho médio do aglomerado  $C$  da seguinte forma:

$$\chi(\tau, \lambda) \leq \sum_{(t,z) \in V(\mathbb{L})} \sum_{\mathbf{t}: t_n=t} \sum_{\mathbf{z}: z_n=z} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{t}} \sum_{\mathbf{z}} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}), \quad (3.2.3)$$

onde a soma em  $n$  abrange todos os tamanhos de caminhos.

Note que  $\sum_{\mathbf{z}} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}) = \sum_{z_0} \sum_{z_1} \sum_{z_2} \dots \sum_{z_{n-1}} \sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto})$ , ou seja, a soma é feita primeiramente sobre todos os possíveis valores de  $z_n$ .

Além disso, podemos afirmar que

$$\{\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}\} = \{[\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})' \text{ aberto}] \cap [(t_n, z_{n-1}) \leftrightarrow (t_n, z_n)]\},$$

onde  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})'$  é o caminho  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  com os elos  $-\mathbb{Z}$  de  $(t_n, z_{n-1})$  a  $(t_n, z_n)$  removidos.

Logo,  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}\{\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}\} = \mathbb{P}_{\tau, \lambda}\{[\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})' \text{ aberto}] \cap [(t_n, z_{n-1}) \leftrightarrow (t_n, z_n)]\}$ , e, conseqüentemente:

$$\sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}) = \sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}([\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})' \text{ aberto}] \cap [(t_n, z_{n-1}) \leftrightarrow (t_n, z_n)]).$$

Como os eventos  $\{\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})' \text{ aberto}\}$  e  $\{[(t_n, z_{n-1}) \leftrightarrow (t_n, z_n)]\}$  são independentes, pois dependem de arestas distintas, temos que:

$$\sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}) = \sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})' \text{ aberto}) \mathbb{P}_{\tau, \lambda}[(t_n, z_{n-1}) \leftrightarrow (t_n, z_n)].$$

E como  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})' \text{ aberto})$  não depende de  $z_n$ , temos que:

$$\sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}) \leq \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})' \text{ aberto}) \sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}[(t_n, z_{n-1}) \leftrightarrow (t_n, z_n)].$$

Se considerarmos

$$I(z_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (t_n, z_n) \longleftrightarrow (t_n, z_{n-1}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

poderemos interpretar  $\sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}[(t_n, z_{n-1}) \leftrightarrow (t_n, z_n)]$  como o número médio de vértices em  $\{t_n\} \times \mathbb{Z}$  que estão conectados por elos  $-\mathbb{Z}$  ao vértice  $(t_n, z_{n-1})$ . E a partir de agora denotaremos esse número médio por  $\chi_\lambda$ , ou seja,  $\chi_\lambda = E_{\tau, \lambda}(\sum_{z_n} I(z_n))$ .

Assim sendo, chegamos que  $\sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}) \leq \chi_\lambda \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})' \text{ aberto})$ ,

onde

$$\chi_\lambda = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$$

é o número médio de vértices em  $\{t_n\} \times \mathbb{Z}$  que estão conectados por elos- $\mathbb{Z}$  ao vértice  $(t_n, z_{n-1})$ , e  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})'$  é o caminho  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  com os elos- $\mathbb{Z}$  de  $(t_n, z_{n-1})$  a  $(t_n, z_n)$  removidos. Ou seja, o número de escolhas para  $z_n$  é restrito pelo fato que  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  já pode ter visitado a linha  $t_n \times \mathbb{Z}$ , removendo, desse modo, certos possíveis vértices de consideração. De qualquer forma, o conjunto de possibilidades para  $z_n$  não é maior que a linha inteira  $t_n \times \mathbb{Z}$ .

Seguindo a mesma lógica, vamos percebendo que somas progressivas sobre todos os  $z_i$ 's rendem similarmente que:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{z}} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}) &= \sum_{z_0} \sum_{z_1} \sum_{z_2} \dots \sum_{z_{n-1}} \sum_{z_n} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z}) \text{ aberto}) \leq \\ &\leq \chi_\lambda \sum_{z_0} \sum_{z_1} \sum_{z_2} \dots \sum_{z_{n-1}} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})' \text{ aberto}) \leq \chi_\lambda^2 \sum_{z_0} \sum_{z_1} \sum_{z_2} \dots \sum_{z_{n-2}} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})'' \text{ aberto}) \leq \\ &\leq \chi_\lambda^3 \sum_{z_0} \sum_{z_1} \sum_{z_2} \dots \sum_{z_{n-3}} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})''' \text{ aberto}) \leq \dots \leq \chi_\lambda^{n-1} \sum_{z_0} \sum_{z_1} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})^{(n-1)} \text{ aberto}) \leq \\ &\leq \chi_\lambda^n \sum_{z_0} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})^{(n)} \text{ aberto}) \leq \tau^n \chi_\lambda^{n+1}. \end{aligned}$$

A última desigualdade vem do fato de que, ao retirarmos o último elo- $\mathbb{Z}$  (que conecta  $(\emptyset, 0)$  a  $(\emptyset, z_0)$ ), sobram apenas elos- $\mathbb{T}$ . E o termo  $\tau^n$  vem do fato que  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  usa exatamente  $n$  elos- $\mathbb{T}$  de  $\mathbb{L}$ . Por fim, temos então que

$$\chi(\tau, \lambda) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{t}} \tau^n \chi_\lambda^{n+1}.$$

Esse limite para  $\chi(\tau, \lambda)$  pode ser melhorado da seguinte forma. Para uma dada rota  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  com  $t_0 = \emptyset$ , defina para  $2 \leq i \leq n$

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i = t_{i-2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$S(t) = \sum_{i=2}^n I_i.$$

Se  $I_n = 1$ , então o caminho projetado  $\pi_{\mathbf{t}}$  se move de  $t_{n-2}$  para  $t_{n-1}$  e retorna para  $t_{n-2}(= t_n)$ . Nessa circunstância, a soma sobre todas as possíveis escolhas para  $z_{n-1}$  em (3.2.3) contribui não mais que  $\chi_\lambda - 1$ , uma vez que  $z_{n-1}$  tem que ser diferente de  $z_{n-2}$ , dado que  $t_{n-2}$  já é igual a  $t_n$  e o caminho  $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  é auto-evitante (se  $z_{n-1}$  fosse igual a  $z_{n-2}$ , no próximo passo haveria retorno ao vértice  $(t_{n-2}, z_{n-2})$ ). Abaixo seguem as possibilidades de caminhos partindo de  $(t_{n-2}, z_{n-2})$  quando  $I_n = 1$ .

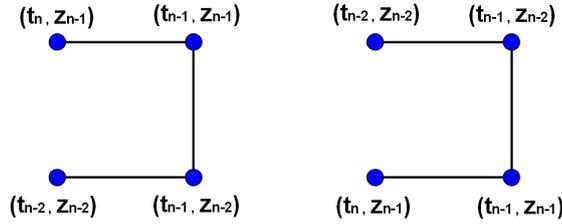


Figura 3.7: Possibilidades de caminhos partindo de  $(t_{n-2}, z_{n-2})$  quando  $I_n = 1$ .

Utilizando essa idéia, melhoramos o segundo termo da desigualdade da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \chi(\tau, \lambda) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{t}} \tau^n (\chi_\lambda - 1)^{S(\mathbf{t})} \chi_\lambda^{n+1-S(\mathbf{t})} \\ &= \chi_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\tau \chi_\lambda)^n \sum_{\mathbf{t}} (1 - \chi_\lambda^{-1})^{S(\mathbf{t})}. \end{aligned}$$

Seja  $\pi$  uma rota em  $\mathbb{T}$  começando na origem, pensada como uma seqüência de passos direcionados. Nós classificamos cada passo de  $\pi$  como um *outstep* ou um *instep* de acordo com a seguinte regra. Um passo de  $t_1$  para  $t_2$  onde  $t_1 \neq \emptyset$  é um *outstep* se, e somente se,  $\delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t_2) > \delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t_1)$ . Um passo de  $\emptyset$  para  $t$  é um *outstep* se  $t$  não é rotulado 0 e um *instep* caso contrário. Para cada  $t \in \mathbb{T}$  há exatamente  $k$  possíveis *outsteps*, uma vez que cada um dos vértices possui grau  $k + 1$ .

Retornando à rota  $\pi_{\mathbf{t}}$  descrita anteriormente, definimos  $J_i = 1$  se o passo em  $\pi_{\mathbf{t}}$  de  $t_i$  a  $t_{i+1}$  é um *instep* e  $J_i = 2$  caso contrário. Chamamos de

$$T(\mathbf{J}) = |\{i : J_{i-1} = 2, J_i = 1\}|$$

o número de vezes que um *outstep* é seguido por um *instep*. Note que  $T(\mathbf{J}) \leq S(\mathbf{t})$ , pois  $S(\mathbf{t})$  inclui *outsteps* seguidos por *insteps* e *insteps* seguidos por *outsteps*. Logo:

$$\begin{aligned}
\chi(\tau, \lambda) &\leq \chi_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\tau \chi_\lambda)^n \sum_{\mathbf{t}} (1 - \chi_\lambda^{-1})^{S(\mathbf{t})} \\
&\leq \chi_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\tau \chi_\lambda)^n \sum_{\mathbf{t}} (1 - \chi_\lambda^{-1})^{T(\mathbf{J})} \\
&\leq \chi_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (k \tau \chi_\lambda)^n \sum_{\mathbf{J}} (1 - \chi_\lambda^{-1})^{T(\mathbf{J})}, \tag{3.2.4}
\end{aligned}$$

onde a soma final é sobre todas as sequências  $\mathbf{J} = (J_0, J_1, \dots, J_{n-1})$  de 1's e 2's. Como um *instep* se dirige necessariamente ao único vértice que está mais próximo da origem da árvore, sabemos que qualquer 1 na sequência  $\mathbf{J}$  representará esse vértice. No caso de um *outstep*, no entanto, sabemos que existem  $k$  possibilidades distintas para cada vértice. Dessa forma, um 2 na sequência  $\mathbf{J}$  poderá representar qualquer um desses possíveis vértices. Assim sendo, é fácil verificar que a última desigualdade vem do fato de que cada sequência  $\mathbf{J}$  corresponde a, no máximo,  $k^n$  sequências  $\mathbf{t}$ , em que o máximo é alcançado quando a sequência  $\mathbf{J}$  é composta apenas por 2's. Além disso,

$$\sum_{\mathbf{J}} (1 - \chi_\lambda^{-1})^{T(\mathbf{J})} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \chi_\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que se comporta, para valores suficientemente grandes de  $n$ , como  $\eta^{n-1}$  (ver Teorema 2.3 de [11]), onde  $\eta = 1 + \sqrt{1 - \chi_\lambda^{-1}}$  é o maior autovalor da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \chi_\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir daí, concluímos que  $\chi(\tau, \lambda) < \infty$  se  $k \tau \chi_\lambda (1 + \sqrt{1 - \chi_\lambda^{-1}}) < 1$ , pois, nesse caso, a série geométrica em (3.2.4) converge.

Substituindo o valor de  $\chi_\lambda$  encontrado anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}
k\tau\chi_\lambda(1 + \sqrt{1 - \chi_\lambda^{-1}}) < 1 &\Leftrightarrow k\tau\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{-1}}) < 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow k\tau(1 + \lambda)(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)}) < 1 - \lambda \Leftrightarrow k\tau(1 + \lambda)(1 + \sqrt{\frac{1+\lambda-1+\lambda}{1+\lambda}}) < 1 - \lambda \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow k\tau(1 + \lambda)(1 + \sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}}) < 1 - \lambda \Leftrightarrow k\tau\left(1 + \sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}} + \lambda + \lambda\sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}}\right) < 1 - \lambda \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow k\tau(1 + \lambda + (1 + \lambda)\sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}}) < 1 - \lambda \Leftrightarrow k\tau(1 + \lambda + \sqrt{2\lambda(1 + \lambda)}) < 1 - \lambda.
\end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. □

A proposição 2, abaixo, declara que se o par ordenado  $(\tau, \lambda)$  estiver localizado acima da curva que ela apresenta (Figura 3.8), então há pelo menos um aglomerado aberto infinito no grafo  $\mathbb{L}$ .

**Proposição 2:** Se  $k e^{-\phi(\tau, \lambda)} > 1$ , onde  $\phi(\tau, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (n, 0) \text{ em } \mathbb{Z}^2) \right\}$ , então há pelo menos um aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{L}$  quase certamente.

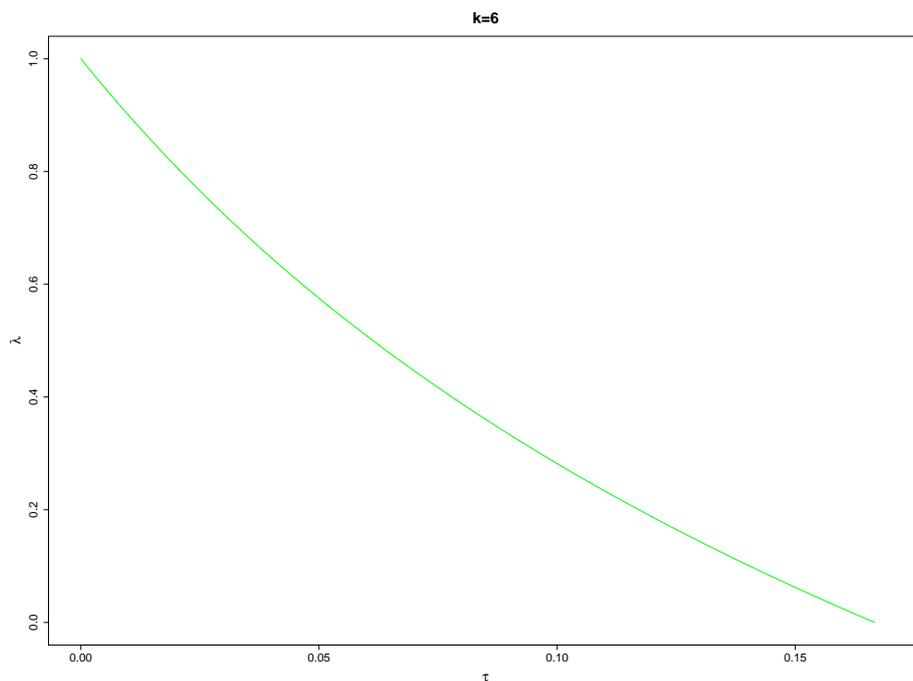


Figura 3.8: Curva gerada pela proposição 2 para  $k = 6$ .

