

**UMA ABORDAGEM DINÂMICA PARA O  
MODELO LINEAR DE DEGRADAÇÃO SOB  
A PERSPECTIVA BAYESIANA**

**Guilherme Augusto Veloso**

Departamento de Estatística - ICEX - UFMG

Fevereiro de 2018

# UMA ABORDAGEM DINÂMICA PARA O MODELO LINEAR DE DEGRADAÇÃO SOB A PERSPECTIVA BAYESIANA

**Guilherme Augusto Veloso**

Orientador: Prof<sup>ª</sup>.Dr<sup>ª</sup>.Rosângela Helena Loschi

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Estatística.

Departamento de Estatística  
Instituto de Ciências Exatas  
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, MG - Brasil

Fevereiro de 2018

“Pouco importa o caos externo se, internamente, você estiver transbordando paz”.

Autor Desconhecido

## Agradecimentos

A minha mãe ROSANGELA, ao meu pai JONATAS e a minha irmã LORENA, mesmo que lá no interior, pelo amor, apoio e incentivo nas horas difíceis de desânimo e cansaço nessa minha aventura aqui na cidade grande.

A esta UNIVERSIDADE, seu CORPO DOCENTE, DIREÇÃO e ADMINISTRAÇÃO pela oportunidade de fazer o curso.

Aos amigos do laboratório Cortiço, em especial GABRIELA, JULIANA, JUSSIANE, CRISTIANO e meu xará GUILHERME, pela amizade e companhia ao longo do último ano de mestrado.

Aos amigos do mestrado, companheiros de trabalho nesses 2 anos intensos de curso.

Meus agradecimentos aos demais parentes e amigos que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Ao CNPQ, pelo financiamento da pesquisa.

A professora ROSANGELA, pela orientação, confiança e pelas suas correções e incentivos na elaboração desse trabalho que foi de muita aprendizagem.

A DEUS que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitário, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

## Resumo

Grande parte da literatura em Confiabilidade lida com dados em que a medida observada é o tempo de falha das unidades sob teste. Entretanto, para situações de pouca ou nenhuma falha, a inferência nessa abordagem pode ser comprometida. Nesse contexto, uma alternativa é a utilização de dados de degradação, em que medidas de alguma característica inerente à falha são coletadas nas unidades em tempos pré-especificados e distintos e define-se que a falha ocorre quando esse mecanismo ultrapassa um limiar crítico de degradação estipulado. Na vertente dos modelos gerais de perfis de degradação, ao considerar que a forma funcional pode ser aproximada por uma relação linear entre a degradação e o tempo, o modelo linear de degradação é obtido. Todavia, ao assumir que as taxas de degradação das unidades sob teste são constantes ao longo do tempo, esse modelo pode ser inadequado para a análise de dados em que a ocorrência de alguma mudança na estrutura do processo sob investigação ou a omissão de certas variáveis podem justificar uma instabilidade nas taxas de degradação. Dessa forma, o presente texto tem por objetivo estender o modelo linear de degradação no que se refere à sua forma funcional inserindo uma estrutura dinâmica no modelo sob uma perspectiva bayesiana. Isto é, na primeira etapa da abordagem, ajusta-se um modelo linear dinâmico nas unidades sob teste incorporando uma componente de evolução do sistema capaz de melhor acomodar instabilidades nas taxas de degradação que ocorram durante a condução dos ensaios. A metodologia proposta é então comparada com o modelo linear de degradação através de estudos de simulação e na aplicação a três bancos de dados reais. Os resultados apontaram para a importância de levar em consideração a dinâmica dos perfis de degradação na análise da distribuição do tempo até a falha das unidades.

Palavras-chave: Modelo Linear de Degradação, Modelos Dinâmicos, Inferência Bayesiana.

## Abstract

Much of the literature on Reliability deals with data where the observed measure is the failure time of the units under test. However, for situations with little or no failure, the inference in this approach can be compromised. In this context, an alternative is the use of degradation data, where measures of some inherent characteristic of the failure are collected in the units at pre-specified and distinct times and it is defined that the failure occurs when this mechanism exceeds a critical threshold of degradation stipulated. In the general degradation path models, considering that the functional form can be approximated by a linear relationship between degradation and time, the linear degradation model is obtained. Nevertheless, by assuming that the degradation rates of the units under test are constant over time, this model may be inadequate for data analysis in which the occurrence of some change in the structure of the process under investigation or the omission of certain variables may justify instability in degradation rates. Thus, the present text aims to extend the linear model of degradation with respect to its functional form by inserting a dynamic structure in the model from a bayesian perspective. That is, in the first step of the approach, a linear dynamic model is fitted in the units under test incorporating a system evolution component capable of better accommodating instabilities in the degradation rates that occur during the conduction of the tests. The proposed methodology is then compared with the linear model of degradation through simulation studies and the application to three real databases. The results pointed to the importance of taking into account the dynamics of the degradation profiles in the analysis of the time distribution until the failure of the units.

Keywords: Degradation Linear Model, Dynamic Models, Bayesian Inference.

# Lista de Figuras

1.1	Croqui do vagão motor (Rodas de Trem) . . . . .	6
1.2	Perfis de degradação (Rodas de Trem) . . . . .	7
1.3	Incrementos em cada perfil de degradação (Rodas de Trem) . . . . .	8
1.4	Perfis de degradação (Emissores de Laser) . . . . .	10
1.5	Perfil de degradação e incrementos do emissor de laser n°4 . . . . .	11
1.6	Perfis de degradação dos IRLEDs testados em 170mA (à esquerda) e em 320mA (à direita) . . . . .	12
2.1	Perfis de Degradação (Dados Simulados) . . . . .	26
2.2	Gráficos de convergência e autocorrelação da amostra da distribuição <i>a posteriori</i> para $\kappa$ com a análise automatizada (à esquerda) e algoritmo implementado (à direita) . . . . .	26
2.3	Função de distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para unidades sob teste e futura (Dados Simulados) . . . . .	27
2.4	Ajuste do modelo linear de degradação no emissor de laser n° 4 . . . . .	28
4.1	Exemplos de perfis simulados a partir dos dados de degradação linear Weibull para os dois cenários analisados . . . . .	52
4.2	Amplitude dos intervalos HPD com 95% de credibilidade (Dados de Degradação Linear Weibull) . . . . .	54
4.3	Vício obtido nos 500 bancos de dados simulados (Dados de Degradação Linear Weibull) . . . . .	55

4.4	Exemplos de perfis simulados a partir dos dados de degradação linear dinâmico para os dois cenários analisados . . . . .	57
4.5	Amplitude dos intervalos HPD com 95% de credibilidade (Dados de Degradação Linear Dinâmico) . . . . .	59
4.6	Vício obtido nos 500 bancos de dados simulados (Dados de Degradação Linear Dinâmico) . . . . .	60
5.1	Perfil de degradação e incrementos do emissor de laser nº 7 . . . . .	64
5.2	Previsão para $m = 5$ observações omitidas (quadrados brancos) considerando os modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os emissores de laser 1 a 12 . . . . .	66
5.2	Previsão para $m = 5$ observações omitidas (quadrados brancos) considerando os modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os emissores de laser 13 a 15 . . . . .	67
5.3	Médias <i>a posteriori</i> e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelos modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os emissores de laser 1 a 6 . . . . .	68
5.3	Médias <i>a posteriori</i> e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelos modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os emissores de laser 7 a 15 . . . . .	69
5.4	Distribuições preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos ( $10^3$ horas) de falha para unidades sob teste e futura (Emissores de Laser) . . . . .	72
5.5	Previsão para $m = 5$ observações omitidas (quadrados brancos) considerando os modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os trens 1 a 3 . . . . .	74
5.5	Previsão para $m = 5$ observações omitidas (quadrados brancos) considerando os modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os trens 4 a 14 . . . . .	75



5.6	Médias <i>a posteriori</i> e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelos modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os trens 1 a 3 . . . . .	76
5.6	Médias <i>a posteriori</i> e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelos modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os trens 4 a 14 . . . . .	77
5.7	Distribuições preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos ( $10^4$ Km) de falha para unidades sob teste e futura (Rodas de Trem) . . . . .	80
5.8	Médias <i>a posteriori</i> e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelo modelo linear dinâmico de degradação para os IRLEDs 1 a 20 . . . . .	82
5.8	Médias <i>a posteriori</i> e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelo modelo linear dinâmico de degradação para os IRLEDs 21 a 25 . . . . .	83
5.9	Distribuições preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos ( $10^2$ Horas) de falha para unidades sob teste e futura (IRLEDs) . . . . .	85
A.1	Gráficos de convergência e autocorrelação para os parâmetros de interesse (Dados Simulados) . . . . .	93
A.1	Gráficos de convergência e autocorrelação para os parâmetros de interesse (Dados Simulados) . . . . .	94
B.1	Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (Emissores de Laser 1 a 6) . . . . .	95
B.1	Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (Emissores de Laser 7 a 15) . . . . .	96
B.2	Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (Trens 1 a 6) . . . . .	97
B.2	Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (Trens 7 a 14) . . . . .	98
B.3	Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (IRLEDs 1 a 6) . . . . .	99
B.3	Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (IRLEDs 7 a 15) . . . . .	100
B.3	Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (IRLEDs 16 a 24) . . . . .	101

B.3	Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (IRLED 25) . . .	102
-----	---	-----

# Lista de Tabelas

2.1	Resumos das distribuições <i>a posteriori</i> de alguns parâmetros do modelo (Dados Simulados) . . . . .	27
4.1	Vício médio, erro quadrático médio e percentual de cobertura para as estimativas obtidas do tempo de falha das unidades sob teste (Dados de Degradação Linear Weibull) . . . . .	53
4.2	Vício médio, erro quadrático médio e percentual de cobertura para as estimativas obtidas do tempo de falha das unidades sob teste (Dados de Degradação Linear Dinâmico) . . . . .	58
5.1	Medidas de acurácia de previsão para os modelos lineares de degradação Weibull (W) e dinâmico (D) (Emissores de Laser) . . . . .	65
5.2	Estimativas <i>a posteriori</i> para as componentes de variância dos modelos ajustados (Emissores de Laser) . . . . .	67
5.3	Tempo médio até a falha (MTTF) e percentis da distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos ( $10^3$ horas) de falha para unidades sob teste obtidos pelos modelos Weibull e dinâmico (Emissores de Laser) . . . . .	71
5.4	Estimativas para quantidades de interesse da distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos ( $10^3$ horas) de falha para uma unidade futura (Emissores de Laser) . . . . .	72
5.5	Medidas de acurácia de previsão para os modelos lineares de degradação Weibull (W) e dinâmico (D) (Rodas de Trem) . . . . .	74

5.6	Estimativas <i>a posteriori</i> para as componentes de variância dos modelos ajustados (Rodas de Trem) . . . . .	76
5.7	Tempo médio até a falha (MTTF) e percentis da distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos ( $10^4$ Km) de falha para unidades sob teste (Rodas de Trem) . . . . .	79
5.8	Estimativas para quantidades de interesse da distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos ( $10^4$ Km) de falha para uma unidade futura (Rodas de Trem) . . . . .	80
5.9	Estimativas <i>a posteriori</i> para as componentes de variância do modelo linear dinâmico de degradação (IRLEDs) . . . . .	81
5.10	Tempo médio até a falha (MTTF) e percentis da distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos ( $10^2$ Horas) de falha para unidades sob teste (IRLEDs)	84
5.11	Estimativas para quantidades de interesse da distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos ( $10^2$ Horas) de falha para uma unidade futura (IRLEDs)	85
B.1	Valor-P do teste Shapiro Wilk para as inovações padronizadas (Emissores de Laser) . . . . .	95
B.2	Valor-P do teste Shapiro Wilk para as inovações padronizadas (Rodas de Trem) . . . . .	97
B.3	Valor-P do teste Shapiro Wilk para as inovações padronizadas (IRLEDs)	99

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Literatura . . . . .	1
1.2	Situações Práticas Motivadoras . . . . .	5
1.2.1	Desgaste em Rodas de Trem . . . . .	6
1.2.2	Corrente de Operação em Emissores de Laser . . . . .	9
1.2.3	Potência Luminosa em Diodos Emissores de Luz Infravermelha . . . . .	11
1.3	Organização . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Modelos Gerais de Degradação</b>	<b>15</b>
2.1	Definição . . . . .	16
2.2	Modelo Linear de Degradação: Aspecto Bayesiano . . . . .	17
2.2.1	Distribuições <i>a priori</i> . . . . .	18
2.2.2	Inferência <i>a posteriori</i> . . . . .	19
2.2.3	Aproximando a Distribuição <i>a posteriori</i> : Algoritmo MCMC . . . . .	21
2.2.4	Inferência para o Tempo até a Falha . . . . .	22
2.2.5	Simulação: Dados de Degradação Linear Weibull . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Uma Abordagem Dinâmica para o Modelo Linear de Degradação</b>	<b>31</b>
3.1	Modelos Lineares Dinâmicos . . . . .	31
3.1.1	Modelos de Espaços de Estados . . . . .	32
3.1.2	Filtro de Kalman . . . . .	34
3.1.3	Suavizador de Kalman . . . . .	35
3.1.4	Previsão . . . . .	36

3.1.5	Medidas de Acurácia . . . . .	36
3.1.6	Foward Filtering Backward Sampling . . . . .	38
3.2	Modelo Linear de Degradação Dinâmico . . . . .	39
3.2.1	Definição . . . . .	39
3.2.2	Inferência no Modelo Proposto . . . . .	41
3.2.3	Inferência para o Tempo até a Falha . . . . .	43
3.2.4	Tratamento de Dados Faltantes . . . . .	46
3.2.5	Adequação do modelo . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Análise de dados Simulados</b>	<b>49</b>
4.1	Dados de Degradação Linear Weibull . . . . .	50
4.2	Dados de Degradação Linear Dinâmico . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Aplicação a Dados Reais</b>	<b>63</b>
5.1	Corrente de Operação em Emissores de Laser . . . . .	63
5.1.1	Ajuste dos Modelos de Degradação . . . . .	64
5.1.2	Inferência para o Tempo até a Falha . . . . .	70
5.2	Desgaste em Rodas de Trem . . . . .	73
5.2.1	Ajuste dos Modelos de Degradação . . . . .	73
5.2.2	Inferência para o Tempo até a Falha . . . . .	78
5.3	Potência Luminosa em Diodos Emissores de Luz Infravermelha . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>87</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>90</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Ao longo dos últimos anos, tem havido um maior interesse em melhorar a produtividade, a qualidade e também a confiabilidade de produtos manufaturados. As altas expectativas dos clientes e a grande concorrência global são condutoras desse interesse. Para atingir tal necessidade e conquistar uma vantagem competitiva importante, as empresas vêm treinando funcionários específicos em seus setores no uso apropriado de ferramentas estatísticas como delineamento de experimentos e técnicas de monitoramento e controle de processos. É nesse contexto que muitos recorrem a técnicas desenvolvidas em Confiabilidade, já que este é o ramo da estatística voltado para o desenvolvimento de modelos que descrevem o comportamento de dados oriundos da engenharia como, por exemplo, o tempo até a falha de objetos de interesse visando, a partir deles, estimar a confiabilidade do sistema.

### 1.1 Literatura

Grande parte da literatura em Confiabilidade lida com dados em que a medida observada é o tempo de falha (ou tempo de vida) das unidades em teste e o objetivo principal é caracterizar o quão confiáveis os produtos são. Entretanto, para produtos que possuem um alto grau de confiabilidade, é comum estar diante de uma situação na qual, ao final do ensaio, poucas ou até mesmo nenhuma falha é observada, resultando em um alto índice de censuras. Geralmente, em casos como estes, os custos de realização dos ensaios são

elevados e os mesmos acabam não propiciando informações suficientes para uma inferência estatística adequada. Dados com essa natureza podem fornecer pouca informação a respeito da proporção de produtos que conseguem operar além do período de garantia estipulado (Oliveira *et al.*, 2011).

Uma alternativa para avaliar a confiabilidade de sistemas altamente confiáveis é considerar os testes de vida acelerados (Meeker e Escobar, 1998). Nesse contexto, as unidades são estimuladas ("*stress*") através de variáveis aceleradoras como temperatura, pressão ou voltagem. Esse estímulo objetiva a rápida coleta de informações, uma vez que induz a falha mais rapidamente nas unidades. Dessa forma, os dados obtidos são incorporadas a um modelo estatístico fisicamente razoável. Os testes de vida acelerados são muito utilizados para o cálculo da garantia ótima dos produtos, pois é possível, através da metodologia utilizada, prever qual o comportamento das unidades sob teste em ambientes normais de operação. No entanto, ainda há a possibilidade de, mesmo com o uso dessa técnica, se deparar com situações em que poucas falhas ocorrem.

Para contornar esse problema, existe uma literatura específica na área de Confiabilidade que tem dado maior ênfase à utilização de dados de degradação como uma alternativa aos dados de tempo até a falha. Alguns trabalhos pioneiros e relevantes no âmbito dos modelos de degradação são os de Hamada (2005), Robinson e Crowder (2000), Lu e Meeker (1993), Lu *et al.* (1996) e Chiao e Hamada (1996). Nos ensaios de degradação, embora a variável de interesse seja o tempo de falha ou de vida das unidades sob teste, esta não é observada. As medidas de degradação tomadas ao longo do tempo compõem a resposta e são responsáveis pela informação sobre o tempo até a falha das unidades. Para a condução de um ensaio como esse, é necessário fixar um limiar crítico de degradação  $D_f$ , obter as medidas de algum mecanismo de degradação das unidades em teste em tempos pré fixados e distintos e, a partir disso, definir quando uma falha ocorre.

A justificativa para o uso dessa abordagem é que, na prática, muitas falhas são resultados de mecanismos de degradação inerentes a essas falhas. Na engenharia, esses mecanismos são, por exemplo, a fadiga de equipamentos, trinca, corrosão e a oxidação. Uma das vantagens dessa metodologia, se comparada à que utiliza dados de tempo até a falha, é a sua capacidade de produzir inferências satisfatórias mesmo quando nenhuma



unidade sob teste falha.

Na literatura dos modelos de degradação, é importante destacar as abordagens básicas que têm se tornado recorrentes nos mais recentes trabalhos. Em Ye e Xie (2015), os autores classificam os modelos de degradação em três vertentes: modelos por processos estocásticos, modelos gerais de perfis de degradação ("*general degradation path models*") e modelos que permeiam por essas duas classes.

Na primeira delas, assume-se que a degradação é um processo aleatório no tempo. Nessa vertente, o processo de Wiener tem sido intensamente aplicado para modelar dados de degradação. Doksum e Hoyland (1993) assumem que a degradação de um isolamento de cabo segue um processo de Wiener e que os dados de falha podem ser analisados usando a distribuição Normal Inversa. Em Park e Padgett (2005), o mesmo processo é empregado para analisar dados de fadiga em metais e Wang *et al.* (2017) utilizam-no em uma análise de diodos emissores de luz infravermelha. Si *et al.* (2013) desenvolvem um modelo de degradação baseado no processo de Wiener com um algoritmo recursivo de filtragem para estimar a vida útil restante de produtos com alta confiabilidade. O primeiro modelo por processo de Wiener considerando efeitos aleatórios para tratar dados de degradação foi desenvolvido em Peng e Tseng (2009) e extensões foram consideradas em Peng e Tseng (2013) e Wang (2010). Quando a monotonicidade dos perfis de degradação é necessária, o processo Gama se torna uma alternativa. Nesse contexto, destacam-se os trabalhos de Bagdonavičius *et al.* (2010) e Lawless e Crowder (2004) que consideram, entre outros, a inserção de covariáveis e efeitos aleatórios no processo Gama. O processo Gaussiano Inverso surge como uma opção aos processos Wiener e Gama, quando estes se tornam inadequados para análise dos dados. No trabalho de Wang e Xu (2010), um procedimento de estimação semi-paramétrico baseado no algoritmo EM ("*Expectation–Maximization algorithm*") foi proposto para o processo Gaussiano Inverso. Em Peng *et al.* (2014), foram desenvolvidos métodos bayesianos para o mesmo processo no contexto de dados de degradação.

Na segunda vertente, destacam-se os modelos gerais de perfis de degradação ("*general degradation path models*") introduzidos em Lu e Meeker (1993). Nessa abordagem, a inferência sobre o tempo até a falha passa por duas etapas. Considerando que os dados de

degradação possuem características de dados longitudinais, na primeira etapa constrói-se um modelo misto adequado para variável resposta contínua o qual pode ter uma estrutura linear ou não. Nessa etapa, supõe-se uma forma funcional que está agindo sobre os perfis de degradação e os parâmetros desconhecidos do modelo são estimados. A segunda etapa consiste em encontrar uma relação entre a degradação e o tempo até a falha induzido pelo modelo construído e, a partir disso, estimar a distribuição do tempo até a falha. Dependendo da estrutura do modelo de degradação, essa distribuição pode ser obtida analiticamente, através de simulações de Monte Carlo ou algum outro procedimento computacional. Nesse contexto, ao considerar que a forma funcional pode ser aproximada por uma relação linear entre a degradação e o tempo, o modelo linear de degradação é obtido. Este modelo é utilizado em Freitas *et al.* (2009) para analisar dados de desgaste em rodas de trem e no trabalho de Hamada (2005) em um estudo sobre corrente de operação em emissores de laser. Em Oliveira *et al.* (2011), é obtida a distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha de unidades amostrais futuras e sob teste. Oliveira *et al.* (2015) consideram classes mais flexíveis de modelos de tempo de falha e degradação linear capazes de acomodar comportamentos assimétricos e caudas mais pesadas.

Baseando-se nas diferentes representações práticas, considera-se outras formas funcionais para os perfis de degradação. Bae e Kvam (2004) estendem o modelo linear por assumir que existem duas fases no processo de degradação. Em Meeker e Escobar (1998), o comportamento exponencial é considerado para analisar os dados de trincas em metais submetidos a ensaios de fadiga. Shiau e Lin (1999) propõem métodos de regressão não paramétricos para estimar a forma funcional do modelo. No trabalho de Zhou *et al.* (2014), os autores a estimam fazendo uso de spline cúbica. Propostas sob a inferência bayesiana para tratar os dados de degradação incluem os trabalhos de Robinson e Crowder (2000) e Hamada (2005) que discutem a estimação bayesiana usando o modelo geral de degradação. Neste contexto, Pan e Crispin (2011) utilizam um modelo hierárquico bayesiano para analisar um experimento com LEDs.

As extensões do modelo linear de degradação são motivadas pelo fato de, na análise de dados reais, como os ensaios de degradação, raramente tem-se uma perfeita informação

sobre o fenômeno de interesse. Até mesmo quando um modelo determinístico acurado descrevendo o sistema sob estudo está disponível, existe sempre algo que não está sob nosso controle, como o efeito de variáveis omitidas, erros de mensuração ou imperfeições (Petris *et al.*, 2009). Nos modelos de degradação, em particular no modelo linear, é atribuída uma taxa de degradação constante ao longo do tempo, o que pode não ser uma suposição razoável em muitas situações práticas. Como o relacionamento linear é apenas uma aproximação local para a verdadeira estrutura de dependência envolvendo a degradação e o tempo, um modelo com parâmetros variáveis pode ser mais apropriado, já que a ocorrência de alguma mudança na estrutura do processo sob investigação ou a omissão de certas variáveis podem justificar uma instabilidade nas taxas de degradação. Dessa forma, se torna necessária a construção de modelos mais flexíveis que não assumam tal padrão regular para as taxas de degradação ou que acomodem uma estabilidade para o sistema, mas que possam incluir pontos de mudança ou quebras em sua estrutura.

Neste trabalho, propõe-se um modelo geral de perfis de degradação que estende o modelo linear de degradação no que se refere à sua forma funcional inserindo uma estrutura dinâmica no modelo sob uma perspectiva bayesiana. Isto é, na primeira etapa da abordagem, ajusta-se um modelo linear dinâmico nas unidades sob teste incorporando uma componente de evolução do sistema capaz de melhor acomodar instabilidades nas taxas de degradação que ocorram durante a condução dos ensaios. Dessa forma, todas as unidades sob teste estão sujeitas a uma mesma estrutura dinâmica e, ao passar para a segunda etapa da abordagem, essa estrutura é refletida no tempo de falha das observações, permitindo que o comportamento final dos perfis de degradação seja responsável por levar a informação para a estimação da confiabilidade do sistema. Este novo modelo será comparado ao modelo linear de degradação através de estudos de simulação e na aplicação de três conjuntos de dados reais que serão apresentados na próxima seção.

## 1.2 Situações Práticas Motivadoras

Os três bancos de dados exibidos nesta seção motivam a construção do modelo introduzido neste trabalho e auxiliam no entendimento de como é conduzido um ensaio

de degradação. O primeiro deles corresponde aos dados de desgaste em rodas de trem, inicialmente analisado em Freitas *et al.* (2009). Este estudo foi dirigido por uma empresa do setor ferroviário de Belo Horizonte cujo objetivo é avaliar a confiabilidade em rodas de 14 trens localizadas em diferentes posições. O segundo banco de dados, corrente de operação em emissores de laser, foi apresentado em Meeker e Escobar (1998) e posteriormente analisado em Hamada (2005). Tal estudo considera 15 emissores de laser e visa avaliar o impacto da oscilação da corrente de operação dos mesmos de modo a manter a intensidade da emissão de luz constante. O último banco de dados refere-se à potência luminosa em diodos emissores de luz infravermelha e foi pela primeira vez discutido em Yang (2007) e analisado em Wang *et al.* (2017). Este estudo está no contexto de teste de vida acelerado e examina o impacto do aumento da corrente de operação na variação da potência luminosa dos dispositivos.

### 1.2.1 Desgaste em Rodas de Trem

Este estudo foi conduzido por uma empresa do setor ferroviário em Belo Horizonte visando avaliar a confiabilidade em rodas de trem. Para tanto, 14 trens foram selecionados aleatoriamente entre 25 que estavam em operação. Para os trens escolhidos, apenas os vagões motor foram considerados, uma vez que suas características com respeito ao modo de operação aceleram o desgaste das rodas. Estas são de aço forjado e laminado e possuem um diâmetro inicial de 966 mm. Todo vagão possui dois truques, cada truque tem dois eixos e cada eixo com duas rodas, totalizando oito rodas de diferentes posições por vagão. A Figura 1.1 (Freitas *et al.*, 2009) apresenta o croqui para o vagão motor em que as oito rodas estão devidamente identificadas:

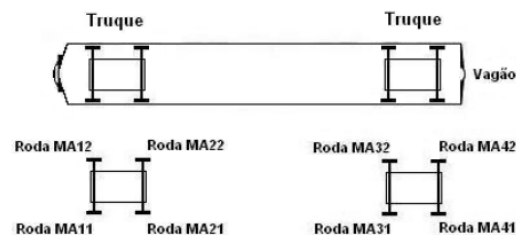


Figura 1.1: Croqui do vagão motor (Rodas de Trem)

Em cada trem, foram coletadas 13 medidas de diâmetro para cada uma das 8 posições de roda do vagão motor conforme a Figura 1.1. As medições foram realizadas em tempos de inspeção igualmente espaçados dados em quilômetros (Km):  $t_1 = 0$  Km,  $t_2 = 50.000$  Km,  $\dots$ ,  $t_{13} = 600.000$  Km.

No artigo de Freitas *et al.* (2009) são analisados os dados das 14 rodas de posição MA11 e, para tal, os autores utilizaram como informação a degradação das rodas, dada por  $Y_{ij} = 966 \text{ mm} - D_{ij}$ , em que  $Y_{ij}$  e  $D_{ij}$  representam, respectivamente, a degradação e o diâmetro em mm aferidos no tempo de inspeção  $j$ , com  $i = 1, 2, \dots, 14$  e  $j = 1, 2, \dots, 13$ . É importante ressaltar que  $Y_{i1} = 0$  mm para todo  $i$ , uma vez que o diâmetro inicial de todas as rodas é  $D_{i1} = 966$  mm. A Figura 1.2 apresenta os perfis de degradação obtidos para as 14 rodas alocadas à posição MA11.

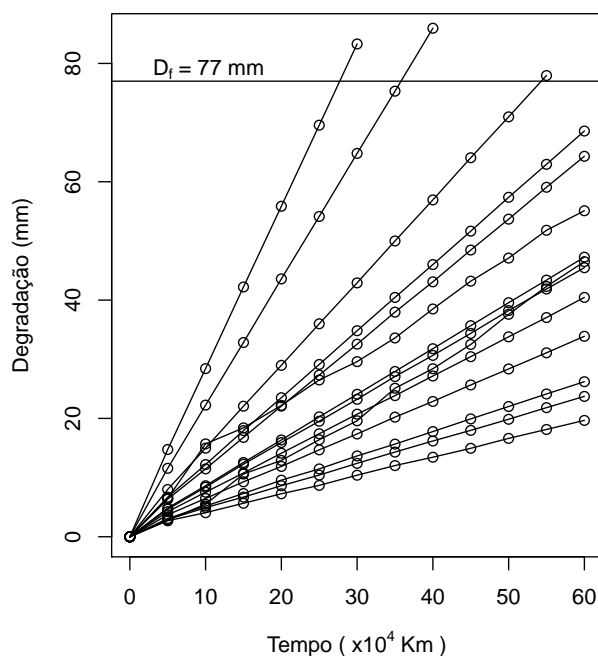


Figura 1.2: Perfis de degradação (Rodas de Trem)

Cada perfil de degradação mostra a evolução da degradação de uma roda ao longo do tempo. A equipe de engenharia determinou que a redução crítica do diâmetro ocorre quando este atinge 889 mm. Dessa forma, o limiar crítico de degradação  $D_f$  assume o valor de 77 mm (966 mm - 889 mm). Essa quantidade tem um papel importante na modelagem de dados de degradação pois é a partir dela que se define a ocorrência de

uma falha. Considera-se que uma roda falhou quando seu desgaste ao longo dos tempos de inspeção ultrapassa esse limiar crítico. Os perfis de degradação exibidos na Figura 1.2 se comportam de maneira aproximadamente linear e foram observadas três falhas.

A Figura 1.2 apresenta a degradação acumulada em cada roda de posição MA11 ao longo do tempo e fornece uma informação sobre a forma funcional que pode estar agindo no processo. Uma outra forma de caracterizar os dados de degradação é considerar o incremento a cada instante de tempo, isto é, o quanto a unidade degradou de um tempo de inspeção ao próximo. Visando captar as características individuais de cada perfil de degradação das rodas de posição MA11, a Figura 1.3 apresenta os incrementos em mm obtidos em cada tempo de mensuração nos trens.

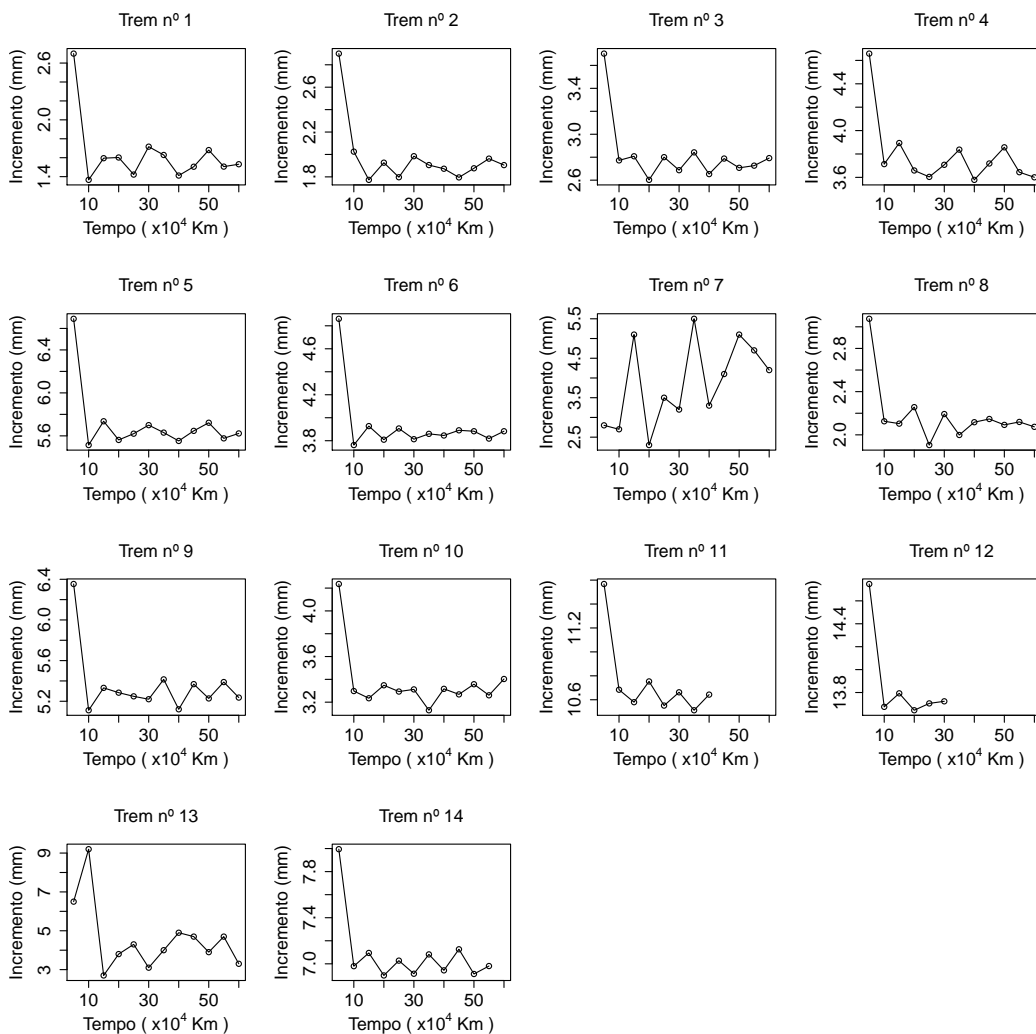


Figura 1.3: Incrementos em cada perfil de degradação (Rodas de Trem)

Nota-se que, com exceção do trem de nº 7, todos os outros apontaram um alto incremento no começo do estudo que, posteriormente, se manteve aproximadamente estável com relação a um nível local indicando que a taxa de degradação não é estática ao longo do tempo. Esse comportamento sugere que modelos para adequadamente tratar estes dados devem incluir uma componente de evolução do sistema, que é uma das propostas desse trabalho, e espera-se que tal instabilidade na taxa de degradação seja melhor acomodada.

No trabalho de Freitas *et al.* (2009), esses dados foram analisados segundo uma perspectiva clássica utilizando o modelo linear de degradação com os enfoques analítico, numérico e aproximado. Em Freitas *et al.* (2010) e Oliveira *et al.* (2011), os dados foram reanalisados em um aspecto bayesiano visando, entre outros, a obtenção da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha das unidades amostrais.

### 1.2.2 Corrente de Operação em Emissores de Laser

Os dados referentes à corrente de operação em emissores de laser, apresentado em Meeker e Escobar (1998), compõem outro conjunto de dados recorrente na literatura dos modelos de degradação. A intensidade da luz dos emissores de laser se degrada durante o tempo se a corrente padrão de operação é mantida constante. Para que seja gerada uma mesma intensidade de luz, a corrente precisa ser calibrada ao longo do tempo. Uma amostra de 15 emissores de laser foi acompanhada por 4000 horas de operação e em cada um deles foi registrado, em um intervalo de 250 horas, o percentual de aumento na corrente padrão de operação calculado em relação à corrente nominal do início do ensaio, sendo este o mecanismo de degradação. Com isso, tem-se um total de 17 mensurações do percentual de aumento da corrente de operação em cada emissor de laser e estabeleceu-se que a falha ocorre se este exceder  $D_f = 10\%$ . A Figura 1.4 apresenta o gráfico dos perfis de degradação para as 15 unidades emissoras de laser consideradas no estudo.

