

Caio César de Oliveira Freitas

**AVALIAÇÃO DE SISTEMAS DE MEDIÇÃO BINÁRIA COM
ERROS DE CLASSIFICAÇÃO EMPREGANDO O MÉTODO DE
ESTIMAÇÃO DO MÍNIMO QUI-QUADRADO**

Belo Horizonte - MG

Fevereiro de 2018

Caio César de Oliveira Freitas

**AVALIAÇÃO DE SISTEMAS DE MEDIÇÃO BINÁRIA COM
ERROS DE CLASSIFICAÇÃO EMPREGANDO O MÉTODO DE
ESTIMAÇÃO DO MÍNIMO QUI-QUADRADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística no Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador:

Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA - PPGEST

Belo Horizonte - MG

Fevereiro de 2018

“Obstáculos não podem te parar.

Se você topa com uma parede, não vire e desista.

Descubra como escalá-la, passe por ela, trabalhe nisso.”

(Michael Jordan)

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, por ter me proporcionado a oportunidade de entrar nesta jornada e guiado-me com muita paz, saúde, força e disposição.

Aos meus pais Evaldo e Maria da Conceição; aos meus irmãos Renato, Ricardo e Victor; e à minha cunhada Jéssica, pelo incentivo e apoio que me concederam, e pelos momentos de alegria compartilhados em família.

À família Brandão; Liélío, Cinara, Vinícius e Gustavo, pelo grande acolhimento, conselhos e apoio que me concederam. Certamente, foram momentos de descontração e alegria que irei carregar em minha vida.

Ao professor Roberto Quinino, por ter aceitado o desafio de realizar este trabalho e orientá-lo de forma impecável; pelo incentivo, confiança, paciência e conselhos bastante construtivos.

Aos meus amigos e colegas da UFMG, pelo acolhimento indescritível e momentos marcantes de descontração em que estivemos reunidos. Especialmente, ao meu grande companheiro Rumenick, pela enorme amizade, parceria, apoio e rotina recheada de humor e aprendizados.

À Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG), pelo apoio financeiro que tem me concedido durante todo o programa.

Resumo

Sistemas de medição binária (BMS) são ferramentas frequentemente utilizadas em problemas de classificação onde há somente duas respostas possíveis. Na medicina, são utilizados em testes diagnósticos, e em controle de qualidade, quando o interesse é avaliar a qualidade de itens fabricados através de uma inspeção. No entanto, os BMS's não são perfeitos e podem resultar em erros de classificação. Por exemplo, em controle de qualidade, um BMS pode julgar um item “conforme” como “não conforme” com probabilidade e_1 ou um item “não conforme” como “conforme” com probabilidade e_2 , durante uma inspeção. Tais erros podem influenciar em decisões críticas a serem tomadas no processo e na qualidade dos itens fabricados, o que torna essencial realizar um estudo rigoroso para avaliar a qualidade do sistema de medição em uso. A avaliação consiste em estimar os erros e_1 e e_2 , e a proporção de itens conformes no processo, denotada por p . No entanto, somente itens classificados como “conforme” e “não conforme” são observados, e estes podem passar ou falhar durante uma inspeção com o BMS, ou seja, o verdadeiro estado dos itens não é observável (latente). Uma alternativa é realizar r classificações repetidas de cada item utilizando o BMS e empregar um modelo de classe latente. A proposta deste trabalho é avaliar um BMS empregando a abordagem de estimação denominada mínimo qui-quadrado, que tem sido pouco discutida em problemas de estimação, porém, Joseph Berkson (1899 – 1982) defende seu uso, questionando a soberania da máxima verossimilhança. Neste trabalho, é mostrado que os estimadores de mínimo qui-quadrado são competitivos em relação aos de Momentos e de Máxima Verossimilhança, se comparados segundo o erro médio quadrático, e equivalentes quando o número de classificações repetidas é igual a três.

Palavras-chave: Sistemas de medição binária. Erros de classificação. Mistura de duas distribuições binomiais. Maioria simples. Método dos momentos. Máxima verossimilhança. Mínimo qui-quadrado. Simulação Monte Carlo.

Abstract

Binary measurement systems (BMS) are tools frequently using in classification problems when is there only two possible responses. In medicine, are used in diagnostic tests, and in quality control, when the interest is assess the quality of manufacturing items by an inspection. However, the BMSs are not perfect and can result in misclassification. For example, in quality control, a BMS can judge a “conform” item as “nonconforming” with probability e_1 or a “nonconforming” item as “conform” with probability e_2 during the inspection. Such errors can influence critical decisions to be taken in the process and in quality of manufacturing items, which makes it essential to carry out a rigorous study to evaluate the quality of measurement system in use. The assessment consist in estimate the errors e_1 and e_2 , and the proportion of conform items in the process, denoted by p . However, only items classified as “conform” and “nonconforming” are observed, and these may pass or fail during an inspection with the BMS, that is, the true state of the items is not observable (latent). An alternative is to perform r repeated classifications of each item using the BMS and employ a latent class model. The proposal of this paper is to evaluate a BMS using the so-called minimum chi-square approach, which has been little discussed in estimation problems, however, Joseph Berkson (1899-1982) defends its use, questioning the sovereignty of the maximum likelihood. In this paper, it is shown that the minimum chi-square estimators are competitive with of Moments and Maximum Likelihood, if compared according to the mean squared error, and equivalent when the number of repeated classifications is three.

Keywords: Binary measurement systems. Misclassification. Mixture of two binomial distributions. Simple majority. Method of moments. Maximum likelihood. Minimum chi-square. Monte Carlo simulation.