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $\theta_{\mathbb{L}}(\tau, \lambda) > 0$  se  $k e^{-\phi(\tau, \lambda)} > 1$ . Para isso, considere a sub-árvore  $\mathbb{T}^+$  de  $\mathbb{T}$  como sendo a componente que contém  $\emptyset$  do grafo obtido de  $\mathbb{T}$  ao se deletar a aresta  $\langle \emptyset, 0 \rangle$  (o que se encontra envolvido de vermelho na figura abaixo) e fixe um inteiro positivo  $L$ ; mais tarde vamos tomar o limite quando  $L \rightarrow \infty$ .

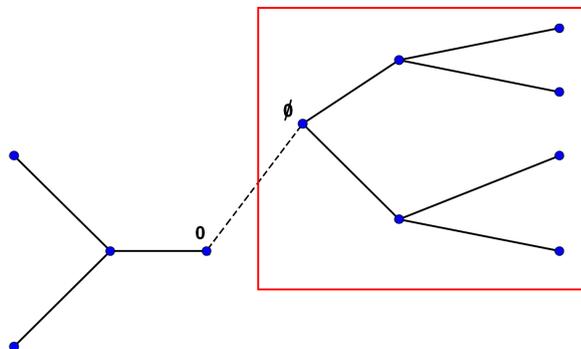


Figura 3.9: Sub-árvore  $\mathbb{T}^+$  de  $\mathbb{T}$ .

A partir daí, construímos um processo de ramificação em  $\mathbb{T}^+$  da seguinte maneira. Se  $t \in V(\mathbb{T}^+)$  é tal que  $\delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t) = L$ , dizemos que  $t$  é *verde* se existe um caminho aberto de  $\mathbb{T}^+ \times \mathbb{Z}$  ligando  $(\emptyset, 0)$  a  $(t, 0)$  e, com exceção do vértices finais, usando apenas vértices de  $\mathbb{L}$  em  $\{(u, z) \in V(\mathbb{L}) : 0 < \delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, u) < L, z \in \mathbb{Z}\}$ . A figura abaixo ilustra um exemplo quando  $L = 3$ .

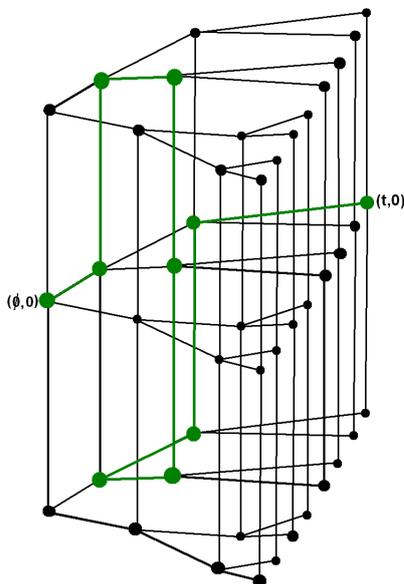


Figura 3.10: Caminho aberto em  $\mathbb{T}^+ \times \mathbb{Z}$  ligando  $(\emptyset, 0)$  a  $(t, 0)$ .

Procedendo indutivamente, suponha agora que  $t \in V(\mathbb{T}^+)$  é tal que  $\delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t) = aL$  para um inteiro positivo  $a$ . Por propriedades das árvores, podemos garantir que existe um único vértice  $v \in V(\mathbb{T}^+)$  tal que  $\delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, v) = (a-1)L$  e  $\delta_{\mathbb{T}}(v, t) = L$ . Dizemos que  $t$  é *verde* se, e somente se, (i)  $v$  é verde, e (ii) existe um caminho aberto de  $(v, 0)$  a  $(t, 0)$  usando, com exceção dos vértices finais, apenas vértices de  $\mathbb{L}$  em  $\{(u, z) : (a-1)L < \delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, u) < aL, z \in \mathbb{Z}\}$ .

Dessa maneira percebemos que o conjunto de vértices verdes constitui um processo de ramificação em  $\mathbb{T}^+$  com média pelo menos

$$\mu_L = k^L \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (L, 0) \text{ em } T_{\infty}(L))$$

onde  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}$  é a medida de probabilidade de percolação anisotrópica em  $\mathbb{Z}^2$  e

$$T_{\infty}(L) = \lim_{m \rightarrow \infty} T_m(L),$$

onde  $T_m(L) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq z_1 \leq L, |z_2| \leq m\}$ . Da Teoria de processo de ramificação, sabemos que, se  $\mu_L > 1$  para algum  $L \geq 1$ , então o processo de ramificação é supercrítico e tem probabilidade positiva de sobrevivência. Isso implica na existência de um caminho aberto infinito partindo da origem de  $\mathbb{L}$  com probabilidade positiva, isto é,  $\theta_{\mathbb{L}}(\tau, \lambda) > 0$ . Verificaremos agora, então, a partir da igualdade acima, as condições que causam  $\mu_L > 1$ .

Como

$$\mu_L = k^L \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (L, 0) \text{ em } T_{\infty}(L)),$$

temos

$$\log \mu_L = \log [k^L \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (L, 0) \text{ em } T_{\infty}(L))],$$

ou seja,

$$\log \mu_L = L \log k + \log [\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (L, 0) \text{ em } T_{\infty}(L))].$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{L} \log \mu_L &= -\log k - \frac{1}{L} \log [\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (L, 0) \text{ em } T_{\infty}(L))] \\ &\leq -\log k - \frac{1}{L} \log [\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (L, 0) \text{ em } T_m(L))]. \end{aligned}$$

Mas  $-\frac{1}{L} \log [\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (L, 0) \text{ em } T_m(L))] \rightarrow \phi_m(\tau, \lambda)$  quando  $L \rightarrow \infty$ .

Assim,

$$-\log k - \frac{1}{L} \log [\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((0, 0) \leftrightarrow (L, 0) \text{ em } T_m(L))] \xrightarrow{L \rightarrow \infty} -\log k + \phi_m(\tau, \lambda)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\log k + \phi(\tau, \lambda) \\ & = -\log (ke^{-\phi(\tau, \lambda)}). \end{aligned}$$

Dessa forma, para todo  $L$  suficientemente grande, temos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{L} \log \mu_L \leq -\log (ke^{-\phi(\tau, \lambda)}) &\Rightarrow \log \mu_L \geq L \log (ke^{-\phi(\tau, \lambda)}) = \log (ke^{-\phi(\tau, \lambda)})^L \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu_L \geq (ke^{-\phi(\tau, \lambda)})^L. \end{aligned}$$

Portanto, se  $ke^{-\phi(\tau, \lambda)} > 1$ , então  $\mu_L > 1$ . □

**Lema 3:** Seja  $C$  o aglomerado aberto de  $\mathbb{L}$  na origem e, para  $t \in V(\mathbb{T})$ , seja  $D_t = \{(t, z) \in V(\mathbb{L}) : (\emptyset, 0) \leftrightarrow (t, z)\}$  a interseção de  $C$  com a linha  $\{t\} \times \mathbb{Z}$ . Se, para algum  $\tau, \lambda$ , acontecer que  $|D_\emptyset| < \infty$  quase certamente, então:

- (i) Quase certamente  $|D_t| < \infty$  para todo  $t \in V(\mathbb{T})$ ;
- (ii)  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (t, z)) \rightarrow 0$  quando  $\delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t) + |z| \rightarrow \infty$ .

Se, além disso,  $\theta_{\mathbb{L}}(\tau, \lambda) > 0$ , então existem infinitos aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  quase certamente e cada um deles intercepta cada linha  $\{t\} \times \mathbb{Z}$  somente em um número finito de vértices.

*Demonstração.* Vamos demonstrar primeiro a parte (i). Para isso vamos supor que  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_\emptyset| < \infty) = 1$  mas que exista algum vértice  $k \in \mathbb{T}$  tal que  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_k| = \infty) > 0$ .

Como assumimos que existe *pelo menos* um vértice  $k$  com probabilidade estritamente positiva de que  $|D_k|$  seja infinito, podemos escolher, então, dentre todos os vértices com essa propriedade, um vértice  $t$  cuja distância até a origem seja mínima. Ou seja, um vértice  $t$  tal que  $\delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t) = m$  seja a menor possível. Assim sendo, podemos garantir que  $t$  é o vértice mais próximo da origem tal que  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_t| = \infty) > 0$ .

Se chamarmos de  $s$  o único vértice de  $\mathbb{T}$  que satisfaz  $\delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, s) = m - 1$  e  $\delta_{\mathbb{T}}(s, t) = 1$ , sabemos, então, que  $|D_s|$  é finito quase certamente, pois  $t$  é o primeiro vértice com possibilidade de que  $|D_t|$  seja infinito. E como essa probabilidade é estritamente positiva, vamos assumir que

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_t| = \infty) = \eta > 0. \tag{3.2.5}$$

A partir dessas suposições, devemos mostrar, então, que o evento  $\{|D_s| < \infty\} \cap \{|D_t| = \infty\}$  tem probabilidade zero, ou seja,  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_s| < \infty) < 1$ , o que contradiz a minimalidade de  $\delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t)$  e, portanto, conclui a demonstração da primeira parte do lema.

Para isso, defina os eventos,

$$A_M = \{(\emptyset, 0) \leftrightarrow (s, z) \text{ para algum } |z| > M\}$$

e

$$B_M = \{(\emptyset, 0) \leftrightarrow (t, z) \text{ para infinitos } |z| > M\}.$$

Note que  $A_M \supset A_{M+1}$  e que  $A_M \downarrow \bigcap_{M=1}^{\infty} A_M = \{|D_s| = \infty\}$ . Logo,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A_M) = \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_s| = \infty) = 0.$$

Assim, dado  $0 < \epsilon < \eta$ , podemos encontrar  $M_0$  tal que  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A_{M_0}) < \epsilon$ . Observe que

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(B_{M_0}) = \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_t| = \infty) = \eta > 0.$$

Defina o conjunto de elos  $E_{M_0} = \{(s, z), (t, z) : |z| > M_0\}$  e considere o evento

$$D_{M_0} = \{\text{existe um conjunto infinito } Z \text{ de inteiros } z \\ \text{com } |z| > M_0 \text{ tal que } (\emptyset, 0) \leftrightarrow (t, z) \text{ para todo } z \in Z \\ \text{sem examinarmos os estados dos elos em } E_{M_0}\}.$$

Observe que  $D_{M_0} \supset (A_{M_0}^c \cap B_{M_0})$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(D_{M_0}) &\geq \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A_{M_0}^c \cap B_{M_0}) = 1 - \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A_{M_0}) = 1 - \epsilon \\ &\geq 1 - [\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A_{M_0}) + \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(B_{M_0}^c)] \geq 1 - [\epsilon + 1 - \eta] = \eta - \epsilon. \end{aligned}$$

Agora considere o evento

$$H_{M_0} = \{\text{infinitos elos em } E_{M_0} \text{ que tem um v\u00e9rtice final} \\ \text{da forma } (t, z) \text{ para } z \in Z \text{ est\u00e3o abertos}\}.$$

Note que, por Borel-Cantelli [6],  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(H_{M_0}) = 1$ . Observe tamb\u00e9m que

$$\{|D_s| = \infty\} \supset (\{H_{M_0}\} \cap \{A_{M_0}^c\} \cap \{B_{M_0}\}).$$

Logo,

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_s| = \infty) \geq \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(H_{M_0} \cap A_{M_0}^c \cap B_{M_0}) = \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A_{M_0}^c \cap B_{M_0}) \geq \eta - \epsilon > 0.$$

Mas isso \u00e9 uma contradi\u00e7\u00e3o, uma vez que, por hip\u00f3tese,  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_s| = \infty) = 0$ .

Antes de discutir a parte (ii), vamos provar a afirmação final do lema. Suponhamos por absurdo que houvesse um único aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{L}$ . Então, por ergodicidade na direção  $\mathbb{Z}$ , o conjunto de vértices  $(\emptyset, z)$  pertencentes a esse aglomerado teria densidade positiva  $\theta_{\mathbb{L}}$  e, portanto, seria infinito, de modo que  $D_{\emptyset}$  seria infinito com probabilidade  $\theta_{\mathbb{L}} > 0$ , uma contradição. E considerando os argumentos de Newman and Schulman (1981) que afirmam que o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  não pode assumir valores finitos estritamente maiores do que um, a única alternativa restante, então, é a de que existam infinitos aglomerados abertos infinitos, que, de acordo com a parte (i), possuem interseção *finita* com  $\{t\} \times \mathbb{Z}$ .

Agora provaremos a parte (ii). Primeiro notamos que, por (i), a probabilidade de que  $(\emptyset, 0)$  esteja conectado a  $(t, z)$  tende a zero quando  $|z| \rightarrow \infty$  para  $t$  fixo, afinal  $|D_t| < \infty$  quase certamente para todo  $t \in V(\mathbb{T})$ . Uma estratégia para demonstrarmos a segunda parte do lema é, então, assumirmos que para alguma sequência  $(t_i, z_i)$  com  $\delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t_i) \rightarrow \infty$ , acontece que

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (t_i, z_i)) \geq \eta > 0 \quad \forall i,$$

e procurarmos uma contradição.

Para cada  $i$ , nós podemos escolher  $R_i$  de modo que, para qualquer  $z$ , o evento

$$A_i^z(R_i) = (\emptyset, z) \leftrightarrow (t_i, z_i + z) \text{ na região } \mathfrak{R}_i = \{(t, z') : \delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t) \leq R_i, z' \in \mathbb{Z}\}$$

possua probabilidade pelo menos  $\eta/2$  de ocorrência.

Isso é possível porque  $\{A_i^z(R_i)\} \uparrow \{(\emptyset, z) \leftrightarrow (t_i, z_i + z)\}$  quando  $R_i \rightarrow \infty$ , o que implica que

$$\lim_{R_i \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A_i^z(R_i)) = \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, z) \leftrightarrow (t_i, z_i + z)) = \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (t_i, z_i)) \geq \eta > 0.$$

Dessa forma, podemos escolher  $R_i$  grande o suficiente tal que

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A_i^z(R_i)) > \frac{\eta}{2}.$$

Escolhendo uma subsequência da sequência  $\{t_i, z_i\}_{i \geq 1}$ , se necessário, nós podemos e vamos assumir que  $R_i < \delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t_{i+1})$  para cada  $i$ . Ou seja,  $R_1 < \delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t_2)$ ,  $R_2 < \delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t_3)$ ,  $R_3 < \delta_{\mathbb{T}}(\emptyset, t_4)$ , e assim sucessivamente.