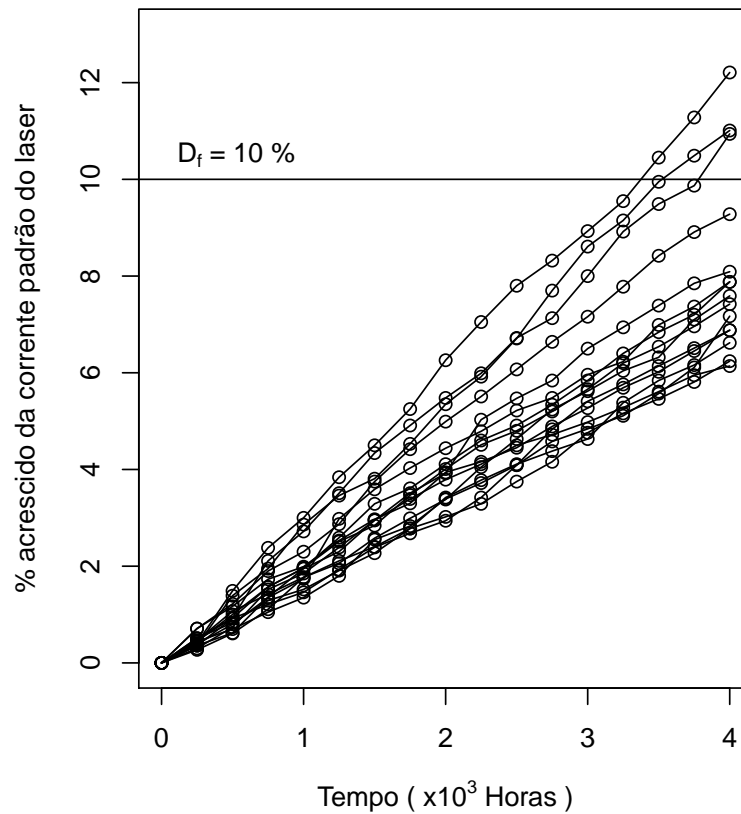


Figura 1.4: Perfis de degradação (Emissores de Laser)

Como no conjunto de dados anterior, os perfis de degradação são aproximadamente lineares e 3 entre as 15 unidades observadas ultrapassaram o limiar crítico  $D_f$  durante o período do estudo. Nesse banco de dados, diferentemente do exemplo anterior, os emissores de laser que falharam continuam em operação até o final do estudo (4000 horas).

Na abordagem geral dos perfis de degradação, a segunda etapa da análise visa estimar a distribuição do tempo até a falha e, a partir dela, as quantidades de interesse em Confiabilidade. Nesse ponto da análise, torna-se necessário ponderar que tipo de informação do ajuste do modelo está sendo levada para que métodos inferenciais sejam construídos para estimar essa distribuição.



Para uma discussão sobre essa temática, a Figura 1.5 apresenta o perfil de degradação e incrementos em % do emissor de laser n°4:

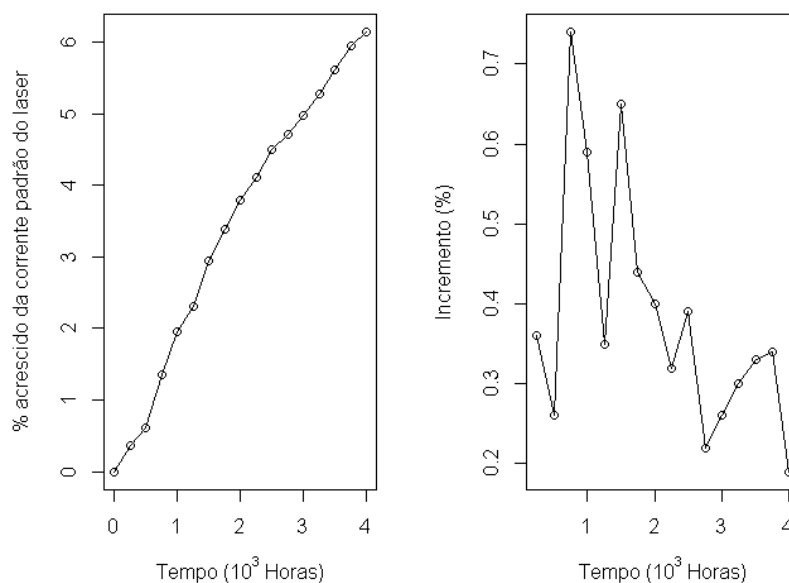


Figura 1.5: Perfil de degradação e incrementos do emissor de laser n°4

Este perfil de degradação é um exemplo em que há quebra estrutural na taxa de degradação ao longo do estudo. Nota-se nesse emissor de laser que, a partir de 1750 horas, o incremento diminui até chegar no seu menor valor no final do ensaio. Neste trabalho, ao ser considerada a evolução do perfil ao longo do tempo e, sabendo-se que essa unidade está próxima de falhar ( $D_f = 10\%$ ), isso permite a possibilidade de avaliar o comportamento final do perfil de degradação dessa unidade e torná-lo responsável por levar a informação para que a distribuição do seu tempo de falha seja estimada.

No artigo de Hamada (2005), os dados de corrente de operação em emissores de laser são analisados sob uma perspectiva bayesiana, sendo este um dos primeiros trabalhos disponíveis na literatura seguindo esta abordagem.

### 1.2.3 Potência Luminosa em Diodos Emissores de Luz Infravermelha

Os diodos emissores de luz infravermelha (IRLEDs) são dispositivos optoeletrônicos de alta confiabilidade amplamente utilizados em sistemas de comunicação (Yang, 2007).

Os dispositivos considerados no estudo apresentam, em sua composição, arsenieto de Galio (GaAs), cujo comprimento de onda é 880 nm. O desempenho dos dispositivos é medido principalmente pela proporção de variação da potência luminosa. Para estimar a confiabilidade na corrente de operação de 50 mA, foram amostradas 40 unidades e divididas em dois grupos. Um grupo de 25 unidades foi testado a 170 mA e um outro grupo de 15 unidades foi testado a 320 mA.

As inspeções foram realizadas em 0, 24, 48, 96, 155, 368, 768, 1130, 1536, 1905, 2263, e 2550 horas para o grupo cuja corrente de operação é 170 mA e 0, 6, 12, 24, 48, 96, 156, 230, 324, 479 e 635 para o grupo testado a 320 mA. É importante ressaltar que, neste estudo, os tempos de inspeção não são equidistantes. Em ambos os grupos, no tempo inicial (0 horas) a degradação é nula em todos os componentes. A Figura 1.6 apresenta os perfis de degradação nos dois grupos com os respectivos limiares de degradação devidamente identificados:

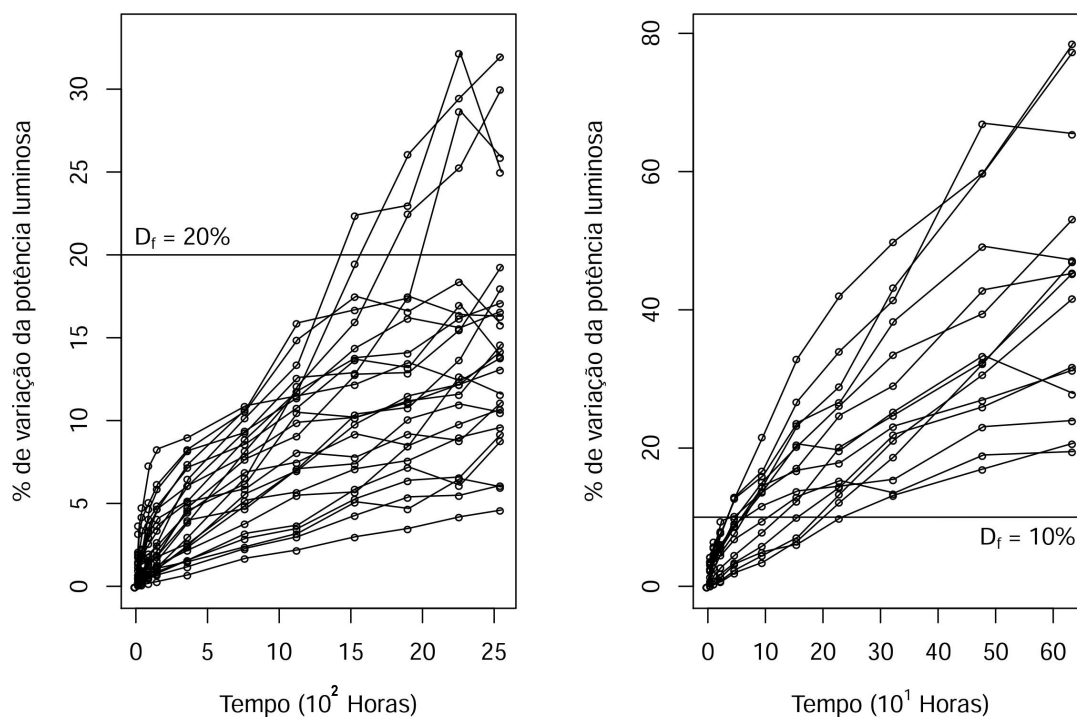


Figura 1.6: Perfis de degradação dos IRLEDs testados em 170mA (à esquerda) e em 320mA (à direita)

Nota-se que, os perfis não são mais aproximadamente lineares, como ocorria com maior frequência nos exemplos anteriores, indicando que o processo apresenta uma maior instabilidade das taxas de degradação e, dessa forma, o modelo linear de degradação se torna inadequado para estes dados. No trabalho de Wang *et al.* (2017), os perfis de degradação testados a 170mA são analisados considerando um processo de Wiener.

## 1.3 Organização

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, é feita uma revisão sobre modelos gerais de perfis de degradação com uma ênfase nos métodos inferenciais para a estimação da distribuição do tempo até a falha do modelo linear de degradação. Essa revisão é importante pois nos capítulos seguintes esse modelo será comparado com a metodologia proposta. A principal contribuição deste trabalho é apresentada no Capítulo 3, em que é revisada a teoria dos modelos lineares dinâmicos e é introduzida a abordagem dinâmica para o modelo linear de degradação sob uma perspectiva bayesiana. Estudos de simulação são realizados no Capítulo 4 visando comparar o modelo proposto com o modelo linear de degradação. Para tanto, amostras foram geradas por ambos os modelos e verificou-se a eficiência na estimação dos tempos de falha das unidades sob teste. No Capítulo 5, é feita a aplicação nos 3 bancos de dados reais apresentados nesta introdução com suas respectivas análises e discussões. Finalizando, o Capítulo 6 retrata as principais conclusões do trabalho bem como sugestões para pesquisas futuras.



## Capítulo 2

# Modelos Gerais de Degradação

Neste capítulo, efetua-se uma revisão de literatura sobre os modelos gerais de perfis de degradação e é dada maior atenção aos métodos inferenciais para a distribuição do tempo até a falha do modelo linear de degradação. Nesse contexto, a definição geral desses modelos é descrita na Seção 2.1. Na Seção 2.2, o modelo linear de degradação com efeitos aleatórios Weibull é introduzido e a sua inferência é conduzida segundo uma abordagem bayesiana. Nas subseções seguintes, desenvolve-se um algoritmo para um maior monitoramento no processo de estimação dos parâmetros de interesse do modelo visando baixa autocorrelação das amostras *a posteriori*. Ainda nessa seção, é discutido como é feita a inferência para o tempo até a falha no modelo linear de degradação, além da condução de um breve estudo de simulação para verificar a eficácia do algoritmo implementado.

Assim como é feito na análise com os dados de tempo até a falha, nos testes de degradação também tem-se como objetivo descrever a função de confiabilidade  $R(t)$  dos objetos de interesse, bem como encontrar o tempo médio até a falha  $MTTF$  e o  $p$ -ésimo quantil  $t_p$  da distribuição do tempo até a falha. Nos ensaios de degradação, no entanto, uma amostra de  $n$  unidades é colocada sob prova e, para cada uma delas, é observada uma característica do mecanismo de degradação atrelado a falha ao longo do tempo. Dessa forma, cada unidade tem seu perfil de degradação construído.

## 2.1 Definição

Conforme Oliveira *et al.* (2011), uma abordagem geral para modelos de degradação consiste em assumir uma mesma forma funcional para os perfis de degradação e as diferenças entre as unidades amostrais, que eventualmente existem pois cada uma carrega as suas particularidades, são explicadas pela incorporação de efeitos aleatórios no modelo. Os dados observados nos ensaios de degradação são amostras dos verdadeiros perfis das unidades obtidas nos tempos pré-especificados. Como estas medidas estão sujeitas a erros, o modelo geral de degradação é dado por:

$$Y_{ij} = D(t_{ij}; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}_i) + \epsilon_{ij}, \quad (2.1)$$

em que  $Y_{ij}$  é a variável aleatória que representa a  $j$ -ésima mensuração do mecanismo de degradação na  $i$ -ésima unidade sob teste, com  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m_i$ , sendo  $m_i$  o número de medidas na  $i$ -ésima unidade;  $D(t_{ij}; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}_i)$  é o perfil real de degradação da unidade  $i$  no tempo pré-especificado  $t_{ij}$ ;  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^t$  é o vetor de dimensão  $r$  que corresponde aos efeitos fixos que descreve as características da população e se mantém constante no tempo para todas as unidades;  $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ip})^t$  consiste no vetor de efeitos aleatórios de dimensão  $p$  associado à unidade  $i$  que carrega as suas características individuais como, por exemplo, variações no processo de produção, na matéria prima utilizada ou dimensionamento de componentes;  $\epsilon_{ij}$  é o erro aleatório da mensuração  $j$  associado a  $i$ -ésima unidade no tempo  $t_{ij}$ .

Existem diversos modelos gerais de degradação disponíveis na literatura que são motivados pelas mais distintas representações práticas dos ensaios de degradação. A principal diferença entre eles está na forma funcional utilizada para o perfil real de degradação  $D(t_{ij}; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}_i)$ . Tal forma funcional pode ser baseada em uma análise empírica dos perfis de degradação em estudo e, sempre que possível, deve ser fundamentada em algum fenômeno físico-químico a eles associado.

Assim como em outros modelos de regressão, nos modelos de degradação, algumas suposições sobre os erros e os efeitos aleatórios devem ser feitas. Geralmente, assume-se que:

- (i) os erros  $\epsilon_{ij}$  são independentes e identicamente distribuídos (*iid*) seguindo uma distribuição Normal com média 0 e variância desconhecida  $\sigma_\epsilon^2$ , isto é,  $\epsilon_{ij} | \sigma_\epsilon^2 \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\epsilon^2)$ ;
- (ii) O vetor de efeitos aleatórios  $\beta_i$  associados as unidades são independentes e possuem distribuição  $\Lambda_{\beta|\theta}(\beta|\theta)$  que depende de um vetor  $s$ -dimensional  $\theta$  de parâmetros fixos com  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)^t$ ;
- (iii)  $\beta_i$  e  $\epsilon_{ij}$  são independentes, isto é,  $\beta_i \perp\!\!\!\perp \epsilon_{ij}$ , para todo  $i$  e  $j$ .

Para a obtenção das quantidades de interesse, é necessário encontrar a distribuição do tempo  $T$  até a falha. Como dito anteriormente, uma unidade falha se seu perfil de degradação ultrapassa um limiar crítico  $D_f$  pré estabelecido. Para o modelo dado na expressão 2.1, a distribuição de  $T$  é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_{T|\alpha,\beta,\theta}(t) &= P(T \leq t | \alpha, \beta, \theta) \\ &= P(D(t, \alpha, \beta, \theta) \geq D_f | \alpha, \beta, \theta), \end{aligned}$$

para o caso em que as medidas associadas ao mecanismo de degradação crescem com o tempo. No caso em que as medidas são decrescentes,

$$F_{T|\alpha,\beta,\theta}(t) = P(D(t, \alpha, \beta, \theta) \leq D_f | \alpha, \beta, \theta).$$

## 2.2 Modelo Linear de Degradação: Aspecto Bayesiano

Empiricamente, os dois primeiros conjuntos de dados descritos no Capítulo 1 apresentam em seus respectivos perfis de degradação um comportamento aproximadamente linear e tal fato pode ser comprovado ao serem verificadas as Figuras 1.2 e 1.4. Ao considerar que a forma funcional a qual está agindo nos perfis de degradação pode ser descrita linearmente, tem-se o modelo linear de degradação que será definido nas próximas linhas.

Seja  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n)^t$ , em que  $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{im_i})^t$  é o vetor com as mensurações de degradação associadas a  $i$ -ésima unidade,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e representa o seu perfil de degradação. Na literatura, o modelo linear de degradação é comumente definido da seguinte forma:

$$Y_{ij} = D(t_{ij}, \beta_i) + \epsilon_{ij} = \frac{1}{\beta_i} t_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, m_i, \quad (2.2)$$

em que  $t_{ij}$  e  $\epsilon_{ij}$  são como definidos no modelo 2.1. Hamada (2005) utilizou o modelo linear de degradação (2.2) para a análise dos dados de corrente de operação em emissores de laser (Figura 1.4).

Neste modelo, em particular, não se fará uso de efeitos fixos  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^t$  e, para cada unidade  $i$ , inicialmente, não será associado um vetor de efeitos aleatórios  $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ip})^t$  mas apenas um escalar  $\beta_i$  e considere  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^t$ . Tal escalar será responsável por incluir as particularidades da unidade  $i$  no modelo e indicar a inclinação da reta associada ao seu perfil de degradação sendo interpretado como a taxa de degradação da unidade. É importante ressaltar que, no modelo dado em (2.2), a degradação inicial para todas unidades é  $Y_{i1} = 0$ .

Considerando a suposição de que  $\epsilon_{ij} | \sigma_\epsilon^2 \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\epsilon^2)$ , para construir a função de verossimilhança tem-se que:

$$Y_{ij} | \beta_i, \sigma_\epsilon^2 \stackrel{iid}{\sim} N\left(\frac{1}{\beta_i} t_{ij}, \sigma_\epsilon^2\right).$$

Com isso, a distribuição conjunta de  $\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\theta}, \sigma_\epsilon^2$  é obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\theta}, \sigma_\epsilon^2}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\theta}, \sigma_\epsilon^2) &= f_{\mathbf{Y} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_\epsilon^2}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_\epsilon^2) f_{\boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ \left[ \prod_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\epsilon}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2\right\} \right] f_{\beta_i | \boldsymbol{\theta}}(\beta_i | \boldsymbol{\theta}) \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Em um contexto de inferência clássica, seria necessário efetuar integrações no espaço dos efeitos aleatórios. Como este trabalho utiliza uma perspectiva bayesiana, o processo de estimação será descrito nas próximas subseções.

### 2.2.1 Distribuições *a priori*

Para completar a especificação do modelo dado na expressão (2.2), é necessário especificar as distribuições *a priori* para os efeitos aleatórios  $\beta_i^s$  e para a variância associada ao erro de mensuração  $\sigma_\epsilon^2$ , as quais são respectivamente denotadas por  $f_{\beta_i | \boldsymbol{\theta}}(\beta_i | \boldsymbol{\theta})$  e  $f_{\sigma_\epsilon^2}(\sigma_\epsilon^2)$ .

Neste capítulo, ao revisar o modelo linear de degradação, optou-se por considerar o modelo com efeito aleatório Weibull. Dessa forma, assume-se que os efeitos aleatórios para os diferentes perfis de degradação são *iid* e têm a distribuição *a priori* Weibull



com parâmetros  $\kappa$  e  $\lambda$  denotada por  $\beta_i|\kappa, \lambda \stackrel{iid}{\sim} \text{Weibull}(\kappa, \lambda)$ , cuja função de densidade é expressa por:

$$f_{\beta_i|\kappa, \lambda}(\beta_i|\kappa, \lambda) = \frac{\kappa}{\lambda} \left( \frac{\beta_i}{\lambda} \right)^{\kappa-1} \exp \left\{ - \left( \frac{\beta_i}{\lambda} \right)^\kappa \right\}; \beta_i > 0, \kappa > 0 \text{ e } \lambda > 0. \quad (2.4)$$

A distribuição Weibull é usualmente considerada para modelar o tempo até a falha por causa da sua riqueza de formas. Outra característica interessante desta distribuição em modelos de degradação é que assumindo-se que os efeitos aleatórios têm distribuição Weibull, é possível provar que a distribuição do tempo até a falha também tem a mesma distribuição (Hamada, 2005).

Para descrever a incerteza *a priori* sobre a variância associada ao erro de mensuração, assume-se que  $\sigma_\epsilon^2|a_1, b_1 \sim \text{Gama Invertida}(a_1, b_1)$ , cuja função de densidade é dada por:

$$f_{\sigma_\epsilon^2|a_1, b_1}(\sigma_\epsilon^2|a_1, b_1) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} (\sigma_\epsilon^2)^{-a_1-1} \exp \left\{ \left( -\frac{b_1}{\sigma_\epsilon^2} \right) \right\}; \sigma_\epsilon^2 > 0, a_1 > 0 \text{ e } b_1 > 0. \quad (2.5)$$

A distribuição Gama Invertida é comumente utilizada para modelar o comportamento da variância e é também usada por Hamada (2005) no contexto de modelos de degradação.

Conforme a teoria dos modelos hierárquicos, também será especificada a distribuição *a priori* para o vetor de hiperparâmetros  $\theta = (\kappa, \lambda)^t$  associados à distribuição dos efeitos aleatórios. Aqui, assume-se que  $\kappa$  e  $\lambda$  são independentes e tais que as distribuições associadas são  $\kappa|a_2, b_2 \sim \text{Gama}(a_2, b_2)$  e  $\lambda|a_3, b_3 \sim \text{Gama}(a_3, b_3)$  em que  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  denota a distribuição Gama com a seguinte função de densidade:

$$f_{X|\alpha, \beta}(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp \{-\beta x\}; x > 0, \alpha > 0 \text{ e } \beta > 0. \quad (2.6)$$

As distribuições Gama e Gama Invertida são utilizadas na literatura para definir distribuições *a priori* pouco informativas a partir de valores pequenos dos seus parâmetros.

## 2.2.2 Inferência *a posteriori*

Considerando as distribuições *a priori* para os parâmetros de interesse dadas nas expressões (2.4) a (2.6) e a função de verossimilhança dada por:

$$f_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2) = \prod_{i=1}^n \left[ \prod_{j=1}^{m_i} \frac{1}{2\pi\sigma_\epsilon^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \left( y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 \right\} \right], \quad (2.7)$$

a distribuição *a posteriori* é obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2,\kappa,\lambda|\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2,\kappa,\lambda|\mathbf{y}) &\propto f_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2) f_{\boldsymbol{\beta}|\kappa,\lambda}(\boldsymbol{\beta}|\kappa,\lambda) f_{\sigma_\epsilon^2}(\sigma_\epsilon^2) f_\kappa(\kappa) f_\lambda(\lambda) \\ &\propto \prod_{i=1}^n \left[ \prod_{j=1}^{m_i} \frac{1}{2\pi\sigma_\epsilon^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \left( y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 \right\} \right] \times \\ &\quad \prod_{i=1}^n \frac{\kappa}{\lambda} \left( \frac{\beta_i}{\lambda} \right)^{\kappa-1} \exp \left\{ -\left( \frac{\beta_i}{\lambda} \right)^\kappa \right\} \times \\ &\quad \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} (\sigma_\epsilon^2)^{-a_1-1} \exp \left\{ \left( -\frac{b_1}{\sigma_\epsilon^2} \right) \right\} \times \\ &\quad \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \kappa^{a_2-1} \exp \{-b_2\kappa\} \times \\ &\quad \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \lambda^{a_3-1} \exp \{-b_3\lambda\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Percebe-se da expressão (2.8) que a distribuição *a posteriori* conjunta para  $(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\epsilon^2, \kappa, \lambda)$  não é uma distribuição de probabilidade conhecida. Assim, faz-se necessário recorrer a métodos computacionais para obter uma aproximação da distribuição *a posteriori* e seguir com o processo de inferência.

Nesse contexto, métodos MCMC ("*Markov Chain Monte Carlo*") (Lee, 2012) serão utilizados e, para a implementação do amostrador de Gibbs, é preciso encontrar as distribuições condicionais completas *a posteriori* de todos os parâmetros. Estas distribuições são obtidas a partir da distribuição dada na representação (2.8) e são dadas por:

(i) Efeito aleatório  $\beta_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} f_{\beta_i|\boldsymbol{\beta}^{(-i)},\sigma_\epsilon^2,\kappa,\lambda,\mathbf{Y}}(\beta_i|\boldsymbol{\beta}^{(-i)},\sigma_\epsilon^2,\kappa,\lambda,\mathbf{y}) &\propto f_{\mathbf{Y}|\beta_i,\sigma_\epsilon^2}(\mathbf{y}|\beta_i,\sigma_\epsilon^2) f_{\beta_i|\kappa,\lambda}(\beta_i|\kappa,\lambda) \\ &\propto \beta_i^{\kappa-1} \exp \left\{ -\left[ \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \sum_{j=1}^{m_i} \left( y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 + \left( \frac{\beta_i}{\lambda} \right)^\kappa \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que  $\boldsymbol{\beta}^{(-i)}$  é o vetor dos efeitos aleatórios de dimensão  $(n-1)$ , não contendo o parâmetro  $\beta_i$ , relacionado à unidade  $i$ ;

(ii) Variância  $\sigma_\epsilon^2$  associada ao erro de mensuração:

$$\begin{aligned} f_{\sigma_\epsilon^2|\boldsymbol{\beta},\kappa,\lambda,\mathbf{Y}}(\sigma_\epsilon^2|\boldsymbol{\beta},\kappa,\lambda,\mathbf{y}) &\propto f_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2) f_{\sigma_\epsilon^2}(\sigma_\epsilon^2) \\ &\propto \left(\frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\right)^{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} + a_1 + 1} \exp\left\{-\left[\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2 + \frac{b_1}{\sigma_\epsilon^2}\right]\right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

implicando que  $\sigma_\epsilon^2|\boldsymbol{\beta},\kappa,\lambda,\mathbf{Y} \sim \text{Gama Invertida}\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} + a_1, \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2 + 2b_1}{2}\right)$ ;

(iii) Hiperparâmetros  $\kappa$  e  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} f_{\kappa|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2,\lambda,\mathbf{Y}}(\kappa|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2,\lambda,\mathbf{y}) &\propto f_{\boldsymbol{\beta}|\kappa,\lambda}(\boldsymbol{\beta}|\kappa,\lambda) f_\kappa(\kappa) \\ &\propto \kappa^{n+a_2-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i}{\lambda}\right)^\kappa \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i}{\lambda}\right)^\kappa + b_2\kappa\right]\right\}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} f_{\lambda|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2,\kappa,\mathbf{Y}}(\lambda|\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2,\kappa,\mathbf{y}) &\propto f_{\boldsymbol{\beta}|\kappa,\lambda}(\boldsymbol{\beta}|\kappa,\lambda) f_\lambda(\lambda) \\ &\propto \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n\kappa-a_3+1} \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i}{\lambda}\right)^\kappa + b_3\lambda\right]\right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Com as distribuições condicionais completas determinadas, é possível obter amostras da distribuição  $f_{\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2,\kappa,\lambda|\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\beta},\sigma_\epsilon^2,\kappa,\lambda|\mathbf{y})$  utilizando técnicas de simulação MCMC, brevemente apresentadas na próxima subseção.

### 2.2.3 Aproximando a Distribuição *a posteriori*: Algoritmo MCMC

Os algoritmos MCMC são muito utilizados atualmente devido à sua flexibilidade e aplicabilidade em diversas áreas como física, engenharia, ciência da computação, matemática e estatística (Jing, 2010). Para descrever genericamente os algoritmos a serem

utilizados para este fim, o autor aponta que dentre os algoritmos MCMC existem dois princípios básicos: um que visa a simplificação dos problemas de alta dimensão por sucessivamente gerar de diferentes subconjuntos do vetor de parâmetros de interesse e o outro que envolve uma regra de aceitação/rejeição para “corrigir” uma cadeia de Markov arbitrária de tal forma que a distribuição invariante seja garantida. O primeiro é basicamente o amostrador de Gibbs (*Gibbs Sampler*) e o segundo é a essência do algoritmo Metropolis Hastings. Existem diversas formas de utilizar estes dois métodos e eles também podem ser combinados para aplicação em diferentes maneiras, dependendo do problema.

Aqui, o foco é gerar amostras da distribuição *a posteriori* dada em (2.8). Para tanto, será utilizado um amostrador de Gibbs com passos de Metropolis Hastings, já que algumas distribuições condicionais completas *a posteriori* não apresentam forma fechada. Dessa forma, foram utilizadas as seguintes distribuições geradoras de candidatos:

- $q(\beta_i^* | \beta_i^{(k)}) \sim \text{Normal}(\beta_i^{(k)}; \tau)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- $q(\kappa^* | \kappa^{(k)}) \sim \text{Uniforme}(\kappa^{(k)} - \nu; \kappa^{(k)} + \nu)$ ;
- $q(\lambda^* | \lambda^{(k)}) \sim \text{Uniforme}(\lambda^{(k)} - \nu; \lambda^{(k)} + \nu)$ ,

em que os valores de  $\tau$ ,  $\nu$  e  $\nu$  são especificados de forma a garantir uma taxa de aceitação do algoritmo em torno de 40% a 60%.

O algoritmo MCMC foi implementado nesta seção pois, na literatura, segundo Oliveira *et al.* (2011), existe uma alta autocorrelação na amostra da distribuição *a posteriori* do hiperparâmetro  $\kappa$  o que gera um maior gasto computacional. Dessa forma, ao implementar o algoritmo, objetiva-se um maior monitoramento no processo de estimação dos parâmetros de interesse, sendo possível controlar a convergência das cadeias bem como os índices de autocorrelação das amostras da distribuição *a posteriori* obtendo representatividade e a parcimônia do modelo, algo que pode ser difícil em uma análise automatizada.

### 2.2.4 Inferência para o Tempo até a Falha

Nos ensaios de degradação, a exclusiva estimação da distribuição dos parâmetros do modelo é insuficiente para a obtenção da distribuição dos tempos de falha das unidades

sob teste e das unidades futuras (que não se encontram no escopo da amostra, ou seja, alguma unidade qualquer da população). É necessária a exploração da relação entre os parâmetros e tempos de medição, estabelecida pelo modelo (2.1) que configura a segunda etapa dos modelos gerais de degradação.

No modelo linear de degradação dado na expressão (2.2), o perfil de degradação real para a  $i$ -ésima unidade é  $D_i(t, \beta_i) = \frac{1}{\beta_i}t$  e como a falha ocorre quando a degradação atinge o limiar crítico  $D_f$ , obtém-se que  $D_f = \frac{1}{\beta_i}T_i \Rightarrow T_i = \beta_i D_f$ . Dessa forma, para o caso em que  $\beta_i | \kappa, \lambda \stackrel{iid}{\sim}$  Weibull( $\kappa, \lambda$ ), tem-se que  $T_i | \kappa, \lambda \stackrel{iid}{\sim}$  Weibull( $\kappa, \lambda \cdot D_f$ ).

A função distribuição de probabilidade preditiva *a posteriori* do tempo de falha  $F_{T_i|\mathbf{Y}}(t|\mathbf{y})$  é obtida como se segue:

$$\begin{aligned} F_{T_i|\mathbf{Y}}(t|\mathbf{y}) &= P(T_i \leq t|\mathbf{y}) \\ &= P(\beta_i D_f \leq t|\mathbf{y}) \\ &= P\left(\beta_i \leq \frac{t}{D_f}|\mathbf{y}\right) \\ &= F_{\beta_i|\mathbf{Y}}\left(\frac{t}{D_f}\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Para a inferência sobre o tempo de falha de uma unidade sob teste, a estimativa de  $F_{T_i|\mathbf{Y}}(t|\mathbf{y})$  é obtida considerando a amostra da distribuição marginal *a posteriori* de  $\beta_i$ , associado a  $i$ -ésima unidade, de acordo com o seguinte esquema:

$$\left(\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \dots, \beta_i^{(u)}\right) \Rightarrow \text{avaleie } \beta_i|\mathbf{y} \text{ em } T_i = D_f \beta_i \Rightarrow \left([T_i|\beta_i]^{(1)}, [T_i|\beta_i]^{(2)}, \dots, [T_i|\beta_i]^{(u)}\right),$$

em que  $u$  é o tamanho da amostra *a posteriori*. Assim, tem-se que:

$$\hat{F}_{T_i|\mathbf{Y}}(t|\mathbf{y}) = \frac{\sum_{j=1}^u \mathbb{1}\left\{[T_i|\beta_i]^{(j)} \leq t\right\}}{u}. \tag{2.14}$$

Para inferir sobre o tempo de falha de uma unidade futura, assume-se a amostra da distribuição *a posteriori* de  $\beta|\mathbf{y}$  como a amostra da distribuição *a posteriori* de  $\beta_{n+1}|\mathbf{y}$ , conforme descrito em Robinson e Crowder (2000). Assim, a estimativa de  $F_{T_{n+1}|\mathbf{Y}}(t|\mathbf{y})$  é obtida de acordo com o esquema a seguir:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \dots, \beta_1^{(u)} \\ \beta_2^{(1)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_2^{(u)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(1)}, \beta_n^{(2)}, \dots, \beta_n^{(u)} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{avale } \beta_i | \mathbf{y} \text{ em } T_i = D_f \beta_i \\
& \Rightarrow \begin{pmatrix} [T_1 | \beta_1]^{(1)}, [T_1 | \beta_1]^{(2)}, \dots, [T_1 | \beta_1]^{(u)} \\ [T_2 | \beta_2]^{(1)}, [T_2 | \beta_2]^{(2)}, \dots, [T_2 | \beta_2]^{(u)} \\ \vdots \\ [T_n | \beta_n]^{(1)}, [T_n | \beta_n]^{(2)}, \dots, [T_n | \beta_n]^{(u)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De modo que:

$$\hat{F}_{T_{n+1} | \mathbf{Y}}(t | \mathbf{y}) = \frac{\sum_{j=1}^u \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \{ [T_i | \beta_i]^{(j)} \leq t \}}{nu}. \quad (2.15)$$

Essa forma de encontrar a distribuição de probabilidade preditiva *a posteriori* dos tempos de falha de unidades sob teste e de uma unidade futura está discutida em (Oliveira *et al.*, 2011). Outras maneiras de estabelecer a relação entre o tempo de falha e os parâmetros do modelo estão disponíveis em (Hamada, 2005) e (Robinson e Crowder, 2000).