Sumário

Lista de Figuras	VI
Lista de Tabelas	VII
1 Introdução	8
1.1 Sistemas de Medição Binária	8
1.2 Trabalhos Relacionados ao Mínimo Qui-Quadrado (MQQ)	10
1.3 Objetivos do Trabalho	10
1.4 Organização do Trabalho	11
2 Fundamentação Teórica	12
2.1 Notações e Estrutura do Problema	12
2.2 Modelo de Mistura de Duas Distribuições Binomiais	16
2.3 Estimação	18
2.3.1 Método dos Momentos	18
2.3.2 Maioria Simples	19
2.3.3 Máxima Verossimilhança	21
2.4 Mínimo Qui-Quadrado	22
2.5 Discussão sobre o Mínimo Qui-Quadrado	28
3 Estudo de Simulação	30
3.1 Descrição do Estudo de Simulação Monte Carlo	30
3.2 Comparação dos Estimadores via Simulação Monte Carlo	31
4 Exemplo de Aplicação	42
5 Discussão e Conclusões	48
Apêndice	53

A - Tabelas	53
B - Códigos	75

Lista de Figuras

2.1	Ilustração do problema de inspeção com o BMS.	14
3.1	Valores médios dos EQM's nos cenários simulados.	34
3.2	Valores médios dos desvios padrões nos cenários simulados.	35
3.3	Valores médios dos vieses nos cenários simulados.	35
3.4	<i>Boxplots</i> dos EQM's nos cenários simulados.	37
3.5	<i>Boxplots</i> dos desvios padrões nos cenários simulados.	37
3.6	<i>Boxplots</i> dos vieses nos cenários simulados.	38
3.7	<i>Boxplots</i> dos valores médios do EQM estratificado pelo número de repetições.	41
4.1	Distribuição de densidade das estimativas <i>bootstrap</i> de p	46
4.2	Distribuição de densidade das estimativas <i>bootstrap</i> de e_1	46
4.3	Distribuição de densidade das estimativas <i>bootstrap</i> de e_2	47

Lista de Tabelas

2.1	n itens classificados r vezes.	15
2.2	Tabela de frequências observadas e esperadas.	23
3.1	Valores médios do desvio padrão, viés e EQM para p nos cenários simulados. . .	32
3.2	Valores médios do DP, viés e EQM para e_1 nos cenários simulados.	32
3.3	Valores médios dos desvio padrão, viés e EQM para e_2 nos cenários simulados.	33
3.4	Valores médios do EQM estratificado pelo número de repetições r	39
3.5	Valores médios do desvio padrão estratificado pelo número de repetições r . . .	39
3.6	Valores médios do viés estratificado pelo número de repetições r	40
4.1	Cinco classificações repetidas de 150 azulejos.	42
4.2	Inspeção de azulejos - Estimativas de mínimo χ^2_l dos valores esperados.	43
4.3	Valores médios, erros padrões e percentis (0.05; 0.95) das estimativas MQQ <i>bootstrap</i> de p , e_1 e e_2	45
1	EQM, valor médio e desvio padrão (DP) para as estimativas de p considerando a função χ^2 logito no método MQQ.	53
2	EQM, valor médio e desvio padrão (DP) para as estimativas de e_2 considerando a função χ^2 logito no método MQQ.	60
3	EQM, valor médio e desvio padrão (DP) para as estimativas de e_1 considerando a função χ^2 logito no método MQQ.	67

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, apresentamos uma breve introdução a respeito dos sistemas de medição binária e a estrutura do problema de avaliação de um BMS. Além disso, são descritos os objetivos e organização do trabalho.

1.1 Sistemas de Medição Binária

Os sistemas de medição binária (BMS, do inglês *Binary Measurement System*) são ferramentas que desempenham uma tarefa importante em problemas de classificação binária. Estes sistemas são responsáveis por julgar utilizados em diversas áreas, principalmente em testes diagnósticos, na medicina, e em inspeções nas indústrias, em controle de qualidade. Na área médica, os BMS's são utilizados em diagnósticos para identificar alguma condição específica nos pacientes, discriminando-os em positivo ou negativo, que poderia representar a presença ou ausência de determinada doença, por exemplo. Nas indústrias, são responsáveis por avaliar a qualidade dos itens fabricados com base em algumas medidas que descrevem os itens avaliados e, então, classificando-os em conforme ou não conforme. Em muitos casos, um BMS é utilizado para realizar 100% da inspeção, a fim de proteger os consumidores de itens que não estão conforme as especificações (Danila et al. (2009)). Neste trabalho, o contexto está voltado ao controle de qualidade, onde o interesse é classificar itens fabricados em conforme e não conforme.

Avaliar um BMS é de fundamental importância, pois durante o processo de inspeção o BMS está sujeito a erros de classificação, isto é, julgar um item conforme como não conforme com probabilidade e_1 ou julgar um item não conforme como conforme com probabilidade e_2 .

A medida de erro e_1 representa o *risco do produtor*, pois um item conforme provavelmente será enviado a um retrabalho desnecessário ou até mesmo sucateado; e_2 representa o *risco do consumidor*, uma vez que um item não conforme provavelmente será enviado ao consumidor.

Para ilustrar uma aplicação de um BMS, suponha que estamos interessados em inspecionar cartões de crédito. O objetivo é detectar defeitos como arranhões superficiais, letras ou números distorcidos, etc. Um determinado BMS captura uma foto digital da frente de cada cartão, onde estão contidas as informações mais relevantes dos clientes, e calcula várias medidas descritivas comparando-os a um modelo de cartão ideal (veja [Steiner & MacKay \(2005\)](#); [Danila et al. \(2009\)](#)). Assim, se alguma dessas medidas cai fora de um intervalo pré-especificado, o cartão falha na inspeção e é julgado como não conforme pelo BMS, caso contrário, o cartão passa e é julgado como conforme. No entanto, um cartão conforme pode ser classificado como não conforme com probabilidade e_1 ou um cartão não conforme como conforme com probabilidade e_2 . Observe que, apesar de algumas características dos cartões serem contínuas, é razoável considerar o BMS como sistema de medição, pois a decisão final é “conforme” ou “não-conforme”.

Uma abordagem para realizar uma avaliação de um BMS considera o sistema padrão-ouro disponível, tal sistema é capaz de determinar os estados dos itens sem cometer erros. Então, a abordagem consiste em comparar os resultados do padrão-ouro com os obtidos pelo BMS. No exemplo dos cartões de crédito, um padrão-ouro poderia ser uma inspeção humana detalhada, onde o inspetor poderia comparar cada cartão com as especificações padrão e, então, julgar o cartão como conforme ou não conforme.