Para  $z \geq 0$ , seja  $B_i^z$  o evento que ambos os vértices  $(\emptyset, 0)$  e  $(\emptyset, z)$  estejam conectados na região  $\mathfrak{R}_i$  a vértices em  $\{(t_i, z') : z_i \leq z' \leq z_i + z\}$ . Dessa forma, sabemos, então, que se o evento  $\{A_i^0 \cap A_i^z\}$  ocorre, então o evento  $\{B_i^z\}$  também ocorre. Ou seja,  $\{A_i^0 \cap A_i^z\} \subset \{B_i^z\}$ . Por essa razão podemos garantir que

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(B_i^z) \geq \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(A_i^0 \cap A_i^z).$$

Além disso, como  $\{A_i^0\}$  e  $\{A_i^z\}$  são eventos crescentes, pela desigualdade de FKG, temos que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(B_i^z) \geq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(A_i^0 \cap A_i^z) \geq (\eta/2)^2 \quad \forall z \geq 0,$$

de modo que  $B_i^z$  ocorre para infinitos  $i$ 's com probabilidade pelo menos  $(\eta/2)^2$ .

Para ver isso, note que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(B_i^z) \geq (\eta/2)^2 > 0, \quad \forall z \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(B_i^z \text{ infinitas vezes}) &= \mathbb{P}_{\tau,\lambda}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} B_j^z\right) = 1 - \mathbb{P}_{\tau,\lambda}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} B_j^z\right)^c = \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\tau,\lambda}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} (B_j^z)^c\right) = 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\tau,\lambda}\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} (B_j^z)^c\right) \geq \\ &\geq 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(B_k^z)^c \geq 1 - \left[1 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{\eta}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z)) \geq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(B_i^z \text{ ocorrer para infinitos } i's) \geq \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 > 0, \quad (3.2.6)$$

e, assim, chegaremos a uma contradição, uma vez que já concluimos de (i) que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z)) \longrightarrow 0 \text{ quando } |z| \longrightarrow \infty.$$

Para obter (3.2.6), vamos, para um dado  $z$ , definir  $b_1, b_2, \dots$  como uma seqüência de  $i$ 's para os quais  $B_i^z$  ocorre, onde  $b_k = \infty$  significa que  $B_i^z$  ocorre menos que  $k$  vezes. A partir disso, vamos analisar a seguinte probabilidade:

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(b_j < \infty \text{ e } (\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j}).$$

Definiremos como  $C_{\mathfrak{R}_{b_j}}$  o conjunto de todas as possíveis configurações de todas as arestas em  $\mathfrak{R}_{b_j}$  com exceção dos  $z$  elos- $\mathbb{Z}$  que conectam os vértices em  $\{(t_{b_j}, z') : z_i \leq z' \leq z_i + z\}$ . Dessa forma, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{\tau,\lambda}[(b_j < \infty) \cap ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j})] = \\ &= \mathbb{P}_{\tau,\lambda}[(\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j} / (b_j < \infty)] \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(b_j < \infty) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{C_{\mathfrak{R}_{b_j}}} \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j}) / (b_j < \infty) \cap C_{\mathfrak{R}_{b_j}} \right] \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ (b_j < \infty) \cap C_{\mathfrak{R}_{b_j}} \right].$$

A partir desse ponto, podemos garantir que  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda} [(\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j} / (b_j < \infty) \cap C_{\mathfrak{R}_{b_j}}]$  é no mínimo  $\lambda^z$ , pois, como  $b_j < \infty$ , então  $B_i^z$  ocorre, e, por essa razão, uma das maneiras de garantirmos que  $(\emptyset, 0)$  se conecte a  $(\emptyset, z)$  em  $\mathfrak{R}_{b_j}$  é abrir todos os  $z$  elos- $\mathbb{Z}$  que conectam os vértices em  $\{(t_{b_j}, z') : z_i \leq z' \leq z_i + z\}$ . E, como os estados desses  $z$  elos são independentes do valor de  $b_j$  e a probabilidade de que estejam todos abertos é igual a  $\lambda^z$ , podemos assegurar que a probabilidade do evento complementar é  $1 - \lambda^z$ . Ou seja:

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda} [(\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j} / (b_j < \infty) \cap C_{\mathfrak{R}_{b_j}}] \leq 1 - \lambda^z.$$

Porém, é importante ressaltar que a desigualdade acima foi tomada como base ao pensarmos apenas na conexão entre  $(\emptyset, 0)$  e  $(\emptyset, z)$  pelos  $z$  elos que conectam os vértices em  $\{(t_{b_j}, z') : z_i \leq z' \leq z_i + z\}$ . Fora isso, sabemos também que  $\mathfrak{R}_{b_j} \supset \mathfrak{R}_{b_{j-1}} \supset \mathfrak{R}_{b_{j-2}} \supset \mathfrak{R}_{b_{j-3}} \supset \dots$ . Então se  $(\emptyset, 0)$  se conecta a  $(\emptyset, z)$  em  $\mathfrak{R}_{b_{j-k}}$  ( $k \geq 1$ ), obviamente  $(\emptyset, 0)$  também estará conectado a  $(\emptyset, z)$  em  $\mathfrak{R}_{b_j}$ . E, além disso, para que  $b_j$  seja finito, obviamente  $b_{j-1}$  também tem que ser finito.

Por essas razões, podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ (b_j < \infty) \cap ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j}) \right] = \\ & = \sum_{C_{\mathfrak{R}_{b_j}}} \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j}) / (b_j < \infty) \cap C_{\mathfrak{R}_{b_j}} \right] \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ (b_j < \infty) \cap C_{\mathfrak{R}_{b_j}} \right] \leq \\ & \leq (1 - \lambda^z) \sum_{C_{\mathfrak{R}_{b_{j-1}}}} \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_{j-1}}) / (b_{j-1} < \infty) \cap C_{\mathfrak{R}_{b_{j-1}}} \right] \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ (b_{j-1} < \infty) \cap C_{\mathfrak{R}_{b_{j-1}}} \right] = \\ & = (1 - \lambda^z) \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ (b_{j-1} < \infty) \cap ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_{j-1}}) \right]. \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, temos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ (b_j < \infty) \cap ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j}) \right] \leq \\ & \leq (1 - \lambda^z) \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ (b_{j-1} < \infty) \cap ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_{j-1}}) \right] \leq \\ & \leq (1 - \lambda^z)^2 \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ (b_{j-2} < \infty) \cap ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_{j-2}}) \right] \leq \\ & \leq (1 - \lambda^z)^3 \mathbb{P}_{\tau, \lambda} \left[ (b_{j-3} < \infty) \cap ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_{j-3}}) \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq \dots \leq (1 - \lambda^z)^j.$$

E tomando o limite quando  $j \rightarrow \infty$ , concluimos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\tau, \lambda} [(b_j < \infty) \cap ((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j})] = 0.$$

Tendo mostrado isso, vamos, então, voltar um pouco ao objetivo anterior, que era mostrar que

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z)) \geq \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(B_i^z \text{ infinitas vezes}) \geq \left(\frac{\eta^2}{2}\right).$$

Para isso, observemos primeiramente que

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(B_i^z \text{ infinitas vezes}) = \mathbb{P}_{\tau, \lambda}\left(\bigcap_j \{b_j < \infty\}\right).$$

Como os eventos  $\{b_j < \infty\}$  são decrescentes, obtemos que

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}\left(\bigcap_j \{b_j < \infty\}\right) = \lim_j \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(b_j < \infty).$$

E, então, podemos separar essa probabilidade em duas outras, como abaixo:

$$\begin{aligned} & \lim_j \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(b_j < \infty) = \\ &= \lim_j [\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(b_j < \infty; (\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j}) + \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(b_j < \infty; (\emptyset, 0) \not\leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j})] = \\ &= \lim_j [\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(b_j < \infty; (\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j})] + \lim_j [\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(b_j < \infty; (\emptyset, 0) \not\leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j})]. \end{aligned}$$

Já mostramos que a segunda parcela é equivalente a zero para todo  $z$ . Então,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(B_i^z \text{ infinitas vezes}) = \lim_j \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(b_j < \infty) = \\ &= \lim_j \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(b_j < \infty; (\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j}) \leq \\ &\leq \lim_j \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z) \text{ em } \mathfrak{R}_{b_j}) \leq \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z)), \quad \forall z. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (\emptyset, z)) \geq \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(B_i^z \text{ infinitas vezes}) \geq \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 > 0, \quad \forall z,$$

o que é uma contradição. Esse argumento completa a prova. □

A proposição 4, abaixo, fornece um limite inferior para a curva que divide a região onde existem infinitos aglomerados abertos da região onde há um único aglomerado aberto infinito (Figura 3.11). Ou seja, se o par ordenado  $(\tau, \lambda)$  estiver localizado abaixo da curva gerada pela proposição 4 e se  $\theta_{\mathbb{L}}(\tau, \lambda) > 0$ , sabemos que quase certamente ocorrem infinitos aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$ .

**Proposição 4:** Se  $\tau \sqrt{k(1 + \lambda + \sqrt{2\lambda(1 + \lambda)})} < 1 - \lambda$ , então  $|D_{\emptyset}| < \infty$  quase certamente. Se, além disso,  $\theta_{\mathbb{L}}(\tau, \lambda) > 0$ , então existem infinitos aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$ .

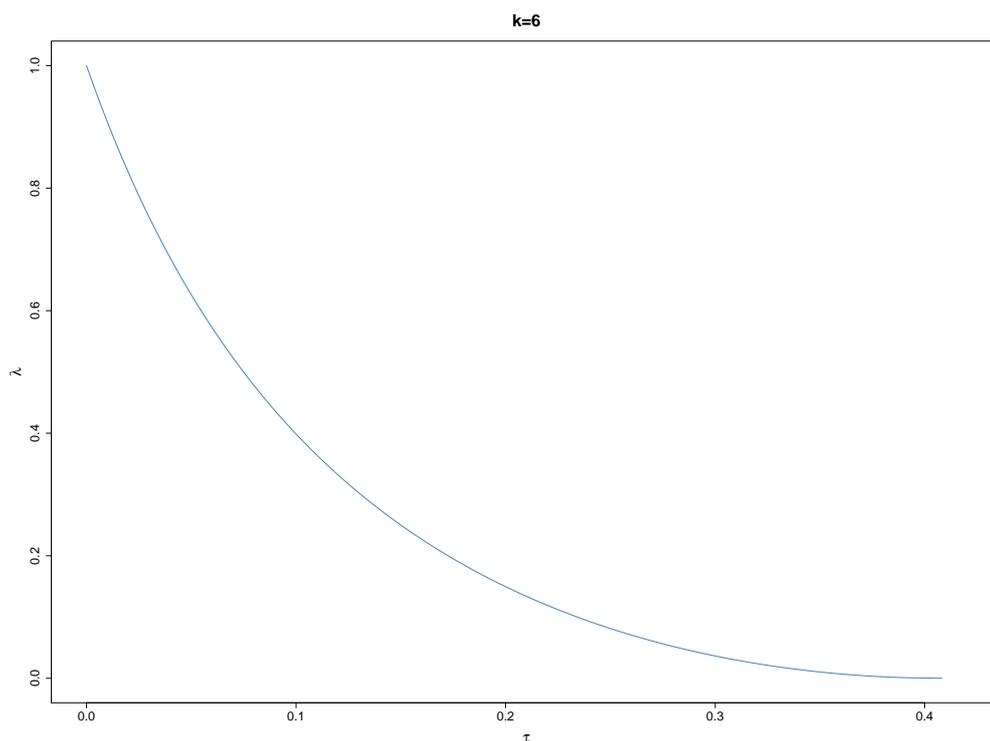


Figura 3.11: Curva gerada pela proposição 4 para  $k = 6$ .

*Demonstração.* A prova dessa proposição é muito semelhante da prova da proposição 1. Naquela prova encontramos um limite superior para o número médio de vértices no aglomerado aberto  $C$  na origem de  $\mathbb{L}$ , denotado por  $\chi(\tau, \lambda)$ . O interesse da proposição 4, entretanto, se concentra na interseção de  $C$  com a linha  $\{\emptyset\} \times \mathbb{Z}$  e, como o número esperado de vértices nessa interseção é sempre necessariamente menor ou igual que o número esperado de vértices no aglomerado aberto  $C$ , podemos afirmar de antemão que

$$E_{\tau, \lambda} |D_{\emptyset}| \leq \chi(\tau, \lambda) \leq \chi_{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\tau \chi_{\lambda})^n \sum_{\mathbf{t}} (1 - \chi_{\lambda}^{-1})^{T(\mathbf{J})}.$$

Ao utilizarmos essa desigualdade encontrada na demonstração da proposição 1, podemos ser ainda mais pontuais e rigorosos para definir o número esperado de vértices na interseção de  $C$  com  $\{\emptyset\} \times \mathbb{Z}$ , e fazermos com que, diferentemente de (3.2.4), o segundo somatório seja apenas sobre todas as rotas  $t = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  em  $\mathbb{T}$  satisfazendo  $t_0 = \emptyset$  e  $t_n = \emptyset$ . Ou seja:

$$E_{\tau, \lambda} |D_{\emptyset}| \leq \chi_{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\tau \chi_{\lambda})^n \sum_{\mathbf{t}: t_n = \emptyset} (1 - \chi_{\lambda}^{-1})^{T(\mathbf{J})}.$$

Obviamente  $n$  é par, afinal, para retornar à origem, é necessário que a quantidade de passos voltando a ela seja exatamente a mesma quantidade de passos se distanciando dela. Queremos mostrar agora, então, que qualquer caminho não contém mais do que  $\frac{n}{2}$  *outsteps*. Para ver isso, basta notar que em trajetos de  $\emptyset$  para  $t$  começando com um *outstep*, o número de *outsteps* é igual ao número de *insteps*, enquanto que se o mesmo trajeto começar com um *instep*, o número de *insteps* ultrapassa o número de *outsteps* em 2 (pois haverá um *instep* de  $\emptyset$  para o vértice 0 e outro de 0 para  $\emptyset$ ). Portanto, cada sequência  $J$  corresponde a, no máximo,  $k^{\frac{n}{2}}$  sequências  $t$ , resultando que

$$E_{\tau, \lambda} |D_{\emptyset}| \leq \chi_{\lambda} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}}^{\infty} (\tau \chi_{\lambda} \sqrt{k})^n \sum_{\mathbf{J}} (1 - \chi_{\lambda}^{-1})^{T(\mathbf{J})},$$

que, pelo argumento anterior, converge se

$$\tau \chi_{\lambda} \sqrt{k} (1 + \sqrt{1 - \chi_{\lambda}^{-1}}) < 1.$$

Substituindo  $\chi_{\lambda} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ , concluímos que sob as condições da proposição 4,  $E_{\tau, \lambda} |D_{\emptyset}| < \infty$  e, dessa forma,  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|D_{\emptyset}| = \infty) = 0$  como desejado. Se, além disso,  $\theta(\tau, \lambda) > 0$ , então, pelo Lema 3, existem infinitos aglomerados abertos infinitos quase certamente.