### 2.2.5 Simulação: Dados de Degradação Linear Weibull

Nesta subseção, será brevemente conduzido um estudo de simulação para verificar a eficácia do algoritmo proposto na Subseção 2.2.3. Nesse contexto, para gerar dados do modelo de degradação apresentado em (2.2), considera-se o seguinte procedimento descrito em Oliveira *et al.* (2011):

1. Gere uma amostra de tantos tempos de falha quanto desejado a partir de uma distribuição de probabilidade conhecida. Denote por  $t_i$  os tempos de falha gerados de modo que  $i = 1, 2, \dots, n$ , em que  $n$  é o número de tempos de falha gerados;

2. Defina um limiar de degradação  $D_f$ ;
3. Utilize a equação  $\beta_i = \frac{T_i}{D_f}$  para encontrar a amostra de efeitos aleatórios  $\beta_i$  que gerarão cada perfil;
4. Defina os tempos  $t_j$  nos quais serão simuladas as medidas de degradação  $y_{ij}$ , sendo que  $j = 1, 2, \dots, m_i$ , em que  $m_i$  denota o número de mensurações para o  $i$ -ésimo perfil.
5. Defina o desvio padrão  $\sigma_\epsilon$  do erro de mensuração  $\epsilon_{ij}$  associado ao modelo de degradação na equação (2.2);
6. Gere as medidas de degradação  $y_{ij}$  utilizando a equação (2.2) do modelo de degradação. Os erros associados a cada  $y_{ij}$  são obtidos da distribuição  $\epsilon_{ij} | \sigma_\epsilon^2 \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\epsilon^2)$ .

No contexto do modelo linear de degradação com a distribuição Weibull para os efeitos aleatórios, foram consideradas as seguintes distribuições *a priori* não informativas para os parâmetros de interesse:

$$\begin{cases} \beta_i | (\kappa, \lambda) \sim \text{Weibull}(\kappa; \lambda); \\ \sigma_\epsilon^2 \sim \text{Gama Invertida}(a_1 = 0, 01; b_1 = 0, 01); \\ \kappa | a_2, b_2 \sim \text{Gama}(a_2 = 0, 01; b_2 = 0, 01); \\ \lambda | a_3, b_3 \sim \text{Gama}(a_3 = 0, 01; b_3 = 0, 01). \end{cases} \quad (2.16)$$

Gerou-se  $n = 15$  perfis de degradação, com  $m_i = 17$  medidas de degradação em cada perfil, sendo  $y_{i1} = 0$  para todos os perfis. Assumiu-se que o limiar crítico é  $D_f = 10$ , o desvio padrão associado ao erro de mensuração é  $\sigma_\epsilon = 0, 2063$  e que  $T_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Weibull}(\kappa = 6; \lambda \cdot D_f = 550 \cdot 10)$ . Os perfis de degradação gerados estão apresentados na Figura 2.1.

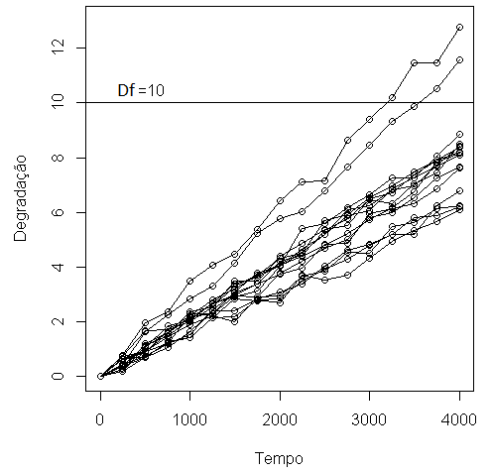


Figura 2.1: Perfis de Degradação (Dados Simulados)

Conforme citado anteriormente, existe uma alta autocorrelação na amostra *a posteriori* do hiperparâmetro  $\kappa$  quando se faz uso de uma análise automatizada (Oliveira *et al.*, 2011). A Figura 2.2 retrata tal fato como pode ser observado nos dois gráficos à esquerda. O algoritmo implementado nessa seção foi eficiente ao reduzir a autocorrelação da amostra *a posteriori* do hiperparâmetro e o valor real ( $\kappa = 6$ ) foi recuperado.

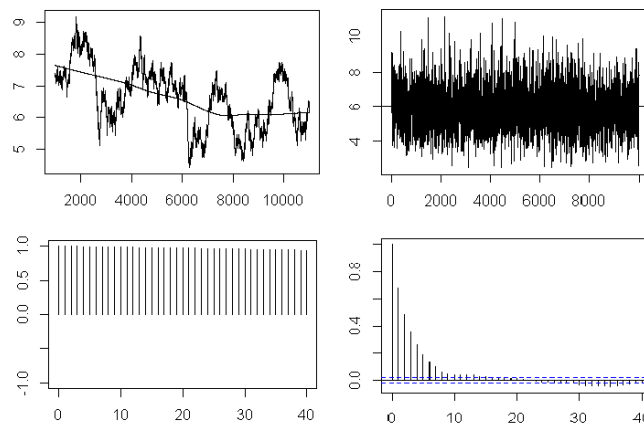


Figura 2.2: Gráficos de convergência e autocorrelação da amostra da distribuição *a posteriori* para  $\kappa$  com a análise automatizada (à esquerda) e algoritmo implementado (à direita)

Dessa forma, visando obter a convergência e baixa autorrelação das amostras *a posteriori*, realizou-se 101000 iterações, considerando-se um período de aquecimento (*burn in*) da cadeia de 1000 e saltos (*lag*) de tamanho 10. Como resultado, foi obtida uma amostra da distribuição *a posteriori* dos parâmetros de interesse de tamanho  $u = 10000$ .



Os valores reais dos parâmetros foram recuperados e as cadeias apresentaram rápida convergência e baixa autocorrelação, como pode ser visto na Figura A.1 do Apêndice A.

A Tabela 2.1 apresenta resumos das distribuições *a posteriori* para alguns parâmetros do modelo e nota-se que as estimativas das médias e medianas *a posteriori* estão bem próximas do valor real considerado no estudo de simulação e o intervalo HPD de 95% de credibilidade cobre esses valores.

Tabela 2.1: Resumos das distribuições *a posteriori* de alguns parâmetros do modelo (Dados Simulados)

Parâmetro	Valor Real	Média	Mediana	Desvio Padrao	HPD LI	HPD LS
$\lambda$	550	544,309	544,507	27,269	491,719	599,032
$\kappa$	6	5,81	5,722	1,232	3,533	8,294
$\sigma_\epsilon$	0,206	0,203	0,202	0,0094	0,184	0,221

As funções de distribuição preditiva *a posteriori* do tempo de falha para as unidades sob teste e futura estão representadas na Figura 2.3 considerando o método de estimação discutido na Subseção 2.2.4 . Nota-se que apesar da amostra gerada de tempos de falha estar sujeita ao erro Monte Carlo, a distribuição preditiva *a posteriori* do tempo de falha de uma nova unidade é próxima da distribuição real.

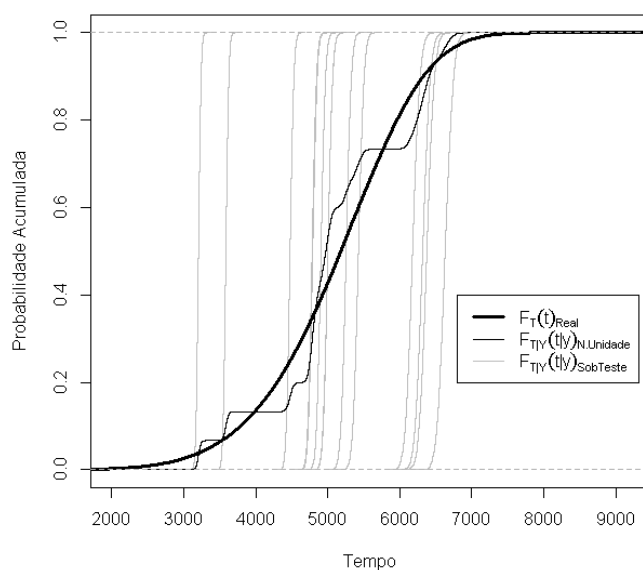


Figura 2.3: Função de distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para unidades sob teste e futura (Dados Simulados)

No próximo capítulo, será feita uma extensão do modelo linear de degradação incorporando uma estrutura dinâmica na forma funcional que está agindo sobre os perfis. Para motivar a inserção dessa estrutura no modelo linear de degradação, a Figura 2.4 apresenta o ajuste do modelo (2.2) no emissor de laser n° 4 (Figura 1.5).

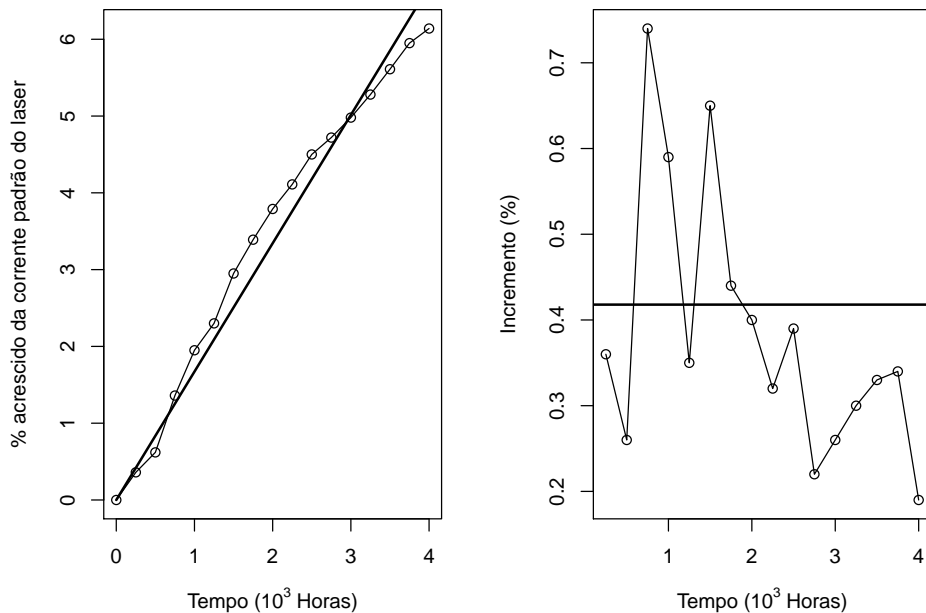


Figura 2.4: Ajuste do modelo linear de degradação no emissor de laser n° 4

Conforme mencionado na introdução deste trabalho, este perfil de degradação apresenta um comportamento de quebra estrutural ao longo do estudo, no que se refere à sua taxa de degradação. Isso é facilmente visto no gráfico à direita, em que os incrementos a partir de 1750 horas diminuem até atingir o menor valor no final do estudo. Ao ajustar o modelo (2.2), a maior parte das degradações acumuladas do perfil se encontram acima da reta ajustada indicando que o mesmo não apresenta um comportamento aleatório ao longo de uma inclinação, o que pode sugerir que outras fontes de variação podem estar agindo neste perfil.

O grande objetivo dos testes de degradação é fazer inferência sobre a distribuição do tempo até a falha das unidades sob teste e futura e avaliar a confiabilidade do sistema. Nesse ponto da análise, é importante atentar para que tipo de informação do ajuste

está sendo transferida para que essa distribuição seja estimada. No modelo linear de degradação, para essa unidade, a informação levada para inferir sobre a distribuição do seu tempo até a falha depende do efeito aleatório  $\beta_4$  ajustado na primeira etapa da análise. Neste contexto, o efeito aleatório é estimado considerando todo o trajeto do perfil de degradação do emissor de laser nº 4. Entretanto, fontes de variação não observáveis podem afetar as medidas de degradação e conseqüentemente a trajetória dos perfis. No próximo capítulo, é detalhada a construção do modelo linear dinâmico de degradação que incorpora uma componente de evolução do sistema capaz de melhor acomodar instabilidades nas taxas de degradação que ocorram durante a condução dos ensaios. Isso permite que o comportamento final dos perfis de degradação seja responsável por levar a informação para a estimação da confiabilidade do sistema.



# Capítulo 3

## Uma Abordagem Dinâmica para o Modelo Linear de Degradação

Neste capítulo, propõe-se uma extensão do modelo linear de degradação no que se refere à sua forma funcional. Na primeira etapa da análise, incorpora-se uma componente de evolução capaz de melhor acomodar possíveis instabilidades nas taxas de degradação que ocorram durante os ensaios, de modo que a informação transferida para estimar o tempo de falha das unidades na segunda etapa não mais dependa de toda a trajetória dos perfis de degradação. Nesse contexto, a Seção 3.1 traz uma breve revisão de literatura sobre conceitos da teoria dos modelos lineares dinâmicos que são importantes para a condução deste trabalho. A Seção 3.2 define o modelo proposto que assume uma abordagem dinâmica para o modelo linear de degradação sob uma perspectiva bayesiana. Nesta seção, é derivado o método inferencial para encontrar a distribuição do tempo até a falha para unidades sob teste e futura, além da discussão de tópicos importantes como a análise de dados faltantes nos ensaios de degradação e adequação do modelo.

### 3.1 Modelos Lineares Dinâmicos

Os modelos lineares dinâmicos (MLD) foram desenvolvidos na engenharia no começo da década de 1960 para monitorar e controlar sistemas dinâmicos que incluem desde a descrição do balanço do pêndulo de um relógio até a análise do fluxo de água em dutos.

Nos últimos anos, os MLD, ou modelos de espaço de estados, têm recebido uma atenção considerável, com aplicações em diversas áreas como biologia, economia, engenharia e genética. Este crescimento se deve ao desenvolvimento de ferramentas computacionais como técnicas modernas de Monte Carlo, que facilitam a inferência nesses modelos (Petris *et al.*, 2009).

Os MLD podem ser analisados por ambas as perspectivas frequentista e Bayesiana (Migon *et al.*, 2014). Na abordagem clássica, os parâmetros de estado são vistos como componentes aleatórios do modelo que fornecem uma ligação através do tempo. Na abordagem Bayesiana, os estados são parâmetros cujo comportamento é descrito por uma distribuição *a priori* que os relaciona no tempo. Kalman (1960) já salientava que a estrutura dos MLD favorece a abordagem Bayesiana. Inicialmente, ocorre a transição de um sistema determinístico para um sistema estocástico em que a incerteza, que sempre está presente, é descrita através de uma medida de probabilidade. A estimação das quantidades de interesse, em particular, o estado de um sistema no tempo  $t$ , é feita computando-se sua distribuição condicional dada a informação disponível que, basicamente, é um dos pilares da inferência Bayesiana. Uma das vantagens dos MLD é a possibilidade da análise computacional ser feita recursivamente em que as distribuições condicionais de interesse podem ser atualizadas sequencialmente, incorporando-se as novas observações, sem requerer o armazenamento de todo o passado. Isso é vantajoso quando os dados são obtidos sequencialmente no tempo e uma inferência imediata é requerida, como no contexto dos ensaios de degradação.

Nesta seção, será apresentada brevemente a teoria de modelos lineares dinâmicos que serve de base para o restante do trabalho. As demonstrações dos resultados bem como outras importantes discussões podem ser encontradas em Petris *et al.* (2009) e West e Harrison (1997).

### 3.1.1 Modelos de Espaços de Estados

Denote por  $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{nt})^t$ ,  $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^n$  e seja  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_T$  uma sequência de  $n$  observações efetuadas ao longo do tempo  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ . Os modelos de espaço de estados são baseados na estrutura relativamente simples de dependência de uma cadeia de

Markov para definir modelos mais complexos para as observações. Assume-se que existe uma cadeia de Markov  $\boldsymbol{\theta}_t$ , com  $\boldsymbol{\theta}_t \in R^p$ , não observável, chamada de processo de estado, e que  $\mathbf{Y}_t$  é uma medida imprecisa de  $\boldsymbol{\theta}_t$ . Em aplicações de engenharia, por exemplo,  $\boldsymbol{\theta}_t$  usualmente descreve o estado de um sistema fisicamente observável que produziu  $\mathbf{Y}_t$ . De qualquer modo, pode-se pensar em  $\boldsymbol{\theta}_t$  como sendo uma série temporal que facilita a tarefa de especificar a distribuição de probabilidade para a série temporal observada  $\mathbf{Y}_t$  (Petrís *et al.*, 2009).

Formalmente, um modelo de espaço de estados satisfaz as seguintes hipóteses:

(H<sub>1</sub>)  $\boldsymbol{\theta}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , é uma cadeia de Markov;

(H<sub>2</sub>) Condicional em  $\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_T$ ,  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_T$  são independentes e  $\mathbf{Y}_t$  depende apenas de  $\boldsymbol{\theta}_t$ .

Assim, o modelo é completamente determinado ao atribuir-se uma distribuição inicial  $\pi(\boldsymbol{\theta}_0)$  para o estado inicial  $\boldsymbol{\theta}_0$  e as densidades condicionais  $\pi(\boldsymbol{\theta}_t|\boldsymbol{\theta}_{t-1})$  e  $\pi(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\theta}_t)$ ,  $t \geq 1$ , de modo que:

$$\pi(\boldsymbol{\theta}_{0:T}, \mathbf{y}_{1:T}) = \pi(\boldsymbol{\theta}_0) \cdot \prod_{j=1}^T \pi(\boldsymbol{\theta}_j|\boldsymbol{\theta}_{j-1})\pi(\mathbf{y}_j|\boldsymbol{\theta}_j), \quad (3.1)$$

em que  $\boldsymbol{\theta}_{0:T} = (\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_T)$  e  $\mathbf{y}_{1:T} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T)$ .

Uma classe particular dos modelos de espaço de estados definidos em (3.1) é o modelo linear de espaço de estados Gaussiano (West e Harrison, 1997). Nesse contexto, a construção dos MLD é feita assumindo-se que, para todo  $t \geq 1$ ,

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{F}_t\boldsymbol{\theta}_t + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_t \sim N_n(0, \mathbf{V}_t); \quad (3.2a)$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{G}_t\boldsymbol{\theta}_{t-1} + \mathbf{w}_t \quad \mathbf{w}_t \sim N_p(0, \mathbf{W}_t), \quad (3.2b)$$

em que  $\mathbf{Y}_t \in R^n$  é um vetor coluna  $n$  dimensional,  $\boldsymbol{\theta}_t$  é um vetor de parâmetros  $p \times 1$ ,  $\mathbf{F}_t$  é a matriz de regressão ( $n \times p$ ) com valores conhecidos de variáveis independentes,  $\mathbf{v}_t$  é o vetor de erros observacionais ( $n \times 1$ ) com matriz de covariância  $\mathbf{V}_t$ ,  $\mathbf{G}_t$  é a matriz ( $p \times p$ ) de evolução ou de transferência e  $\mathbf{w}_t$  é vetor de erros de evolução ( $p \times 1$ ) com matriz de covariância de evolução  $\mathbf{W}_t$ .

Adicionalmente, assume-se que o estado inicial do sistema  $\boldsymbol{\theta}_0$  é tal que:

$$\boldsymbol{\theta}_0 \sim N_p(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0), \quad (3.2c)$$

em que  $\mathbf{m}_0$  é um vetor de constantes conhecidas  $p \times 1$ ,  $\mathbf{C}_0$  é uma matriz de covariâncias  $p \times p$  conhecida e, por hipótese,  $\boldsymbol{\theta}_0$  é independente de  $\mathbf{v}_t$  e  $\mathbf{w}_t$ .

A equação em (3.2a), nomeada de **equação observacional**, e a hipótese  $H_2$  definem a distribuição amostral de  $\mathbf{Y}_t$  condicional em  $\boldsymbol{\theta}_t$ , a qual é dada por:

$$\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\theta}_t \sim N_n(\boldsymbol{\mu}_t, \mathbf{V}_t),$$

em que  $\boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{F}_t \boldsymbol{\theta}_t$  é a resposta média ou nível.

A equação (3.2b), denominada de **equação do sistema**, estabelece a evolução ao longo do tempo do vetor de estados. Dado  $\boldsymbol{\theta}_{t-1}$  a distribuição de  $\boldsymbol{\theta}_t$  é completamente determinada independentemente dos valores de  $\mathbf{Y}_{t-1}$  e todos os vetores de estados e observações anteriores ao tempo  $t - 1$ . Sendo assim, segue dessa equação que  $\boldsymbol{\theta}_t | \boldsymbol{\theta}_{t-1} \sim N_p(\mathbf{G}_t \boldsymbol{\theta}_{t-1}, \mathbf{W}_t)$ .

Definido o MLD, uma das principais tarefas é fazer inferência sobre os estados não observados. Para estimar o vetor de estados, são calculadas as densidades condicionais  $\pi(\boldsymbol{\theta}_s | \mathbf{y}_{1:t})$ . Para tanto, segundo Petris *et al.* (2009), é importante ter em mente a diferença entre três conceitos importantes: *filtragem* ( $s = t$ ), *suavização* ( $s < t$ ) e *previsão* ( $s > t$ ). Na filtragem, propõe-se que os dados são observados sequencialmente no tempo e faz-se necessária uma estimativa do atual valor do espaço de estados baseado nas observações até o tempo  $t$ . Na suavização, ou análise retrospectiva, após a coleta de observações no tempo  $t$  é desejado estudar retrospectivamente o comportamento do sistema. Na previsão, o interesse é voltado para a estimação da evolução do sistema nos próximos passos. Como estes processos são importantes para se fazer a inferência em modelos dinâmicos, maior detalhamento sobre eles é fornecido nas próximas subseções.

### 3.1.2 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um algoritmo que fornece a distribuição *a posteriori* do estado  $\boldsymbol{\theta}_t$  avaliada em  $t - 1$ , a distribuição *a priori* do estado em  $t$ , a distribuição preditiva



a um passo e a distribuição *a posteriori* do estado em  $t$ ; respectivamente dadas nas expressões (3.3a-d). Assim, o filtro de Kalman permite, a partir da distribuição (3.2a), calcular recursivamente as distribuições preditivas e de filtragem. Inicia-se por  $\pi(\boldsymbol{\theta}_1|\mathbf{y}_1)$  e prossegue-se analogamente à medida que novas observações se tornam disponíveis, como é descrito nas próximas linhas.

Seja o MLD definido em (3.2a-c). Sob tal modelo, assume-se que, para todo  $t \geq 1$ :

$$\boldsymbol{\theta}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1} \sim N(\mathbf{m}_{t-1}, \mathbf{C}_{t-1}), \quad (3.3a)$$

de modo que para  $t = 1$ ,  $\mathbf{m}_{t-1} = \mathbf{m}_0$  e  $\mathbf{C}_{t-1} = \mathbf{C}_0$  são o vetor de médias e a matriz de covariâncias da distribuição *a priori* de  $\boldsymbol{\theta}_0$  e para  $t \geq 2$ ,  $\mathbf{m}_t$  e  $\mathbf{C}_t$  são obtidos da seguinte maneira:

- (i) A distribuição preditiva a um passo de  $\boldsymbol{\theta}_t$  dado  $\mathbf{y}_{1:t-1}$  é Normal  $(\mathbf{a}_t; \mathbf{R}_t)$  com:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= E(\boldsymbol{\theta}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathbf{G}_t\mathbf{m}_{t-1}, \\ \mathbf{R}_t &= Var(\boldsymbol{\theta}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathbf{G}_t\mathbf{C}_{t-1}\mathbf{G}_t' + \mathbf{W}_t. \end{aligned} \quad (3.3b)$$

- (ii) A distribuição preditiva a um passo a frente de  $\mathbf{Y}_t$  dado  $\mathbf{y}_{1:t-1}$  é Normal  $(\mathbf{f}_t; \mathbf{Q}_t)$  sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t &= E(\mathbf{Y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathbf{F}_t\mathbf{a}_t, \\ \mathbf{Q}_t &= Var(\mathbf{Y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathbf{F}_t\mathbf{R}_t\mathbf{F}_t' + \mathbf{V}_t. \end{aligned} \quad (3.3c)$$

- (iii) A distribuição de filtragem de  $\boldsymbol{\theta}_t$  dado  $\mathbf{y}_{1:t}$  é Normal  $(\mathbf{m}_t; \mathbf{C}_t)$  com:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_t &= E(\boldsymbol{\theta}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \mathbf{a}_t + \mathbf{R}_t\mathbf{F}_t'\mathbf{Q}_t^{-1}\mathbf{e}_t, \\ \mathbf{C}_t &= Var(\boldsymbol{\theta}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \mathbf{R}_t - \mathbf{R}_t\mathbf{F}_t'\mathbf{Q}_t^{-1}\mathbf{F}_t\mathbf{R}_t, \end{aligned} \quad (3.3d)$$

em que  $\mathbf{e}_t = \mathbf{Y}_t - \mathbf{f}_t$  é o erro de previsão.

### 3.1.3 Suavizador de Kalman

Na filtragem, as distribuições *a posteriori* no tempo  $t$  são obtidas condicionais em informações parciais  $\mathbf{y}_{1:t}$  e não na informação completa  $\mathbf{Y}_{1:T}$ . Assim, a inferência para

os  $\theta_t^s$  iniciais pode ser precária por causa da pouca informação. A suavização é feita visando melhorar as estimativas.

Considera-se novamente o DLM definido em (3.2a-c) e que as observações em  $Y_t$  foram obtidas por um período  $t = 1, 2, \dots, T$ . Se  $\theta_{t+1}|\mathbf{y}_{1:T} \sim N(\mathbf{s}_{t+1}, \mathbf{S}_{t+1})$ , então  $\theta_t|\mathbf{y}_{1:T} \sim N(\mathbf{s}_t, \mathbf{S}_t)$ , em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_t &= \mathbf{m}_t + \mathbf{C}_t \mathbf{G}'_{t+1} \mathbf{R}_{t+1}^{-1} (\mathbf{s}_{t+1} - \mathbf{a}_{t+1}), \\ \mathbf{S}_t &= \mathbf{C}_t - \mathbf{C}_t \mathbf{G}'_{t+1} \mathbf{R}_{t+1}^{-1} (\mathbf{R}_{t+1} - \mathbf{S}_{t+1}) \mathbf{R}_{t+1}^{-1} \mathbf{G}_{t+1} \mathbf{C}_t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

O suavizador de Kalman permite que sejam calculadas as distribuições de  $\theta_t|\mathbf{y}_{1:T}$ , começando por  $t = T - 1$ , que no caso é a distribuição de filtragem em  $T$ ,  $\theta_T|\mathbf{y}_{1:T} \sim N(\mathbf{s}_T = \mathbf{m}_T, \mathbf{S}_T = \mathbf{C}_T)$ , e então prosseguindo em sentido contrário computando as distribuições de  $\theta_t|\mathbf{y}_{1:T}$  para  $t = T - 2, t = T - 3, \dots$

### 3.1.4 Previsão

Possuindo as observações  $\mathbf{y}_{1:t}$ , pode ser de interesse prever novos valores de observações,  $\mathbf{Y}_{t+k}$ , ou fazer inferência sobre os vetores de estados,  $\theta_{t+k}$ . Supondo o DLM definido em (3.2a-c) e fazendo  $\mathbf{a}_t(\mathbf{0}) = \mathbf{m}_t$  e  $\mathbf{R}_t(\mathbf{0}) = \mathbf{C}_t$ , para  $k \geq 1$ , tais inferências podem ser obtidas conforme os seguintes passos:

- (i) A distribuição de  $\theta_{t+k}$  dado  $\mathbf{y}_{1:t}$  é Normal( $\mathbf{a}_t(\mathbf{k}), \mathbf{R}_t(\mathbf{k})$ ), com:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t(\mathbf{k}) &= \mathbf{G}_{t+k} \mathbf{a}_t(\mathbf{k} - 1), \\ \mathbf{R}_t(\mathbf{k}) &= \mathbf{G}_{t+k} \mathbf{R}_t(\mathbf{k} - 1) \mathbf{G}'_{t+k} + \mathbf{W}_{t+k}. \end{aligned} \quad (3.5a)$$

- (ii) A distribuição de  $\mathbf{Y}_{t+k}$  dado  $\mathbf{y}_{1:t}$  é Normal( $\mathbf{f}_t(\mathbf{k}), \mathbf{Q}_t(\mathbf{k})$ ), com :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t(\mathbf{k}) &= \mathbf{F}_{t+k} \mathbf{a}_t(\mathbf{k}), \\ \mathbf{Q}_t(\mathbf{k}) &= \mathbf{F}_{t+k} \mathbf{R}_t(\mathbf{k}) \mathbf{F}'_{t+k} + \mathbf{V}_t. \end{aligned} \quad (3.5b)$$

### 3.1.5 Medidas de Acurácia

As medições de erros estatísticos desempenham um papel crítico na precisão das previsões obtidas conforme a subseção anterior. As estatísticas MAPE, MAD e MSE

são informações importantes para fazer comparação dos modelos de suavização e decidir se estes representam um bom ajuste aos dados. Nas aplicações dos bancos de dados reais efetuadas no capítulo 5, tais medidas serão utilizadas para comparar a qualidade do ajuste dos modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico e, por isso, são descritas com mais detalhes nas próximas linhas.

### Média Percentual Absoluta do Erro (MAPE)

Expressa o erro em porcentagem. Isto é, se seu valor é 7% indica que o ajuste está errado em 7% dos dados. Para obter a MAPE, utiliza-se a expressão:

$$\frac{\sum_{t=1}^n |(y_t - \hat{y}_t)/y_t|}{n} \times 100, \text{ se } y_t \neq 0. \quad (3.5)$$

### Desvio Padrão Absoluto da Média (MAD)

Representa o desvio padrão do ajuste em relação à média nas mesmas unidades dos dados. A seguinte fórmula é utilizada para o seu cálculo:

$$\frac{\sum_{t=1}^n |(y_t - \hat{y}_t)|}{n}. \quad (3.6)$$

### Erro Quadrático Médio (MSE)

Esta medida de acurácia é bastante comum em ajustes dos modelos dinâmicos. Quando há outliers no conjunto de dados, essa medida é mais afetada do que o MAD. Para calcular o (MSE) é utilizado a seguinte expressão:

$$\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n}. \quad (3.7)$$

Em todos os casos,  $y_t$  e  $\hat{y}_t$  representam os valores observados e ajustados, respectivamente. Além disso, quanto menor os valores das medidas de acurácia de previsão, melhor a qualidade do ajuste do modelo.

### 3.1.6 Foward Filtering Backward Sampling

Se além dos estados  $\boldsymbol{\theta}_t$ , com  $t = 1, 2, \dots, T$ , o MLD incluir um outro parâmetro multidimensional desconhecido  $\boldsymbol{\psi}$  na sua especificação e as observações  $\mathbf{y}_{1:T}$ , a distribuição *a posteriori* conjunta do parâmetro  $\boldsymbol{\psi}$  e dos estados não observados é:

$$\pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta}_{0:T} | \mathbf{y}_{1:T}). \quad (3.6)$$

Em geral, é impossível obter a forma fechada da distribuição dada em (3.6). Para gerar amostras dessa distribuição, é necessário recorrer a métodos computacionais tais como os métodos MCMC através de um amostrador de Gibbs, alternando extrações das distribuições condicionais completas *a posteriori* de  $\pi(\boldsymbol{\psi} | \boldsymbol{\theta}_{0:T}, \mathbf{y}_{1:T})$  e  $\pi(\boldsymbol{\theta}_{0:T} | \boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}_{1:T})$ , se estas possuírem forma fechada. Para gerar amostras da distribuição condicional completa *a posteriori* de  $\boldsymbol{\theta}_{0:T}$  há algoritmos eficientes, como por exemplo, o *Foward Filtering Backward Sampling* (FBBS) disponível em Carter e Kohn (1994), Frühwirth-Schnatter (1994) e Shephard (1994). O FFBS essencialmente é uma versão simulada das recursões de suavização (Petris *et al.*, 2009).

Nesse contexto, pode-se escrever a distribuição conjunta *a posteriori* de  $\boldsymbol{\theta}_{0:T}$  dado  $\mathbf{y}_{1:T}$  da seguinte forma:

$$\pi(\boldsymbol{\theta}_{0:T} | \mathbf{y}_{1:T}) = \prod_{t=0}^T \pi(\boldsymbol{\theta}_t | \boldsymbol{\theta}_{t+1:T}, \mathbf{y}_{1:T}), \quad (3.7)$$

em que o último fator do produtório em (3.7) é  $\pi(\boldsymbol{\theta}_T | \mathbf{y}_{1:T})$ , isto é, a distribuição de filtração de  $\boldsymbol{\theta}_T$ , que, no MLD Gaussiano, é  $N(\mathbf{m}_T, \mathbf{C}_T)$ . A expressão (3.7) sugere que, com o objetivo de obter a distribuição do lado esquerdo da fórmula, deve-se começar gerando amostras de  $\boldsymbol{\theta}_T$  de  $N(\mathbf{m}_T, \mathbf{C}_T)$  e depois, para  $t = T - 1, T - 2, \dots, 0$ , recursivamente, extrair amostras de  $\boldsymbol{\theta}_t$  a partir de  $\pi(\boldsymbol{\theta}_t | \boldsymbol{\theta}_{t+1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$ , cuja distribuição é  $N(\mathbf{h}_t, \mathbf{H}_t)$  em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_t &= \mathbf{m}_t + \mathbf{C}_t \mathbf{G}'_{T+1} \mathbf{R}_{T+1}^{-1} (\boldsymbol{\theta}_{t+1} - \mathbf{a}_{t+1}), \\ \mathbf{H}_t &= \mathbf{C}_t - \mathbf{C}_t \mathbf{G}'_{t+1} \mathbf{R}_{t+1}^{-1} \mathbf{G}_{t+1} \mathbf{C}_t. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dessa forma, tendo obtido  $(\boldsymbol{\theta}_{t+1}, \dots, \boldsymbol{\theta}_T)$ , o próximo passo consiste em extrair  $\boldsymbol{\theta}_t$  de

$N(\mathbf{h}_t, \mathbf{H}_t)$ . Perceba que  $\mathbf{h}_t$  depende do valor  $\boldsymbol{\theta}_{t+1}$  que é gerado no passo anterior do algoritmo.

Esquemáticamente, o algoritmo FFBS é assim representado:

( $F_1$ ) Execute o filtro de Kalman;

( $F_2$ ) Gere  $\boldsymbol{\theta}_T \sim N(\mathbf{m}_T, \mathbf{C}_T)$ ;

( $F_3$ ) Para  $t = T - 1, \dots, 0$ , gere  $\boldsymbol{\theta}_t \sim N(\mathbf{h}_t, \mathbf{H}_t)$ .

## 3.2 Modelo Linear de Degradação Dinâmico

Uma suposição habitual feita no modelo linear de degradação, como aquele visto no Capítulo 2 deste trabalho é que a taxa de degradação em uma unidade  $i$  é constante ao longo do tempo. Entretanto, conforme Ye e Xie (2015), possíveis mudanças aleatórias nas condições físicas dos produtos contribuem para a aleatoriedade inexplicada dos processos de degradação. Além disso, fatores ambientais podem contribuir para a aleatoriedade não explicada. Por exemplo, nos dados de desgaste em rodas de trem (Freitas *et al.*, 2009), fatores externos como temperatura, lotação do trem, entre outros, podem afetar as taxas de degradação de modo que a suposição feita no modelo de degradação linear não parece mais ser razoável. Por outro lado, se é possível obter informação suficiente sobre estes fatores ambientais, pode-se tratá-los como covariáveis dependentes do tempo e a aleatoriedade dos perfis de degradação seria reduzida (Hong *et al.*, 2015). Porém, é quase impossível observar todos os fatores ambientais.

### 3.2.1 Definição

Nesta seção, propõe-se um modelo de degradação o qual assume que a taxa de degradação em cada unidade  $i$  varie ao longo do tempo. É introduzido estendendo o modelo linear de degradação definido na literatura ao incorporar uma componente de evolução dos perfis capaz de melhor acomodar as instabilidades das taxas de degradação causadas por fatores não explicados. Para este fim, assume-se que  $n$  unidades independentes,

são colocadas sob teste e que, em cada unidade,  $m_i$  medidas de degradação são feitas. Denote por  $Y_{ij}$  a  $j$ -ésima medida de degradação para a  $i$ -ésima unidade, de modo que  $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{nj})^t$  representa as medidas de degradação coletadas nas  $n$  unidades sob teste no instante de medição  $j$ .