Geralmente, a indisponibilidade do padrão-ouro está relacionada ao alto custo deste sistema que, ainda, pode ser destrutivo, no sentido de alterar as características dos itens durante o processo de inspeção. Na literatura, há uma outra abordagem que considera o padrão-ouro indisponível e, portanto, o estado verdadeiro de cada item é desconhecido (latente). Esta abordagem consiste em realizar r classificações repetidas em cada item utilizando um BMS e considerar um modelo de classe latente, que é bem conhecido e utilizado em diversas áreas de pesquisa. Alguns autores, como [Boyles \(2001\)](#), [van Wieringen & Van Den Heuvel \(2005\)](#) e [Danila et al. \(2009, 2012\)](#), empregaram tal modelo para analisar os dados provenientes de um estudo de avaliação do BMS, considerando que cada item foi classificado repetidas vezes pelo sistema. Neste trabalho, a avaliação do sistema de medição binária será conduzida sob o padrão-ouro indisponível.

1.2 Trabalhos Relacionados ao Mínimo Qui-Quadrado (MQQ)

Apesar de ser um método pouco discutido em problemas de estimação nos livros texto, que enfatizam mais os métodos tradicionais na literatura, como o da máxima verossimilhança e dos momentos, o estimador de mínimo qui-quadrado tem mostrado resultados interessantes em alguns estudos.

Em [Berkson \(1980\)](#), o autor deu início a uma discussão que envolveu alguns pesquisadores com reputação na Estatística. Neste trabalho, o autor questiona a soberania da máxima verossimilhança (MV) e apresenta algumas funções χ^2 alternativas que podem ser minimizadas na estimação de mínimo qui-quadrado. O autor mostra que o estimador de MV é um caso particular do estimador de mínimo qui-quadrado, denominado por χ_λ^2 . Além disso, entende que não existe um método de estimação que seja sempre superior em todas as situações, às vezes o mínimo χ_λ^2 , às vezes uma das outras estimativas de mínimo χ^2 é melhor.

Em [Harris & Kanji \(1983\)](#), os autores apresentam uma revisão de alguns aspectos históricos a respeito da estimação de mínimo χ^2 . Mencionam que este método é pouco discutido quando se tratam de problemas de estimação, citando que a MV é amplamente explorada e discutida em vários textos.

Em [Kominek \(2002\)](#), o autor realizou uma aplicação do método mínimo qui-quadrado para estimar os parâmetros de uma distribuição estável unimodal simétrica. A ideia era analisar a eficiência da estimação de mínimo qui-quadrado através de simulações Monte Carlo. Com isso, o autor apontou evidências a favor do MQQ nos casos onde os dados estavam agrupados e, em certas situações para os dados não agrupados, obteve um desempenho satisfatório.

1.3 Objetivos do Trabalho

O trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre a performance do método de mínimo qui-quadrado (MQQ) para estimar os parâmetros (p, e_1, e_2) , que tem sido pouco discutido nos problemas de estimação na literatura. Considerando os estudos anteriores que abordam o MQQ e os comentários feitos por [Berkson \(1980\)](#), a proposta foi realizar uma investigação empregando simulações Monte Carlo para verificar a eficiência deste método na avaliação de um BMS.

Especificamente, os objetivos estão definidos nos seguintes passos:

1. Estudo das teorias para os problemas de avaliação de um sistema de medição binária.
2. Estudo sobre os métodos de estimação dos parâmetros do modelo de mistura de duas distribuições binomiais.
3. Desenvolvimento de um estudo de simulação Monte Carlo para analisar a performance do MQQ num problema de avaliação de um BMS.
4. Exemplificar como utilizar o MQQ para avaliação dos parâmetros de interesse por meio de teste de hipóteses.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2, são apresentados a estrutura do problema, o modelo de classe latente e os métodos de estimação; no Capítulo 3, é apresentada uma descrição dos cenários do estudo de simulação Monte Carlo, bem como os resultados obtidos; no Capítulo 4, apresentamos um Exemplo de Aplicação, a fim de mostrar o uso do MQQ em um problema típico em controle de qualidade; no Capítulo 5, são apresentadas algumas conclusões e considerações finais do trabalho.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, apresentamos as notações e a estrutura do problema de avaliação de um BMS; definimos o modelo de mistura de duas distribuições binomiais e alguns métodos de estimação mais tradicionais na literatura, como o de máxima verossimilhança, método dos momentos e maioria simples. Além disso, é apresentado o método de mínimo qui-quadrado, que é o alvo principal do estudo.

2.1 Notações e Estrutura do Problema

Num processo de fabricação, uma tarefa importante é detectar itens que não estão conforme com as especificações desejadas, a fim de aprimorar a qualidade dos itens fabricados. Para isso, é comum o uso de um determinado sistema de medição no processo de inspeção dos itens. Neste caso particular, onde o interesse é classificar os itens fabricados em conforme ou não conforme, é razoável utilizar um sistema de medição binária (BMS). No entanto, os BMS's estão sujeitos a erros de classificação que podem influenciar as tomadas de decisões críticas, o que torna essencial realizar um estudo rigoroso para avaliar a qualidade do sistema em uso.