□

A proposição 5, por fim, fornece um limite para o par ordenado  $(\tau, \lambda)$  a partir do qual ocorre apenas um aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{L}$ . Isto é, acima da curva gerada pela relação entre  $\tau$  e  $\lambda$  dada por essa proposição (Figura 3.12), quase certamente há um único aglomerado aberto infinito no grafo  $\mathbb{L}$ .

**Proposição 5:** Se  $k e^{-2\phi(\tau, \lambda)} > 1$ , onde  $\phi(\tau, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{-\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((\emptyset, 0) \leftrightarrow (n, 0) \text{ em } \mathbb{Z}^2)\}$ , então quase certamente há um único aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{L}$ .

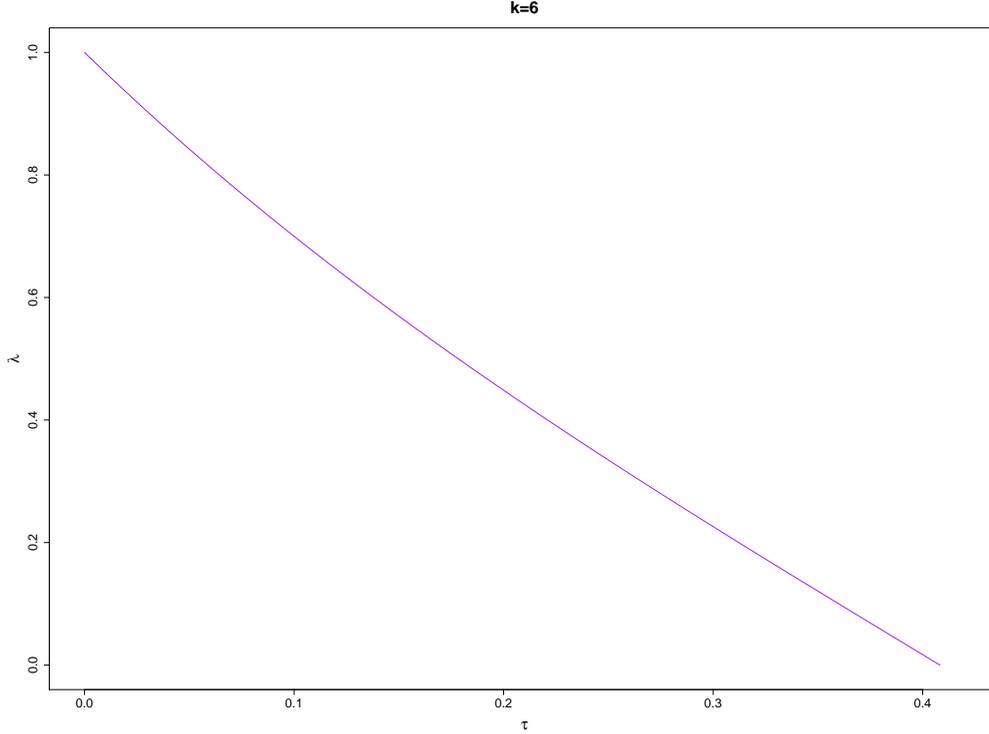


Figura 3.12: Curva gerada pela proposição 5 para  $k = 6$ .

*Demonstração.* Para demonstrar a proposição 5, vamos supor, então, que  $ke^{-2\phi(\tau,\lambda)} > 1$ . Sabendo que  $\phi_m(\tau, \lambda) \downarrow \phi(\tau, \lambda)$  quando  $m \rightarrow \infty$ , podemos escolher  $m$  inteiro positivo suficientemente grande tal que

$$ke^{-2\phi_m(\tau,\lambda)} > 1,$$

onde  $\phi_m(\tau, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_{\tau,\lambda}((0, 0) \leftrightarrow (n, 0) \text{ em } T_m(n)) \right\}$ .

Sabemos também que  $p_m(n) = \mathbb{P}_{\tau,\lambda}((0, 0) \leftrightarrow (n, 0) \text{ em } T_m(n))$  satisfaz a desigualdade

$$p_m(n) \geq \lambda^{4m} \tau^2 e^{-n\phi_m}, \forall n \geq 0.$$

E utilizando as duas desigualdades acima, podemos escolher um inteiro positivo  $n$  suficientemente grande tal que

$$k^n p_m(n)^2 \geq \lambda^{8m} \tau^4 (ke^{-2\phi_m})^n > 1, \quad (3.2.7)$$

afinal, como  $ke^{-2\phi_m} > 1$ , a parte  $\lambda^{8m} \tau^4$  pode ser tão pequena quanto se queira que, ainda assim, garante-se a existência de algum  $n$  que torne toda a desigualdade estritamente maior que 1.

Construiremos agora um certo processo de ramificação e usaremos (3.2.7) para mostrar que tal processo é supercrítico. Para qualquer vértice  $(t, z)$  de  $\mathbb{L}$  com  $t \neq \emptyset$ , existe um único

vértice  $s$  de  $\mathbb{T}$  tal que  $\delta_{\mathbb{T}}(s, \emptyset) = \delta_{\mathbb{T}}(t, \emptyset) - 1$  e  $\delta_{\mathbb{T}}(s, t) = 1$ . Denotaremos por  $T^+(t)$  a subárvore que contém  $t$  do grafo obtido ao se deletar o elo  $\langle s, t \rangle$  de  $\mathbb{T}$ .

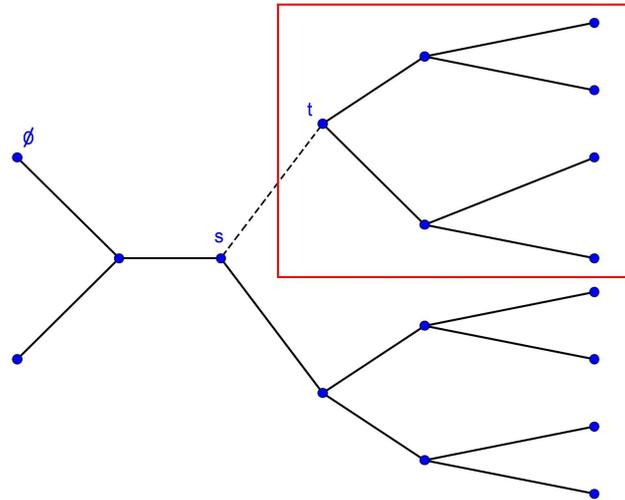


Figura 3.13:  $T^+(t)$ .

Seja  $T^+(t, z)$  o subgrafo de  $\mathbb{L}$  induzido pelo conjunto de vértices  $\{(u, y) : u \in V(T^+(t))\}$  e  $T_m^+(t, z)$  o subgrafo de  $\mathbb{L}$  com o conjunto de vértices  $\{(u, y) : u \in V(T^+(t)), |z - y| \leq m\}$ .

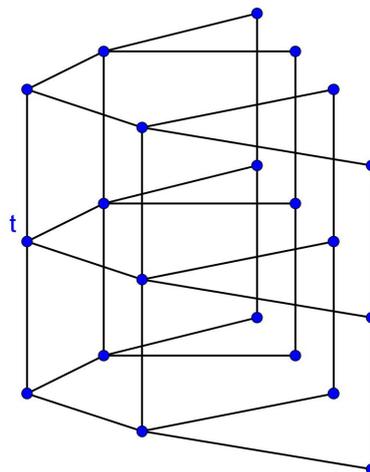


Figura 3.14:  $T^+(t, z)$ .

A mesma notação será agora utilizada para o caso particular de um vértice da forma  $(\emptyset, z)$ , isto é,

$T^+(\emptyset)$  será a subárvore de  $T$  deletando a aresta  $\langle \emptyset, 0 \rangle$ ,

$T^+(\emptyset, z)$  será o subgrafo de  $\mathbb{L}$  a partir de  $T^+(\emptyset)$  e

$T_m^+(\emptyset, z)$  será o subgrafo de  $\mathbb{L}$  a partir de  $T^+(\emptyset, z)$  com tamanho vertical  $2m$ .

Seja  $(t, z) \in V(\mathbb{L})$ . Construimos um conjunto aleatório de vértices de  $T_m^+(t, z)$  da seguinte maneira. Começamos colorindo o vértice  $(t, z)$  de vermelho. Em seguida examinamos os vértices de  $T_m^+(t, z)$  que são da forma  $(u, z)$  onde  $\delta_{\mathbb{T}}(t, u) = n$ . Note que existe um único caminho  $\pi_z(t, u)$  em  $\mathbb{T} \times \{z\}$  ligando  $(t, z)$  a  $(u, z)$  (Figura 3.15).

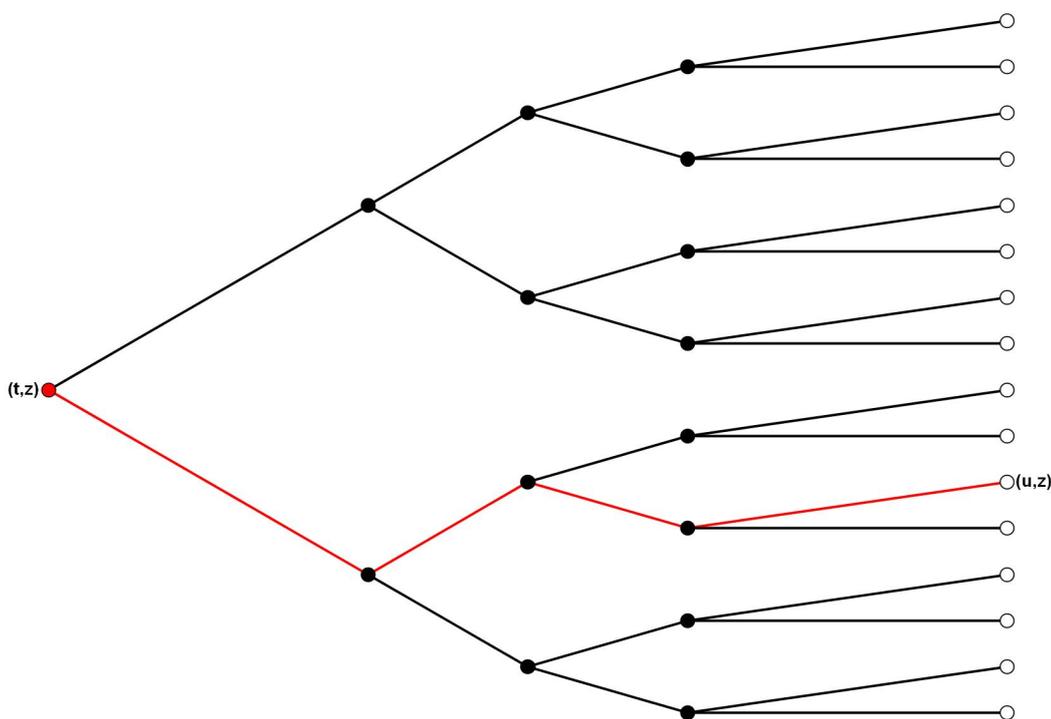


Figura 3.15: Caminho  $\pi_z(t, u)$  em  $\mathbb{T} \times \{z\}$  ligando  $(t, z)$  a  $(u, z)$ .

A esse caminho, associamos o conjunto de vértices

$$S_z(t, u) = \{(s, y) \in V(\mathbb{L}) : (s, z) \in \pi_z(t, u), |y - z| \leq m\},$$

juntamente com todas as arestas associadas de  $\mathbb{L}$  com pelo menos uma de suas pontas da forma  $(s, y)$  com  $s \neq t, u$  e  $|y - z| \leq m$  (Figura 3.16).

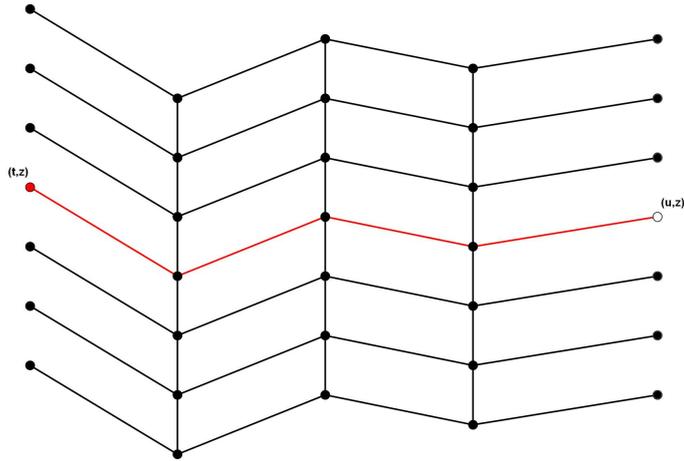


Figura 3.16:  $S_z(t, u)$  e arestas associadas.

Então, colorimos o vértice  $(u, z)$  de vermelho se, e somente se,  $(t, z) \leftrightarrow (u, z)$  em  $S_z(t, u)$ .

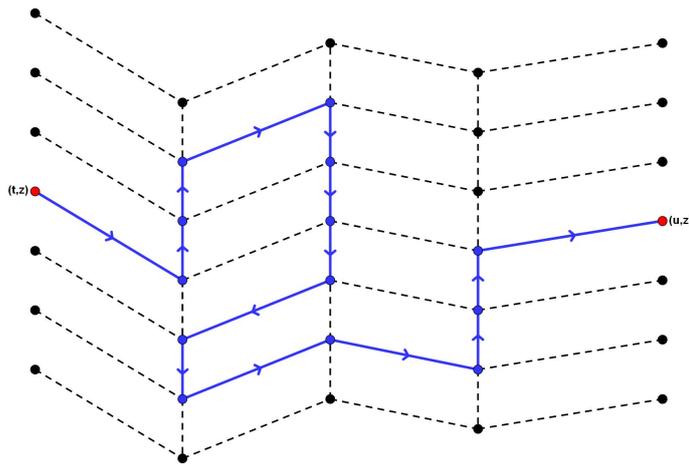


Figura 3.17:  $(t, z) \leftrightarrow (u, z)$  em  $S_z(t, u)$ .