Em um contexto dinâmico, a forma mais simples de analisar tais dados seria considerar uma análise em cada perfil de degradação individualmente. Essa abordagem pode até dar boas previsões, mas não faz o que comumente se chama de "pegar emprestado", isto é, ao predizer a degradação feita para uma unidade  $i$ , não é explorada a informação proveniente das outras unidades sob teste (Petris *et al.*, 2009). Visando utilizar toda a informação disponível, propõe-se o ajuste de um modelo conjunto para o processo  $n$ -variado  $((Y_{1,j}, \dots, Y_{n,j}), j = 1, 2, \dots)$ .

Uma suposição habitual dos modelos gerais de perfis de degradação é que todas as unidades tenham a mesma forma funcional. Isso corresponde, no atual contexto, à hipótese qualitativa de que todas elas tenham a mesma estrutura dinâmica. Assim, para cada unidade  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e cada instante de mensuração  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_i$ , propõe-se o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \beta_{ij}t_{ij} + v_{ij} & v_{ij} &\stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_v^2); \\ \beta_{ij} &= \beta_{i(j-1)} + w_{ij} & w_{ij} &\stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_w^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

em que  $Y_{ij}$  é a  $j$ -ésima medida de degradação obtida na  $i$ -ésima unidade;  $\beta_{ij}$  representa a componente de estado e a taxa de degradação da unidade  $i$  no intervalo de medição  $[j - 1, j]$ ;  $t_{ij}$  é o  $j$ -ésimo tempo de mensuração associado à unidade  $i$ ;  $v_{ij}$  e  $w_{ij}$  representam os erros observacional e de evolução, com respectivas variâncias associadas  $\sigma_v^2$  e  $\sigma_w^2$ . Assume-se aqui que ambas são desconhecidas e invariantes no tempo.

Juntamente com o par de equações dado em (3.9) é necessário estabelecer a distribuição do vetor de componente de estados inicial  $\boldsymbol{\beta}_0 = (\beta_{10}, \beta_{20}, \dots, \beta_{n0})^t$  dada por:

$$\boldsymbol{\beta}_0 \sim N_n(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0), \quad (3.10)$$

em que  $\mathbf{m}_0$  e  $\mathbf{C}_0$  são especificados de modo a satisfazer a informação *a priori* disponível sobre o vetor de componentes de estado inicial.

No capítulo 2, a taxa de degradação do modelo linear para a  $i$ -ésima unidade era representada por apenas um escalar  $\beta_i$ , invariante no tempo. No modelo linear de degradação dinâmico, essa taxa é quebrada em componentes de estado que evoluem ao longo do tempo. Assim, as componentes do vetor de estados  $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{im_i})^t$  têm interpretações similares e podem assumir diferentes valores para cada unidade  $i$ . Perceba que o modelo dado em (3.9) generaliza o modelo linear de degradação (2.2), quando uma estrutura multiplicativa para  $\beta_i$  é considerada, isto é,  $D(t_{ij}, \beta_i) = \beta_i t_{ij}$ . Para que isso ocorra, basta especificar  $\sigma_w^2 = 0$  em (3.9), de modo que  $\beta_{ij} = \beta_i$  para todo  $j = 1, 2, \dots, m_i$ .

### 3.2.2 Inferência no Modelo Proposto

A inferência no modelo definido em (3.9) é facilitada se o mesmo for reescrito com a estrutura de modelos lineares dinâmicos conforme as expressões (3.2a-c), apontadas na Seção 3.1. Para tanto, tem-se que em cada instante de mensuração  $t = j$ , um número  $p = n$  de componentes de estado está agindo no processo (um para cada perfil). Alterando a notação, o modelo apresentado em (3.9) é equivalente ao modelo dado nas equações (3.2a-c) fazendo-se:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \mathbf{Y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})'; \\
 & \bullet \mathbf{F}_j = \begin{pmatrix} t_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{2j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nj} \end{pmatrix}; \\
 & \bullet \boldsymbol{\theta}_j = (\beta_{1j}, \beta_{2j}, \dots, \beta_{nj})'; \\
 & \bullet \mathbf{v}_j = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{nj})'; \\
 & \bullet \mathbf{V}_j = \sigma_v^2 \cdot \mathbb{1}_{n \times n}; \\
 & \bullet \mathbf{G}_j = \mathbb{1}_{n \times n}; \\
 & \bullet \mathbf{w}_j = (w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{nj})'; \\
 & \bullet \mathbf{W}_j = \sigma_w^2 \cdot \mathbb{1}_{n \times n}.
 \end{aligned}$$

Para seguir com o processo de inferência do modelo (3.9), será utilizado o amostrador de Gibbs com passos de FFBS, discutido na Seção 3.1. Conforme mencionado anteriormente, as variâncias  $\sigma_v^2$  e  $\sigma_w^2$  são consideradas desconhecidas e, juntamente com as componentes de estado não observadas, completam os parâmetros de interesse.

Uma família de distribuições comumente utilizada para modelar o comportamento da precisão é a família de distribuições Gama. Para  $\sigma_v^2$  e  $\sigma_w^2$  tais distribuições *a priori* são construídas considerando-se  $\psi_1 = \frac{1}{\sigma_v^2}$  e  $\psi_2 = \frac{1}{\sigma_w^2}$  e especificando-se respectivamente que  $\psi_1 \sim \text{Gama}(a_1, b_1)$  e  $\psi_2 \sim \text{Gama}(a_2, b_2)$  de acordo com a função de densidade dada na expressão (2.6).

Considere  $J = \text{máx}(m_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Nessas circunstâncias, deseja-se obter amostras da distribuição *a posteriori*  $\pi(\boldsymbol{\theta}_{0:J}, \psi_1, \psi_2 | \mathbf{y}_{1:J})$ . No amostrador de Gibbs para esse modelo, amostras da distribuição *a posteriori* de  $\boldsymbol{\theta}_{0:J}$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são extraídas gerando-se a partir de suas distribuições condicionais completas *a posteriori*.

Para gerar os vetores de componentes de estado  $\boldsymbol{\theta}_{0:J}$ , através da sua distribuição condicional completa *a posteriori*  $\pi(\boldsymbol{\theta}_{0:J} | \psi_1, \psi_2, \mathbf{y}_{1:J})$ , será utilizado o FFBS, condicionando-se nos valores de  $\psi_1$  e  $\psi_2$  mais recentemente gerados. Esse passo é realizado utilizando-se o pacote *dgm* (Petris *et al.*, 2009) do software estatístico *R* (R Development Core Team, 2017).

Valores de  $\psi_1$  associado a  $\sigma_v^2$  são obtidos da distribuição condicional completa *a posteriori*  $\pi(\psi_1 | \psi_2, \boldsymbol{\theta}_{0:J}, \mathbf{y}_{1:J})$ . Essa distribuição é proporcional à distribuição conjunta de todas as quantidades envolvidas no modelo e, uma vez que assume-se que  $Y_{ij} | \beta_{ij}, \sigma_v^2 \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{N}(\beta_{ij} t_{ij}, \sigma_v^2)$  e  $\beta_{ij} | \beta_{i(j-1)}, \sigma_w^2 \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{N}(\beta_{i(j-1)}, \sigma_w^2)$ , tal distribuição é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi(\psi_1 | \psi_2, \boldsymbol{\theta}_{0:J}, \mathbf{y}_{1:J}) &\propto \pi(\mathbf{y}_{1:J} | \boldsymbol{\theta}_{0:J}, \psi_1, \psi_2) \pi(\boldsymbol{\theta}_{0:J} | \psi_1, \psi_2) \pi(\psi_1, \psi_2) \\
&\propto \prod_{j=1}^J \pi(\mathbf{y}_j | \boldsymbol{\theta}_j, \psi_1) \pi(\psi_1) \\
&\propto \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^n \pi(y_{ij} | \beta_{ij}, \psi_1) \pi(\psi_1) \\
&\propto \psi_1^{\frac{Jn}{2}} \exp \left\{ -\frac{\psi_1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \beta_{ij} t_{ij})^2 \right\} \psi_1^{a_1-1} \exp\{-b_1 \psi_1\} \\
&\propto \psi_1^{a_1 + \frac{Jn}{2} - 1} \exp \left\{ -\psi_1 \left[ b_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \beta_{ij} t_{ij})^2 \right] \right\}, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

e, portanto, tem-se que  $\psi_1 | \psi_2, \boldsymbol{\theta}_{0:J}, \mathbf{y}_{1:J} \sim \text{Gama} \left( a_1 + \frac{Jn}{2}, b_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \beta_{ij} t_{ij})^2 \right)$ .

Amostras de  $\psi_2$  associado a  $\sigma_w$  são geradas da distribuição condicional completa *a posteriori*  $\pi(\psi_2 | \psi_1, \boldsymbol{\theta}_{0:J}, \mathbf{y}_{1:J})$ . Analogamente ao que foi feito no passo anterior, essa



distribuição é dada por:

$$\begin{aligned}
 \pi(\psi_2|\psi_1, \boldsymbol{\theta}_{0:J}, \mathbf{y}_{1:J}) &\propto \pi(\mathbf{y}_{1:J}|\boldsymbol{\theta}_{0:J}, \psi_1, \psi_2)\pi(\boldsymbol{\theta}_{0:J}|\psi_1, \psi_2)\pi(\psi_1, \psi_2) \\
 &\propto \prod_{j=1}^J \pi(\boldsymbol{\theta}_j|\boldsymbol{\theta}_{j-1}, \psi_2)\pi(\psi_2) \\
 &\propto \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^n \pi(\beta_{ij}|\beta_{i(j-1)}, \psi_2)\pi(\psi_2) \\
 &\propto \psi_2^{\frac{Jn}{2}} \exp\left\{-\frac{\psi_2}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^n (\beta_{ij} - \beta_{i(j-1)})^2\right\} \psi_2^{a_2-1} \exp\{-b_2\psi_2\} \\
 &\propto \psi_2^{a_2+\frac{Jn}{2}-1} \exp\left\{-\psi_2 \left[b_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^n (\beta_{ij} - \beta_{i(j-1)})^2\right]\right\}, \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

e, portanto, tem-se que  $\psi_2|\psi_1, \boldsymbol{\theta}_{0:J}, \mathbf{y}_{1:J} \sim \text{Gama}\left(a_2 + \frac{Jn}{2}, b_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^n (\beta_{ij} - \beta_{i(j-1)})^2\right)$ . Percebe-se das expressões (3.11) e (3.12) que  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são condicionalmente independentes, dado  $\boldsymbol{\theta}_{0:J}$  e  $\mathbf{y}_{1:J}$ .

Assim, o algoritmo para gerar da distribuição *a posteriori* dos parâmetros é esquematizado da seguinte maneira:

(D<sub>1</sub>) Especifique os valores iniciais:  $\psi_1 = \psi_1^{(0)}$  e  $\psi_2 = \psi_2^{(0)}$ ;

(D<sub>2</sub>) Para  $k = 1, \dots, K$ :

(a<sub>1</sub>) gere  $\boldsymbol{\theta}_{0:J}^{(k)}$  a partir de  $\pi\left(\boldsymbol{\theta}_{0:J}|\psi_1 = \psi_1^{(k-1)}, \psi_2 = \psi_2^{(k-1)}, \mathbf{y}_{1:J}\right)$ , utilizando o FFBS;

(a<sub>2</sub>) gere  $\psi_1^{(k)}$  a partir de  $\pi\left(\psi_1|\psi_2 = \psi_2^{(k-1)}, \boldsymbol{\theta}_{0:J} = \boldsymbol{\theta}_{0:J}^{(k)}, \mathbf{y}_{1:J}\right)$ ;

(a<sub>3</sub>) gere  $\psi_2^{(k)}$  a partir de  $\pi\left(\psi_2|\psi_1 = \psi_1^{(k)}, \boldsymbol{\theta}_{0:J} = \boldsymbol{\theta}_{0:J}^{(k)}, \mathbf{y}_{1:J}\right)$ .

### 3.2.3 Inferência para o Tempo até a Falha

Conforme discutido no Capítulo 2, a análise dos modelos gerais de degradação compreende duas etapas: primeiramente efetua-se um ajuste nas unidades em teste para estimar o modelo de degradação e, em sequência, é utilizada tal estimativa e a relação entre a degradação e o tempo até a falha para serem obtidas as quantidades de interesse

em Confiabilidade como, por exemplo, estudar o comportamento do tempo até a falha de unidades futuras.

Ao colocar uma estrutura dinâmica nas componentes de estado que representam as taxas de degradação no modelo (3.9), este comportamento dinâmico também se reflete no tempo até a falha. Pode-se dizer que a cada instante de inspeção  $j$ , o  $i$ -ésimo perfil, com  $i = 1, 2, \dots, n$ , está sujeito a uma inclinação proveniente da taxa de degradação naquele instante que, se projetada, levaria a um dado tempo de falha  $T_{ij}$ . Para perceber isso, seja  $D_{ij}(t_{ij}, \beta_{ij}) = \beta_{ij}t_{ij}$  o real perfil de degradação considerado para a  $i$ -ésima unidade no instante de medição  $j$ . Assim, lembrando que a falha ocorre quando a unidade atinge o limiar crítico  $D_f$ , tem-se que  $D_f = \beta_{ij}T_{ij} \Rightarrow T_{ij} = \frac{D_f}{\beta_{ij}}$ .

Nesse contexto, a distribuição preditiva *a posteriori* do tempo de falha dinâmico  $F_{T_{ij}|Y_{1:j}}$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 F_{T_{ij}|Y_{1:j}} &= P(T_{ij} \leq t | \mathbf{y}_{1:j}) \\
 &= P\left(\frac{D_f}{\beta_{ij}} \leq t | y_{1:j}\right) \\
 &= P\left(\beta_{ij} \geq \frac{D_f}{t} | \mathbf{y}_{1:j}\right) \\
 &= 1 - F_{\beta_{ij} | \mathbf{y}_{1:j}}\left(\frac{t}{D_f}\right)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nos testes de degradação, não é necessária a existência de unidades que tenham falhado no estudo para que se possa fazer uma análise satisfatória sobre o tempo até a falha. No entanto, quando elas ocorrem nos ensaios de degradação, é importante que seus referidos tempos de falha sejam bem estimados, uma vez que todas as unidades em teste servem de base para a estimação do tempo de falha de uma unidade futura.

Nesse contexto, para as unidades sob teste que já falharam, é possível investigar o seu tempo de falha considerando a taxa de degradação estimada no instante de medição imediatamente anterior a falha e para as demais unidades a informação para o tempo de falha é proveniente da sua última taxa de degradação estimada pelo modelo, já que esta representa o comportamento final do perfil no estudo.

Dessa forma, considere:

$$\gamma_i = \begin{cases} l_i, & \text{se a unidade } i \text{ falhou;} \\ J, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.14)$$

em que  $l_i$  é o instante de medição imediatamente anterior à falha.

Para as unidades sob teste, a estimação de  $F_{T_i|\mathbf{Y}_{1:J}}(t|\mathbf{y}_{1:J})$  é obtida de acordo com o seguinte esquema:

$$\begin{aligned} \left( \beta_{i\gamma_i}^{(1)}, \beta_{i\gamma_i}^{(2)}, \dots, \beta_{i\gamma_i}^{(u)} \right) &\Rightarrow \text{avalie } \beta_{i\gamma_i}|\mathbf{y}_{1:J} \text{ em } T_{i\gamma_i} = \frac{D_f}{\beta_{i\gamma_i}} \\ &\Rightarrow \left( [T_{i\gamma_i}|\beta_{i\gamma_i}]^{(1)}, [T_{i\gamma_i}|\beta_{i\gamma_i}]^{(2)}, \dots, [T_{i\gamma_i}|\beta_{i\gamma_i}]^{(u)} \right), \end{aligned}$$

conduzindo ao seguinte estimador:

$$\hat{F}_{T_i|\mathbf{Y}_{1:J}}(t|\mathbf{y}_{1:J}) = \frac{\sum_{j=1}^u \mathbb{1} \left\{ [T_{i\gamma_i}|\beta_{i\gamma_i}]^{(j)} \leq t \right\}}{u}; \quad (3.15)$$

Para uma unidade futura, assume-se a amostra da distribuição *a posteriori* de  $\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}_{1:J}$ , com  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{1\gamma_1}, \beta_{2\gamma_2}, \dots, \beta_{n\gamma_n})$ , como a amostra da distribuição *a posteriori* de  $\beta_{n+1}|\mathbf{y}_{1:J}$ . Assim, a estimativa de  $F_{T_{n+1}|\mathbf{Y}_{1:J}}(t|\mathbf{y}_{1:J})$  é obtida de acordo com o esquema a seguir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_{1\gamma_1}^{(1)} & \beta_{1\gamma_1}^{(2)} & \dots & \beta_{1\gamma_1}^{(u)} \\ \beta_{2\gamma_2}^{(1)} & \beta_{2\gamma_2}^{(2)} & \dots & \beta_{2\gamma_2}^{(u)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n\gamma_n}^{(1)} & \beta_{n\gamma_n}^{(2)} & \dots & \beta_{n\gamma_n}^{(u)} \end{pmatrix} &\Rightarrow \text{avalie } \beta_{i\gamma_i}|\mathbf{y}_{1:J} \text{ em } T_{i\gamma_i} = \frac{D_f}{\beta_{i\gamma_i}} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} [T_{1\gamma_1}|\beta_{1\gamma_1}]^{(1)} & [T_{1\gamma_1}|\beta_{1\gamma_1}]^{(2)} & \dots & [T_{1\gamma_1}|\beta_{1\gamma_1}]^{(u)} \\ [T_{2\gamma_2}|\beta_{2\gamma_2}]^{(1)} & [T_{2\gamma_2}|\beta_{2\gamma_2}]^{(2)} & \dots & [T_{2\gamma_2}|\beta_{2\gamma_2}]^{(u)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [T_{n\gamma_n}|\beta_{n\gamma_n}]^{(1)} & [T_{n\gamma_n}|\beta_{n\gamma_n}]^{(2)} & \dots & [T_{n\gamma_n}|\beta_{n\gamma_n}]^{(u)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

levando ao seguinte estimador:

$$\hat{F}_{T_{n+1}|\mathbf{Y}}(t|\mathbf{y}) = \frac{\sum_{j=1}^u \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ [T_{i\gamma_i}|\beta_{i\gamma_i}]^{(j)} \leq t \right\}}{nu}. \quad (3.16)$$

### 3.2.4 Tratamento de Dados Faltantes

Na análise dos dados reais, é muito comum ter que lidar com observações faltantes. Nos ensaios de degradação, em particular, tal condição é mais recorrente no final dos estudos, principalmente em unidades sob teste que falharam. Nos dados de desgaste em rodas de trem (Freitas *et al.*, 2009), por exemplo, as rodas de posição MA11 que apresentaram a falha foram substituídas e não mais foram obtidas medidas de diâmetro após esse acontecimento (Figura 1.2).

A estrutura dos modelos de espaço de estados favorece que dados faltantes sejam facilmente acomodados na recursão de filtragem (Petris *et al.*, 2009). Considere um ensaio de degradação com  $n$  unidades sob teste e que, no instante de medição  $j$ , o vetor  $\mathbf{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})^t$  possui observações faltantes. Na filtragem, o vetor  $\mathbf{y}_j$  possui alguma informação sobre as taxas de degradação no instante  $j$ ,  $\beta_j$ , mas toda essa informação está contida nas observações coletadas neste instante de medição. Dessa forma, se torna possível adaptar o filtro de Kalman para situações de dados faltantes de modo que sejam obtidas as recursões de filtragem.

### 3.2.5 Adequação do modelo

Na abordagem geral de perfis de degradação são feitas suposições sobre o modelos. Na literatura, não é comum a verificação dessas suposições, principalmente a de normalidade dos erros. A adequação do modelo é realizada essencialmente por meio dos resíduos do modelo ajustado. Uma análise dos resíduos ajuda a determinar se as suposições feitas sobre o modelo são adequadas.

No contexto do modelo (3.9), no instante de medição  $j$ , pode-se definir o erro de previsão  $e_j$  como:

$$e_j = Y_j - E(Y_j | y_{1:j-1}) = Y_j - f_j. \quad (3.17)$$

A sequência de erros de previsão  $(e_j)_{j \geq 1}$  possui algumas propriedades importantes e também são chamados de inovações (Petris *et al.*, 2009). Segundo os autores, quando as observações são univariadas, a sequência de inovações padronizadas, definida por  $\tilde{e}_j = \frac{e_j}{Q_j}$  é um ruído Gaussiano, em que  $Q_j$  é definido em (3.3c).

No software R (R Development Core Team, 2017), as inovações padronizadas podem ser extraídas com o uso do pacote *dlim* (Petris *et al.*, 2009) que fornece gráficos de autocorrelação e a estatística de Ljung e Box (Ljung e Box, 1978) para testar se as inovações se comportam de maneira aleatória e independente. Aliado a estes métodos de diagnóstico, é comumente utilizado o teste de normalidade de Shapiro Wilk (Shapiro e Wilk, 1965) para verificar a adequação da distribuição.

Para o caso de observações multivariadas, como os ensaios de degradação, os mesmos gráficos são aplicados de maneira univariada na sequência de inovações (Petris *et al.*, 2009). No Capítulo 5, ao ajustar o modelo linear de degradação dinâmico nos bancos de dados reais, efetuou-se a adequação do modelo e os resultados estão no Apêndice B.



# Capítulo 4

## Análise de dados Simulados

Neste capítulo, o objetivo é comparar o modelo linear de degradação dinâmico proposto neste trabalho com o modelo linear de degradação Weibull, considerando dados simulados.

No primeiro estudo (Seção 4.1), os perfis gerados são provenientes dos dados de degradação linear Weibull. Neste contexto, de posse dos tempos de falha reais, o estudo é dividido em dois cenários de modo a avaliar o impacto no aumento de unidades amostrais sob teste nas estimativas obtidas pelos modelos. No segundo estudo (Seção 4.2), os perfis simulados são oriundos dos dados de degradação linear dinâmico. Nesta seção, a análise é dividida em dois cenários permitindo a comparação de ambos os modelos quando é aumentada a variabilidade nas taxas de degradação em cada unidade. Nos dois estudos também é verificado o impacto do aumento no número de mensurações do mecanismo de degradação.

No ajuste do modelo linear de degradação Weibull aos dados simulados, especificam-se as seguintes distribuições *a priori* pouco informativas para os parâmetros:

$$\begin{cases} \beta_i | (\kappa, \lambda) \sim \text{Weibull}(\kappa; \lambda); \\ \sigma_\varepsilon^2 \sim \text{Gama Invertida}(a_1 = 0,01; b_1 = 0,01); \\ \kappa | a_2, b_2 \sim \text{Gama}(a_2 = 0,01; b_2 = 0,01); \\ \lambda | a_3, b_3 \sim \text{Gama}(a_3 = 0,01; b_3 = 0,01). \end{cases} \quad (4.1)$$

No ajuste do modelo linear dinâmico de degradação, atribui-se  $m_0 = 0$ ,  $C_0 = 1000$  e as seguintes distribuições *a priori* pouco informativas:

$$\begin{cases} \psi_1 | a_1, b_1 \sim \text{Gama}(a_1 = 0, 01; b_1 = 0, 01); \\ \psi_2 | a_2, b_2 \sim \text{Gama}(a_2 = 0, 01; b_2 = 0, 01). \end{cases} \quad (4.2)$$

Para o algoritmo MCMC, realizou-se um total de 101000 iterações, sendo 1000 para o período de aquecimento (*burn in*) e saltos (*lag*) de 10 iterações para a amostragem. Como resultado, obteve-se uma amostra da distribuição *a posteriori* de tamanho  $u = 10000$ .

Ao comparar o ajuste dos dois modelos, foram considerados o vício e erro quadrático médio (MSE) das estimativas obtidos da seguinte maneira:

$$\text{Vício} = \frac{1}{nR} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^R (T_{ij}^* - \hat{T}_{ij}), \quad (4.3)$$

$$\text{MSE} = \frac{1}{nR} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^R (T_{ij}^* - \hat{T}_{ij})^2, \quad (4.4)$$

em que  $n$  é o número de unidades sob teste,  $R$  é o número de réplicas,  $T_{ij}^*$  e  $\hat{T}_{ij}$  representam, respectivamente, o tempo de falha real e ajustado para a  $i$ -ésima unidade na  $j$ -ésima réplica, com  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, R$ .

## 4.1 Dados de Degradação Linear Weibull

Nesta seção, os perfis de degradação simulados são gerados assumindo o modelo de degradação linear Weibull, definido na equação (2.2), considerando uma estrutura multiplicativa para a taxa de degradação, isto é,  $D(t_{ij}, \beta_i) = \beta_i t_{ij}$ . A análise dos dados simulados é dividida em dois cenários:

$$\begin{cases} \text{Primeiro Cenário: } n = 15 \text{ e } m = 10, 20; \\ \text{Segundo Cenário: } n = 30 \text{ e } m = 10, 20, \end{cases}$$

em que  $n$  representa o número de unidades amostrais e  $m$  é o número de mensurações do mecanismo de degradação.



Em ambos os cenários, a geração dos perfis de degradação linear Weibull foi conduzida da seguinte maneira:

1. Especificação dos valores para  $n$  e  $m$ .
2. Limar crítico de degradação  $D_f = 10$ .
3. Os efeitos aleatórios são gerados a partir de  $\beta_i | (\kappa, \lambda) \sim \text{Weibull}(\kappa = 4, 5; \lambda = 2, 2)$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ .
4. Desvio padrão associado ao erro de mensuração  $\sigma_v = 0, 20$ .
5. Tempo de falha real para a  $i$ -ésima unidade  $T_i$  é obtido como  $T_i = \frac{D_f}{\beta_i}$ .
6. Os tempos pré especificados são  $t_1 = 0, t_2 = 0, 25, \dots, t_{20} = 4, 75$ , para o caso em que  $m = 20$  e  $t_1 = 0, t_2 = 0, 25, \dots, t_{10} = 2, 25$ , quando  $m = 10$ .
7. As medidas de degradação  $y_{ij}$  são geradas utilizando a equação  $y_{ij} = \beta_i t_{ij} + e_{ij}$  do modelo linear de degradação. Os erros associados a cada  $y_{ij}$  são obtidos a partir da distribuição Normal( $0, \sigma_v^2$ ).

Em cada cenário, foram gerados  $R = 500$  bancos de dados com  $m = 20$  mensurações do mecanismo de degradação. Para o caso em que  $m = 10$ , foram retiradas as últimas 10 medidas dos bancos de dados anteriores para manter a comparabilidade entre as duas situações. Os valores reais especificados para os parâmetros do modelo foram determinados como sendo próximos aos obtidos quando se ajusta o modelo linear de degradação Weibull aos dados de corrente de operação em emissores de laser (Meeker e Escobar, 1998) (análise efetuada no Capítulo 5). Assim, garante-se uma representatividade na prática dos dados simulados. A análise dos perfis gerados é efetuada utilizando o modelo linear de degradação Weibull e o modelo linear de degradação dinâmico considerando os

métodos discutidos nos Capítulos 2 e 3 para fazer inferência sobre o tempo até a falha das unidades sob teste.

A Figura 4.1 apresenta exemplos de um banco de dados gerado em cada cenário a partir dos dados de degradação linear Weibull. A linha vertical pontilhada destaca como os perfis de degradação são tratados com 10 e 20 mensurações.

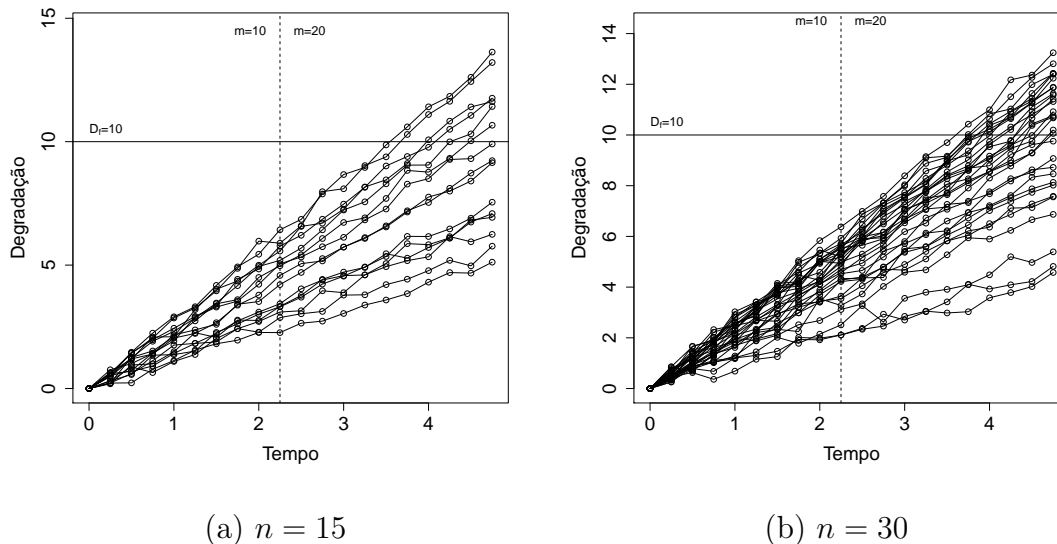


Figura 4.1: Exemplos de perfis simulados a partir dos dados de degradação linear Weibull para os dois cenários analisados

A Tabela 4.1 apresenta o vício e erro quadrático médio das estimativas dos tempos de falha das unidades sob teste estimados pelos dois modelos conforme as expressões (4.1) e (4.2) e é acrescida do percentual de cobertura dos valores reais dos tempos de falha pelo intervalo HPD com 95% de credibilidade. Em média, as estimativas dos tempos de falha das unidades obtidas por ambos os modelos são superiores ao tempo de falha real, com exceção das estimativas obtidas pelo modelo Weibull com  $n = 30$  e  $m = 20$ . Em ambos os cenários, o vício e erro quadrático médio do modelo Weibull são menores que os obtidos a partir do modelo dinâmico mas o percentual de cobertura deste último é superior. Ao dobrar-se o número de mensurações do mecanismo de degradação, as estimativas dos tempos de falha são menos viesadas e a diferença no erro quadrático médio entre os dois modelos diminui, tornando os modelos competitivos. Ao comparar-se as estatísticas, o

aumento no número de unidades amostrais de  $n = 15$  para  $n = 30$  tem menor impacto na precisão das estimativas dos tempos de falha para as unidades sob teste, do que um aumento no número de medidas do mecanismo de degradação. Isso é principalmente notado no MSE. Sob o modelo Weibull, assumindo  $n = 15$ , por exemplo, o MSE diminui de 0,042 se  $m = 10$  para 0,005 se  $m = 20$ . No entanto, ao passar de  $n = 15$  para  $n = 30$ , o MSE, com  $m = 10$ , passa de 0,042 para 0,043. Dessa forma, ao ser proposto um novo estudo com dados de degradação linear, é mais viável que seja aumentado o número de mensurações do mecanismo de degradação do que o número de unidades amostrais sob teste.

Tabela 4.1: Vício médio, erro quadrático médio e percentual de cobertura para as estimativas obtidas do tempo de falha das unidades sob teste (Dados de Degradação Linear Weibull)

Cenário	$m$	Modelo	Vício	MSE	PC
n=15	10	Weibull	-0,004	0,042	93,013
		Dinâmico	-0,021	0,066	96,707
	20	Weibull	-0,001	0,005	94,093
		Dinâmico	-0,005	0,015	97,360
n=30	10	Weibull	-0,001	0,043	93,527
		Dinâmico	-0,016	0,087	97,087
	20	Weibull	0,001	0,006	94,280
		Dinâmico	-0,003	0,014	98,053

Na Figura 4.2, a amplitude dos intervalos HPD com 95% de credibilidade é apresentada graficamente para os cenários analisados. Em ambos os casos, a amplitude dos intervalos do modelo dinâmico são maiores que as encontradas para o modelo Weibull. Ao passar-se de  $m = 10$  para  $m = 20$ , os valores das amplitudes dos intervalos diminuem e há uma diferença maior entre os dois modelos, indicando que o número de mensurações

do mecanismo de degradação tem um impacto direto na amplitude dos intervalos.