Suponha que dispomos de uma amostra aleatória de n itens, onde X são conformes. Para estabelecer uma notação, definimos uma variável aleatória X_i , que indica o estado do i -ésimo item avaliado, tal que

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ é conforme,} \\ 0, & \text{se o item } i \text{ é não conforme.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Considerando um sistema padrão-ouro disponível, o valor de X_i pode ser determinado sem nenhum erro. Em geral, não dispomos de tal sistema e, portanto, a variável X_i é não observável. Quando o padrão-ouro não está disponível, uma alternativa é realizar r classificações repetidas do i -ésimo item utilizando um sistema de medição binária. Assim, é necessário definir outra variável aleatória, Y_{ij} , para indicar o resultado da j -ésima classificação realizada no i -ésimo item pelo BMS, tal que

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ passa na } j\text{-ésima classificação,} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, r. \quad (2.2)$$

O objetivo num estudo de avaliação de um BMS é estimar as propriedades estatísticas que caracterizam tal sistema, dadas pelo risco do produtor (e_1) e risco do consumidor (e_2). Tais medidas correspondem à variabilidade devido ao processo de inspeção e são definidas pela probabilidade condicional de Y_{ij} dado X_i . Assim, os riscos e_1 e e_2 são dados por:

$$\begin{aligned} e_1 &= P(Y_{ij} = 0 | X_i = 1), \\ e_2 &= P(Y_{ij} = 1 | X_i = 0). \end{aligned}$$

Estas medidas representam os erros de classificação, onde $e_1 \in (0, 1)$ é a probabilidade condicional de um item conforme falhar na inspeção e $e_2 \in (0, 1)$ é a probabilidade condicional de um item não conforme passar na inspeção. Observe que $1 - e_1$ representa a probabilidade de um item conforme passar na inspeção com o BMS.

Uma vez que o padrão-ouro não está disponível, o valor de X_i é desconhecido, isto é, o verdadeiro estado do i -ésimo item não é perceptível, $i = 1, \dots, n$, o que torna interessante estimar a proporção de itens conformes na fabricação, p , conhecida como *taxa de conformidade*. É importante notar que p caracteriza somente o processo de fabricação e é definida por:

$$p = P(X_i = 1).$$

A partir das medidas (p, e_1, e_2) é possível definir outras medidas que caracterizam tanto o processo de fabricação quanto a inspeção realizada pelo BMS, como, por exemplo:

$$\begin{aligned} \pi_p = P(Y_{ij} = 1) &= P(Y_{ij} = 1 | X_i = 1)P(X_i = 1) + P(Y_{ij} = 1 | X_i = 0)P(X_i = 0) \\ &= (1 - e_1)p + e_2(1 - p), \end{aligned}$$

onde $\pi_p \in (0, 1)$, conhecida como *taxa de aprovação*, representa a probabilidade de qualquer item selecionado aleatoriamente passar na inspeção com o BMS. Observe que π_p depende tanto do processo de fabricação quanto da inspeção realizada pelo sistema e, portanto, sua estimativa não está relacionada somente ao parâmetro de interesse p , que depende apenas do processo de fabricação.

Bross (1954) mostrou que, quando os erros de classificação estão presentes, os estimadores de p , e_1 e e_2 obtidos por abordagens clássicas são viesados. Outros autores, como Johnson et al. (1991), Greenberg & Stokes (1995), Fujisawa & Izume (2000), Gustafson (2003) e Kukush et al. (2004), por exemplo, apontaram que se os erros forem ignorados, então o procedimento inferencial pode ser prejudicado, afetando todo o processo de controle de qualidade.

A Figura 2.1 apresenta uma ilustração de um problema de classificação utilizando um sistema de inspeção dicotômico. Observe que o problema pode ser ilustrado num simples diagrama de árvore, ou *árvore de possibilidades*, pois representa as possibilidades da combinação entre o verdadeiro estado do item ($X_i = x_i$) e o resultado da inspeção com o BMS ($Y_{ij} = y_{ij}$), com $x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}$.

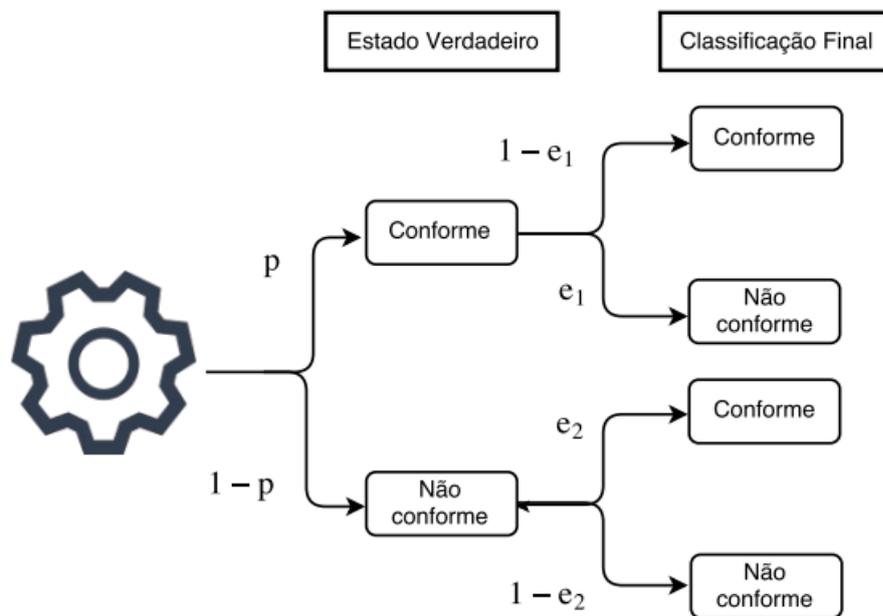


Figura 2.1: Ilustração do problema de inspeção com o BMS.

Considerando um processo com n itens fabricados e r classificações independentes de cada item realizadas pelo BMS, é possível obter a seguinte estrutura de dados:

Item	Classificações					$C_i = \sum_{j=1}^r Y_{ij}$
	1	2	3	...	r	
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	...	Y_{1r}	C_1
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	...	Y_{2r}	C_2
3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	...	Y_{3r}	C_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
n	Y_{n1}	Y_{n2}	Y_{n3}	...	Y_{nr}	C_n

Tabela 2.1: n itens classificados r vezes.

A variável Y_{ij} representa a j -ésima classificação realizada pelo BMS no i -ésimo item, ou seja, $Y_{23} = 1$ significa que o segundo item foi classificado como conforme na terceira classificação. Dado que o verdadeiro estado do i -ésimo item é conforme ($X_i = 1$), Y_{ij} tem distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso $1 - e_1$, caso contrário ($X_i = 0$), Y_{ij} pode ser vista como uma Bernoulli com probabilidade de sucesso e_2 . A variável $C_i = \sum_{j=1}^r Y_{ij}$ representa o número total de vezes que o i -ésimo item é classificado como conforme pelo BMS, onde $C_i \in \{0, 1, \dots, r\}$, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, r$. Em um problema com $r = 3$, por exemplo, $C_2 = 2$ indica que o segundo item foi classificado duas vezes como conforme e uma vez como não conforme durante a inspeção.