Tendo colorido, então, os vértices  $(u, z)$  com  $\delta_{\mathbb{T}}(t, u) = n$ , passamos aos vértices  $(w, z)$  de  $T_m^+(t, z)$  com  $\delta_{\mathbb{T}}(t, w) = 2n$ . Seja  $(w, z)$  um desses vértices. Então existe um único vértice  $u$  de  $\mathbb{T}$  com  $\delta_{\mathbb{T}}(t, u) = \delta_{\mathbb{T}}(u, w) = n$ . Colorimos  $(w, z)$  de vermelho se, e somente se:

- (i)  $(u, z)$  é vermelho e
- (ii)  $(u, z) \leftrightarrow (w, z)$  em  $S_z(u, w)$ .

Procedemos indutivamente dessa maneira para obter o conjunto de vértices vermelhos  $T(t, z)$ .

Se definirmos  $X_i = 1$  se o  $i$ -ésimo sítio é vermelho e  $X_i = 0$  caso contrário, temos que o número esperado de sítios vermelhos à distância  $n$  será

$$E(T(t, z)) = E\left(\sum_{i=1}^{k^n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k^n} EX_i = k^n p_m(n),$$

pois  $E(X_i) = p_m(n) \forall i$ .

Assim sendo, podemos concluir que  $T(t, z)$  é o conjunto de membros de um processo de ramificação com  $\mu = k^n p_m(n) > 1$ , por (3.2.7).

Dizemos que  $T(t, z)$  e  $T(t, y)$  se sobrepõem infinitas vezes se existem infinitos vértices  $w \in T^+(t)$  tal que  $(w, z)$  e  $(w, y)$  são vermelhos. A notação utilizada para tal evento será

$$\{T(t, z) \odot T(t, y) \text{ i.v.}\}.$$

Seja  $0 \leq \epsilon < 1$ . Chamamos  $T(t, z)$   $\epsilon$ -robusto se, condicionado a  $T(t, z)$ , a probabilidade que  $T_1 = T(t, z)$  e  $T_2 = T(t, z + 2m + 1)$  se sobreponham infinitas vezes é estritamente maior que  $\epsilon$ . Ou seja:

$$T(t, z) \text{ é } \epsilon\text{-robusto} \Leftrightarrow \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1) > \epsilon.$$

Mostraremos agora que, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, a probabilidade de  $T_1$  ser  $\epsilon$ -robusto é estritamente positiva.

Temos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}) = \\ &= \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\text{o conjunto de vértices } w \in T^+(t) \text{ com } (w, z) \text{ e } (w, z+2m+1) \text{ vermelhos ser infinito}) = \\ &= \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\text{processo de ramificação com } \mu = k^n p_m(n)^2 \text{ ser infinito}). \end{aligned}$$

Como o processo de ramificação é supercrítico, pois

$$\mu = k^n p_m(n)^2 > 1, \tag{3.2.8}$$

temos que as probabilidades acima são estritamente positivas.

Então,

$$0 < \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}) = E(\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)),$$

pois  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}) = E(E(I_{\{T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}\}}/T_1)) = E(\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1))$ .

No entanto,

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)) &= \sum_{t_1} \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1 = t_1) \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 = t_1) = \\
&= \sum_{t_1 \epsilon\text{-robusto}} \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1 = t_1) \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 = t_1) + \\
&+ \sum_{\substack{t_1 \text{ 0-robusto mas} \\ \text{n\~{a}o } \epsilon\text{-robusto}}} \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1 = t_1) \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 = t_1) + \\
&+ \sum_{\substack{t_1 \text{ n\~{a}o } \epsilon\text{-robusto} \\ \text{e n\~{a}o 0-robusto}}} \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1 = t_1) \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 = t_1) =
\end{aligned}$$

E como,

- (i) no caso em que  $t_1$  é  $\epsilon$ -robusto, por definição,  $\epsilon < \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1 = t_1) \leq 1$ ;
- (ii) no caso em que  $t_1$  é 0-robusto mas não é  $\epsilon$ -robusto,  $0 < \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1 = t_1) \leq \epsilon$  e;
- (iii) no caso em que  $t_1$  não é 0-robusto e nem  $\epsilon$ -robusto,  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1 = t_1) = 0$ ;

Temos que:

$$E(\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)) \leq \sum_{\substack{t_1 \\ \epsilon\text{-robusto}}} 1 \cdot \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 = t_1) + \sum_{\substack{t_1 \\ \text{0-robusto} \\ \text{mas n\~{a}o} \\ \epsilon\text{-robusto}}} \epsilon \cdot \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 = t_1) + \sum_{\substack{t_1 \text{ n\~{a}o} \\ \epsilon\text{-robusto} \\ \text{e n\~{a}o} \\ \text{0-robusto}}} 0 \cdot \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 = t_1).$$

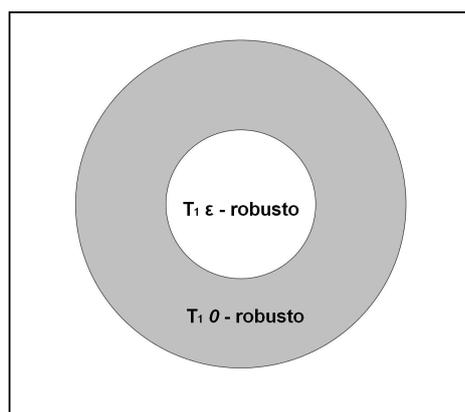


Figura 3.18: Diagrama de Venn para ilustração dos eventos.

Isto implica que

$$E(\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}) + \epsilon \cdot \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto mas n\~{a}o } \epsilon\text{-robusto}).$$

Ou seja

$$E(\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)) - \epsilon \cdot \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto mas n\~{a}o } \epsilon\text{-robusto}) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}).$$

Por\~{e}m, como  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto mas n\~{a}o } \epsilon\text{-robusto})$  pode ser escrito como  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto} \cap T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}^c)$ , que \~{e} o mesmo que  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}) - \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto} \cap T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto})$ , temos que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto mas n\~{a}o } \epsilon\text{-robusto}) = \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}) - \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}),$$

pois  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto} \cap \epsilon\text{-robusto}) = \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto})$ .

Assim,

$$E(\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)) - \epsilon \cdot [\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}) - \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto})] \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}),$$

ou seja,

$$E(\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)) - \epsilon \cdot \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}) - \epsilon \cdot \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}).$$

Isto implica que

$$E(\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)) - \epsilon \cdot \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}) \leq (1 - \epsilon) \cdot \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}),$$

isto \~{e},

$$\frac{E(\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)) - \epsilon}{1 - \epsilon} \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}).$$

Ent\~{a}o,

$$\begin{aligned} 0 &< \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}) = E(\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1)) \leq \\ &\leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}) + \epsilon \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto mas n\~{a}o } \epsilon\text{-robusto}) \\ &\Rightarrow \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}) \geq \frac{\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}) - \epsilon}{1 - \epsilon}. \end{aligned}$$

Note que para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, esse valor \~{e} positivo. Observe tamb\~{e}m que, se  $\epsilon \leq \epsilon'$ , ent\~{a}o,  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon'\text{-robusto}) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto})$ . Logo,  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto})$  \~{e} decrescente em  $\epsilon$ .

Defina

$$\rho(T_1) := \sup\{\epsilon : T_1 \text{ } \epsilon\text{-robusto}\},$$

com a convenção  $\rho(T_1) = -1$  se  $T_1$  é finito ou não é 0-robusto. Ou seja, para algum  $T(t, z)$ ,  $\rho(T(t, z))$  é o maior  $\epsilon$  tal que

$$P\{\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T(t, z) \odot T(t, z + 2m + 1) \text{ i.v.}/T(t, z)) > \epsilon\} = 1.$$

É claro que  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(|T_1| = \infty) \geq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto})$ , pois para que  $T_1$  seja 0-robusto é necessário que  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1) > 0$ . Para que essa probabilidade seja positiva, é necessário que  $|T_1| = \infty$  pois, se  $|T_1| < \infty$ , então  $T_2$  não teria como se sobrepor a  $T_1$  infinitas vezes e essa probabilidade seria igual a zero. Logo, temos que  $\{|T_1| < \infty\} \Rightarrow \{\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1) = 0\}$ .

Então, pela contrapositiva, temos que

$$\{\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1) > 0\} \Rightarrow \{|T_1| = \infty\}.$$

Ou seja,  $\{\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1) > 0\} \subset \{|T_1| = \infty\}$ .

$$\Rightarrow P\{\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \odot T_2 \text{ i.v.}/T_1) > 0\} \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}\{|T_1| = \infty\}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(|T_1| = \infty). \quad (3.2.9)$$

Por Lyons ([13]) sabe-se que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(|T_1| = \infty) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(\rho(T_1) > 0) \quad (3.2.10)$$

e, por definição, sabemos que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(\rho(T_1) > 0) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}). \quad (3.2.11)$$

Logo, por (3.2.10) e (3.2.11), temos que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(|T_1| = \infty) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}). \quad (3.2.12)$$

Ou seja, por (3.2.9) e (3.2.12), chegamos à conclusão de que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}) = \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(|T_1| = \infty). \quad (3.2.13)$$

Agora, por definição, sabemos que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(\rho(T_1) > 0) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(T_1 \text{ 0-robusto}) = \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(|T_1| = \infty).$$

Isso implica que

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(\rho(T_1) > 0) \leq \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(|T_1| = \infty). \quad (3.2.14)$$

Assim sendo, temos por (3.2.10) e (3.2.14) que,

$$\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(\rho(T_1) > 0) = \mathbb{P}_{\tau,\lambda}(|T_1| = \infty). \quad (3.2.15)$$

Mostraremos agora a unicidade do aglomerado aberto infinito.

Seja  $(t, z)$  um vértice em  $\mathbb{L}$  pertencente a um aglomerado infinito  $C(t, z)$ . Em primeiro lugar queremos mostrar que  $C(t, z)$  contém algum vértice de  $T \times \{y\}$  para infinitos valores de  $y \in \mathbb{Z}$ . Suponha então, por contradição, que  $C(t, z)$  está confinado a apenas algumas camadas  $T \times \{M, \dots, N\}$ . Como  $C(t, z)$  não cresce infinitamente para cima e para baixo, tem que crescer infinitamente para os lados. Então existe um inteiro positivo  $I$  que é o máximo com a propriedade que  $C(t, z)$  contém infinitos vértices de  $T \times \{I\}$ . Mas, para qualquer dado valor  $I$ , esse evento tem probabilidade zero pelo mesmo motivo dado na parte (i) da demonstração do Lema 3. Isto é, como há probabilidade estritamente positiva de que os infinitos vértices da árvore  $T \times \{I\}$  estejam conectados com os vértices da árvore  $T \times \{I + 1\}$  pelos elos da forma  $\langle (t, I), (t, I + 1) \rangle$  e como os estados desses elos são independentes uns dos outros, Borel-Cantelli garante que infinitos desses vértices estarão conectados e, dessa forma, chegamos a uma contradição com respeito à maximalidade de  $I$ . Logo, tal  $I$  não existe quase certamente.

Seguindo o raciocínio, além de não estar confinado a apenas algumas camadas de  $\mathbb{L}$ , podemos concluir que  $C(t, z)$  contém, quase certamente, vértices de  $T \times \{y\}$  para *todo*  $y \in \mathbb{Z}$ . Afinal, se ele contém vértices de infinitas camadas deve conter vértices de todas as camadas ou não teria como passar de uma camada a outra.

Se construirmos  $C(t, z)$  algoritmicamente (veja [2], pg 145), temos que  $C(t, z)$  contém, quase certamente, algum vértice  $(u, y)$  que é raiz de uma árvore 0-robusta  $T(u, y)$  em  $T_m^+(u, y)$ . Isso ocorre devido ao fato que, a cada momento que o processo de crescimento alcança um novo plano  $T \times \{y\}$ , chegando de  $T \times \{y - 1\}$ , digamos, existe probabilidade estritamente positiva de que o ponto  $(v, y)$  esteja ligado por um caminho aberto a  $(v, y + m)$  e que  $(v, y + m)$  seja raiz de uma árvore robusta  $T(v, y + m)$  em  $T_m^+(v, y + m)$ . Veja que podemos assumir que  $\delta_{\mathbb{T}}(u, \emptyset)$  é um múltiplo de  $n$ .

Até aqui temos então que  $C(t, z)$  contém, quase certamente, algum vértice  $(u, y)$  que é raiz de uma árvore 0-robusta  $T(u, y)$ . De fato, mais uma vez por Borel-Cantelli, isso é verdade para infinitos valores de  $y$  já que  $C(t, z)$  não está confinado em  $\mathbb{Z}$  e visto que, se considerarmos vértices que tenham distância em  $\mathbb{Z}$  no mínimo maior que  $2m + 1$  (isto é,  $\delta_{\mathbb{Z}} > 2m + 1$ ), os vértices podem ser raízes de árvores 0-robustas independentemente uns dos outros.

Suponhamos agora que  $(s, y)$  e  $(t, z)$  sejam vértices distintos de  $\mathbb{L}$  que estejam em aglomerados abertos infinitos. Queremos mostrar que  $(s, y) \leftrightarrow (t, z)$  quase certamente neste evento. Como discutido no parágrafo anterior, quase certamente,  $C(s, y)$  e  $C(t, z)$  contêm vértices  $(a, i)$  e  $(b, j)$  (respectivamente) que são raízes de conjuntos robustos  $T(a, i)$  e  $T(b, j)$  em

$T_m^+(a, i)$  e  $T_m^+(b, j)$  respectivamente (e com  $\delta_{\mathbb{T}}(a, \emptyset)$  e  $\delta_{\mathbb{T}}(b, \emptyset)$  múltiplos de  $n$ , e, se desejado, com  $|i - j| > 2m$ ). Basta, portanto, mostrar que há probabilidade zero de que existam tais vértices distintos  $(a, i)$  e  $(b, j)$ , que são as raízes de tais conjuntos robustos, mas que não estão conectados por um caminho aberto em  $\mathbb{L}$ .