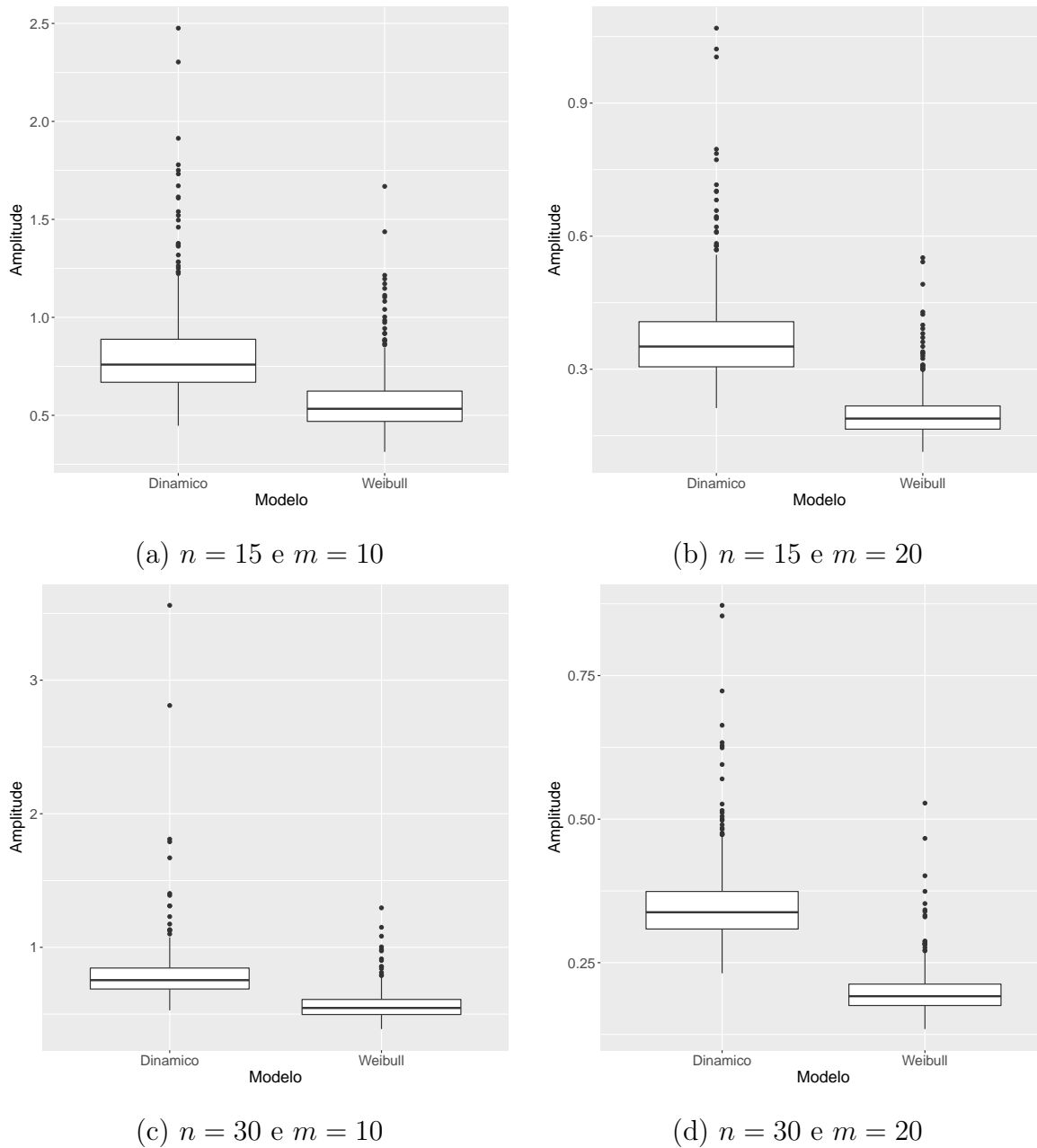
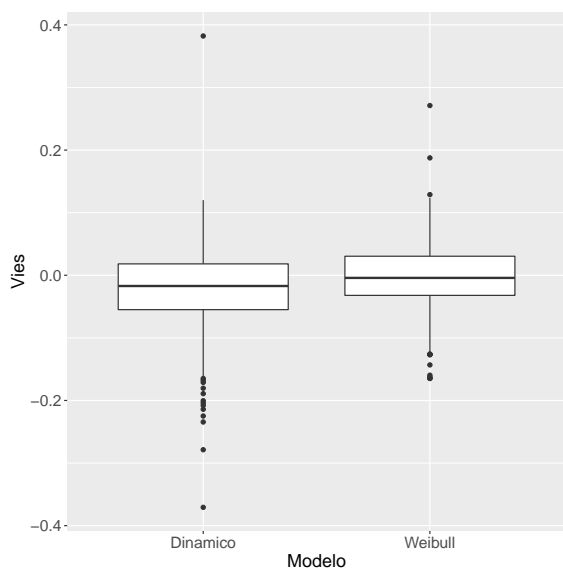


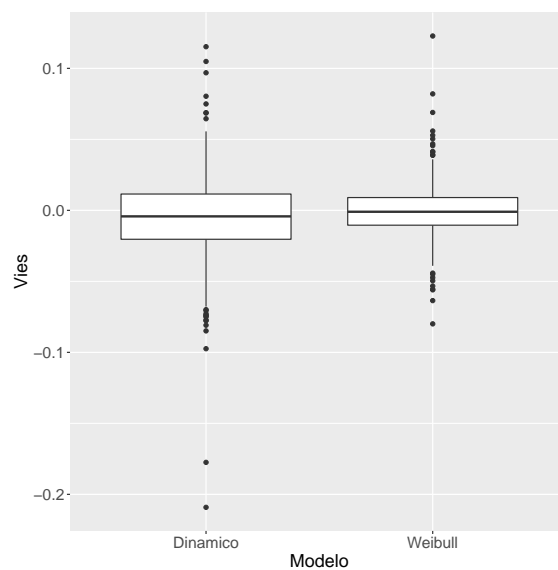
Figura 4.2: Amplitude dos intervalos HPD com 95% de credibilidade (Dados de Degradação Linear Weibull)

O vício das estimativas tem a sua representação gráfica apontada na Figura 4.3. Aumentando-se o número de medições de  $m = 10$  para  $m = 20$ , o vício diminui em ambos os modelos. Além disso, a diferença entre as distâncias interquartílicas obtidas

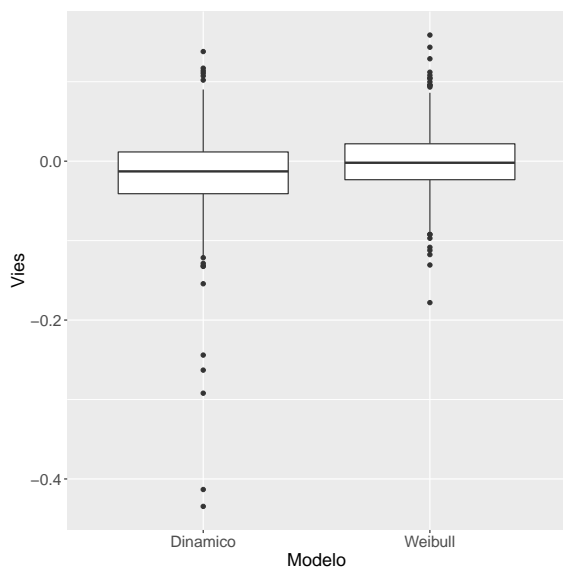
pelos dois modelos aumenta, indicando que o modelo linear de degradação Weibull é mais sensível quando o número de observações é dobrado.



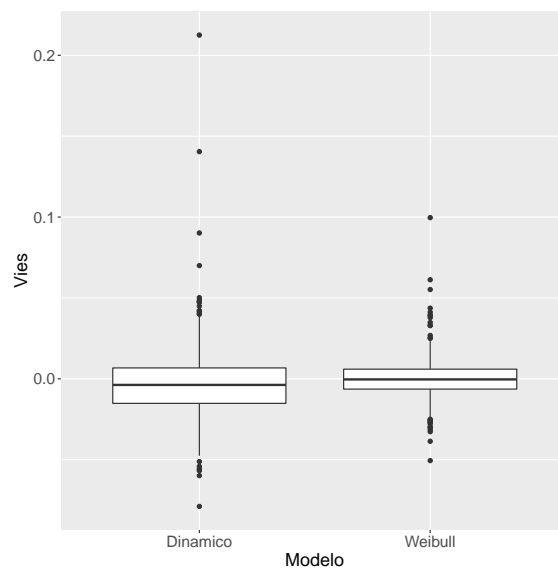
(a)  $n = 15$  e  $m = 10$



(b)  $n = 15$  e  $m = 20$



(c)  $n = 30$  e  $m = 10$



(d)  $n = 30$  e  $m = 20$

Figura 4.3: Vício obtido nos 500 bancos de dados simulados (Dados de Degradação Linear Weibull)

## 4.2 Dados de Degradação Linear Dinâmico

Nesta seção, as unidades sob teste têm suas trajetórias geradas a partir dos dados de degradação linear dinâmico. Para a condução da análise dos dados simulados, o estudo foi dividido em dois cenários:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primeiro Cenário: } n = 15, m = 10, 20 \text{ e } \sigma_w = 0,05; \\ \text{Segundo Cenário: } n = 15, m = 10, 20 \text{ e } \sigma_w = 0,08, \end{array} \right.$$

em que  $m$  e  $n$  são como especificados na Seção 4.1 e  $\sigma_w$  é o desvio padrão associado ao erro de evolução do modelo. Dessa forma, é possível avaliar o impacto no aumento da variabilidade das taxas de degradação na comparação do ajuste dos dois modelos.

Em todos os cenários, a geração dos perfis simulados foi feita da seguinte forma:

1. Especificação dos valores para  $n$  e  $m$ .
2. Limar crítico de degradação  $D_f = 10$ .
3. Especificação do desvio padrão associado ao erro de evolução  $\sigma_w$ , variando com o cenário analisado.
4. As taxas de degradação iniciais para as unidades  $\beta_0$  são geradas da distribuição Normal(2, 2; 0.45). Após a especificação inicial do processo, as demais taxas de degradação são geradas a partir da equação de evolução  $\beta_{ij} = \beta_{ij-1} + w_{ij}$ . Os erros de evolução associados a cada  $\beta_{ij}$  são obtidos a partir da distribuição Normal(0,  $\sigma_w^2$ ).
5. Os tempos pré especificados são  $t_1 = 0, t_2 = 0,25, \dots, t_{20} = 4,75$ , para o caso em que  $m = 20$  e  $t_1 = 0, t_2 = 0,25, \dots, t_{10} = 2,25$ , quando  $m = 10$ .
6. Desvio padrão associado ao erro de mensuração  $\sigma_v = 0,12$ .
7. As medidas de degradação  $y_{ij}$  são geradas utilizando a equação observacional  $y_{ij} = \beta_{ij}t_{ij} + e_{ij}$ . Os erros associados a cada  $y_{ij}$  são obtidos a partir da distribuição Normal(0,  $\sigma_v^2$ ).

8. Todas as unidades têm seus perfis de degradação gerados até que a última atinja o limiar crítico de degradação. Dessa forma, é guardada a  $k$ -ésima taxa de degradação imediatamente anterior a falha e define-se que o tempo de falha real para a  $i$ -ésima unidade  $T_i$  é obtido como  $T_i = \frac{D_f}{\beta_{ik}}$ .

Em cada cenário, foram gerados 500 bancos de dados e foram guardadas as  $m = 20$  primeiras mensurações do mecanismo de degradação. Para o caso em que  $m = 10$ , foram retiradas as últimas 10 medidas dos bancos de dados anteriores para manter a comparabilidade entre as duas situações. Os valores reais especificados para os parâmetros do modelo foram determinados como sendo próximos aos obtidos quando se ajusta o modelo linear de degradação dinâmico aos dados de corrente de operação em emissores de laser (Meeker e Escobar, 1998). A análise dos dados gerados é efetuada utilizando o modelo linear de degradação dinâmico e o modelo linear de degradação Weibull considerando os métodos discutidos nos Capítulos 2 e 3 para fazer inferência sobre o tempo até a falha das unidades sob teste.

A Figura 4.4 exibe um banco de dados gerado em cada cenário e é destacada a abordagem com  $m = 10$  e  $m = 20$  medidas do mecanismo de degradação.

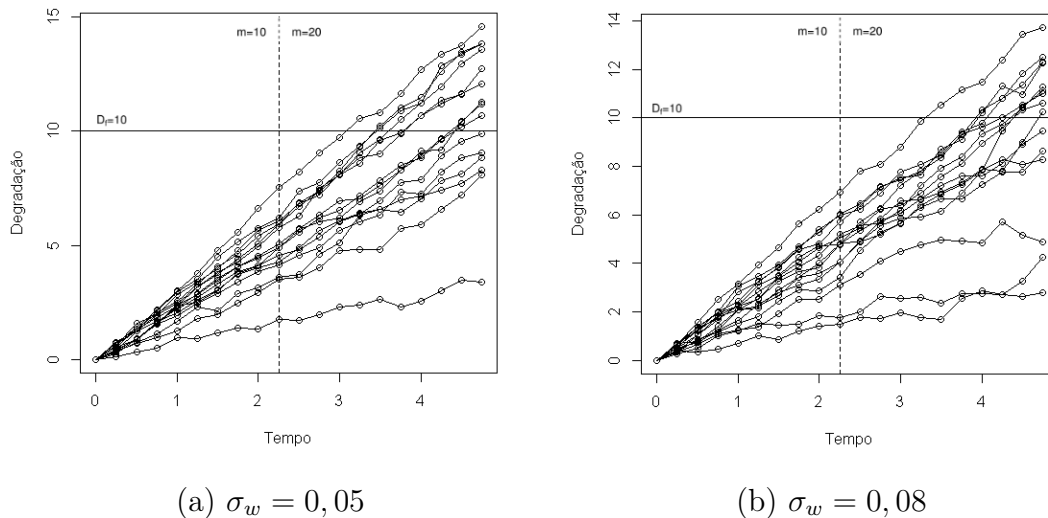


Figura 4.4: Exemplos de perfis simulados a partir dos dados de degradação linear dinâmico para os dois cenários analisados

Após o ajuste dos dois modelos aos bancos de dados de degradação linear dinâmico,

foram obtidos o vício e erro quadrático médio das estimativas. A Tabela 4.2 apresenta estes resultados, bem como o percentual de cobertura dos intervalos HPD com 95% de credibilidade. Percebe-se que, em média, as estimativas dos tempos de falha das unidades obtidas por ambos os modelos são inferiores ao tempo de falha real em todos os casos. O vício e erro quadrático médio do modelo dinâmico são menores do que aqueles obtidos pelo modelo Weibull e, ao colocar maior variabilidade nas taxas de degradação, as estimativas têm um acréscimo indicando maior imprecisão. Quando  $m = 10$ , essas estimativas são mais próximas e o percentual de cobertura do intervalo HPD é menor. Dessa forma, ao suspeitar que as unidades sob teste estão sujeitas à uma instabilidade das taxas de degradação, é importante que sejam coletadas um maior número de medidas do mecanismo de degradação, pois, ao passar de  $m = 10$  para  $m = 20$ , o modelo dinâmico se sobressai ao obter um maior percentual de cobertura do intervalo HPD.

Tabela 4.2: Vício médio, erro quadrático médio e percentual de cobertura para as estimativas obtidas do tempo de falha das unidades sob teste (Dados de Degradação Linear Dinâmico)

Cenário	$m$	Modelo	Vício	MSE	PC
$\sigma_w = 0,05$	10	Weibull	0,127	0,598	30,691
		Dinâmico	0,115	0,577	41,903
	20	Weibull	0,106	0,374	40,767
		Dinâmico	0,064	0,316	74,812
$\sigma_w = 0,08$	10	Weibull	0,230	1,406	24,467
		Dinâmico	0,207	1,367	31,667
	20	Weibull	0,190	0,895	37,295
		Dinâmico	0,098	0,811	71,011

A amplitude dos intervalos com 95% de credibilidade está representada na Figura 4.5. As amplitudes dos intervalos obtidas pelo modelo dinâmico são maiores do que aquelas fornecidas pelo modelo Weibull, com exceção do caso em que  $\sigma_w = 0,08$  e  $m = 20$ . Tal fato se deve à inadequação do modelo linear em situações com maior variabilidade das taxas de degradação e maior quantidade de medidas, isto é, bancos de dados que não possuem trajetórias próximas da linearidade. Isso é comprovado pela Tabela 4.2, em que



o percentual de cobertura do modelo linear Weibull se encontra bem abaixo do obtido pelo modelo linear de degradação dinâmico nessa situação.

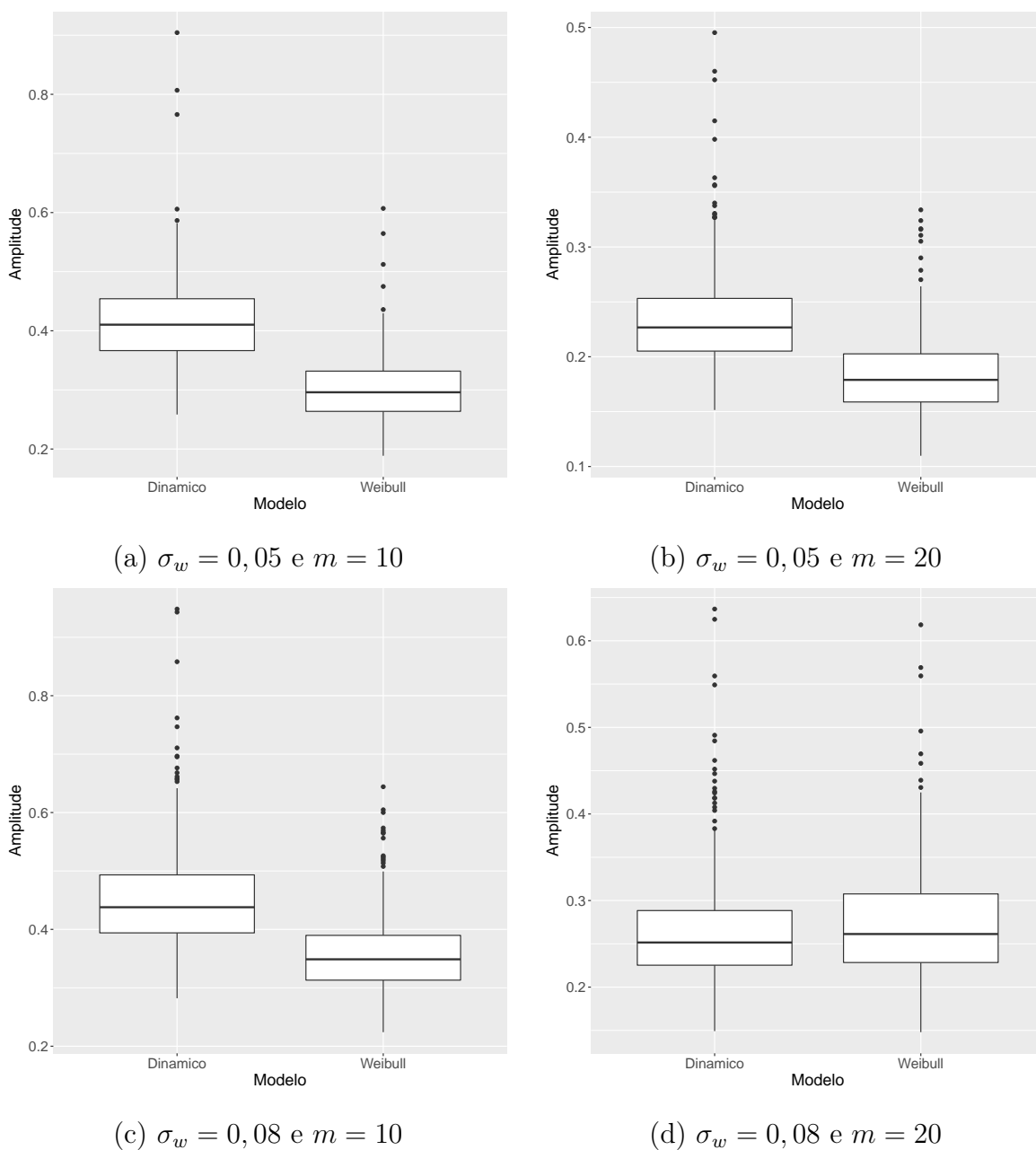


Figura 4.5: Amplitude dos intervalos HPD com 95% de credibilidade (Dados de Degradação Linear Dinâmico)

O vício das estimativas neste estudo está representado graficamente pela Figura 4.6.

Nota-se que, ao passar de  $m = 10$  para  $m = 20$  medidas do mecanismo de degradação, o vício obtido pelas estimativas do modelo Weibull são maiores comparado com os valores obtidos pelo modelo linear de degradação dinâmico.

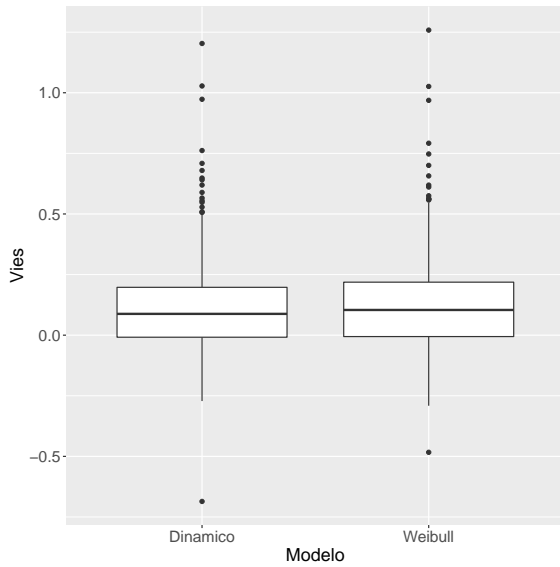
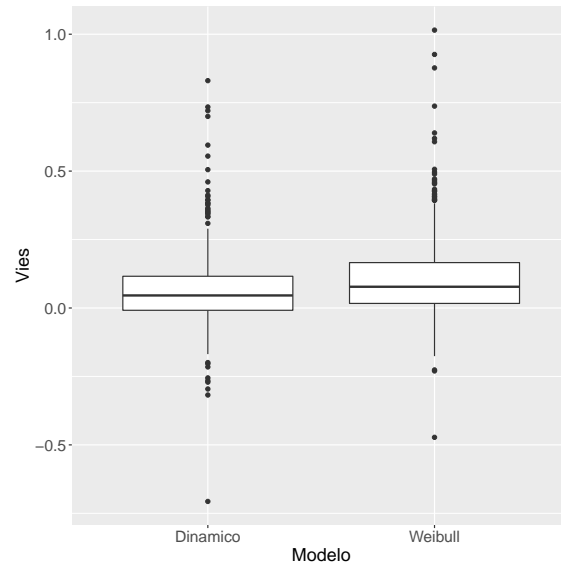
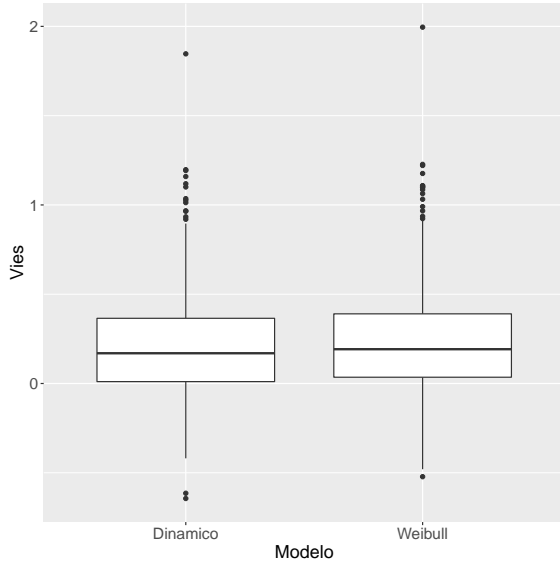
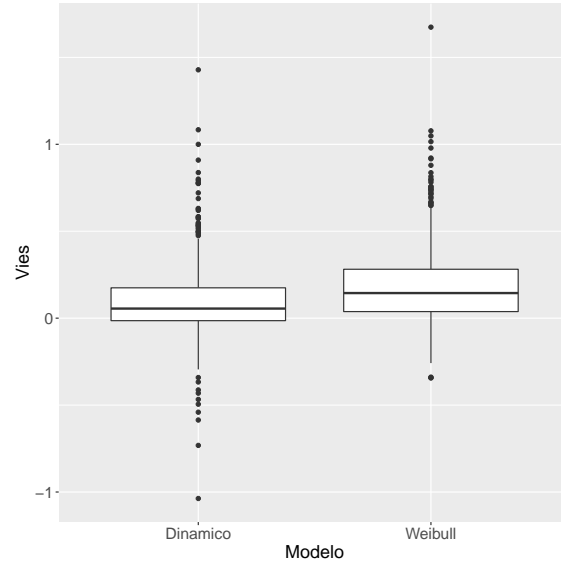
(a)  $\sigma_w = 0,05$  e  $m = 10$ (b)  $\sigma_w = 0,05$  e  $m = 20$ (c)  $\sigma_w = 0,08$  e  $m = 10$ (d)  $\sigma_w = 0,08$  e  $m = 20$ 

Figura 4.6: Vício obtido nos 500 bancos de dados simulados (Dados de Degradação Linear Dinâmico)

É importante atentar para a diferença na construção dos perfis de degradação simulados em ambos os modelos. Nos dados de degradação linear Weibull, tratado na seção anterior, ao gerar os efeitos aleatórios no começo do processo, automaticamente já se têm conhecido os valores reais das falhas nas unidades. Assim, as medidas de degradação obtidas em uma unidade são desvios da inclinação gerada pelo efeito aleatório, considerando o erro de mensuração especificado. No modelo linear de degradação dinâmico, ao gerar as taxas de degradação iniciais para as unidades, isso não traz informação direta sobre o tempo de falha real delas. Como a análise é feita sequencialmente, as medidas de degradação obtidas para um determinado perfil estão sujeitas não só ao erro observacional, mas também ao erro de evolução das taxas de degradação. Assim, para este estudo, esperam-se trajetórias mais instáveis dos perfis de degradação do que aquelas obtidas no estudo anterior.



# Capítulo 5

## Aplicação a Dados Reais

Neste capítulo, analisa-se os três conjuntos de dados apresentados no Capítulo 1. Nos dois primeiros, corrente de operação em emissores de laser (Seção 5.1) e desgaste em rodas de trem (Seção 5.2), objetiva-se comparar o ajuste do modelo linear de degradação Weibull e o modelo linear de degradação dinâmico proposto. Nesse contexto, considera-se o modelo linear de degradação apresentado em (2.2) com efeito aleatório Weibull, associando uma estrutura multiplicativa para a taxa de degradação, isto é,  $D(t_{ij}, \beta_i) = \beta_i t_{ij}$  e o modelo proposto nas expressões dadas em (3.9).

No terceiro conjunto de dados, potência luminosa em diodos emissores de luz infravermelha (Seção 5.3), efetua-se apenas o ajuste do modelo linear dinâmico de degradação, comparando-o com alguns resultados obtidos por Wang *et al.* (2017), em que o referido banco de dados é analisado.

Para o ajuste dos modelos aos bancos de dados reais, foram consideradas as mesmas especificações *a priori* dos cenários relatados na introdução do capítulo anterior, bem como as configurações utilizadas para a execução dos algoritmos MCMC.

### 5.1 Corrente de Operação em Emissores de Laser

Nesta seção, considera-se os dados de corrente de operação em emissores de laser apresentado em Meeker e Escobar (1998). Os perfis de degradação desse estudo são exibidos na Figura 1.4 e nota-se que os emissores que não atingiram o limiar crítico de degradação ultrapassaram 60% do caminho até a falha (limiar crítico  $D_f = 10\%$ ). Hamada (2005) adota o modelo de degradação linear dado em (2.2) para analisar tais

dados e quando ajusta-se este modelo, supõe-se que a quantidade degradada em cada unidade é distinta e constante em cada um dos tempos de inspeção.

Para motivar a metodologia proposta no Capítulo 3 no que se refere à estimação da distribuição do tempo até a falha de unidades que já falharam no estudo, suponha que o limiar crítico do estudo fosse  $D_f = 6\%$ . O perfil de nº 7, exibido na Figura 5.1, teria falhado e sua última medida de degradação tem seu incremento que destoa dos demais, como é apresentado com maior facilidade no gráfico à direita. Isso indica que, ao ajustar um modelo linear para os dados, essa observação poderia impactar no ajuste da taxa de degradação estimada para o perfil e o tempo de falha dessa unidade seria subestimado. Com o modelo proposto, é possível investigar dinamicamente o tempo até a falha na inspeção imediatamente anterior a esse acontecimento.

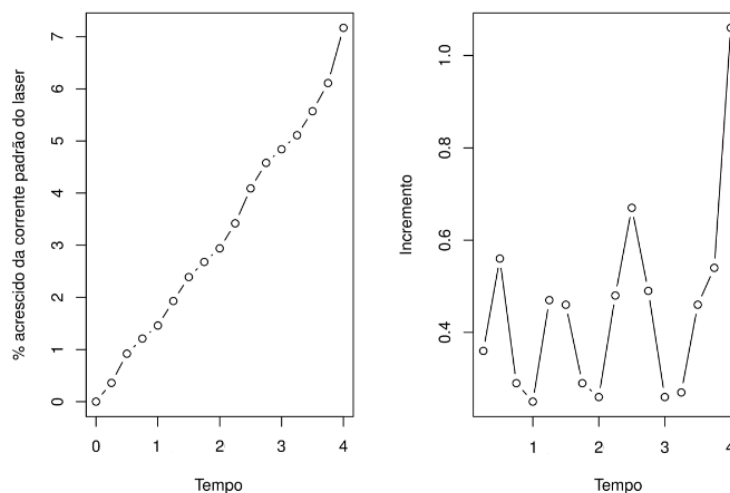


Figura 5.1: Perfil de degradação e incrementos do emissor de laser nº 7

### 5.1.1 Ajuste dos Modelos de Degradação

Para o ajuste dos modelos, o tempo foi transformado de modo que a unidade de medida adotada é  $10^3$  horas conforme consta na Figura 5.1. Avaliou-se o desempenho dos modelos verificando seus comportamentos no que se refere à previsão de novas observações. Para tanto, retirou-se do banco de dados as últimas  $m$  observações em cada perfil, com  $m = 1, 2, \dots, 7$ , e ajustou-se os modelos. No modelo linear de degradação com efeito aleatório Weibull, as observações retiradas foram estimadas considerando a taxa

de degradação ajustada para cada perfil. No modelo linear dinâmico de degradação, as observações omitidas foram estimadas com base na última taxa de degradação ajustada em cada perfil. Para toda observação retirada, foram calculadas as medidas de acurácia de previsão MSE, MAPE, e MAD apontadas na Subseção 3.1.5. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Medidas de acurácia de previsão para os modelos lineares de degradação Weibull (W) e dinâmico (D) (Emissores de Laser)

$m$	1		2		3		4		5		6		7	
Modelo	W	D	W	D	W	D	W	D	W	D	W	D	W	D
MSE	0,11	0,06												
MAPE	3,26	2,14												
MAD	0,25	0,18												
MSE	0,05	0,02	0,13	0,09										
MAPE	2,74	1,56	3,65	2,73										
MAD	0,19	0,12	0,27	0,22										
MSE	0,05	0,01	0,07	0,03	0,15	0,11								
MAPE	2,48	1,49	3,20	2,03	4,05	3,19								
MAD	0,17	0,10	0,23	0,15	0,30	0,25								
MSE	0,08	0,02	0,08	0,03	0,10	0,03	0,19	0,12						
MAPE	3,57	1,96	3,09	1,94	3,74	2,08	4,60	3,70						
MAD	0,23	0,13	0,21	0,12	0,27	0,15	0,34	0,29						
MSE	0,10	0,03	0,12	0,05	0,12	0,05	0,16	0,04	0,24	0,12				
MAPE	4,65	2,36	4,38	2,89	3,95	2,77	4,54	2,22	5,33	3,54				
MAD	0,28	0,14	0,28	0,19	0,27	0,19	0,33	0,15	0,39	0,27				
MSE	0,09	0,05	0,15	0,09	0,17	0,11	0,18	0,11	0,24	0,14	0,33	0,22		
MAPE	5,15	3,41	5,79	4,15	5,21	4,06	4,93	3,90	5,68	4,35	6,16	5,16		
MAD	0,28	0,19	0,34	0,25	0,33	0,27	0,34	0,27	0,41	0,32	0,46	0,39		
MSE	0,05	0,02	0,13	0,09	0,19	0,15	0,21	0,17	0,23	0,19	0,31	0,24	0,42	0,37
MAPE	4,13	2,67	6,14	5,23	6,62	5,98	6,02	5,61	5,93	5,31	6,71	6,20	6,83	6,96
MAD	0,20	0,13	0,33	0,28	0,39	0,35	0,38	0,36	0,40	0,36	0,48	0,45	0,50	0,52

Como é esperado, previsões a um número maior de passos à frente tendem a ser mais viciadas e menos precisas sob ambos os modelos. No entanto, ao retirar até cerca de 41% dos dados, o modelo linear dinâmico de degradação fornece melhores previsões para as observações suprimidas segundo os critérios MSE, MAPE e MAD. Isso indica que as novas medidas da corrente de operação dos emissores de laser são mais dependentes das últimas mensurações observadas nos perfis do que o estabelecido por todo o trajeto de degradação das unidades. Isto é notado na Figura 5.2, que apresenta as previsões obtidas por ambos os modelos quando foram retiradas  $m = 5$  observações. As linhas tracejadas e contínuas representam o ajuste dos modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico, respectivamente, considerando a média *a posteriori* e o intervalo HPD de 95% de probabilidade das taxas de degradação estimadas.

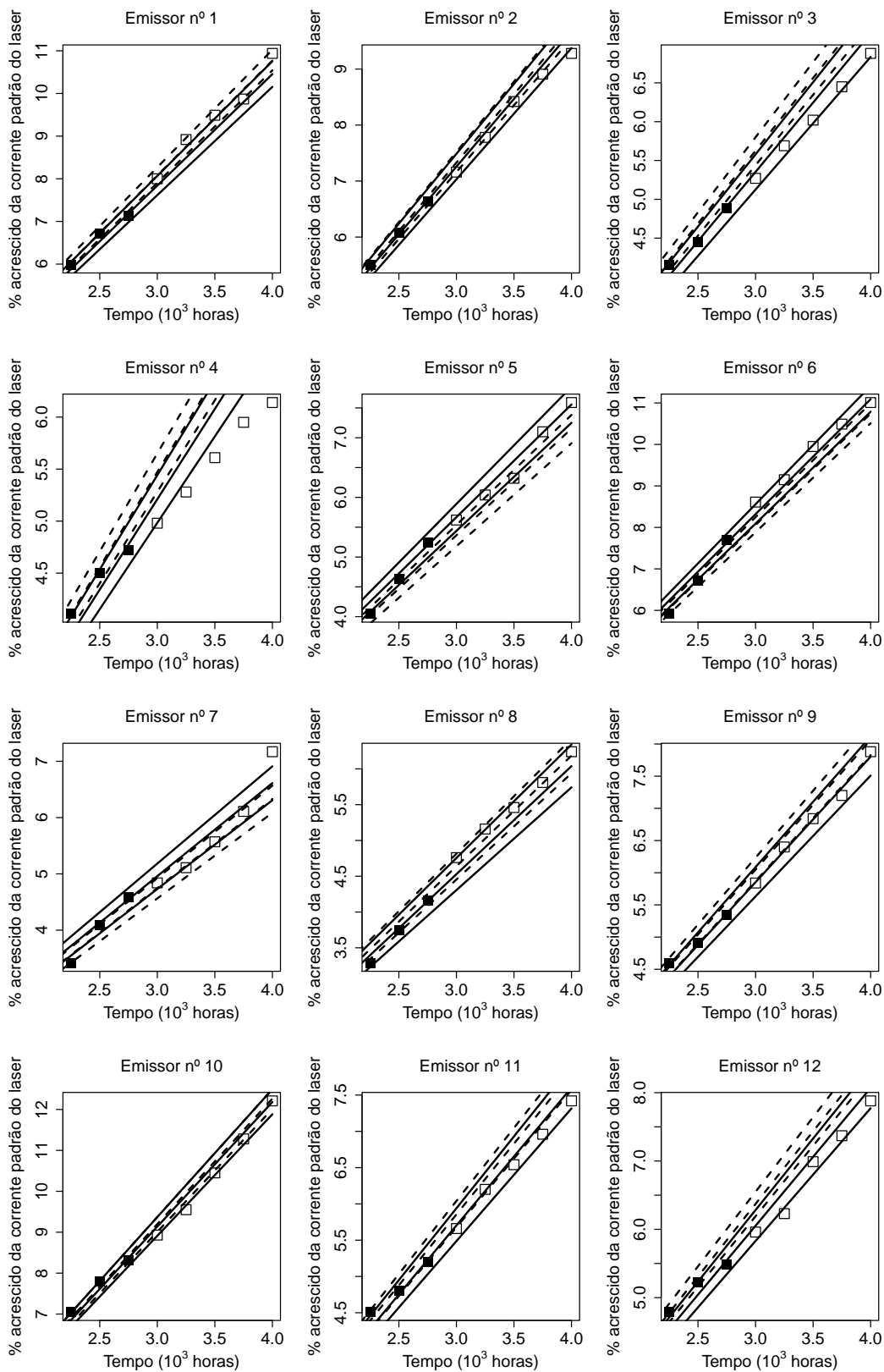


Figura 5.2: Previsão para  $m = 5$  observações omitidas (quadrados brancos) considerando os modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os emissores de laser 1 a 12



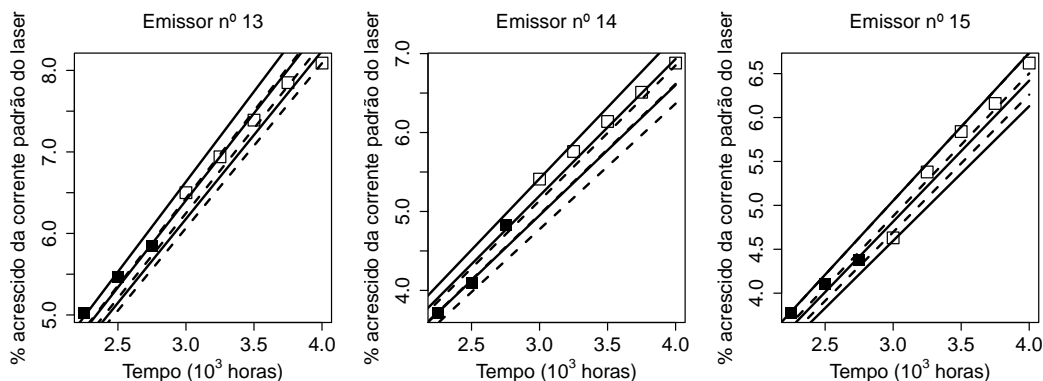


Figura 5.2: Previsão para  $m = 5$  observações omitidas (quadrados brancos) considerando os modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os emissores de laser 13 a 15

Nota-se da Figura 5.2, que o modelo linear dinâmico de degradação fornece melhores previsões para as observações omitidas principalmente naqueles perfis em que as trajetórias se afastam da linearidade como os emissores de laser 3,4,7 e 12. É importante avaliar a capacidade preditiva dos modelos de degradação pois, como neste banco de dados as unidades que não falharam já estão próximas de atingir o limiar crítico de degradação, um modelo capaz de fornecer melhores previsões contribui com uma informação mais precisa para estimar a distribuição do tempo até a falha.