Para conduzir a avaliação do BMS quando o sistema padrão-ouro não está disponível serão abordados os seguintes passos:

1. selecionar uma amostra de n itens provenientes do processo de fabricação;
2. classificar cada item amostrado r vezes utilizando o BMS;
3. registrar o número total de vezes que cada item passa na inspeção, C_1, \dots, C_n .

Boyles (2001) descreveu a avaliação de um BMS onde, nas configurações do seu experimento, um único sistema classifica cada item múltiplas vezes. Boyles utilizou um modelo de classe latente para modelar os resultados do experimento e apresentou os estimadores de máxima verossimilhança para (p, e_1, e_2) . Esta classe de modelos descreve experimentos com

resultados categóricos e assume uma variável categórica não observável (estado de cada item) para explicar a estrutura nos dados observados.

Além de Boyles, [Danila et al. \(2009, 2012\)](#) empregaram um modelo de classe latente e utilizaram o método de máxima verossimilhança para obter as estimativas dos parâmetros. [Van Wieringen & De Mast \(2008\)](#) realizaram um estudo comparativo abordando os métodos de máxima verossimilhança e dos momentos.

O número total de vezes que o i -ésimo item é classificado como conforme, C_i , pode ser visto como uma mistura de duas distribuições binomiais. [Blischke \(1962, 1964\)](#) apresentou os estimadores de momentos para (p, e_1, e_2) e mostrou que, quando $r = 3$, são equivalentes aos de máxima verossimilhança. [Quinino et al. \(2013\)](#) apresentaram os estimadores obtidos pelo método da maioria simples, bem como suas propriedades assintóticas, e realizaram um estudo de simulação, comparando-os aos de máxima verossimilhança e de momentos. Considerando o erro quadrático médio, os autores sugeriram o método da maioria simples como competitivo para estimar os parâmetros p, e_1 e e_2 .

Este trabalho apresenta uma abordagem de estimação alternativa denominada de *mínimo qui-quadrado*. Este método tem sido pouco discutido nos textos quando o foco principal é estimação de parâmetros, porém, alguns autores como [Berkson \(1980\)](#), [Taylor et al. \(1953\)](#) e [Neyman \(1949\)](#) têm defendido o uso do mínimo qui-quadrado, principalmente para os casos onde dispõe-se de um tamanho de amostra relativamente pequeno. [Taylor et al. \(1953\)](#) ressaltaram que o mínimo qui-quadrado é um método simples de implementar computacionalmente.

2.2 Modelo de Mistura de Duas Distribuições Binomiais

Para realizar uma avaliação do desempenho de um BMS quando o sistema padrão-ouro não está disponível, uma abordagem usual consiste em classificar cada item r vezes e, dadas as classificações repetidas, considerar um modelo de classe latente para modelar o número de vezes que os itens são classificados como conforme. Neste trabalho, o modelo considerado é definido como uma mistura de duas distribuições binomiais.

Seja C_1, \dots, C_n uma amostra aleatória, onde C_i denota o número total de vezes que o i -ésimo item foi classificado como conforme, tal que C_i ($i = 1, \dots, n$) tem função de probabilidade dada

por uma mistura de r binomiais:

$$P(c_i; \mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^r p_j P_j(c_i; \theta_j), \quad (2.3)$$

em que

$$P_j(c_i; \theta_j) = \binom{r}{c_i} \theta_j^{c_i} (1 - \theta_j)^{r-c_i},$$

com $c_i = \{0, 1, \dots, r\}$, $0 < \theta_j < 1$ e $0 < p_j < 1$, $\sum_{j=1}^r p_j = 1$, $j = 1, \dots, r$. Aqui, os parâmetros θ_j e p_j representam a probabilidade de sucesso e peso da j -ésima componente, respectivamente. Portanto, a função de probabilidade dada em (2.3) representa uma mistura de r distribuições binomiais com $2r - 1$ parâmetros, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$, cujo interesse é estimá-los. Porém, antes de realizar alguma abordagem de estimação, é importante verificar as condições de identificabilidade do modelo de mistura de distribuições binomiais, isto é, se dois conjuntos de valores distintos dos parâmetros não conduzem à mesma distribuição de mistura. A condição necessária para garantir a identificabilidade da mistura é que $r \geq 2m - 1$ (veja [Teicher et al. \(1961\)](#) e [Blischke \(1964\)](#)), onde m representa o número de distribuições binomiais envolvidas na mistura.

Neste problema de avaliação de sistemas de medição binária, temos que $\boldsymbol{\theta} = (1 - e_1, e_2)$ e $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$. Geralmente, são feitas as seguintes suposições:

- (i) a probabilidade de erro e_1 é a mesma para cada item conforme (o mesmo para e_2);
- (ii) medições realizadas em diferentes itens são independentes;
- (iii) dado o valor de X_i , repetidas medições no mesmo item são condicionalmente independentes. Isto é, dado o verdadeiro estado do item, se realizarmos r classificações do mesmo item modelado por Y_{i1}, \dots, Y_{ir} , temos:

$$P(Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{ir} = y_{ir} | X_i = x_i) = \prod_{j=1}^r P(Y_{ij} = y_{ij} | X_i = x_i).$$

Note que a suposição (i) pode não ser razoável em certas situações na prática, pois um item pode ser mais difícil de classificar do que outros.