Sejam  $(a, i)$  e  $(b, j)$  vértices distintos de  $\mathbb{L}$ . Dizemos que  $(a, i)$  é relacionado com  $(b, j)$  se  $V(\mathbb{T}^+(a)) \cap V(\mathbb{T}^+(b)) \neq \emptyset$ , e, não relacionados, caso contrário.

Suponhamos primeiramente que  $(a, i)$  e  $(b, j)$  sejam não relacionados, e seja  $T_1 = T(a, i)$  e  $T_2 = T(b, j)$ . Seja  $\pi$  o caminho mais curto em  $\mathbb{L}$  de  $(a, i)$  até  $(b, j)$  e que não usa nenhum elo de  $T^+(a, i)$  ou de  $T^+(b, j)$ . Tal caminho está aberto com probabilidade  $\lambda^{|i-j|} \tau^{\delta_{\mathbb{T}}(a,b)} = \sigma > 0$ .

Note que, se  $T_1$  é infinito, então  $T_1$  também é  $\epsilon$ -robusto para algum (aleatório)  $\epsilon > 0$  (qualquer  $\epsilon \in (0, \rho(T_1))$  funcionará), pois, por (3.2.15),  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\rho(T_1) > 0) = \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|T_1| = \infty) > 0$ .

Considere agora os grafos  $\mathbb{T}_m^+(a, i + k(2m + 1))$  quando  $k$  varia entre os inteiros positivos. Condicionado em  $T_1$ , nós temos que se  $|T_1| = \infty$ , então cada vértice  $(a, i + k(2m + 1))$  tem probabilidade estritamente positiva (dependendo de  $T_1$ ) de ser a raiz de um processo de ramificação vermelho em  $\mathbb{T}_m^+(a, i + k(2m + 1))$  que se sobrepõem a  $T_1$  infinitas vezes e, além disso, os eventos correspondentes são independentes para diferentes valores de  $k$ .

No evento que  $(a, i + k(2m + 1))$  é tal vértice, ou seja, quando ele é a raiz de um processo de ramificação vermelho em  $\mathbb{T}_m^+(a, i + k(2m + 1))$  que se sobrepõem a  $T_1$  infinitas vezes, podemos garantir que  $(a, i + k(2m + 1)) \leftrightarrow (a, i)$ . Essa afirmação pode ser feita visto que, por Borel Cantelli, há probabilidade (condicional) igual a um de que, dados dois processos de ramificação vermelhos que se sobrepõem infinitas vezes, nós podemos encontrar dois pontos, um de cada processo, que encontram-se na mesma cópia de  $\mathbb{Z}$  e com a propriedade que o caminho de elos- $\mathbb{Z}$  unindo eles está aberto. Afinal, o caminho unicamente de elos- $\mathbb{Z}$  que une cada par de vértices tem probabilidade estritamente positiva de estar aberto e, como  $S_z(t, u)$  não inclui elos- $\mathbb{Z}$  ao longo de  $\{t\} \times \mathbb{Z}$  ou de  $\{u\} \times \mathbb{Z}$ , cada um desses caminhos pode estar aberto independentemente dos demais.

Seja  $A_k$  o evento que (i)  $(a, i + k(2m + 1))$  é a raiz de uma árvore vermelha que se sobrepõem a  $T_1$  infinitas vezes; (ii)  $(b, j + k(2m + 1))$  é a raiz de uma árvore verde que se sobrepõem a  $T_2$  infinitas vezes; e (iii) o caminho  $\pi_k$  com o conjunto de vértices  $\{(t, z + k(2m + 1)) : (t, z) \in \pi\}$  está aberto.

Condicionado em  $T_1$  e  $T_2$ , os eventos  $\{A_k : k \geq 1\}$  são independentes e cada um tem probabilidade de ocorrência maior ou igual a  $\min\{\rho(T_1), \rho(T_2)\}^2 \sigma (> 0)$ . Então, novamente por Borel Cantelli, algum  $A_k$  ocorre quase certamente, de modo que  $(a, i) \leftrightarrow (b, j)$  pelas observações acima.

Portanto,

$$\mathbb{P}_{\tau, \lambda}((a, i) \leftrightarrow (b, j); |T_1| = |T_2| = \infty) =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{T_1, T_2: |T_1|=|T_2|=\infty} d\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_1) d\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_2) \mathbb{P}_{\tau, \lambda}((a, i) \leftrightarrow (b, j) / T_1, T_2) = \\
&= \iint_{T_1, T_2: |T_1|=|T_2|=\infty} d\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_1) d\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(T_2) = \mathbb{P}_{\tau, \lambda}(|T_1| = \infty, |T_2| = \infty).
\end{aligned}$$

Suponhamos finalmente que  $(a, i)$  e  $(b, j)$  são relacionados e são as raízes de processos vermelhos infinitos  $T(a, i)$  e  $T(b, j)$ , respectivamente. Suponhamos também que  $\delta_{\mathbb{T}}(a, \emptyset)$  e  $\delta_{\mathbb{T}}(b, \emptyset)$  são múltiplos de  $n$ , e que  $|i - j| > 2m$ . Se  $T(a, i)$  e  $T(b, j)$  se sobrepõem infinitas vezes, então  $(a, i) \leftrightarrow (b, j)$  por um argumento anterior, e por isso assumimos que  $T(a, i)$  e  $T(b, j)$  não se sobrepõem infinitas vezes.

Nesse caso, existe um (aleatório) inteiro positivo  $R$  tal que  $T(a, i)$  e  $T(b, j)$  não contêm nenhuma sobreposição no conjunto  $S \times \mathbb{Z}$ , onde  $S = V(\mathbb{T}^+(a)) \cap V(\mathbb{T}^+(b)) \cap \{t : \delta_{\mathbb{T}}(a, t) \geq R\}$ . Isso é possível pois  $T(a, i)$  e  $T(b, j)$  se sobrepõem finitas vezes.

Podemos escolher  $c, d \in S$  tal que  $(c, i)$  e  $(d, j)$  são as raízes de processos vermelhos infinitos em  $\mathbb{T}_m^+(c, i)$  e  $\mathbb{T}_m^+(d, j)$  e tal que  $(c, i)$  e  $(d, j)$  sejam não relacionados. A chance que tais  $(c, i)$  e  $(d, j)$  estejam em diferentes aglomerados abertos infinitos de  $\mathbb{L}$  é zero, pelo argumento anterior. E, assim, a prova está completa.

# Capítulo 4

## Discussão dos Resultados

Até aqui chegamos a resultados sobre a existência e o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  para diversas variações dos valores dos parâmetros  $\tau$  e  $\lambda$ . Agora exploraremos um pouco mais esses resultados.

Com todo o trabalho desenvolvido até aqui, podemos verificar que, uma vez que cada parâmetro varia entre zero e um, o conjunto de valores para o par ordenado  $(\tau, \lambda)$  forma um quadrado unitário que pode ser dividido em três regiões não-vazias correspondentes a diferentes valores para o número  $N$  de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$ . Nos casos triviais em que os dois parâmetros são iguais a zero ou iguais a um é nítido que o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  será igual, respectivamente, a zero ou a um. No caso em que  $\tau = 0$  e  $\lambda = 1$ , o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  é obviamente infinito e os aglomerados são as linhas formadas pelos vértices  $\{(t_i, z), \forall z \in \mathbb{Z}\}$ . Já no caso em que  $\lambda = 0$ , o grafo  $\mathbb{L}$  se restringe a infinitas árvores desconexas e, dessa forma, como vimos no capítulo 2, ou não ocorrerá percolação (se  $\tau \leq 1/k$ ), ou existirão infinitos aglomerados abertos infinitos com probabilidade um (se  $1/k < \tau < 1$ ).

Todavia, mais importante que os casos triviais, que são intuitivos, é a noção sobre o que acontece em toda a faixa de variação dos parâmetros  $\tau$  e  $\lambda$ . Assim, ao utilizarmos os resultados expostos no capítulo 3 para nos debruçarmos sobre o quadrado unitário, já podemos admitir a existência de uma região onde os parâmetros  $\tau$  e  $\lambda$  assumem valores suficientemente pequenos de forma a garantir que o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  seja igual a zero com probabilidade um. A partir de uma certa altura, no entanto, sabemos que o valor de  $\tau$  se torna suficientemente grande ao ponto de permitir a ocorrência de percolação nas árvores de  $\mathbb{L}$ , que, quando percolam, apresentam infinitos aglomerados abertos infinitos, como vimos no capítulo 2. Porém, nessa região, o número de aglomerados  $N$  só é igual a infinito quase certamente porque o parâmetro  $\lambda$  não é grande o suficiente para fazer com que todos esses aglomerados infinitos das árvores se unam num único aglomerado. E, assim,

como consequência dessa linha de observação e como foi demonstrado com a proposição 5, sabemos que existe também uma região em que o parâmetro  $\tau$  é grande o suficiente para não impedir a percolação nas árvores e o parâmetro  $\lambda$  se mostra elevado o suficiente para permitir que todos os aglomerados infinitos das árvores se unam num único aglomerado aberto infinito de  $\mathbb{L}$ .

Toda a formalização desse raciocínio e os limites das curvas que dividem essas três regiões do quadrado unitário foram apresentados na Seção 3.2. A figura abaixo ilustra tais resultados para o grafo  $\mathbb{L}$  construído a partir de árvores regulares de grau 7 ( $k = 6$ ).

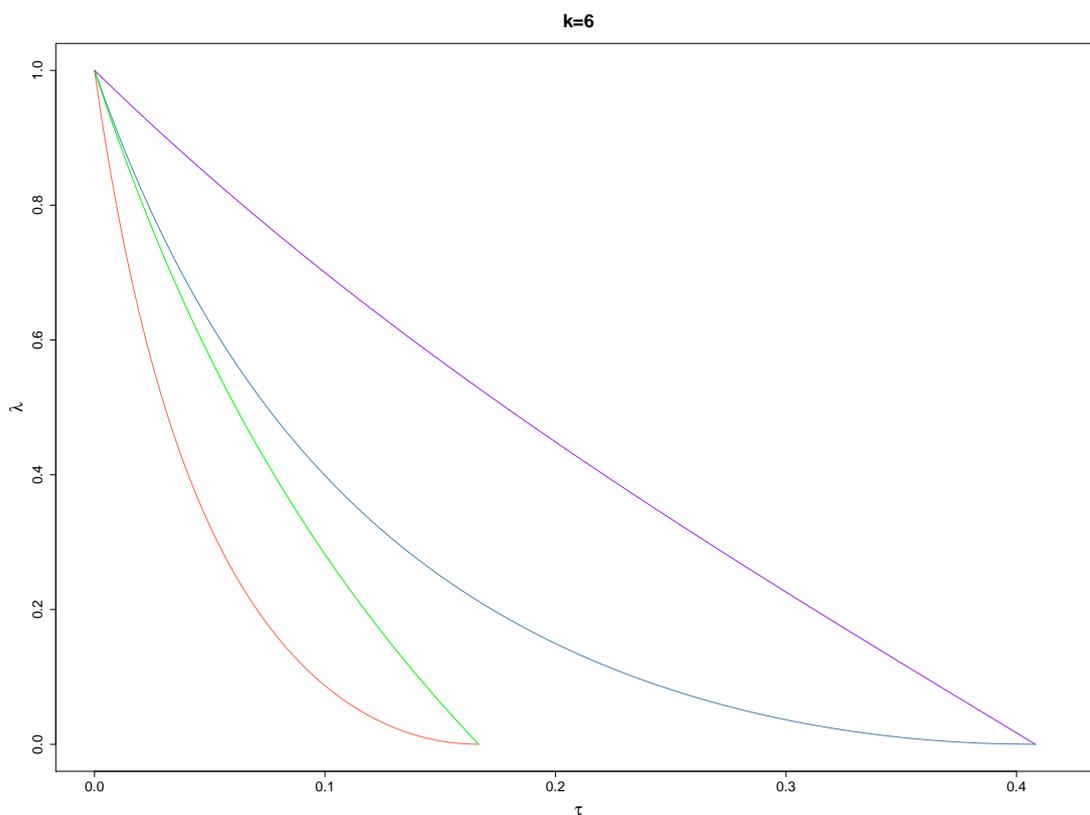


Figura 4.1: Curvas geradas pelas proposições 1, 2, 4 e 5 para  $k = 6$ .

A curva vermelha representa a curva gerada pela relação entre  $\tau$  e  $\lambda$  da proposição 1, ou, como discutido acima, a curva que delimita a região onde os parâmetros  $\tau$  e  $\lambda$  assumem valores suficientemente pequenos de forma a garantir que o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  seja igual a zero com probabilidade um. Ou seja, abaixo da curva vermelha, podemos afirmar que  $\mathbb{P}_{\tau,\lambda}(\omega \in \Omega; N(\omega) = 0) = 1$ .

A curva verde representa o resultado exibido pela proposição 2, que garante que, em toda a região acima dessa curva, quase certamente haverá *pelo menos* um aglomerado aberto infinito

em  $\mathbb{L}$ . Já a curva azul reproduz a relação entre  $\tau$  e  $\lambda$  da proposição 4, que garante que, abaixo dela, existirão infinitos aglomerados abertos infinitos quase certamente se  $\theta(\tau, \lambda) > 0$ .

Com esses dois resultados acima, se torna evidente, então, que a proposição 2 combinada com a proposição 4, ambas apresentadas e demonstradas na Seção 3.2, fornecem uma região para o par ordenado  $(\tau, \lambda)$  onde o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  assumirá quase certamente o valor infinito. Mais especificamente, podemos afirmar que, em toda a região entre as curvas verde e azul,  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\omega \in \Omega; N(\omega) = \infty) = 1$ . E, voltando à nossa discussão anterior, essa se revela a região onde o valor de  $\tau$  é suficientemente grande ao ponto de permitir a ocorrência de percolação nas árvores de  $\mathbb{L}$ , mas, combinado com um valor de  $\lambda$  não grande o suficiente para fazer com que todos esses aglomerados infinitos se unam num único aglomerado, exhibe, então, uma quantidade infinita de aglomerados abertos infinitos com probabilidade um.