Ao ajustar o modelo linear dinâmico de degradação no banco de dados completo, a variabilidade que, no modelo de degradação linear Weibull era basicamente proveniente do erro aleatório de mensuração, é quebrada em duas, a saber: a variabilidade associada ao erro de mensuração e a variabilidade associada à evolução das componentes de estado ao longo do tempo. A Tabela 5.2 exhibe as estimativas *a posteriori* para as componentes que representam a variabilidade dos modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico.

Tabela 5.2: Estimativas *a posteriori* para as componentes de variância dos modelos ajustados (Emissores de Laser)

Modelo	Parâmetro	Média	Mediana	Desv pad	Hpd LI	Hpd LS
Weibull	$\sigma_v$	0,200	0,199	0,009	0,183	0,218
Dinâmico	$\sigma_v$	0,117	0,117	0,009	0,101	0,134
	$\sigma_w$	0,054	0,054	0,005	0,044	0,065

Em ambos os modelos as estimativas das componentes de variância fornecidas pelas média e mediana *a posteriori* são similares. Ao incluir-se uma componente de evolução dos perfis no modelo, a variabilidade associada ao erro de mensuração tem uma queda de 41,5%, em média, passando de 0,2 no modelo linear de degradação Weibull para 0,117 no modelo linear dinâmico de degradação.

Ainda na primeira etapa da abordagem dos modelos gerais de perfis de degradação, é de interesse avaliar o comportamento das taxas de degradação estimadas nos dois modelos ajustados. A Figura 5.3 apresenta estimativas *a posteriori* para tais taxas nos dois modelos. No modelo linear de degradação Weibull, cujas estimativas estão nas linhas tracejadas, são apontadas a média *a posteriori* e intervalos HPD de 95% de credibilidade para o efeito aleatório associado ao  $i$ -ésimo perfil, com  $i = 1, 2, \dots, 15$ , que é invariante no tempo. No modelo linear dinâmico de degradação, representado pelas linhas contínuas, estão retratadas as médias *a posteriori* e os intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação estimadas ao longo do tempo.

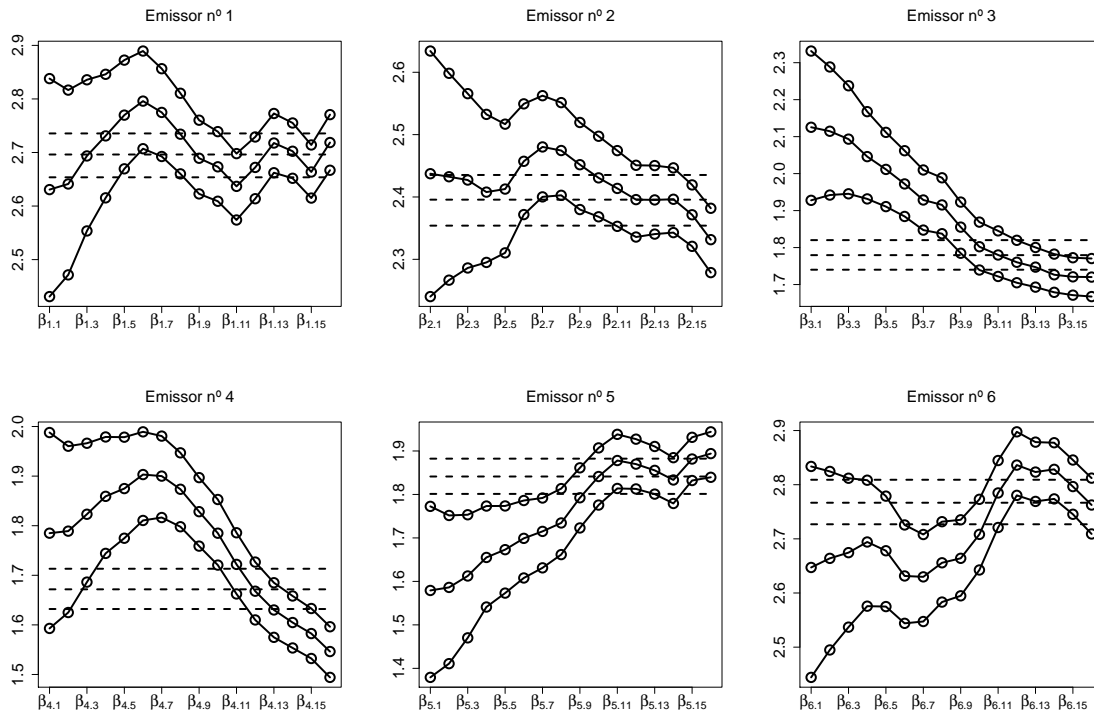


Figura 5.3: Médias *a posteriori* e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelos modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os emissores de laser 1 a 6

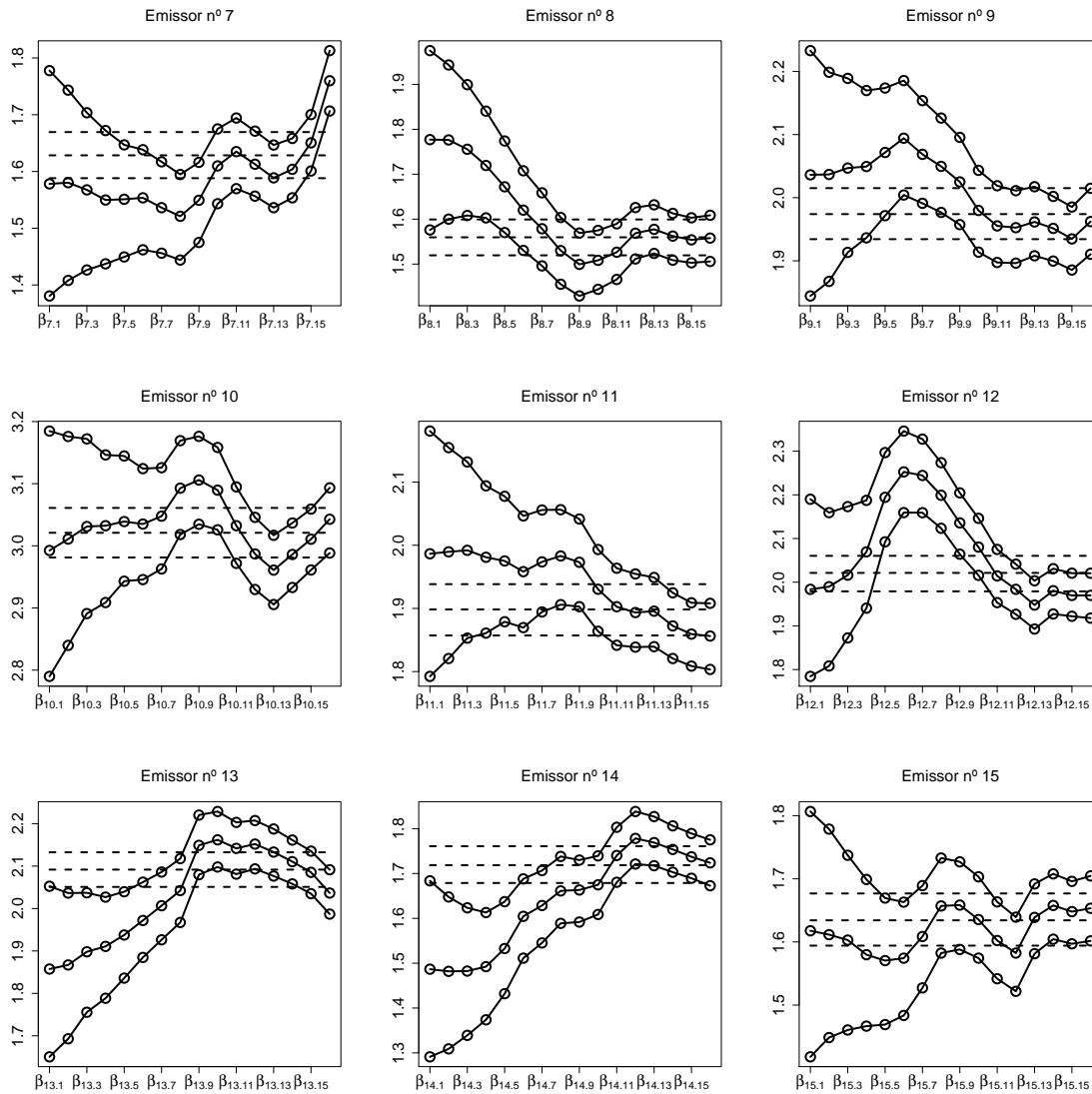


Figura 5.3: Médias *a posteriori* e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelos modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os emissores de laser 7 a 15

A partir da Figura 5.2, nota-se que, no começo do estudo, as taxas de degradação estimadas pelo modelo linear dinâmico de degradação possuem maior amplitude nos intervalos HPD com 95% de probabilidade. Tal fato pode ser explicado pelo pouco número de mensurações coletadas no início do ensaio. À medida que novas observações são obtidas, a amplitude dos intervalos diminui. Atentando-se agora para o final do estudo, onde estão as taxas de degradação estimadas responsáveis por levar a informação para

o tempo de falha das unidades, nota-se que as maiores diferenças entre os dois modelos foram observadas para os emissores de laser 4 e 7. Tal fato é justificado pela mudança de trajetória que estes dois perfis apresentam conforme apresentado na Figura 5.2. Além disso, ao longo do estudo, percebe-se que o comportamento das taxas de degradação é diferente para as unidade sob teste, isto é, não há um padrão no desempenho das taxas de degradação, indicando que cada emissor de laser carrega as suas particularidades.

No que se refere à adequação do modelo linear dinâmico de degradação aplicado nos dados de corrente de operação em emissores de laser, o Apêndice B apresenta uma análise das inovações padronizadas. Na Tabela B.1, são apontados os valores-P do teste Shapiro Wilk de normalidade efetuado nas inovações padronizadas referentes a cada emissor de laser. Nota-se que não há desvios graves da suposição de normalidade. Nos gráficos de diagnóstico, apresentados na Figura B.1, as inovações padronizadas se dispõem aleatoriamente em torno do valor 0 e o teste de Ljung-Box retrata maior grau de dependência nas inovações padronizadas dos emissores de laser 4 e 8, cujos gráficos ACF evidenciam maior autocorrelação dentre todas as unidades sob teste.

### 5.1.2 Inferência para o Tempo até a Falha

Na segunda etapa da abordagem dos modelos gerais de perfis de degradação é feita a inferência sobre a distribuição do tempo até a falha para unidades sob teste e futura. Considerando os métodos inferenciais apresentados para este fim nos Capítulos 2 e 3, a Tabela 5.3 apresenta resumos da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para as 15 unidades sob teste considerando os modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico, respectivamente.

A duração do estudo de corrente de operação em emissores de laser é de 4000 horas. Da Tabela 5.3, nota-se que, apenas para os emissores de laser 1, 6 e 10, as estimativas *a posteriori* do tempo médio até a falha (MTTF) são menores que esse valor. Tais emissores são aqueles que atingiram o limiar crítico de degradação durante o ensaio e apresentaram a falha. As maiores diferenças entre as estimativas obtidas pelos dois modelos são detectadas nos emissores 4 e 7, indo de acordo com as discussões já anteriormente apresentadas.

Tabela 5.3: Tempo médio até a falha (MTTF) e percentis da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos ( $10^3$  horas) de falha para unidades sob teste obtidos pelos modelos Weibull e dinâmico (Emissores de Laser)

	Modelo	$MTTF \mathbf{y}$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.025 \mathbf{y})$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.1 \mathbf{y})$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.5 \mathbf{y})$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.975 \mathbf{y})$
Emissor 1	Weibull	3,710	3,655	3,673	3,709	3,767
	Dinâmico	3,755	3,685	3,709	3,755	3,827
Emissor 2	Weibull	4,176	4,105	4,130	4,175	4,247
	Dinâmico	4,290	4,194	4,228	4,289	4,388
Emissor 3	Weibull	5,621	5,495	5,538	5,620	5,753
	Dinâmico	5,815	5,644	5,701	5,813	5,990
Emissor 4	Weibull	5,982	5,838	5,886	5,981	6,129
	Dinâmico	6,472	6,255	6,328	6,470	6,699
Emissor 5	Weibull	5,433	5,317	5,356	5,432	5,555
	Dinâmico	5,283	5,141	5,188	5,283	5,430
Emissor 6	Weibull	3,614	3,562	3,580	3,614	3,668
	Dinâmico	3,535	3,472	3,493	3,535	3,602
Emissor 7	Weibull	6,141	5,992	6,042	6,139	6,296
	Dinâmico	5,683	5,518	5,573	5,681	5,862
Emissor 8	Weibull	6,414	6,249	6,306	6,412	6,582
	Dinâmico	6,419	6,212	6,280	6,418	6,635
Emissor 9	Weibull	5,068	4,966	5,000	5,067	5,175
	Dinâmico	5,098	4,964	5,011	5,097	5,235
Emissor 10	Weibull	3,310	3,266	3,281	3,309	3,356
	Dinâmico	3,378	3,315	3,337	3,377	3,443
Emissor 11	Weibull	5,268	5,156	5,194	5,267	5,383
	Dinâmico	5,389	5,241	5,292	5,388	5,542
Emissor 12	Weibull	4,949	4,850	4,885	4,948	5,047
	Dinâmico	5,078	4,945	4,989	5,078	5,214
Emissor 13	Weibull	4,780	4,688	4,720	4,779	4,875
	Dinâmico	4,911	4,788	4,829	4,911	5,035
Emissor 14	Weibull	5,819	5,683	5,729	5,818	5,956
	Dinâmico	5,802	5,630	5,689	5,801	5,978
Emissor 15	Weibull	6,120	5,975	6,023	6,119	6,273
	Dinâmico	6,051	5,869	5,929	6,049	6,247

Suponha que o interesse está em investigar a confiabilidade de um novo emissor de laser, isto é, de uma unidade futura. Nesse contexto, a Tabela 5.4 apresenta alguns resumos da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha de uma unidade futura, considerando os modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico.

Tabela 5.4: Estimativas para quantidades de interesse da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos ( $10^3$  horas) de falha para uma unidade futura (Emissores de Laser)

Modelo	$R_{T Y}(5000 y)$	MTTF $ y$	$t_{p Y}(0.025 y)$	$t_{p Y}(0.1 y)$	$t_{p Y}(0.5 y)$	$t_{p Y}(0.975 y)$
Weibull	0,604	5,093	3,302	3,614	5,267	6,440
Dinâmico	0,658	5,131	3,367	3,535	5,273	6,546

De acordo com a Tabela 5.4, os modelos apresentam estimativas relativamente próximas do tempo médio até a falha de um novo emissor de laser. Pode se dizer que a probabilidade estimada de um novo laser não apresentar a falha até o tempo de 5000 horas é de 0,604 no modelo Weibull e 0,658 no modelo dinâmico.

A Figura 5.4 apresenta as distribuições preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para o tempo até a falha das unidades sob teste (via modelo dinâmico) e futura (via ambos os modelos), corroborando alguns resultados apresentados nas Tabelas 5.3 e 5.4

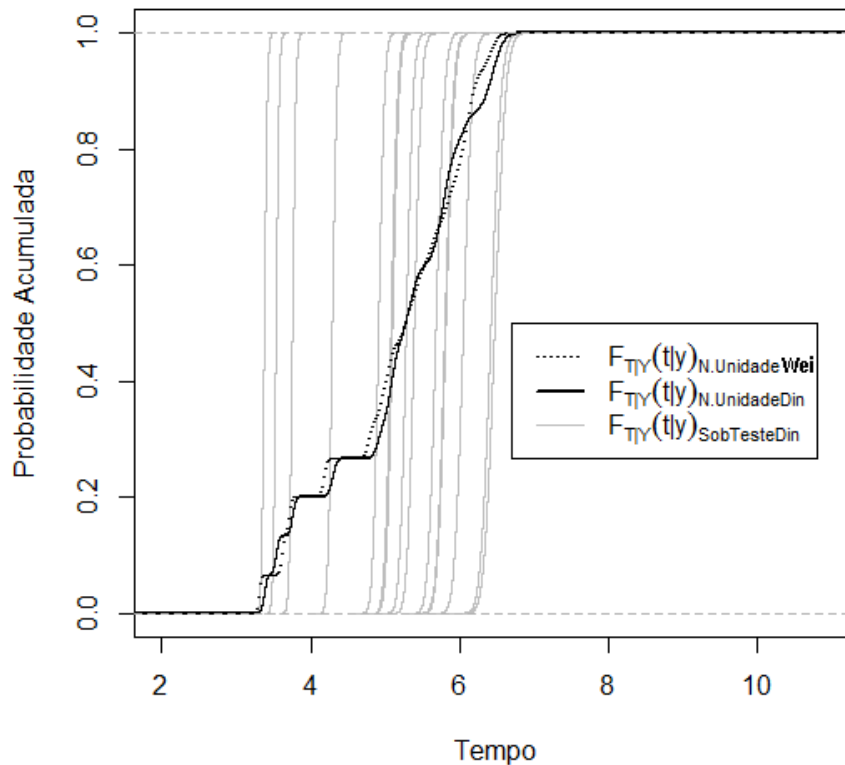


Figura 5.4: Distribuições preditiva *a posteriori* dos tempos ( $10^3$  horas) de falha para unidades sob teste e futura (Emissores de Laser)

## 5.2 Desgaste em Rodas de Trem

Nesta seção, os modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico serão utilizados para a análise do banco de dados de desgaste em rodas de trem de posição MA11 apresentado em Freitas *et al.* (2009).

No estudo, 3 rodas falharam e após atingirem o limiar crítico de degradação não foram mais coletadas medidas nessas unidades, diferentemente do que ocorria no conjunto de dados anterior. Dessa forma, ao final dos 600.000 Km, 3 perfis de degradação contêm dados faltantes. Entretanto, conforme mencionado anteriormente, os modelos lineares dinâmicos conseguem acomodar esses dados devido a sua estrutura.

Nas Subseção 5.2.1, analisa-se o ajuste dos dois modelos nos dados de desgaste em rodas de trem e na Subseção 5.2.2 é feita a inferência sobre a distribuição do tempo até a falha.

### 5.2.1 Ajuste dos Modelos de Degradação

Para o ajuste dos modelos, o tempo foi transformado de modo que a unidade de medida é  $10^4$  Km. De maneira análoga ao que foi feito no conjunto de dados analisado na Seção 5.1, inicialmente comparou-se o desempenho dos modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico no que se refere à capacidade preditiva dos modelos ao omitir observações do banco de dados.

Nesse contexto, foram retiradas as últimas  $m$  observações de cada perfil, com  $m = 1, 2, \dots, 6$ , representando a omissão de aproximadamente 46% dos dados. A Tabela 5.5 apresenta as medidas de acurácia de previsão MSE, MAPE e MAD calculadas para as observações retiradas. Em todos os cenários, o modelo linear dinâmico de degradação apresentou menores valores das medidas de acurácia de previsão indicando melhor capacidade de acomodar as observações omitidas.

Tabela 5.5: Medidas de acurácia de previsão para os modelos lineares de degradação Weibull (W) e dinâmico (D) (Rodas de Trem)

$m$	1		2		3		4		5		6	
Modelo	W	D	W	D	W	D	W	D	W	D	W	D
MSE	2,10	0,21										
MAPE	2,45	0,56										
MAD	1,03	0,25										
MSE	1,57	0,11	3,17	0,45								
MAPE	2,39	0,49	3,06	1,04								
MAD	0,93	0,19	1,28	0,45								
MSE	1,59	0,28	2,59	0,70	4,78	1,59						
MAPE	2,63	0,74	3,06	1,16	3,78	1,74						
MAD	0,93	0,29	1,19	0,47	1,58	0,76						
MSE	1,02	0,04	2,47	0,50	3,78	1,09	6,61	2,20				
MAPE	2,72	0,58	3,40	1,26	3,84	1,70	4,61	2,33				
MAD	0,83	0,15	1,19	0,44	1,48	0,65	1,90	0,97				
MSE	1,21	0,04	1,98	0,12	4,00	0,60	5,79	1,24	9,62	2,41		
MAPE	3,03	0,72	3,74	1,23	4,42	1,91	4,86	2,35	5,70	3,02		
MAD	0,89	0,19	1,16	0,33	1,55	0,64	1,87	0,87	2,35	1,21		
MSE	2,08	0,52	2,79	0,64	4,28	1,23	7,48	2,95	10,25	4,64	16,11	7,54
MAPE	3,77	1,56	4,35	2,13	5,15	2,78	5,83	3,44	6,26	3,87	7,21	4,66
MAD	1,00	0,41	1,28	0,60	1,62	0,83	2,06	1,19	2,44	1,48	2,99	1,92

A Figura 5.5 retrata a previsão para  $m = 5$  observações retiradas. As linhas tracejadas representam a média *a posteriori* e os intervalos HPD com 95% de credibilidade para o efeito aleatório estimado no modelo linear de degradação Weibull. As linhas contínuas representam as mesmas estimativas *a posteriori* para a ultima taxa de degradação estimada nos perfis pelo modelo linear dinâmico de degradação.

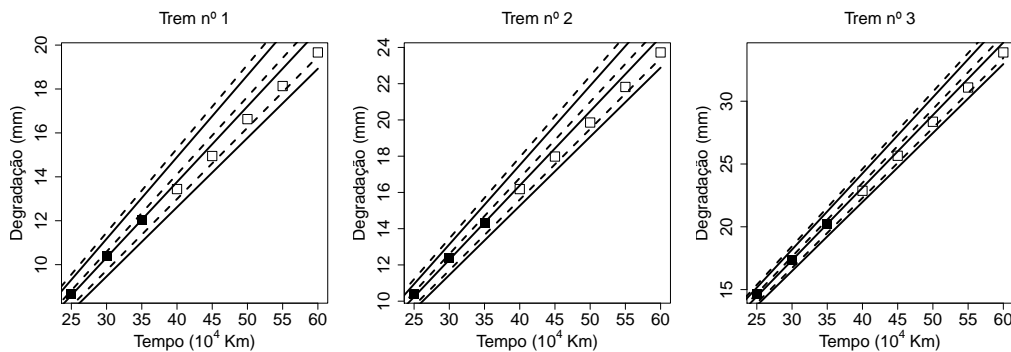


Figura 5.5: Previsão para  $m = 5$  observações omitidas (quadrados brancos) considerando os modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os trens 1 a 3



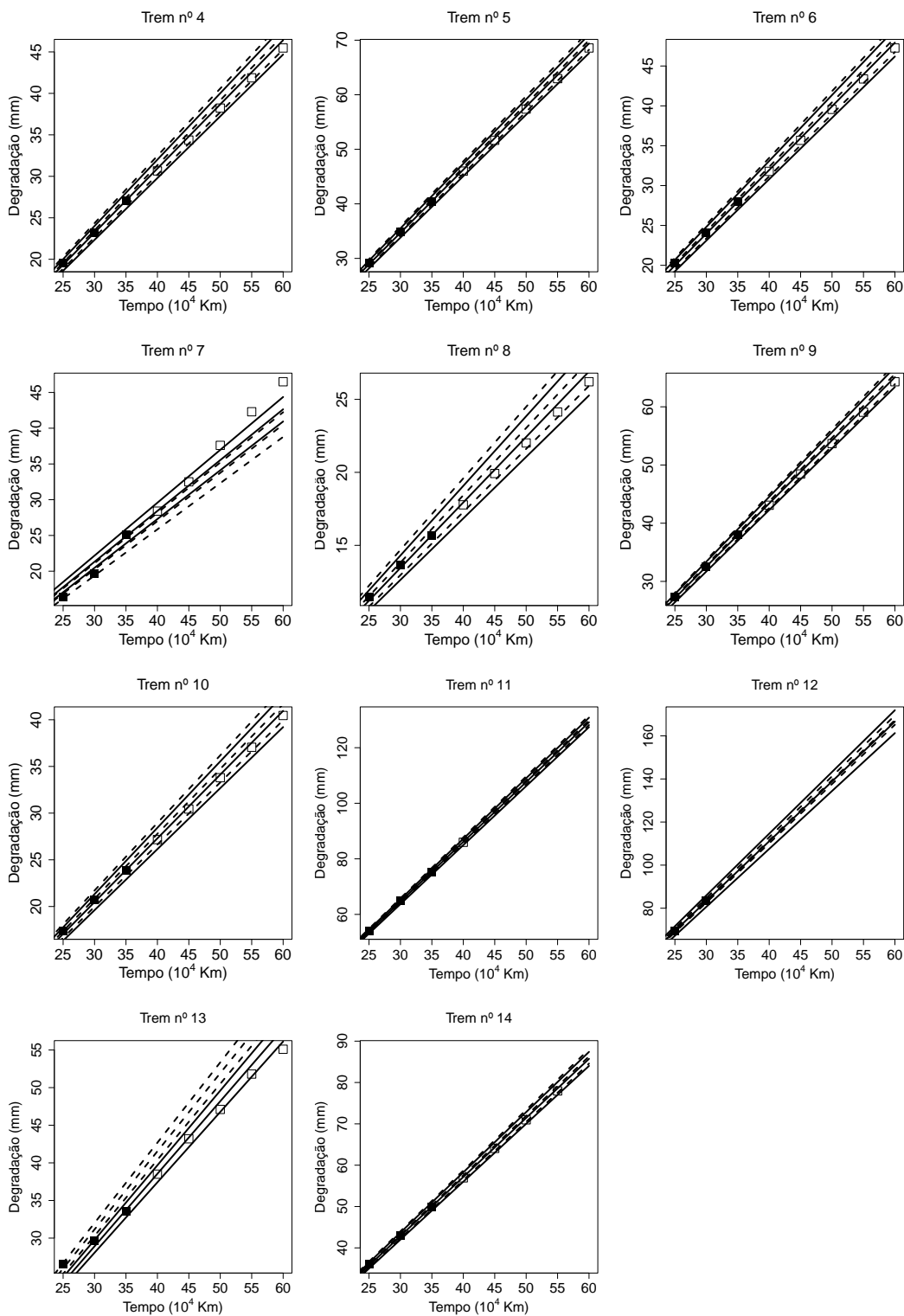


Figura 5.5: Previsão para  $m = 5$  observações omitidas (quadrados brancos) considerando os modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os trens 4 a 14

Da Figura 5.5, nota-se que os perfis de degradação dos trens 7 e 13, que destoam dos demais por apresentarem uma mudança de trajetória no final do ensaio, foram melhores capturados pelo modelo linear dinâmico de degradação. Para os demais perfis, ambos os modelos fornecem previsões similares devido às suas trajetórias observadas. É válido ressaltar que os trens 11, 12 e 14 falharam e, por não continuarem no estudo, possuem dados faltantes.

Ao ajustar o modelo dinâmico de degradação, a variabilidade associada ao erro de mensuração tem uma queda de 56,8 % , em média, passando de 0,944 para 0,408, conforme aponta a Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Estimativas *a posteriori* para as componentes de variância dos modelos ajustados (Rodas de Trem)

Modelo	Parâmetro	Média	Mediana	Desv pad	Hpd LI	Hpd LS
Weibull	$\sigma_v$	0,944	0,941	0,053	0,983	1,048
Dinâmico	$\sigma_v$	0,408	0,406	0,045	0,325	0,498
	$\sigma_w$	0,028	0,028	0,002	0,023	0,033

As taxas de degradação estimadas pelos dois modelos estão apresentadas na Figura 5.8. As linhas tracejadas e contínuas apresentam as estimativas médias *a posteriori* e intervalos de 95% de credibilidade, considerando os modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico respectivamente.

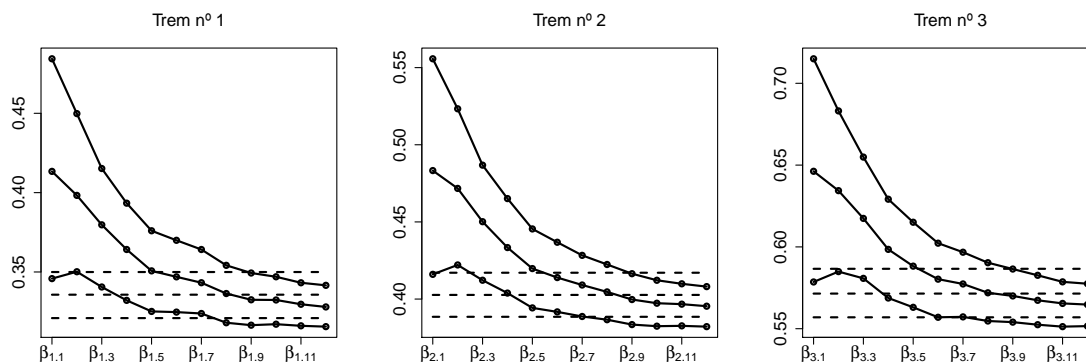


Figura 5.6: Médias *a posteriori* e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelos modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os trens 1 a 3

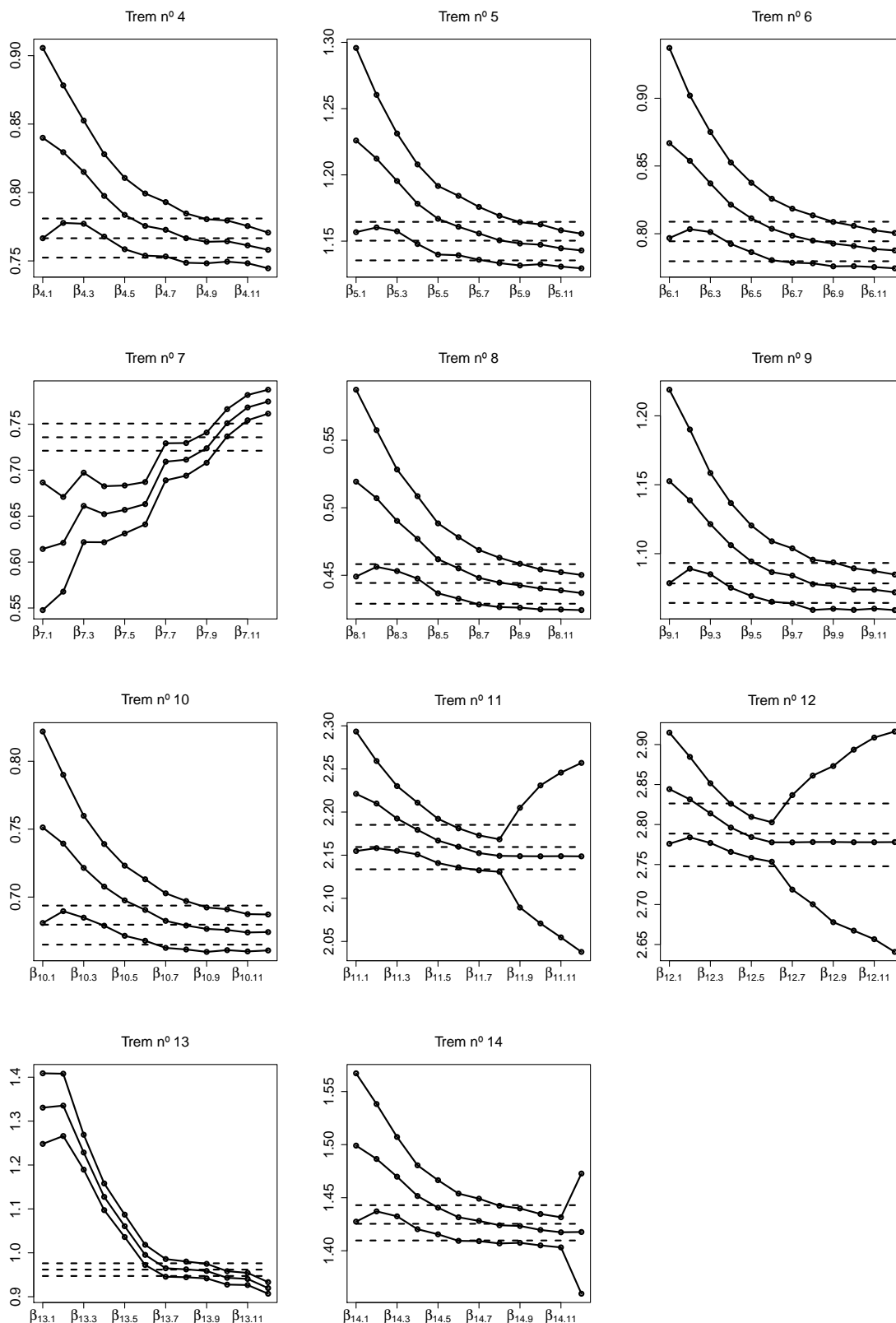


Figura 5.6: Médias *a posteriori* e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelos modelos lineares de degradação Weibull (linha tracejada) e dinâmico (linha contínua), para os trens 4 a 14

Conforme a Figura 5.8, o perfil n° 7 é o único que apresenta um aumento nas estimativas para as taxas de degradação ao longo do tempo. Todas as outras rodas de trem apresentam um padrão de decaimento das estimativas, que no final do ensaio são menores que aquelas registradas pelo modelo linear de degradação Weibull. Devido à presença de dados faltantes nas unidades sob teste que falharam (trens 11, 12 e 14), há um acréscimo na amplitude das taxas de degradação estimadas nesses perfis nos tempos de inspeção com observações omitidas.

A adequação do modelo linear dinâmico de degradação aos dados de desgaste em rodas de trem está no Apêndice B2. A Tabela B.2 mostra os valores-P para o teste de normalidade Shapiro Wilk aplicado às inovações padronizadas das unidades sob teste. Tais valores indicam que possivelmente outras distribuições de probabilidade possam ser mais adequadas aos dados de desgaste em rodas de trem. Esta é uma das pesquisas futuras deste trabalho e está mais detalhada no Capítulo 6. Além disso, as inovações padronizadas se dispõem de maneira assimétrica em torno do valor 0, de acordo com a Figura B.2.

### 5.2.2 Inferência para o Tempo até a Falha

Na segunda etapa da abordagem dos modelos gerais de perfis de degradação, o ajuste do modelo dá espaço às estimativas das quantidades de interesse em Confiabilidade. Nesse contexto, é de interesse investigar a distribuição do tempo até a falha de unidades sob teste e futura para que medidas preventivas sejam adotadas.

Considerando os métodos inferenciais apresentados nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho, apresenta-se na Tabela 5.7 um resumo da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para as 14 unidades sob teste considerando os modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico, respectivamente. Os trens 11, 12 e 14, cujas rodas falharam ao longo do estudo, possuem as menores estimativas para o tempo médio até a falha. As maiores diferenças obtidas entre as inferências fornecidas pelos dois modelos são detectadas nos trens 1 e 7, conforme já apontava a Figura 5.8, em que ambos os perfis possuem maior

discrepância nas taxas de degradação estimadas no final do estudo.