Considerando essas suposições e dado que o i -ésimo item é conforme, o número total de vezes que este item é classificado como conforme (C_i) tem distribuição condicional dada por:

$$P(C_i = c_i | X_i = 1) = \binom{r}{c_i} (1 - e_1)^{c_i} e_1^{r-c_i}, \quad 0 < e_1 < 1,$$

e dado que o i -ésimo item é não conforme, C_i tem distribuição condicional definida por:

$$P(C_i = c_i | X_i = 0) = \binom{r}{c_i} e_2^{c_i} (1 - e_2)^{r - c_i}, \quad 0 < e_2 < 1.$$

Dada uma amostra aleatória de tamanho n , onde cada item é classificado r vezes como conforme ou não conforme pelo BMS, e empregando as suposições (i), (ii) e (iii), o número total de classificações repetidas que resultam em conforme no i -ésimo item, C_i , pode ser visto como uma mistura de duas distribuições binomiais, com função de probabilidade dada por:

$$\begin{aligned} P(C_i = c_i) &= P(C_i = c_i | X_i = 1)P(X_i = 1) + P(C_i = c_i | X_i = 0)P(X_i = 0) \\ &= p \binom{r}{c_i} (1 - e_1)^{c_i} e_1^{r - c_i} + (1 - p) \binom{r}{c_i} e_2^{c_i} (1 - e_2)^{r - c_i}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $c_i = \sum_{j=1}^r y_{ij}$, $i = 1, \dots, n$ e p e $(1 - p)$ representando os pesos da mistura.

Para que a mistura da Equação (2.4) seja identificável, [Boyles \(2001\)](#) e [van Wieringen & Van Den Heuvel \(2005\)](#) mostraram que devemos assumir $r \geq 3$ e $1 - e_1 > e_2$. Em outras palavras, esta última suposição estabelece que a probabilidade de um item conforme ser classificado como conforme deve ser maior que a probabilidade de um item não conforme ser classificado como conforme. Esta condição é razoável em controle de qualidade, pois, geralmente, é de se esperar que os erros sejam pequenos.

2.3 Estimação

Nesta seção, apresentamos alguns métodos conhecidos na literatura para avaliar um BMS, como o método dos momentos (MM) e máxima verossimilhança (MV), bastante citados em problemas de estimação nos livros textos, e a maioria simples (MS), sugerido por [Quinino et al. \(2013\)](#) para este tipo de problema.

2.3.1 Método dos Momentos

Os estimadores de momentos (MM) para mistura de duas binomiais foram desenvolvidos por [Blischke \(1962\)](#). Sejam C_1, \dots, C_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, onde cada uma segue uma mistura de duas distribuições binomiais. Os estimadores

de momentos para (p, e_1, e_2) são dados por:

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(A^2 - 4AV_1 + 4V_2)^{1/2}, \\ \hat{e}_2 &= \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(A^2 - 4AV_1 + 4V_2)^{1/2}, \\ \hat{p} &= (V_1 - \hat{e}_2)/(\hat{e}_2 - \hat{e}_1),\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde $A = \frac{V_3 - V_1V_2}{V_2 - V_1^2}$ e $V_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{C_i(C_i - 1) \dots (C_i - k + 1)}{r(r-1) \dots (r-k+1)}$, $k = 1, \dots, r$, denota o k -ésimo momento fatorial amostral, em que $C_i = \sum_{j=1}^r Y_{ij}$, $i = 1, \dots, n$.

É interessante notar que, para $r = 3$, as equações em (2.5) são equivalentes às soluções das equações de máxima verossimilhança. Além disso, os estimadores MM são assintoticamente não viesados e eficientes para $r \rightarrow \infty$. Em [Blischke \(1962\)](#) e [Everitt & Hand \(1981\)](#) são apresentados mais detalhes em relação às demonstrações das propriedades assintóticas destes estimadores.

A estimação dos parâmetros de misturas de distribuições binomiais através do método dos momentos (MM) tem sido citada em grande parte dos trabalhos que envolvem tal modelo de mistura, devido às suas características que, em geral, torna a estimação simples e requer menos esforço computacional, em relação a outros métodos de estimação que necessitam de procedimentos iterativos, como o método da máxima verossimilhança. Porém, apesar dos avanços computacionais, que tornaram mais viáveis obter estimativas através de algoritmos mais robustos e precisos, permanece o interesse em empregar os estimadores obtidos pelo MM, uma vez que podem ser extremamente úteis em fornecer valores iniciais para os algoritmos iterativos envolvidos na obtenção de estimativas de máxima verossimilhança, por exemplo ([Everitt & Hand \(1981\)](#)).

2.3.2 Maioria Simples

O método da maioria simples (MS) baseia-se numa solução intuitiva para avaliar os sistemas de medição binária. Uma vez que há r classificações repetidas dos itens realizadas pelo BMS, a maioria simples considera o resultado mais frequente como classificação final, F_i , $i = 1, \dots, n$. Assim, $F_i = 1$ (conforme) se as r classificações repetidas resultarem em maioria conforme, caso contrário, $F_i = 0$ (não conforme). Em caso de empate, é empregada uma geração aleatória entre conforme e não conforme. Este método tem sido utilizado em testes diagnósticos, julgamentos, avaliações de trabalhos escolares, etc., e não tem sido considerado um estimador competitivo

dos parâmetros do modelo de mistura de duas distribuições binomiais (Quinino et al. (2013)). Devido à sua simplicidade, o MS tem sido proposto como um estimador *naive* (ingênuo) e, então, sendo utilizado como valor inicial para os processos iterativos, porém, até o trabalho de Quinino et al. (2013), não havia um estudo na literatura que pudesse comprovar tal ingenuidade deste método.

Podemos definir F_i como sendo uma variável aleatória com distribuição Bernoulli que representa a classificação final do i -ésimo item e depende do número de vezes que este item é julgado como conforme pelo BMS (C_i). Dessa forma, se r é ímpar, F_i pode ser definida como:

$$F_i = \begin{cases} 1, & \text{se, e somente se, } C_i > r/2, \\ 0, & \text{se } C_i < r/2. \end{cases} \quad (2.6)$$

É importante ressaltar que F_i pode apresentar erros de classificação. Como mencionado por Quinino et al. (2013), a perda de informação está diretamente relacionada à eficácia da variável F_i , no sentido de retratar o verdadeiro estado dos itens inspecionados. Assim, é possível construir estimadores para os parâmetros p , e_1 e e_2 de maneira simples com base na classificação final, F_i , $i = 1, \dots, n$. Por exemplo, um estimador para p pode ser dado por:

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i, \quad (2.7)$$

onde \hat{p} representa a proporção de itens classificados como conforme no processo de inspeção.