Por fim, a curva violeta representa a curva gerada pela relação entre  $\tau$  e  $\lambda$  da proposição 5, também apresentada e demonstrada na Seção 3.2. Essa proposição fornece um limite inferior para a região onde só é possível a existência de um único aglomerado aberto infinito. Ou seja, pelos resultados exibidos nessa seção, sabemos que, acima da curva violeta,  $\mathbb{P}_{\tau, \lambda}(\omega \in \Omega; N(\omega) = 1) = 1$ . E, mais uma vez voltando à discussão anterior, essa é uma delimitação da região onde a nossa intuição nos leva quando vamos aumentando aos poucos os valores de  $\tau$  e  $\lambda$ . É a região onde o parâmetro  $\tau$  é grande o suficiente para não impedir a percolação nas árvores e o parâmetro  $\lambda$  é elevado o suficiente para permitir que todos os aglomerados infinitos das árvores se unam num único aglomerado aberto infinito de  $\mathbb{L}$ .

Para o caso específico do grafo  $\mathbb{L}$  em que  $k = 6$ , percebemos que as curvas das 4 proposições geram duas asas no quadrado unitário cujos exteriores contém informações relevantes a respeito do número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$ . Na verdade, isso ocorrerá para todos os valores de  $k$ , com a ressalva de que algumas curvas tendem a estar mais próximas umas das outras quanto maior o valor de  $k$ . Contudo, é importante ressaltar, uma vez que essa dúvida é inerente a qualquer um que tenha chegado até aqui, que nas regiões dentro das asas não é possível fazer conclusão alguma. Nesse cenário se torna até pertinente levantar a questão do número de aglomerados abertos infinitos nesses espaços poder assumir valores finitos estritamente maiores que um, uma vez que não sabemos o que ocorre dentro das asas. Porém, adaptações dos argumentos de Newman e Schulman [9] mostram que isso não é possível. Segundo os resultados obtidos por eles, para qualquer valor do par ordenado  $(\tau, \lambda)$ , realmente uma das seguintes situações ocorre no grafo  $\mathbb{L}$ :  $N = 0$ ,  $N = 1$  ou  $N = \infty$ .

De qualquer maneira, ainda que apresentem regiões não-conclusivas, os resultados expostos nessa dissertação ainda trazem uma melhora extremamente significativa em relação ao que se sabia sobre os pontos críticos do grafo  $\mathbb{L}$ , uma vez que os resultados anteriormente conhecidos sobre percolação nesse grafo se resumiam à ocorrência de percolação quando  $\tau + \lambda > 1$ , quando  $\lambda = 1$  ou quando  $\tau$  fosse maior que o ponto crítico da árvore ( $p_c = 1/k$ ).

Resta-nos, então, analisar se os resultados obtidos são satisfatórios o suficiente para quaisquer valores de  $k$ , uma vez que, se houver interseção entre as asas, muita informação é perdida. E, como pudemos ver com algumas simulações de curvas realizadas para diferentes valores de  $k$  e com a figura anterior, os resultados se revelam muito bons para valores de  $k$  maiores ou iguais a 6. Para  $2 \leq k \leq 5$ , ocorre interseção entre as curvas verde e azul, representantes das proposições 2 e 4, o que faz com que a região do quadrado unitário onde ocorrem quase certamente infinitos aglomerados abertos infinitos se encontre prejudicada.

A figura abaixo, que apresenta as curvas das 4 proposições para o grafo  $\mathbb{L}$  gerado por árvores com graus 3, 4, 5, 6 ( $k = 2, 3, 4, 5$ ), ilustra a perda que sofremos devido à interseção das curvas verde e azul. Note que a região onde não podemos fazer conclusões está resumida numa só região, uma vez que as duas asas se encontram interceptadas. Para  $k = 2$  a região onde sabemos ocorrerem infinitos aglomerados abertos infinitos é muito pequena e ela tende a crescer à medida que  $k$  aumenta.

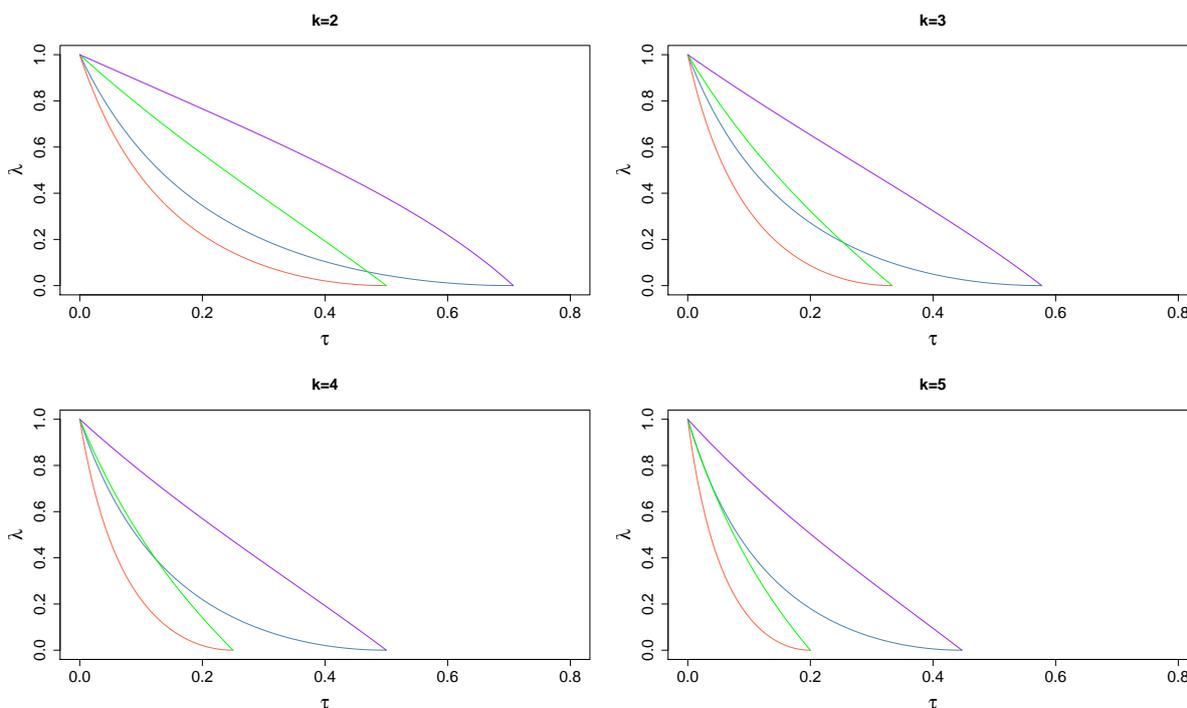


Figura 4.2: Curvas geradas pelas proposições 1, 2, 4 e 5 para  $k = 2, 3, 4, 5$ .

Note que, à medida que o grau das árvores aumenta, menor se torna a região onde não ocorre percolação (abaixo da curva vermelha) e maior se torna a região onde o número de aglomerados abertos infinitos é quase certamente igual a um (acima da curva violeta). E isso faz todo o sentido, visto que, quanto maiores são as possibilidades de conexões nas

árvores, maior é a quantidade de elos que se encontrarão abertos e maiores são as chances de percolação. A figura abaixo, que apresenta as curvas do quadrado unitário quando  $k = 10$ , ilustra a redução da área abaixo da curva vermelha e o aumento da área acima da curva violeta se comparadas às áreas das mesmas curvas quando  $k = 2, 3, 4$  e  $5$ .

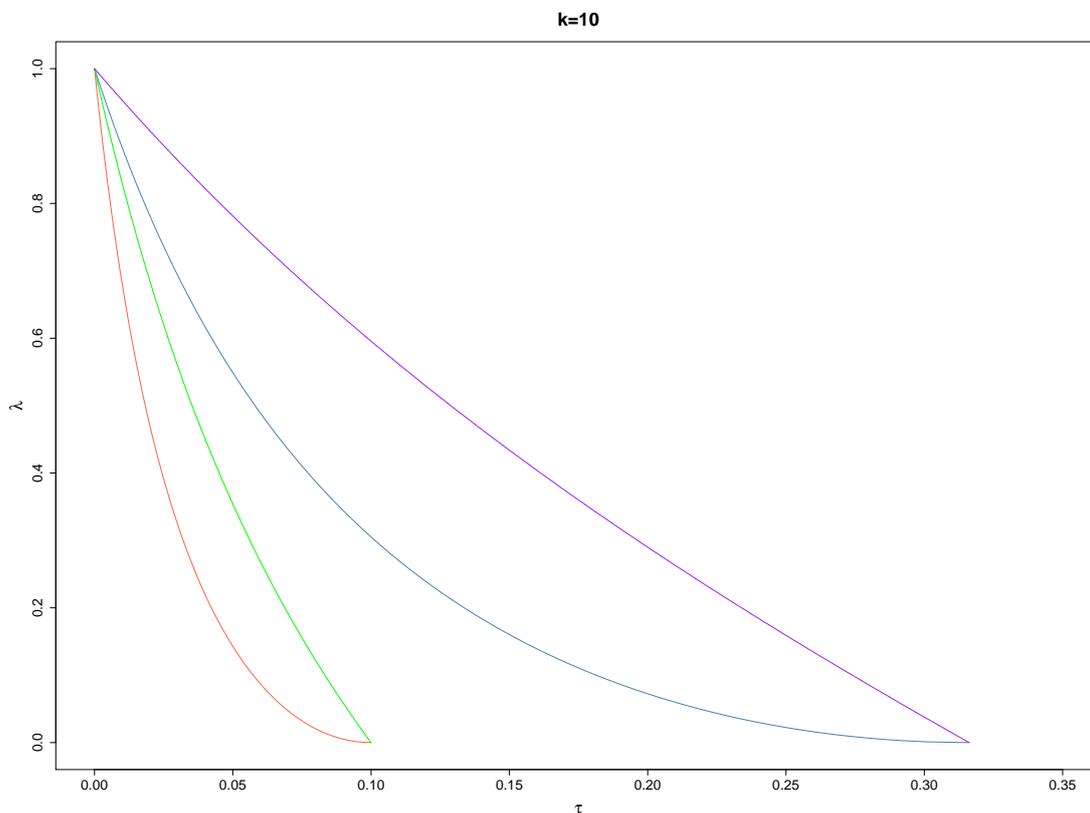


Figura 4.3: Curvas geradas pelas proposições 1, 2, 4 e 5 para  $k = 10$ .

Um outro ponto importante que deve ser discutido aqui envolve os pontos finais das 4 curvas. Como podemos notar com todas as figuras exibidas até aqui e com alguns simples cálculos que utilizam as relações entre  $\tau$  e  $\lambda$  fornecidas pelas quatro proposições apresentadas no capítulo 3, há coincidência entre os pontos finais das curvas vermelha e verde e entre os pontos finais das curvas azul e violeta. Isto é, ambas as proposições 1 e 2 geram curvas que se iniciam no ponto  $(\tau, \lambda) = (0, 1)$  e terminam no ponto  $(\tau, \lambda) = (\frac{1}{k}, 0)$  e ambas as proposições 4 e 5 geram curvas que se iniciam no ponto  $(\tau, \lambda) = (0, 1)$  e terminam no ponto  $(\tau, \lambda) = (\frac{1}{\sqrt{k}}, 0)$ . Em resumo, se considerarmos as relações entre os dois parâmetros fornecidas pelas quatro proposições da maneira  $\tau = \tau_{cor}(\lambda)$ , temos então as seguintes propriedades para cada curva (como exemplo,  $\tau'_{verde}(0)$  está desenvolvida no Anexo B).

Para a curva vermelha:

$$\tau_{vermelha}(0) = \frac{1}{k}, \quad \tau'_{vermelha}(0) = -\infty, \quad \tau_{vermelha}(1) = 0, \quad \tau'_{vermelha}(1) = -\frac{1}{4k};$$

Para a curva verde:

$$\tau_{verde}(0) = \frac{1}{k}, \quad \tau'_{verde}(0) = \frac{-2(k-1)}{k^2}, \quad \tau_{verde}(1) = 0, \quad \tau'_{verde}(1) = -\left(\sqrt{\frac{k}{k-1}} - 1\right);$$

Para a curva azul:

$$\tau_{azul}(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \tau'_{azul}(0) = -\infty, \quad \tau_{azul}(1) = 0, \quad \tau'_{azul}(1) = -\frac{1}{4\sqrt{k}};$$

Para a curva violeta:

$$\tau_{violeta}(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \tau'_{violeta}(0) = \frac{-2(\sqrt{k}-1)}{k}, \quad \tau_{violeta}(1) = 0, \quad \tau'_{violeta}(1) = -\left(\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right).$$

Assim como já foi dito anteriormente, a proposição 4 combinada com a proposição 2 implica na existência de uma região de valores para o par ordenado  $(\tau, \lambda)$  onde existem infinitos aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$ , e isso pode ser confirmado ao compararmos as propriedades acima e percebermos que

$$\tau_{verde}(0) = \frac{1}{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} = \tau_{azul}(0).$$

Além disso, para  $k$  suficientemente grande ( $k \geq 6$ ), as estimativas implicam que essa região se estende por todo o caminho até o ponto  $(\tau, \lambda) = (0, 1)$ , uma vez que

$$|\tau'_{verde}(1)| = \left(\sqrt{\frac{k}{k-1}} - 1\right) < \frac{1}{4\sqrt{k}} = |\tau'_{azul}(1)|.$$

Ou seja, num gráfico que exiba  $\tau$  no eixo vertical e  $\lambda$  no eixo horizontal, a curva verde apresenta uma inclinação menor do que a curva azul no ponto  $(\tau, \lambda) = (0, 1)$ . O que, quando trocados os eixos, gera no ponto  $(\tau, \lambda) = (0, 1)$  uma curva verde com uma inclinação maior do que a inclinação da curva azul, como podemos notar com a figura anterior. Podemos inclusive garantir, com alguns cálculos, que  $\tau_{verde}(\lambda) < \tau_{azul}(\lambda)$  para todo  $0 < \lambda < 1$ .

A figura abaixo, para diferentes valores de  $k$ , ajuda na visualização de tudo o que foi discutido até aqui.