Tabela 5.7: Tempo médio até a falha (MTTF) e percentis da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos ( $10^4$  Km) de falha para unidades sob teste (Rodas de Trem)

	Modelo	$MTTF \mathbf{y}$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.025 \mathbf{y})$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.1 \mathbf{y})$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.5 \mathbf{y})$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.975 \mathbf{y})$
Trem 1	Weibull	229,513	219,935	223,230	229,371	239,857
	Dinâmico	234,951	226,007	229,027	234,852	244,748
Trem 2	Weibull	191,272	184,513	186,832	191,233	198,154
	Dinâmico	194,766	188,493	190,700	194,696	201,248
Trem 3	Weibull	134,776	131,489	132,572	134,749	138,314
	Dinâmico	136,367	133,223	134,319	136,352	139,586
Trem 4	Weibull	100,453	98,567	99,203	100,457	102,369
	Dinâmico	101,588	99,873	100,455	101,580	103,366
Trem 5	Weibull	66,934	66,081	66,393	66,932	67,806
	Dinâmico	67,370	66,609	66,875	67,365	68,143
Trem 6	Weibull	96,964	95,213	95,825	96,961	98,740
	Dinâmico	97,754	96,139	96,686	97,760	99,410
Trem 7	Weibull	104,656	102,585	103,308	104,664	106,760
	Dinâmico	99,395	97,755	98,336	99,379	101,089
Trem 8	Weibull	173,387	167,942	169,730	173,349	179,194
	Dinâmico	176,281	171,171	172,891	176,208	181,784
Trem 9	Weibull	71,410	70,466	70,788	71,403	72,381
	Dinâmico	71,835	70,944	71,267	71,833	72,728
Trem 10	Weibull	113,310	110,967	111,737	113,281	115,831
	Dinâmico	114,197	112,072	112,782	114,183	116,392
Trem 11	Weibull	35,656	35,237	35,384	35,653	36,087
	Dinâmico	35,774	35,440	35,556	35,772	36,111
Trem 12	Weibull	27,613	27,237	27,366	27,610	28,011
	Dinâmico	27,653	27,397	27,484	27,653	27,914
Trem 13	Weibull	80,064	78,884	79,279	80,057	81,293
	Dinâmico	83,736	82,544	82,966	83,732	84,918
Trem 14	Weibull	54,019	53,396	53,617	54,015	54,631
	Dinâmico	54,243	53,675	53,868	54,243	54,824

Para uma observação futura, isto é, fora do escopo da amostra, as estimativas das quantidades de interesse obtidas a partir da distribuição preditiva *a posteriori* estão apresentadas na Tabela 5.11. A confiabilidade estimada na distância de 300000 Km tem uma queda de 0,929 no modelo linear de degradação Weibull para 0,857 no modelo linear dinâmico de degradação. Já o tempo médio até a falha (MTTF) tem um ligeiro aumento na estimativa *a posteriori* do modelo dinâmico.

Tabela 5.8: Estimativas para quantidades de interesse da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos ( $10^4$  Km) de falha para uma unidade futura (Rodas de Trem)

Modelo	$R_{T Y}(300000 y)$	MTTF $ y$	$t_{p Y}(0.025 y)$	$t_{p Y}(0.1 y)$	$t_{p Y}(0.5 y)$	$t_{p Y}(0.975 y)$
Weibull	0,929	105,716	27,537	35,599	98,661	231,299
Dinâmico	0,857	106,851	27,604	35,730	98,562	236,615

A Figura 5.7 retrata graficamente as distribuições preditivas *a posteriori* dos tempos de falha para as unidades sob teste e futura de acordo com o ajuste dos modelos lineares de degradação Weibull e Dinâmico. Percebe-se que, como apontado na tabela anterior, as estimativas dos percentis de tempos de falha para probabilidades acumuladas superiores são maiores no modelo dinâmico do que no modelo Weibull.

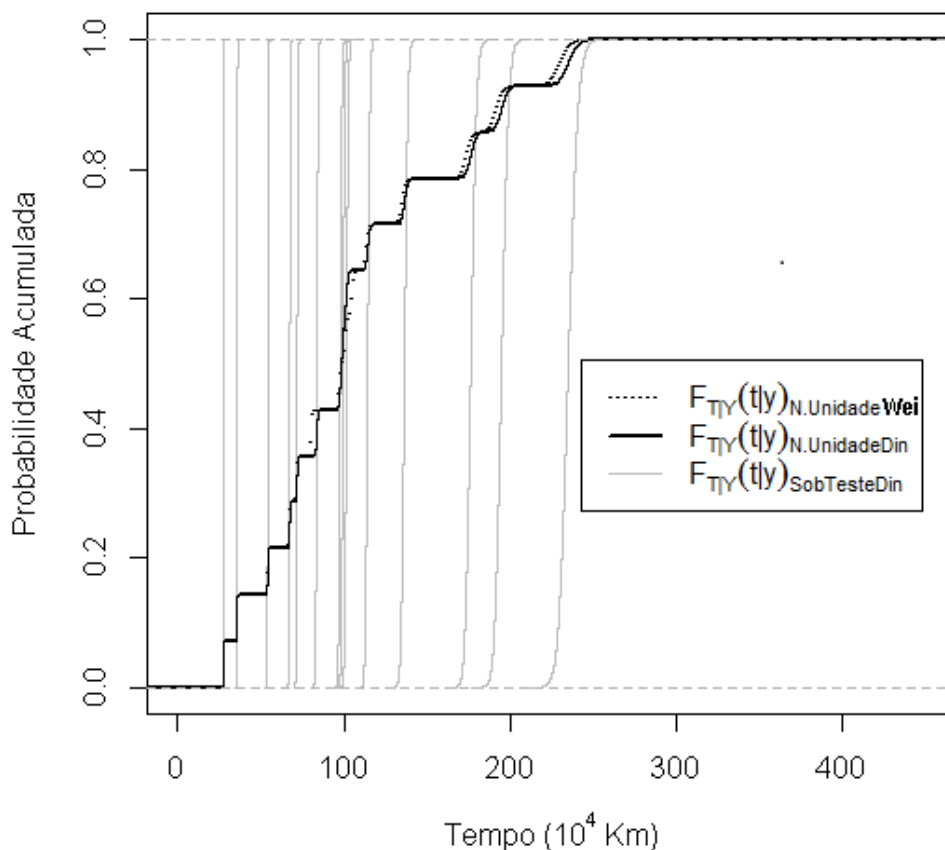


Figura 5.7: Distribuições preditiva *a posteriori* dos tempos ( $10^4$  Km) de falha para unidades sob teste e futura (Rodas de Trem)

## 5.3 Potência Luminosa em Diodos Emissores de Luz Infravermelha

Nesta seção, a análise é voltada para os dados de potência luminosa em diodos emissores de luz infravermelha (IRLEDs), cuja introdução é feita em Yang (2007). Os dados, apresentados na Figura 1.6, não mais evidenciam um comportamento aproximadamente linear como os dois conjuntos de dados anteriores. Dessa forma, será verificado apenas o desempenho do modelo linear dinâmico de degradação proposto neste trabalho e as estimativas das quantidades de interesse serão comparadas com o artigo de Wang *et al.* (2017) em que os autores ajustam um modelo por processo de Wiener com efeitos mistos nos dados de IRLEDs testados a 170mA (Figura 1.6 à esquerda).

Ao ajustar o modelo linear dinâmico de degradação nos IRLEDs testados a 170mA, a variabilidade que representa a evolução das componentes de estado ao longo do tempo tem uma média *a posteriori* de 0,143, conforme aponta a Tabela 5.9. Esse valor é numericamente superior aos obtidos nos dois exemplos anteriores devido a uma maior instabilidade das taxas de degradação que este ensaio apresenta.

Tabela 5.9: Estimativas *a posteriori* para as componentes de variância do modelo linear dinâmico de degradação (IRLEDs)

Parâmetro	Média	Mediana	Desv pad	Hpd LI	Hpd LS
$\sigma_v$	1,399	1,396	0,097	1,218	1,594
$\sigma_w$	0,143	0,142	0,017	0,111	0,178

As taxas de degradação estimadas pelo modelo estão representadas na Figura 5.8, em que as linhas contínuas representam a média *a posteriori* e intervalos com 95% de credibilidade. Nota-se que a maior parte dos diodos apresentam taxas de degradação que diminuem ao longo do tempo ou que se mantêm aproximadamente constantes. Além disso, o mesmo comportamento dos estudos anteriores é visto no começo do ensaio em que as amplitudes dos intervalos HPD com 95% de probabilidade são maiores e diminuem durante o tempo à medida que novas observações são coletadas.

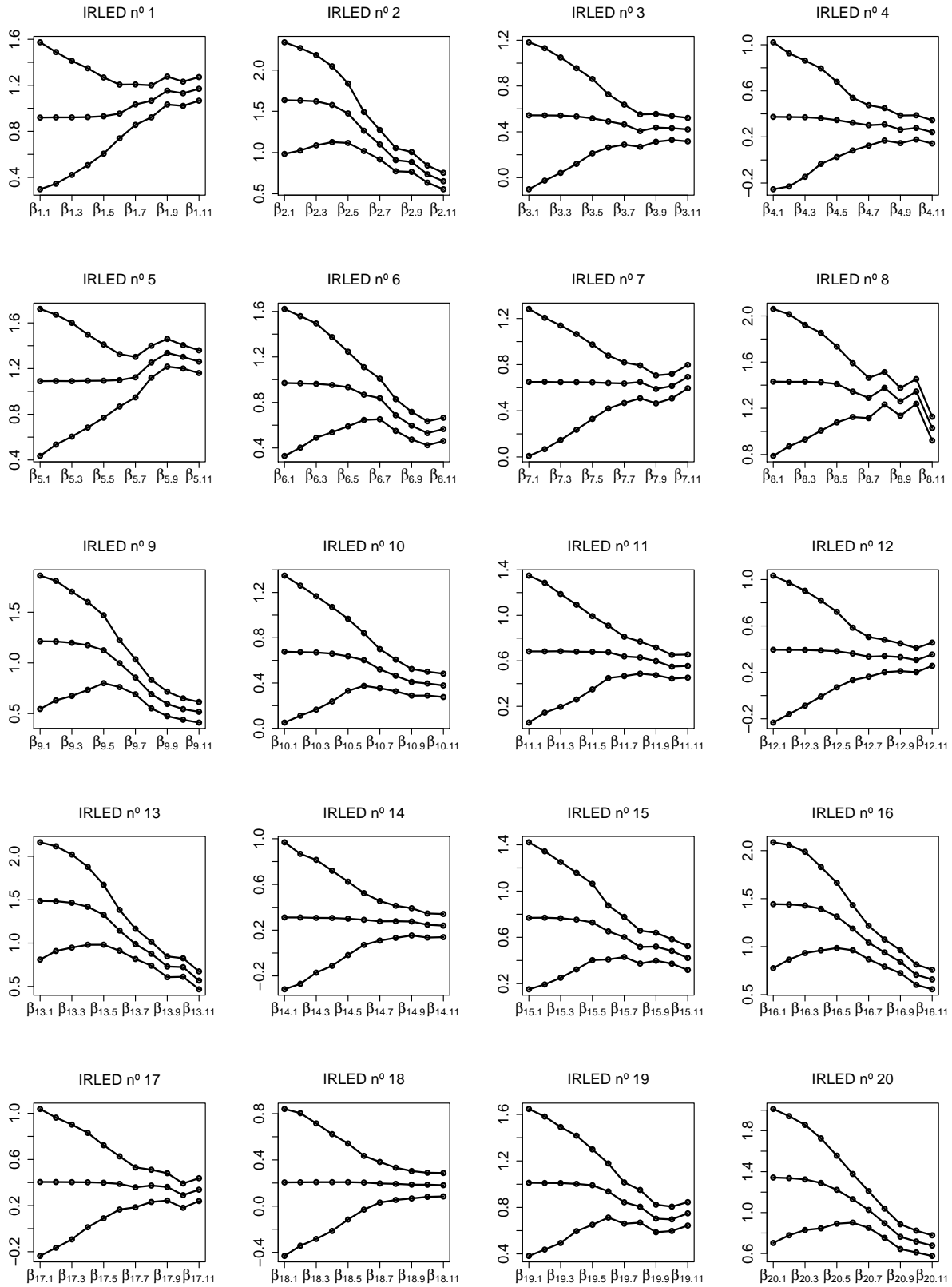


Figura 5.8: Médias *a posteriori* e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelo modelo linear dinâmico de degradação para os IRLEDs 1 a 20



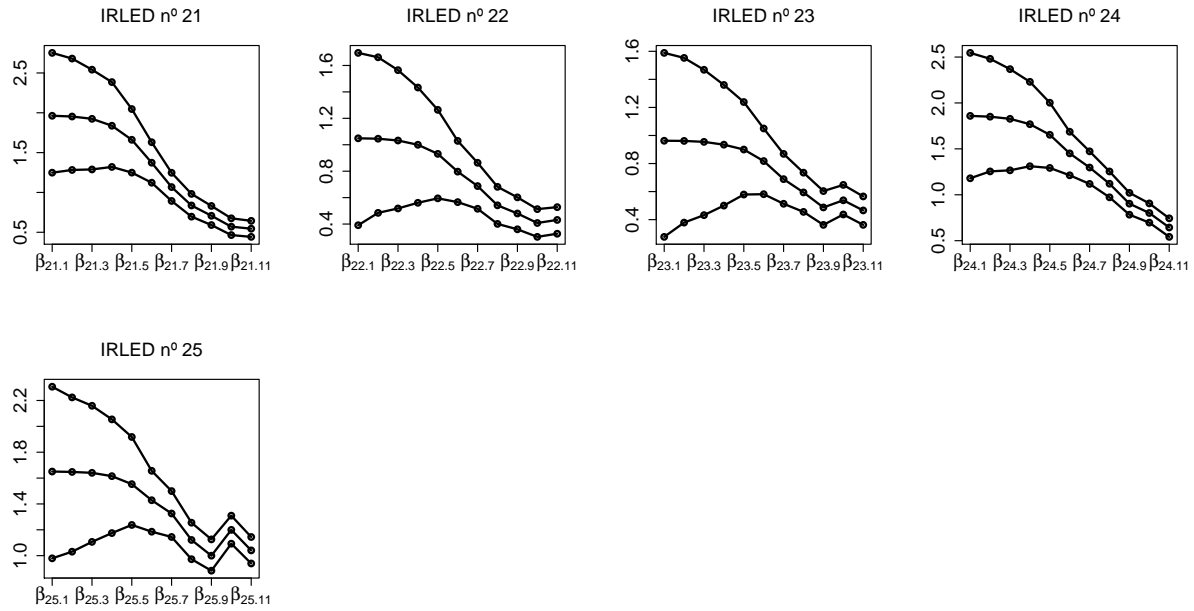


Figura 5.8: Médias *a posteriori* e intervalos HPD de 95% de credibilidade para as taxas de degradação ajustadas pelo modelo linear dinâmico de degradação para os IRLEDs 21 a 25

A adequação do modelo linear dinâmico de degradação aplicado nos dados de potência luminosa em diodos emissores de luz infravermelha está no Apêndice B3. A Tabela B.3 aponta os valores-P do teste de normalidade Shapiro Wilk aplicado nas inovações padronizadas dos IRLEDs. Por esta tabela, apenas uma unidade sob teste apresenta inovações padronizadas com desvio da suposição de normalidade. Nos gráficos de diagnósticos retratados na Figura B.3, algumas inovações padronizadas se dispõem de maneira assimétrica em torno do valor 0.

Ao passar para a segunda etapa da abordagem dos modelos gerais de perfis de degradação, a Tabela 5.10 contém estimativas *a posteriori* para quantidades de interesse da distribuição preditiva do tempo até a falha para unidades sob teste. As unidades que falharam durante este estudo são os IRLEDs 1, 5, 8 e 25, que apresentam estimativas do tempo médio até a falha inferiores ao tempo do ensaio de 2250 horas. Além disso, quanto maior for a estimativa do tempo médio, maior é a incerteza na distribuição preditiva *a posteriori*, como é apontado nos IRLEDs 14 e 18.

Tabela 5.10: Tempo médio até a falha (MTTF) e percentis da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos ( $10^2$  Horas) de falha para unidades sob teste (IRLEDs)

	$MTTF \mathbf{y}$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.025 \mathbf{y})$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.1 \mathbf{y})$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.5 \mathbf{y})$	$t_{p \mathbf{Y}}(0.975 \mathbf{y})$
IRLED 1	18,865	16,620	17,302	18,793	21,598
IRLED 2	30,855	26,499	27,813	30,666	36,354
IRLED 3	48,326	38,242	41,164	47,610	62,390
IRLED 4	87,090	58,670	65,087	82,502	142,192
IRLED 5	16,028	14,355	14,902	15,963	18,007
IRLED 6	35,536	29,917	31,547	35,223	42,810
IRLED 7	29,015	25,179	26,344	28,841	33,828
IRLED 8	15,584	13,625	14,223	15,488	18,057
IRLED 9	39,012	32,302	34,289	38,615	48,141
IRLED 10	53,807	41,601	44,941	52,726	72,058
IRLED 11	36,312	30,521	32,201	35,963	43,990
IRLED 12	57,891	44,196	47,790	56,571	79,632
IRLED 13	35,432	29,797	31,433	35,174	42,675
IRLED 14	87,778	58,743	65,251	83,436	143,071
IRLED 15	48,269	38,351	41,154	47,509	62,467
IRLED 16	30,600	26,376	27,618	30,432	35,913
IRLED 17	60,546	45,323	49,262	59,043	84,592
IRLED 18	120,827	70,476	81,173	110,552	251,162
IRLED 19	26,804	23,537	24,519	26,683	30,863
IRLED 20	29,722	25,674	26,925	29,549	34,676
IRLED 21	36,952	30,955	32,664	36,621	45,008
IRLED 22	47,052	37,541	40,205	46,351	60,477
IRLED 23	43,572	35,204	37,530	43,105	54,954
IRLED 24	31,223	26,726	28,097	31,028	36,866
IRLED 25	20,084	17,809	18,501	20,008	22,863

Ao verificar as estimativas das quantidades de interesse da distribuição preditiva *a posteriori* para o tempo de falha de uma observação futura, a Tabela 5.11 apresenta os resultados para o modelo linear de degradação dinâmico e alguns percentis do tempo de falha obtidos no trabalho de Wang *et al.* (2017) em que foi ajustado um processo de Wiener. A confiabilidade estimada pelo modelo linear dinâmico de degradação no tempo de 3000 horas é de 0,701, sendo esta a probabilidade de um IRLED não falhar até esse tempo. Os percentis de falha estimados pelos dois modelos são diferentes indicando que, inicialmente, o modelo dinâmico associa um tempo de falha estimado menor para uma probabilidade de 0,1 e no tempo mediano o cenário é inverso.

Tabela 5.11: Estimativas para quantidades de interesse da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos ( $10^2$  Horas) de falha para uma unidade futura (IRLEDs)

Modelo	$R_{T Y}(3000 y)$	MTTF $ y$	$t_{p Y}(0.025 y)$	$t_{p Y}(0.1 y)$	$t_{p Y}(0.5 y)$	$t_{p Y}(0.975 y)$
Dinâmico	0,701	43,487	15,270	18,519	36,278	115,571
Wang <i>et al.</i> (2017)	—	—	—	20,865	31,017	—

A Figura 5.9 representa graficamente as distribuições preditiva *a posteriori* para o tempo de falha de unidades sob teste e futura estimada pelo modelo linear dinâmico de degradação. Nota-se que a curva da distribuição associada à uma nova unidade é mais suave do que aquelas retratadas nos conjuntos de dados anteriores. Tal fato se deve a um maior número de unidades amostrais que trazem mais informação para a análise.

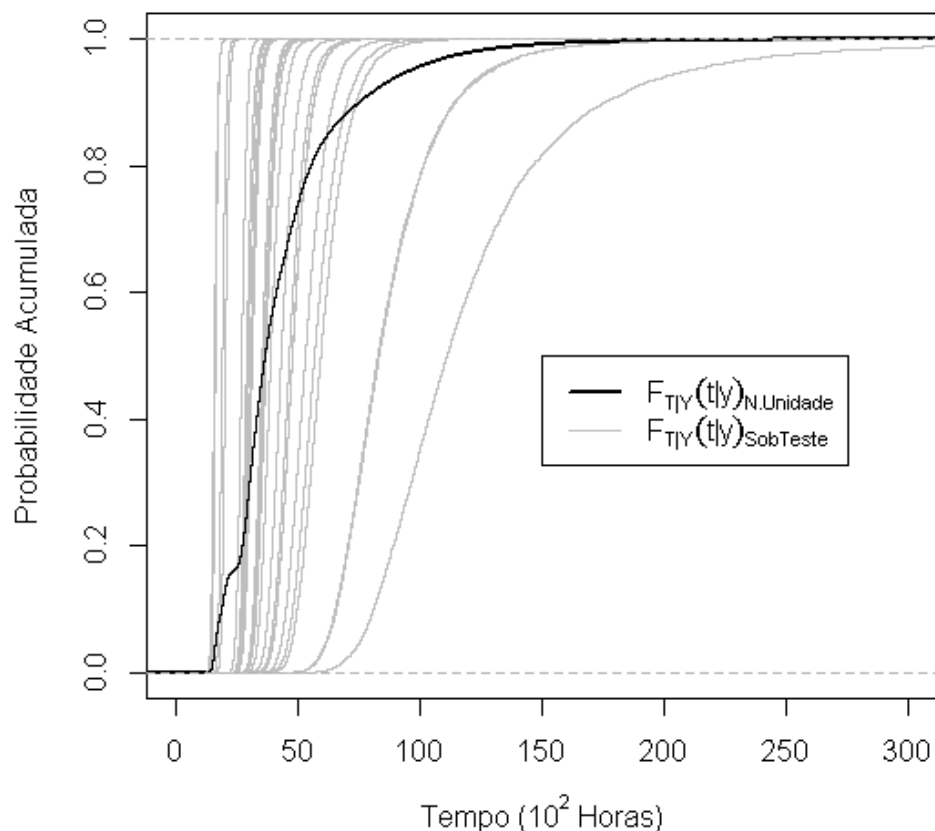


Figura 5.9: Distribuições preditiva *a posteriori* dos tempos ( $10^2$  Horas) de falha para unidades sob teste e futura (IRLEDs)



# Capítulo 6

## Conclusões

Com o passar dos anos, os componentes e sistemas vão se tornando cada vez mais confiáveis, principalmente por causa do aumento da demanda por esse tipo de produto. Um dos desafios da Confiabilidade que nasce nesse contexto reside no desenvolvimento de modelos que possam ser úteis nas tomadas de decisão e na previsão de falhas que muitas vezes geram um alto custo e podem ser catastróficas tanto para o cliente quanto para o fornecedor.

Metodologias que utilizam dados de degradação têm sido bastante utilizadas para fazer inferência sobre sistemas altamente confiáveis. Tal abordagem é baseada na coleta de mensurações em tempos pré-especificados e distintos de algum mecanismo de degradação que seja inerente à falha e considera-se que esta ocorre quando um determinado limiar crítico de degradação é ultrapassado. No Capítulo 1, foi feita uma breve explanação das duas grandes vertentes dos modelos de degradação, a saber, os modelos por processos estocásticos e os modelos gerais de perfis de degradação. Além disso, os três bancos de dados reais analisados nessa dissertação foram apresentados na introdução e um olhar mais atento nas trajetórias desses perfis de degradação motivou a execução deste trabalho.

Dentro da vertente dos modelos gerais de perfis de degradação, considerou-se a subclasse de modelos lineares de degradação a qual assume-se que o relacionamento entre a degradação e o tempo pode ser descrito por uma equação de reta cuja inclinação é um efeito aleatório relacionado com a taxa de degradação em cada unidade. No Capítulo 2,

revisou-se este modelo e discutiu-se os métodos inferenciais para a obtenção da distribuição do tempo até a falha das unidades sob teste e futura. Tal revisão é necessária pois o modelo linear de degradação foi comparado com a metodologia proposta. No mesmo capítulo, desenvolveu-se um algoritmo para ajustar o modelo linear de degradação Weibull que foi eficiente ao fornecer um maior monitoramento da autocorrelação e convergência das cadeias *a posteriori* dos parâmetros de interesse.

Uma suposição habitual feita no modelo linear de degradação, é que a taxa de degradação em uma determinada unidade sob teste é constante ao longo do tempo. Entretanto, possíveis mudanças aleatórias nas condições físicas dos produtos ou fatores ambientais podem contribuir para a aleatoriedade inexplicada nas unidades e serem responsáveis por uma variabilidade nas taxas de degradação ao longo dos tempos de medição. Essa foi a motivação prática por trás da metodologia proposta no Capítulo 3, em que estendeu-se o modelo linear de degradação inserindo uma estrutura dinâmica no modelo ao incorporar-se uma componente de evolução capaz de melhor acomodar instabilidades nas taxas de degradação que ocorram durante a condução dos ensaios. Foram derivados os métodos inferenciais para a obtenção da distribuição do tempo até a falha das unidades sob teste e futura. Além disso, foi discutido como o modelo proposto pode ser utilizado em situações em que há dados faltantes e como pode ser verificada a qualidade do ajuste.

No Capítulo 4, ambos os modelos foram comparados através de estudos de simulação realizados com o objetivo era verificar a eficiência na estimação dos tempos de falha reais das unidades sob teste. Neste contexto, foi interessante observar como é diferente a construção das trajetórias dos perfis de degradação. No modelo linear de degradação Weibull, ao gerar-se os efeitos aleatórios no começo da simulação, já se sabe, inicialmente, o valor real do tempo de falha das unidades sob teste e as medidas do mecanismo de degradação simuladas para uma unidade são desvios da inclinação gerada pelo efeito aleatório devido ao erro observacional. No modelo linear de degradação dinâmico, ao gerar-se as taxas de degradação que dão início à construção sequencial dos perfis, isso não trás informação direta sobre o tempo de falha real das unidades sob teste. Sob essa estrutura, além das unidades estarem sujeitas ao erro observacional, existe a componente de evolução das taxas de degradação que permite maior variabilidade fornecendo quebras

e pontos de mudança na estrutura do processo.

Ao gerar-se os perfis de degradação a partir dos dados de degradação linear Weibull, foi possível verificar que, mantendo o número de mensurações do mecanismo de degradação constante, um aumento no número de unidades amostrais não tem impacto na precisão das estimativas por ambos os modelos. Por outro lado, ao aumentar o número de mensurações do mecanismo de degradação, isso possibilita maior informação para a análise e, conseqüentemente, reduziu o vício das estimativas dos tempos de falha obtidos pelos modelos. Quando as trajetórias são construídas a partir dos dados de degradação linear dinâmico, ignorar essa natureza pode ser prejudicial à inferência, pois, as estimativas obtidas pelo modelo linear de degradação Weibull são mais viesadas e, ao aumentar o número de mensurações do mecanismo de degradação, o modelo dinâmico se sobressai ao obter um percentual de cobertura dos intervalos HPD maior do que o fornecido pelo modelo Weibull.

Em suma, o modelo linear de degradação dinâmico proposto neste trabalho mostrou-se competitivo com o modelo de degradação linear Weibull quando este é o verdadeiro modelo e mostrou-se superior quando a taxa de degradação real modifica-se ao longo do tempo. Neste caso, o modelo proposto leva a melhores estimativas para o tempo até a falha, por exemplo.

Percebe-se, no entanto, que se a modificação da taxa de degradação é muito brusca, ambos os modelos não fornecem bons ajustes em situações de poucas mensurações do mecanismo de degradação. Dessa forma, se existe a suspeita de que no estudo os perfis de degradação possam passar por instabilidades nas taxas de degradação, é mais viável que sejam coletadas um maior número de medidas do mecanismo de degradação do que, por exemplo, aumentar o número de unidades amostrais.

Os três bancos de dados apresentados na introdução deste trabalho foram analisados no Capítulo 5. Nos dois primeiros, corrente de operação em emissores de laser e desgaste em rodas de trem, foi possível comparar o ajuste dos modelos lineares de degradação Weibull e dinâmico. Na previsão de novas mensurações do mecanismo de degradação para estes dois conjuntos de dados, o modelo dinâmico conseguiu acomodar melhor as observações omitidas contribuindo com uma informação mais precisa para estimar a

distribuição do tempo até a falha feita na segunda etapa da abordagem dos modelos gerais de perfis de degradação. Outro fato interessante na análise destes bancos de dados foi o comportamento das taxas de degradação estimadas ao longo do tempo pelo modelo linear de degradação dinâmico. Foi possível comprovar que as taxas variam com o tempo e, principalmente nos dados de desgaste em rodas de trem, elas apresentam um padrão de queda nas estimativas.

Extensões possíveis do modelo proposto neste trabalho podem ser obtidas assumindo-se um modelo com intercepto variando com o tempo, o modelo hierárquico dinâmico de degradação e outras distribuições de probabilidade para a degradação.



# Apêndice



# Apêndice A: Gráficos de Diagnóstico (Dados Simulados)

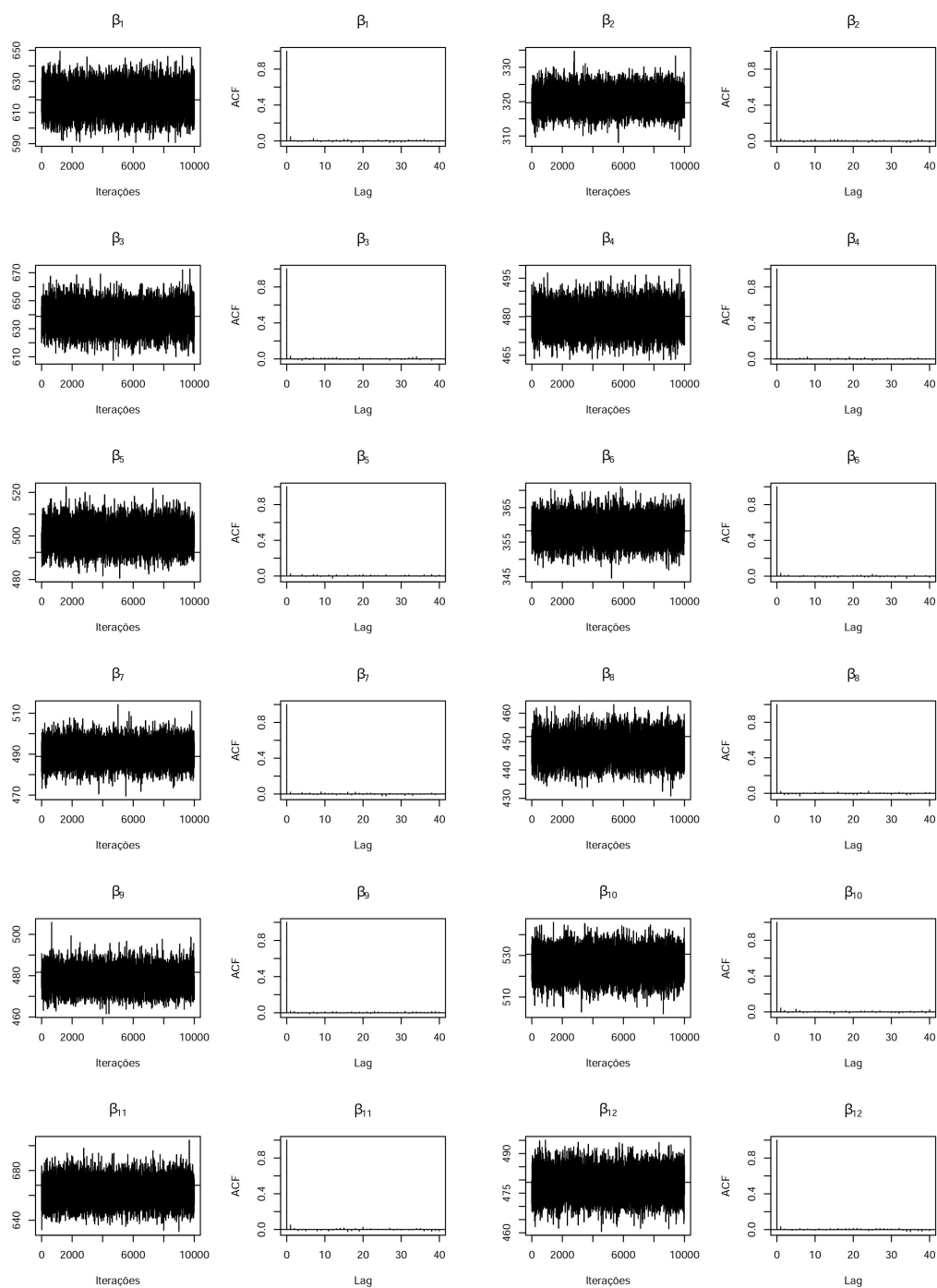


Figura A.1: Gráficos de convergência e autocorrelação para os parâmetros de interesse (Dados Simulados)

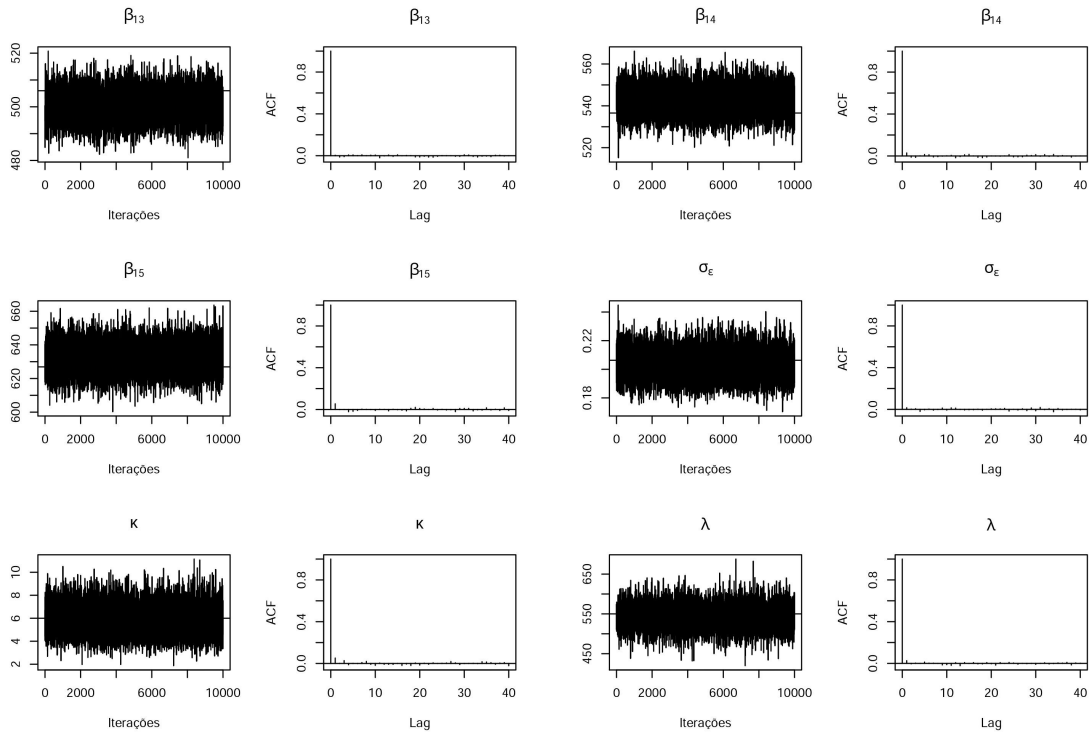


Figura A.1: Gráficos de convergência e autocorrelação para os parâmetros de interesse (Dados Simulados)