Uma vez que dispomos da classificação final de cada um dos n itens, é possível decompor a amostra em duas subamostras, uma contendo itens que resultaram em classificação final “conforme” ($F_i = 1$), enquanto que a outra subamostra é formada por itens que apresentaram classificação final “não conforme” ($F_i = 0$). Assim, a estimativa do erro e_2 é dada pela proporção de classificações repetidas “não conforme” na subamostra de itens conformes, dada por:

$$\hat{e}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n C_i(1 - F_i)}{nr - r \sum_{i=1}^n F_i} \quad (2.8)$$

De forma análoga, a partir da subamostra contendo itens não conformes, a estimativa do erro e_1 é dada pela proporção de classificações repetidas que resultaram em “conforme”, denotada como:

$$\hat{e}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n F_i(r - C_i)}{r \sum_{i=1}^n F_i}. \quad (2.9)$$

Quinino et al. (2013) mostraram que os estimadores em (2.7), (2.8) e (2.9) são assintoticamente não viesados e eficientes dos parâmetros p , e_1 e e_2 quando $r \rightarrow \infty$. Note que, assim como os estimadores de momentos, os resultados da maioria simples podem ser obtidos de maneira direta, sem a necessidade de algoritmos iterativos.

2.3.3 Máxima Verossimilhança

Para avaliar um sistema de medição binária, Boyles (2001) apresentou os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros (p, e_1, e_2) e citou a superioridade geral de tais estimadores em relação ao obtido pelo método dos Momentos.

Considere uma amostra aleatória C_1, \dots, C_n , onde C_i dado os parâmetros (p, e_1, e_2) é uma mistura de duas distribuições binomiais ($i = 1, \dots, n$). Então, a função de verossimilhança pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{c}|p, e_1, e_2) &= \prod_{i=1}^n P(Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{ir} = y_{ir}) \\
 &= \prod_{i=1}^n [P(Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{ir} = y_{ir} | X_i = 1)P(X_i = 1) \\
 &\quad + P(Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{ir} = y_{ir} | X_i = 0)P(X_i = 0)] \\
 &= \prod_{i=1}^n \left[\prod_{j=1}^r P(Y_{ij} = y_{ij} | X_i = 1)P(X_i = 1) + \prod_{j=1}^r P(Y_{ij} = y_{ij} | X_i = 0)P(X_i = 0) \right] \\
 &= \prod_{i=1}^n \left[p \prod_{j=1}^r (1 - e_1)^{y_{ij}} e_1^{r - y_{ij}} + (1 - p) \prod_{j=1}^r e_2^{y_{ij}} (1 - e_2)^{1 - y_{ij}} \right] \\
 &= \prod_{i=1}^n \left[p \binom{r}{c_i} (1 - e_1)^{c_i} e_1^{r - c_i} + (1 - p) \binom{r}{c_i} e_2^{c_i} (1 - e_2)^{r - c_i} \right] \\
 &\propto \prod_{i=1}^n [p(1 - e_1)^{c_i} e_1^{r - c_i} + (1 - p)e_2^{c_i} (1 - e_2)^{r - c_i}], \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

e a log-verossimilhança fica dada por:

$$l(\mathbf{c}|p, e_1, e_2) \propto \sum_{i=1}^n \ln [p(1 - e_1)^{c_i} e_1^{r - c_i} + (1 - p)e_2^{c_i} (1 - e_2)^{r - c_i}] \tag{2.11}$$

Assim, obter os estimadores de máxima verossimilhança consiste em encontrar os valores de (p, e_1, e_2) que maximizam a Equação (2.11). Diante da dificuldade de obter tais estimadores de maneira analítica, uma alternativa é empregar algum processo iterativo para solucionar o problema de maximização da função de verossimilhança.

Em [Boyles \(2001\)](#), é implementado o algoritmo EM (do inglês, *Expectation-Maximization*). Porém, esta não é a única opção para maximizar a equação definida em (2.11). Alguns algoritmos de otimização, como Nelder-Mead ou Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), fornecem resultados satisfatórios e tem sido utilizados em problemas de otimização numérica. Além destes, outras abordagens podem ser empregadas, como algoritmos genéticos e *particles-swarm* (enxame de partículas), por exemplo. Aqui, optamos pelo método BFGS com restrições para os valores dos parâmetros.

2.4 Mínimo Qui-Quadrado

Enquanto o teste qui-quadrado de aderência tem uma longa história e ainda permanece em uso, servindo como uma base para outros procedimentos estatísticos, como o teste de log-rank em Análise de Sobrevivência, por exemplo, o estimador de mínimo qui-quadrado é raramente contemplado e tem uma história mais difícil e ignorada. Quando se trata dos procedimentos de estimação, a maioria dos livros texto não apresentam, ou discutem de maneira superficial, o mínimo qui-quadrado. Em geral, são enfatizados os métodos de estimação mais tradicionais como, por exemplo, o da máxima verossimilhança e o método dos momentos.

O método do mínimo qui-quadrado (MQQ) pode ser definido como um método de estimação baseado na comparação de quantidades observadas e seus respectivos valores esperados. O MQQ consiste em minimizar uma determinada função χ^2 para obter a estimativa de interesse. [Berkson \(1980\)](#) definiu uma função χ^2 como qualquer função de frequências observadas e seus valores esperados (ou estimativas dos seus valores esperados) que segue, assintoticamente, uma distribuição qui-quadrado. O número apropriado de graus de liberdade associado à distribuição χ^2 é $\nu = (g - 1 - \text{“número de parâmetros”})$, onde g denota o número de grupos.