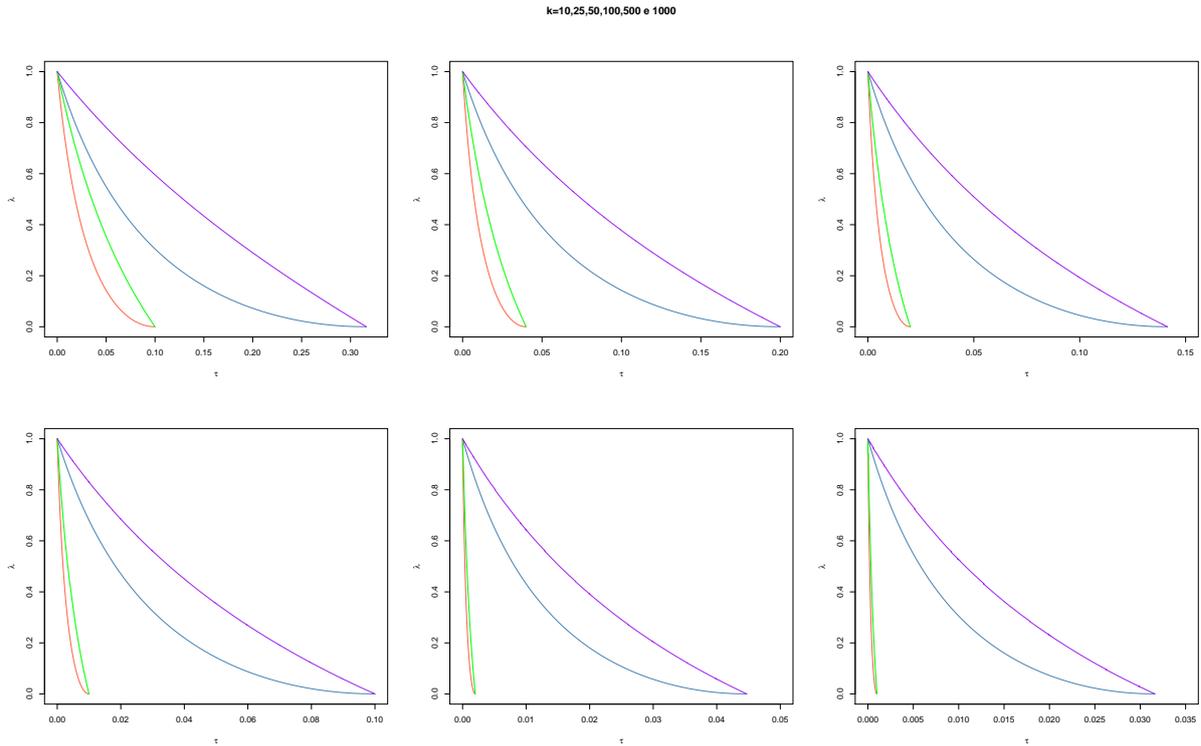


Figura 4.4: Curvas geradas pelas proposições 1, 2, 4 e 5 para  $k = 10, 25, 50, 100, 500, 1.000$ .

Por fim, é interessante comentar um pouco sobre a estabilidade do número  $N$  de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$ . Observemos que  $N = \infty$  é estável relativamente a  $N = 1$  sob perturbações de  $\lambda$  quando  $\tau$  é maior que  $1/k$  e quando ele é suficientemente menor que  $1/\sqrt{k}$ . Isto é, se  $\tau$  se encontrar entre esses dois limites, mesmo causando pequenas variações no valor de  $\lambda$ ,  $N$  permanece constante igual a infinito. Por outro lado,  $N = \infty$  é incontestavelmente instável relativamente a  $N = 1$  sob perturbações de  $\lambda$  quando  $\tau$  está muito próximo de  $1/\sqrt{k}$ , pois uma minúscula alteração no valor de  $\lambda$  pode fazer com que o número de aglomerados abertos infinitos passe de infinitos para uma região não-conclusiva em que o número de aglomerados abertos infinitos pode ser igual a um ou vice-versa.

Da mesma maneira, podemos perceber que  $N = 0$  é estável para  $\lambda = 0$  e  $\tau$  pequeno e distante de  $1/k$ . Note que, se  $\lambda = 0$ , à medida que aproximamos  $\tau$  de  $1/k$ , mais instável se torna o número  $N$  de aglomerados abertos infinitos, pois um pequeno aumento de  $\tau$  pode fazer com que  $N$  passe de zero para uma região não-conclusiva em que o número de aglomerados abertos infinitos pode ser igual a infinito.

Repare que o ponto mais alto e mais à esquerda  $(\tau, \lambda) = (0, 1)$ , onde o número de aglomerados abertos infinitos é infinito também é o limite das curvas que delimitam as regiões em que  $N = 0$  e  $N = 1$ . Nesse ponto, podemos perceber que, para valores suficientemente grandes

de  $k$ , qualquer vizinhança do ponto  $(\tau, \lambda) = (0, 1)$  contém pontos em cada uma das três regiões, o que evidencia a instabilidade de  $N$  na vizinhança desse ponto. Contudo, para valores pequenos de  $k$  (como pode ser visto na figura 4.2), como há uma grande parte da vizinhança que se encontra em uma região não-conclusiva, não se pode excluir a possibilidade de que apenas as regiões  $N = 0$  e  $N = 1$  alcancem o ponto  $(\tau, \lambda) = (0, 1)$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

Como foi visto, conseguimos, a partir de resultados já conhecidos de percolação em  $\mathbb{Z}^2$ , definir três regiões do quadrado unitário para o par ordenado  $(\tau, \lambda)$  onde, em cada uma delas, o número de aglomerados abertos infinitos em  $\mathbb{L}$  é determinado quase certamente. São elas: a região onde não ocorre percolação, a região onde ocorrem infinitos aglomerados abertos infinitos e a região onde ocorre apenas um aglomerado aberto infinito.

Esses resultados trazem uma melhora significativa em relação ao que se sabia sobre os pontos críticos do grafo  $\mathbb{L}$ , uma vez que os resultados anteriormente conhecidos sobre percolação nesse grafo se resumiam à ocorrência de percolação quando  $\tau + \lambda > 1$ , quando  $\lambda = 1$  ou quando  $\tau$  fosse maior que o ponto crítico da árvore ( $\tau_c = 1/k$ ).

# Capítulo 6

## Anexos

### 6.1 Anexo A:

**Definição 6.1.** A inequação de subaditividade diz que se  $(x_r : r \geq 1)$  é uma sequência de números reais e se  $x_r$  satisfaz a inequação de subaditividade,

$$x_{m+n} \leq x_m + x_n, \quad \forall n,$$

então,  $x_r$  é uma sequência subaditiva.

**Lema** Seja  $(a_n)$  uma sequência de reais não negativos tal que  $a_{n+m} - d \leq a_n + a_m$  para  $n, m \geq 1$  e  $d > 0$ . Então existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n + d}{n} - d \right) = \inf_n \left\{ \frac{a_n + d}{n} - d \right\}$ .

*Demonstração.* Temos que  $a_2 - d \leq a_1 + a_1$ . O que implica que  $a_2 \leq 2a_1 + d$ .

Por indução, suponhamos verdade para  $n = k$ , ou seja,

$$a_k \leq ka_1 + (k - 1)d.$$

Temos, então, para  $n = k + 1$ , que

$$a_{k+1} \leq d + a_k + a_1 \leq d + ka_1 + (k - 1)d + a_1 = kd + (k + 1)a_1,$$

onde a última desigualdade segue da hipótese de indução. Assim, chegamos ao resultado que

$$a_{k+1} \leq (k + 1)a_1 + kd.$$

Seja  $c = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - (n-1)d}{n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + d}{n} - d$ , e note que  $-d \leq c \leq a_1$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{a_k - (k-1)d}{k} < c + \epsilon$ .

Se  $n = kq + r$ , onde  $0 \leq r < k$  e  $q \in \mathbb{Z}^+$ , então:

$$a_n = a_{kq+r} \leq d + a_{kq} + a_r \leq d + a_{kq} + b_k, \quad (6.1.1)$$

onde  $b_k = \max_{i < k} a_i < \infty$ . Por (6.1.1), temos

$$a_{kq} = a_{k(q-1)+k} \leq d + a_{k(q-1)} + a_k \leq d + a_k + d + a_k + a_{k(q-2)} \leq \dots \leq qd + qa_k = q(d + a_k).$$

Logo,

$$a_n \leq d + a_{kq} + b_k \leq d + q(d + a_k) + b_k,$$

o que implica que

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{d}{n} + \frac{q}{n}(d + a_k) + \frac{b_k}{n}.$$

Como  $n = kq + r$ , temos que

$$\frac{n-r}{q} = k \Rightarrow \frac{n}{q} = k + \frac{r}{q} \Rightarrow \frac{q}{n} = \frac{1}{k + \frac{r}{q}}$$

e assim

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{d}{n} + \frac{1}{k} (d + a_k) + \frac{b_k}{n}.$$

Logo, para  $n$  grande o suficiente,  $\frac{a_n}{n} \leq \frac{d}{n} + \frac{1}{k} (d + a_k) + \frac{b_k}{n} \leq c + d + 3\epsilon$ . Assim temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq c + d \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - nd}{n} + \frac{d}{n} \leq c.$$

Como  $c = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + d}{n} - d$ , temos, então, que

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + d}{n} - d.$$

□

**Corolário (Lema de Fekete):** Se  $(x_r : r \geq 1)$  é subaditiva, então o limite  $\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{r} x_r \right\}$  existe e satisfaz  $-\infty \leq \lambda < \infty$ . Além disso,  $\lambda = \inf \left\{ \frac{1}{m} x_m : m \geq 1 \right\}$  e, então,  $x_m \geq m\lambda$  para todo  $m$ .

## 6.2 Anexo B:

Por (2.1.16) sabemos que

$$e^{-\phi(\tau,\lambda)} \geq 1 - \frac{(1-\tau)(1-\lambda)^2}{(1-\lambda(1-\tau))^2}.$$

Pela Proposição 2, sabemos que há pelo menos um aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{L}$  quase certamente se  $k e^{-\phi(\tau,\lambda)} > 1$ . Logo, se

$$1 - \frac{(1-\tau)(1-\lambda)^2}{(1-\lambda(1-\tau))^2} > \frac{1}{k},$$

então a condição da proposição 2 também é satisfeita. Da mesma forma, se considerarmos  $\tau$  como uma função de  $\lambda$  dada pela relação acima, temos

$$k - \frac{k(1-\tau(\lambda))(1-\lambda)^2}{(1-\lambda(1-\tau(\lambda)))^2} - 1 > 0.$$

Ao derivarmos a equação em relação a  $\lambda$ , temos:

$$\hookrightarrow \text{derivada do numerador em relação a } \lambda = k \frac{d\tau}{d\lambda} (1-\lambda)^2 + k(1-\tau(\lambda))2(1-\lambda).$$

$$\hookrightarrow \text{derivada do denominador em relação a } \lambda = 2(1-\lambda(1-\tau(\lambda)))(-1+\tau(\lambda) + \lambda \frac{d\tau}{d\lambda}).$$

Pela regra do quociente temos

$$\frac{\left[ k \frac{d\tau}{d\lambda} (1-\lambda)^2 + \overbrace{k(1-\tau(\lambda))2(1-\lambda)}^a \right] \left[ \overbrace{(1-\lambda(1-\tau(\lambda)))^2}^b + \overbrace{k(1-\tau(\lambda))(1-\lambda)^2}^c \right] \left[ 2(1-\lambda(1-\tau(\lambda)))(-1+\tau(\lambda) + \lambda \frac{d\tau}{d\lambda}) \right]}{(1-\lambda(1-\tau(\lambda)))^4} = 0.$$

O que implica em

$$k \frac{d\tau}{d\lambda} (1-\lambda)^2 b + ab + 2c \left[ \lambda(1-\tau(\lambda)) - 1 + \tau(\lambda) - \lambda\tau(\lambda)(1-\tau(\lambda)) + \lambda \frac{d\tau}{d\lambda} - \lambda^2 \frac{d\tau}{d\lambda} (1-\tau(\lambda)) \right] = 0.$$

Que é equivalente a

$$k \frac{d\tau}{d\lambda} (1-\lambda)^2 b + 2c\lambda \frac{d\tau}{d\lambda} - 2c\lambda^2 \frac{d\tau}{d\lambda} (1-\tau(\lambda)) = -ab - 2c\lambda(1-\tau(\lambda)) + 2c - 2c\tau(\lambda) + 2c\lambda\tau(\lambda)(1-\tau(\lambda))$$

e a

$$\frac{d\tau}{d\lambda} [k(1-\lambda)^2 b + 2c\lambda - 2c\lambda^2(1-\tau(\lambda))] = -ab - 2c\lambda(1-\tau(\lambda)) + 2c - 2c\tau(\lambda) + 2c\lambda\tau(\lambda)(1-\tau(\lambda)).$$

Logo,

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{-ab - 2c\lambda(1-\tau(\lambda)) + 2c - 2c\tau(\lambda) + 2c\lambda\tau(\lambda)(1-\tau(\lambda))}{k(1-\lambda)^2 b + 2c\lambda - 2c\lambda^2(1-\tau(\lambda))}.$$

Quando  $\lambda = 0$ , temos que  $a = 2k \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ ,  $b = 1$  e  $c = k \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ . Então,

$$\frac{d\tau}{d\lambda}(0) = \frac{-2k \left(\frac{k-1}{k}\right) + 2k \left(\frac{k-1}{k}\right) - 2k \left(\frac{k-1}{k}\right) \frac{1}{k}}{k} = -\frac{2(k-1)}{k^2}.$$

# Referências Bibliográficas

- [1] G. R. Grimmett e C.M. Newman. *Percolation in  $\infty + 1$  Dimensions*, (1990).
- [2] G. R. Grimmett. *Percolation, Second ed.*, Springer-Verlag, (1999).
- [3] G. F. Lawler. *Introduction to Stochastic Processes, Second ed.*, Chapman e Hall/CRC Taylor and Francis Group, (2006).
- [4] S. I. Resnick. *A Probability Path*, Birkhauser Boston, (1999).
- [5] K. B. Athreya. e P. E. Ney. *Branching Processes*, Springer Berlin, (1972).
- [6] B. R. James. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, Projeto Euclides, (2011).
- [7] P. Erdős e A. Rényi. *On the Evolution of Random Graphs*, (1960).
- [8] S. R. Broadbent e J. M. Hammersley. *Percolation Processes I. Crystals and Mazes*, (1957).
- [9] C. M. Newman e L. S. Schulman. *Infinite Clusters in Percolation Models*, (1981).
- [10] D. B. West. *Introduction to Graph Theory, Second ed.*, Prentice Hall, (2001).
- [11] S. K. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*, (1975).
- [12] A. N. Shiryaev. *Probability*, (1995).
- [13] R. Lyons. *Random Walks and Percolation on Trees*, (1988).