# Apêndice B: Adequação do Modelo Linear de Degradação Dinâmico

## 1- Corrente de Operação em Emissores de Laser

Tabela B.1: Valor-P do teste Shapiro Wilk para as inovações padronizadas (Emissores de Laser)

Emissor 1	Emissor 2	Emissor 3	Emissor 4	Emissor 5	Emissor 6	Emissor 7	Emissor 8
0,100	0,307	0,664	0,036	0,537	0,928	0,338	0,454
Emissor 9	Emissor 10	Emissor 11	Emissor 12	Emissor 13	Emissor 14	Emissor 15	
0,420	0,624	0,329	0,007	0,036	0,011	0,453	

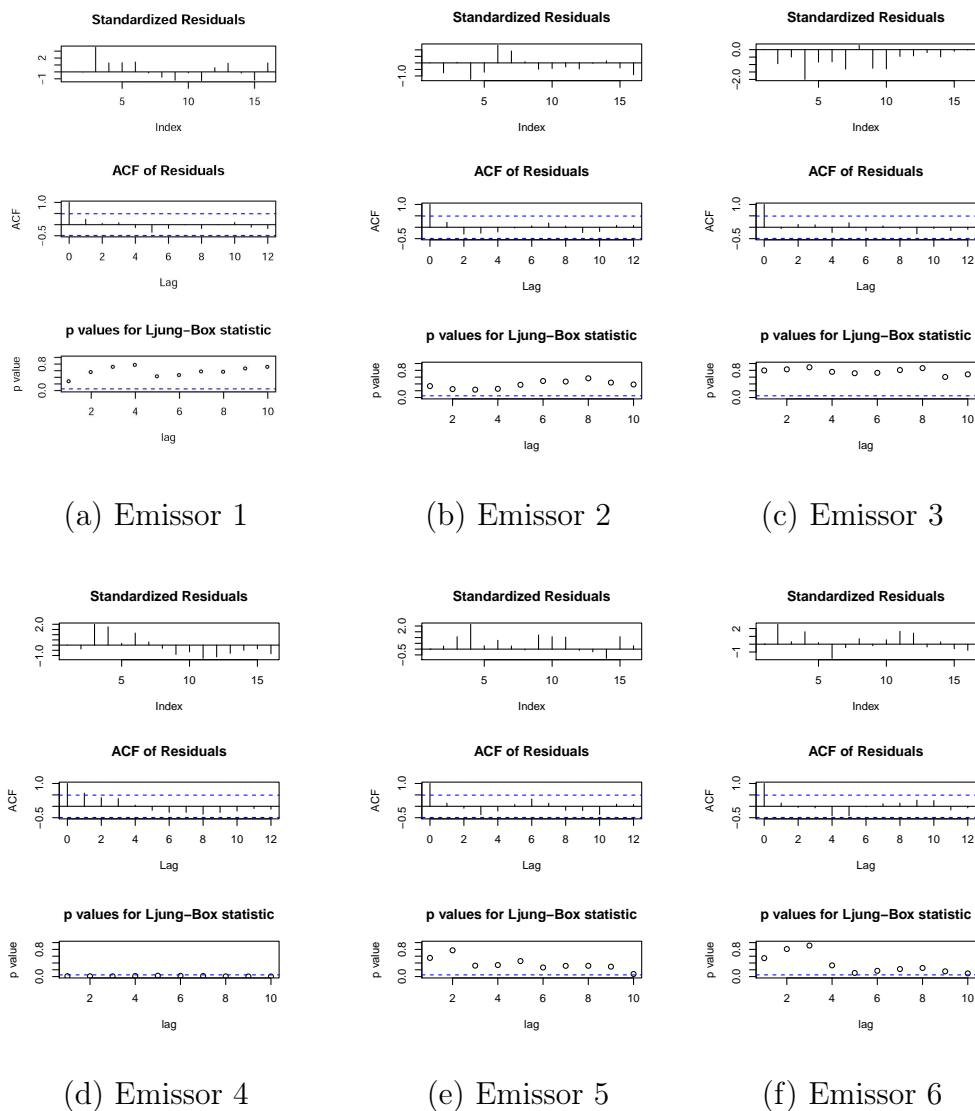


Figura B.1: Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (Emissores de Laser 1 a 6)

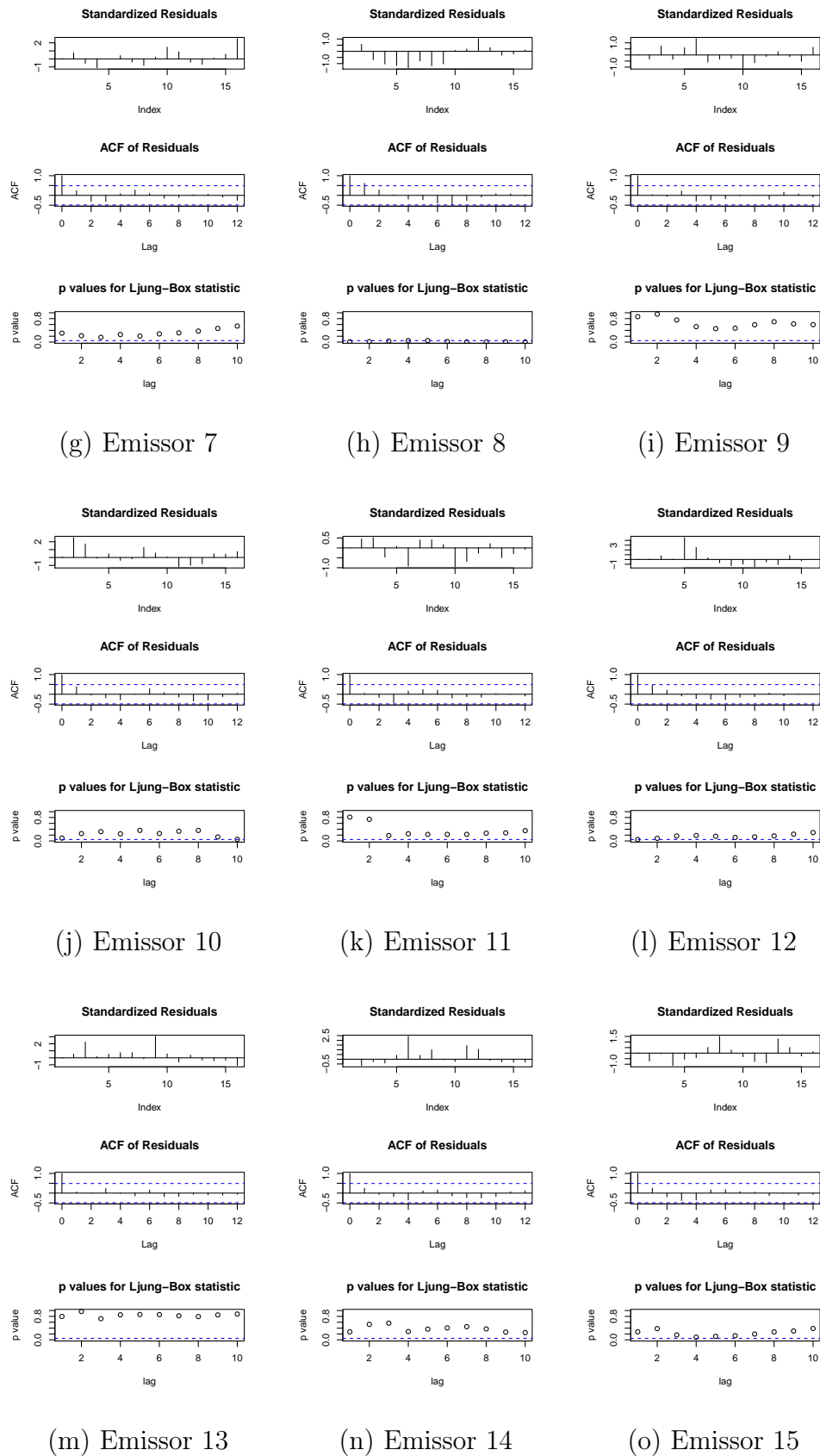


Figura B.1: Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (Emissores de Laser 7 a 15)

## 2- Desgaste em Rodas de Trem

Tabela B.2: Valor-P do teste Shapiro Wilk para as inovações padronizadas (Rodas de Trem)

Trem 1	Trem 2	Trem 3	Trem 4	Trem 5	Trem 6	Trem 7
0,010	0,019	0,010	0,062	0,016	0,017	0,020
Trem 8	Trem 9	Trem 10	Trem 11	Trem 12	Trem 13	Trem 14
0,018	0,022	0,022	0,525	0,912	0,369	0,053

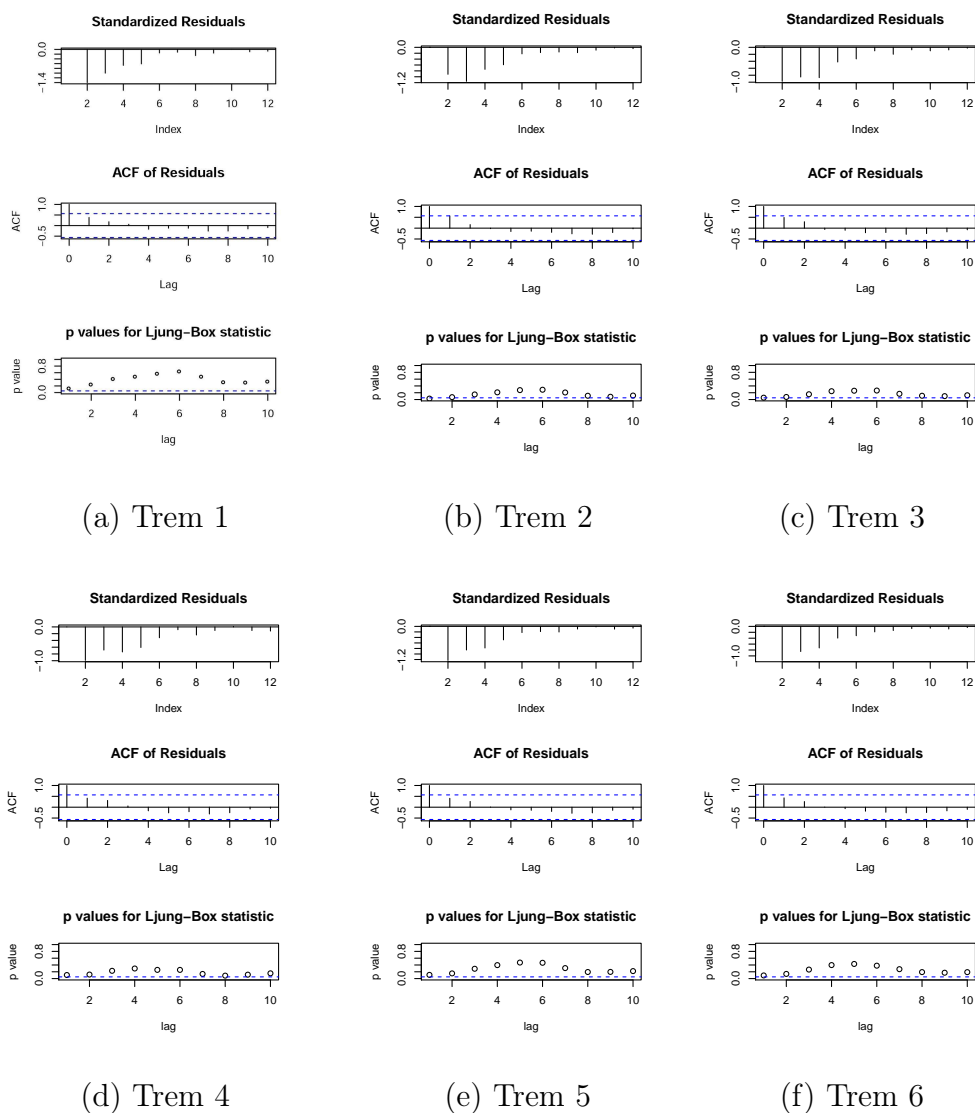
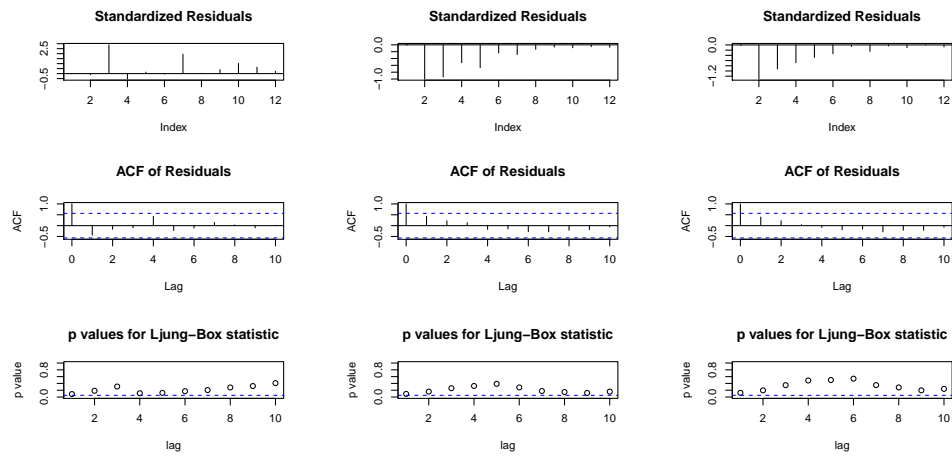


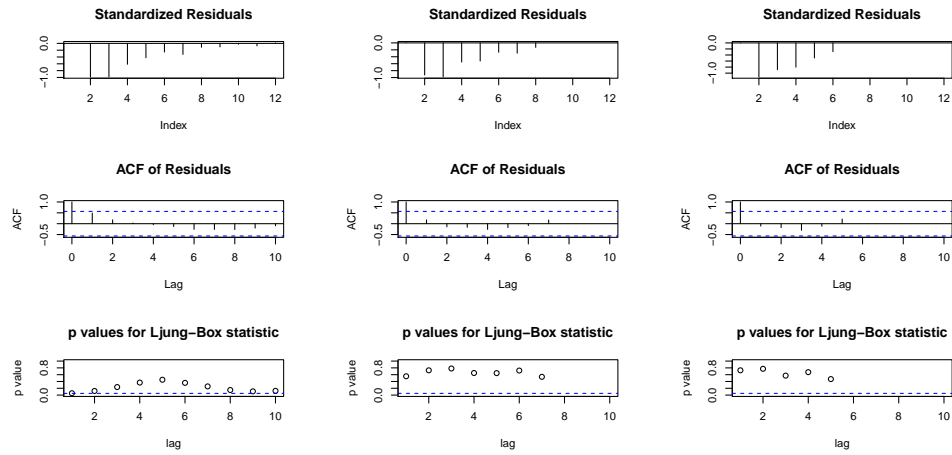
Figura B.2: Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (Trens 1 a 6)



(g) Trem 7

(h) Trem 8

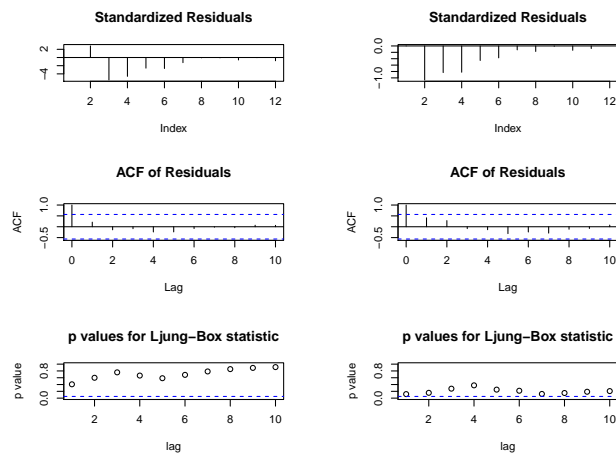
(i) Trem 9



(j) Trem 10

(k) Trem 11

(l) Trem 12



(m) Trem 13

(n) Trem 14

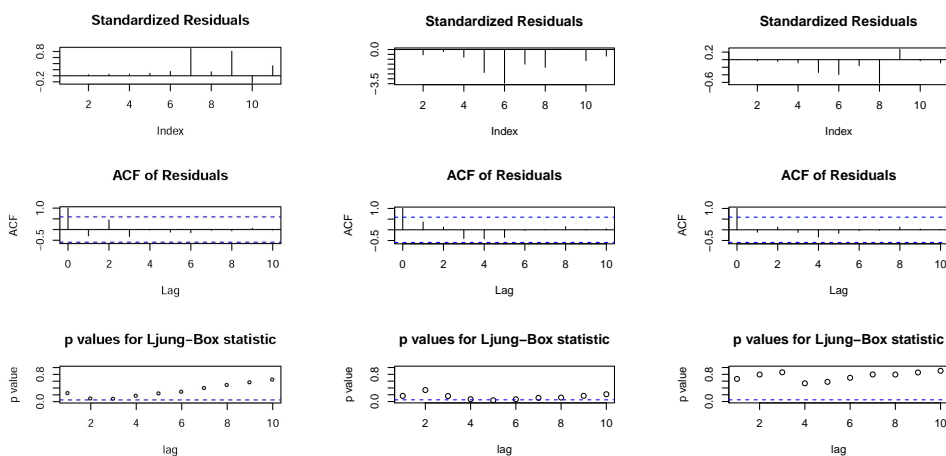
Figura B.2: Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (Trens 7 a 14)



### 3- Potência Luminosa em Diodos Emissores de Luz Infravermelha

Tabela B.3: Valor-P do teste Shapiro Wilk para as inovações padronizadas (IRLEDs)

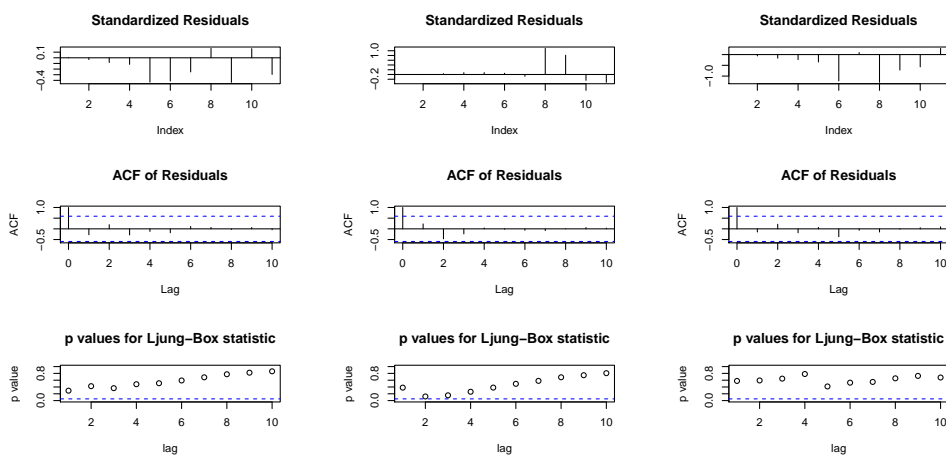
IRLED 1	IRLED 2	IRLED 3	IRLED 4	IRLED 5	IRLED 6	IRLED 7	IRLED 8	IRLED 9
0,014	0,266	0,354	0,289	0,005	0,317	0,054	0,228	0,637
IRLED 10	IRLED 11	IRLED 12	IRLED 13	IRLED 14	IRLED 15	IRLED 16	IRLED 17	IRLED 18
0,426	0,049	0,245	0,692	0,090	0,074	0,353	0,126	0,208
	IRLED 19	IRLED 20	IRLED 21	IRLED 22	IRLED 23	IRLED 24	IRLED 25	
	0,071	0,895	0,149	0,744	0,669	0,268	0,296	



(a) IRLED 1

(b) IRLED 2

(c) IRLED 3

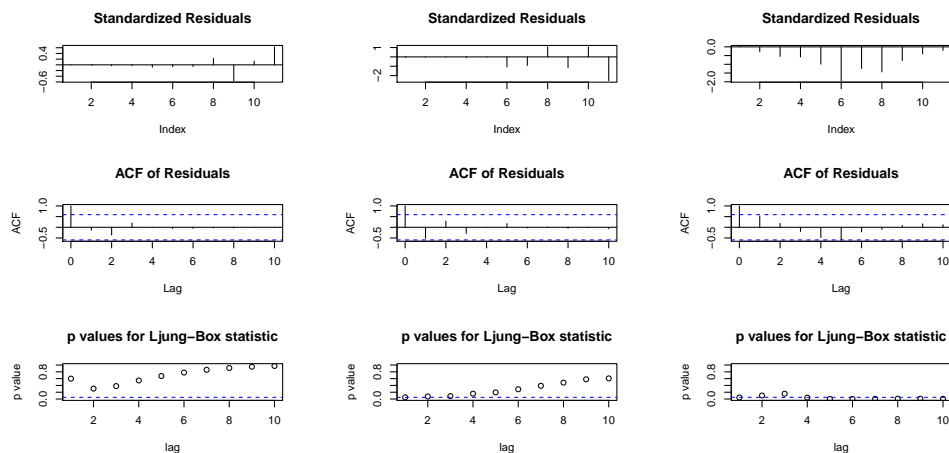


(d) IRLED 4

(e) IRLED 5

(f) IRLED 6

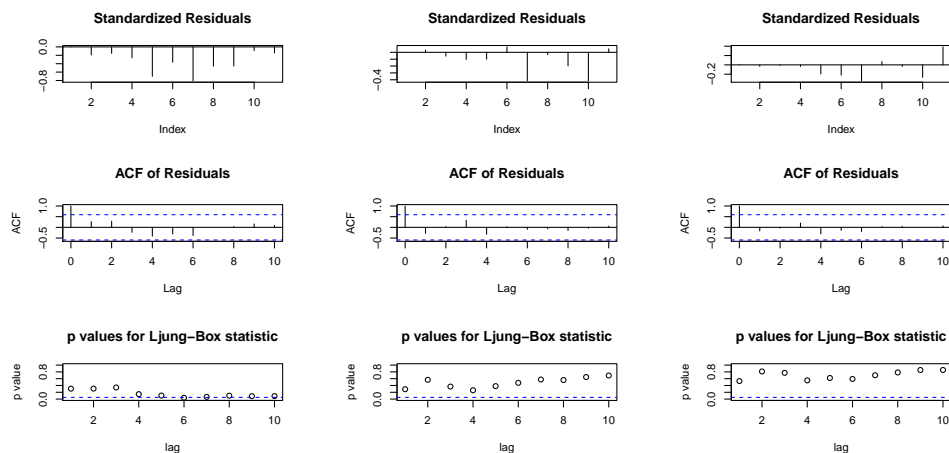
Figura B.3: Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (IRLEDs 1 a 6)



(g) IRLED 7

(h) IRLED 8

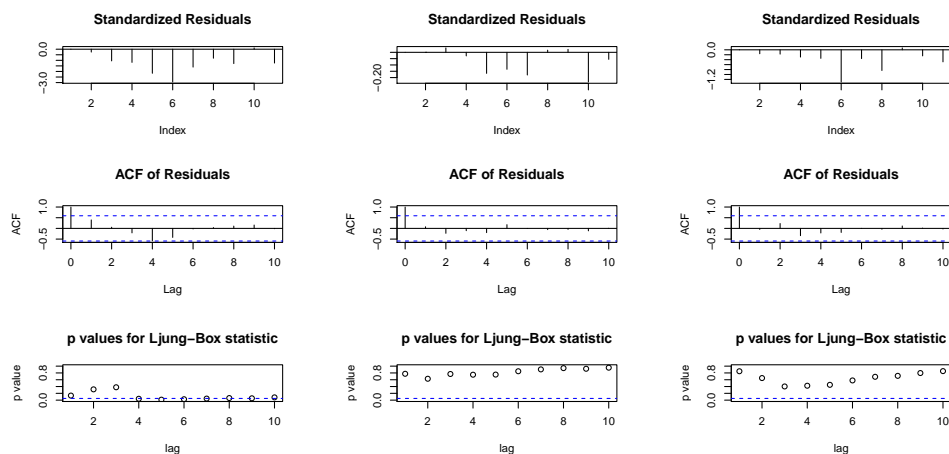
(i) IRLED 9



(j) IRLED 10

(k) IRLED 11

(l) IRLED 12



(m) IRLED 13

(n) IRLED 14

(o) IRLED 15

Figura B.3: Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (IRLEDs 7 a 15)

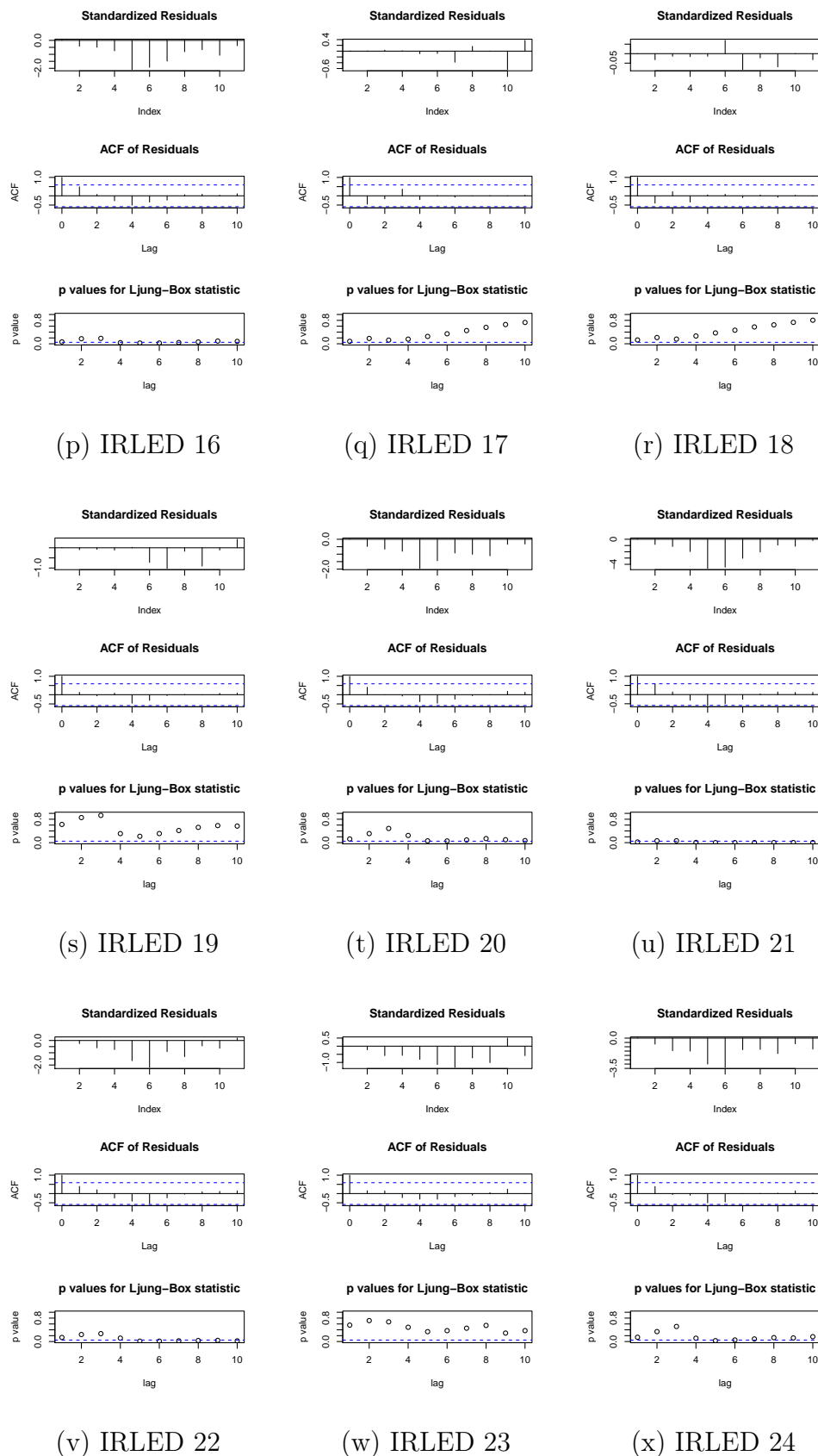
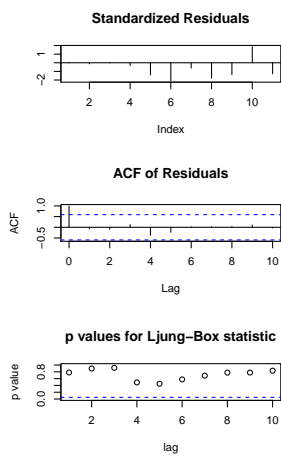


Figura B.3: Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (IRLEDs 16 a 24)



(y) IRLED 25

Figura B.3: Gráficos de diagnóstico para as inovações padronizadas (IRLED 25)

# Referências Bibliográficas

- Bae, S. J. e Kvam, P. H. (2004), “A nonlinear random-coefficients model for degradation testing,” *Technometrics*, 46, 460–469.
- Bagdonavičius, V., Masiulaitytė, I., e Nikulin, M. (2010), “Reliability estimation from failure-degradation data with covariates,” in *Advances in Degradation Modeling*, pp. 275–291, Springer.
- Carter, C. K. e Kohn, R. (1994), “On Gibbs sampling for state space models,” *Biometrika*, pp. 541–553.
- Chiao, C. e Hamada, M. (1996), “Using degradation data from an experiment to achieve robust reliability for light emitting diodes,” *Quality and Reliability Engineering International*, 12, 89–94.
- Doksum, K. e Hoyland, A. (1993), “Models for variable-stress accelerated life testing experiments based on wiener processes and the inverse gaussian distribution,” *Theory of Probability & Its Applications*, 37, 137–139.
- Freitas, M., Toledo, M., Colosimo, E., e Pires, M. (2009), “Using degradation data do assess reliability: A case study on train wheel degradation.” *Quality and Reliability Engineering International*, 25, 607–629.
- Freitas, M., dos Santos, T. R., Pires, M. C., e Colosimo, E. (2010), “A Closer Look at Degradation Models: Classical and Bayesian Approaches,” in *Advances in Degradation Modelling: Applications in reliability, Survival Analysis and Finance*, eds. M. S. Niku-

- lin, N. Limnios, N. Balakrishman, W. Kahle, e C. Huber-Carol, chap. 11, pp. 157–180, Birkhauser, New York.
- Frühwirth-Schnatter, S. (1994), “Data augmentation and dynamic linear models,” *Journal of time series analysis*, 15, 183–202.
- Hamada, M. (2005), “Using degradation data to assess reliability,” *Quality Engineering*, 17, 615–620.
- Hong, Y., Duan, Y., Meeker, W. Q., Stanley, D. L., e Gu, X. (2015), “Statistical methods for degradation data with dynamic covariates information and an application to outdoor weathering data,” *Technometrics*, 57, 180–193.
- Jing, L. (2010), *Hastings-within-Gibbs Algorithm: Introduction and Application on Hierarchical Model*, University of Texas at Santo Antonio.
- Kalman, R. E. (1960), “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *J. Basic Engineering*, 82, 35–45.
- Lawless, J. e Crowder, M. (2004), “Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure,” *Lifetime Data Analysis*, 10, 213–227.
- Lee, P. M. (2012), *Bayesian Statistics: An Introduction*, Wiley, Quarta Edição.
- Ljung, G. M. e Box, G. E. (1978), “On a measure of lack of fit in time series models,” *Biometrika*, 65, 297–303.
- Lu, C. J. e Meeker, W. O. (1993), “Using degradation measures to estimate a time-to-failure distribution,” *Technometrics*, 35, 161–174.
- Lu, C. J., Meeker, W. Q., e Escobar, L. A. (1996), “A comparison of degradation and failure-time analysis methods for estimating a time-to-failure distribution,” *Statistica Sinica*, pp. 531–546.
- Meeker, W. Q. e Escobar, L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, Wiley Series in Probability and Statistics, Primeira Edição.

- Migon, H., Gamerman, D., e Louzada, F. (2014), *Statistical Inference: An Integrated Approach, Second Edition*, Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science, Taylor & Francis.
- Oliveira, R. B., Freitas, M. A., e Loschi, R. H. (2011), “Uma abordagem bayesiana para modelos de degradação: a obtenção da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha de unidades amostrais futuras e sob teste,” Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- Oliveira, R. B., Loschi, R. H., e Freitas, M. A. (2015), “Modelos robustos para degradação linear e tempo de falha,” Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- Pan, R. e Crispin, T. (2011), “A hierarchical modeling approach to accelerated degradation testing data analysis: A case study,” *Quality and Reliability Engineering International*, 27, 229–237.
- Park, C. e Padgett, W. J. (2005), “New cumulative damage models for failure using stochastic processes as initial damage,” *IEEE Transactions on Reliability*, 54, 530–540.
- Peng, C.-Y. e Tseng, S.-T. (2009), “Mis-specification analysis of linear degradation models,” *IEEE Transactions on Reliability*, 58, 444–455.
- Peng, C.-Y. e Tseng, S.-T. (2013), “Statistical lifetime inference with skew-Wiener linear degradation models,” *IEEE Transactions on Reliability*, 62, 338–350.
- Peng, W., Li, Y.-F., Yang, Y.-J., Huang, H.-Z., e Zuo, M. J. (2014), “Inverse Gaussian process models for degradation analysis: A Bayesian perspective,” *Reliability Engineering & System Safety*, 130, 175–189.
- Petris, G., Petrone, S., e Campagnoli, P. (2009), *Dynamic Linear Models with R*, Use R!, Springer New York.
- R Development Core Team (2017), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, ISBN 3-900051-07-0.

- Robinson, M. e Crowder, M. (2000), “Bayesian methods for a growth-curve degradation model with repeated measures,” *Lifetime Data Analysis*, 6, 357–374.
- Shapiro, S. S. e Wilk, M. B. (1965), “An analysis of variance test for normality (complete samples),” *Biometrika*, 52, 591–611.
- Shephard, N. (1994), “Partial non-Gaussian state space,” *Biometrika*, pp. 115–131.
- Shiau, J.-J. H. e Lin, H.-H. (1999), “Analyzing accelerated degradation data by nonparametric regression,” *IEEE Transactions on reliability*, 48, 149–158.
- Si, X.-S., Wang, W., Hu, C.-H., Chen, M.-Y., e Zhou, D.-H. (2013), “A Wiener-process-based degradation model with a recursive filter algorithm for remaining useful life estimation,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, 35, 219–237.
- Wang, X. (2010), “Wiener processes with random effects for degradation data,” *Journal of Multivariate Analysis*, 101, 340–351.
- Wang, X. e Xu, D. (2010), “An inverse Gaussian process model for degradation data,” *Technometrics*, 52, 188–197.
- Wang, Z., Cao, J., Ma, X., Qiu, H., Zhang, Y., Fu, H., e Krishnaswamy, S. (2017), “An Improved Independent Increment Process Degradation Model with Bilinear Properties,” *Arabian Journal for Science and Engineering*, pp. 1–10.
- West, M. e Harrison, J. (1997), *Bayesian forecasting and dynamic models*, Springer series in statistics, Springer, Segunda Edição.
- Yang, G. (2007), *Life cycle reliability engineering*, John Wiley & Sons.
- Ye, Z.-S. e Xie, M. (2015), “Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products,” *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31, 16–32.
- Zhou, R., Serban, N., Gebraeel, N., *et al.* (2014), “Degradation-based residual life prediction under different environments,” *The Annals of Applied Statistics*, 8, 1671–1689.