Geralmente, o método do mínimo qui-quadrado é utilizado em situações onde os dados estão na forma de frequências de eventos mutuamente excludentes. Sejam $\mathbf{O} = (O_0, O_1, \dots, O_r)$ e $\mathbf{E} = (E_0, E_1, \dots, E_r)$ os vetores de frequências observadas e esperadas, respectivamente. Aqui, O_k representa a frequência observada de itens que apresentam k julgamentos conformes, com

$k \in \{0, 1, \dots, r\}$, e E_k a frequência esperada correspondente a O_k , definida como:

$$\begin{aligned} E_k &= nP(C_i = k|\boldsymbol{\theta}) \\ &= n \left[p \binom{r}{k} (1 - e_1)^k e_1^{r-k} + (1 - p) \binom{r}{k} e_2^k (1 - e_2)^{r-k} \right] \\ &= n \binom{r}{k} \left[p(1 - e_1)^k e_1^{r-k} + (1 - p)e_2^k (1 - e_2)^{r-k} \right], \quad k \in \{0, 1, \dots, r\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Observe que $P(C_i = k|\boldsymbol{\theta})$ representa a probabilidade de uma observação ocorrer na k -ésima categoria, dado o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (p, 1 - e_1, e_2)$, isto é, a probabilidade de um item ser julgado k vezes como conforme. Porém, neste caso, os valores dos parâmetros p , e_1 e e_2 são desconhecidos e, portanto, necessitam ser estimados.

Vale ressaltar que, devido à necessidade de agrupamento dos dados, o MQQ torna-se menos adequado em situações onde os dados são contínuos, porém, pode fornecer resultados satisfatórios. Uma vez que dispomos de r classificações em cada item, onde o resultado é “conforme” ou “não conforme”, é possível realizar um agrupamento sem perda de informação e, portanto, sendo razoável empregar o mínimo qui-quadrado. Na prática, as frequências observadas e seus respectivos valores esperados são apresentados em uma tabela de frequências como segue na Tabela 2.2.

Número de conformes (k)	Observados (O_k)	Esperados (E_k)
0	O_0	E_0
1	O_1	E_1
\vdots	\vdots	\vdots
r	O_r	E_r
Total	n	n_E

Tabela 2.2: Tabela de frequências observadas e esperadas.

Em particular, seja χ_p^2 a função qui-quadrado proposta por Pearson (1900), cuja ideia era testar o ajuste de um modelo através da comparação de frequências observadas e esperadas, definida por:

$$\chi_P^2 = \sum_{k=0}^r \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}, \quad (2.13)$$

onde $O_k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{k=0}^r O_k = n$ e $E_k \geq 0$. A estatística χ_P^2 é uma medida de discrepância entre as frequências observadas e seus valores respectivos esperados. Assim, o método de

estimação do mínimo qui-quadrado torna-se intuitivo, em que o interesse é obter valores para os parâmetros que minimizam a Equação (2.13). Ou seja, $\hat{\theta} = (\hat{p}, 1 - \hat{e}_1, \hat{e}_2)$ será estimador de mínimo qui-quadrado para θ se

$$\sum_{k=0}^r \frac{(O_k - \hat{E}_k)^2}{\hat{E}_k} \leq \sum_{k=0}^r \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

para todo θ , onde $\hat{E}_k = nP(C_i = k | \hat{\theta})$. De forma geral, temos:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \left[\sum_{k=0}^r \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left[\sum_{k=0}^r \frac{(O_k - nP(C_i = k | \theta_j))^2}{nP(C_i = k | \theta_j)} \right] = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Assim como no método de máxima verossimilhança, a minimização da função qui-quadrado requer a utilização de algoritmos de otimização para obter as estimativas dos parâmetros de interesse. Para isso, consideramos o método BFGS. É importante notar que as frequências observadas são obtidas diretamente da amostra, enquanto que as frequências esperadas dependem das estimativas de (p, e_1, e_2) , que são obtidas a partir da amostra.

Apesar de a estatística de Pearson ser frequentemente utilizada em diversas aplicações e para objetivos diferentes na Estatística, existem outras funções qui-quadrado na literatura que podem ser utilizadas para obter as estimativas dos parâmetros de interesse. [Berkson \(1980\)](#) apresentou alguns exemplos de estatísticas qui-quadrado, como:

- **χ^2 de Neyman:** [Neyman \(1949\)](#) propôs uma modificação da função χ_p^2 e mostrou que as estimativas de mínimo qui-quadrado podem ser obtidas minimizando a função:

$$\chi_N^2 = \sum_{k=0}^r \frac{(O_k - E_k)^2}{O_k}. \quad (2.14)$$

Basicamente, a diferença entre as estatísticas χ^2 de Neyman e Pearson está no denominador. O denominador da estatística de Neyman depende apenas de valores observados, o que torna a minimização mais fácil.

- **χ^2 logito:** [Berkson \(1944\)](#) apresentou um estimador para um modelo de regressão logístico dicotômico, que ficou conhecido como estimador de *mínimo qui-quadrado logito de Berkson* e é obtido minimizando a função χ_l^2 , dada por:

$$\chi_l^2 = \sum_{k=0}^r np_k q_k (\lg p_k - \lg P_k)^2, \quad (2.15)$$

onde n representa o número de observações, $p_k = 1 - q_k = O_k/n$, $P_k = 1 - Q_k = E_k/n$, $\text{lgt}p_k = \ln(p_k/q_k)$, $\text{lgt}P_k = \ln(P_k/Q_k)$. A Equação (2.15) pode ser reescrita como:

$$\chi_I^2 = \sum_{k=0}^r \frac{O_k(n - O_k)}{n} \left[\ln \left(\frac{O_k}{n - O_k} \right) - \ln \left(\frac{E_k}{n - E_k} \right) \right].$$

Taylor et al. (1953) mostraram que o estimador resultante da minimização de (2.15) tem distribuição assintoticamente normal, assim como a máxima verossimilhança, quando o número de observações tende ao infinito. Posteriormente, Berkson (1955) avaliou o erro quadrático médio exato dos estimadores de mínimo qui-quadrado e máxima verossimilhança, observando que o erro quadrático médio do estimador de MQQ foi menor em todos os casos considerados.

- **χ^2 verossimilhança:** a estatística χ_λ^2 tem motivação na razão de verossimilhança para comparar as frequências observadas e esperadas, sendo expressa como:

$$\chi_\lambda^2 = 2 \sum_{k=0}^r O_k \ln \left(\frac{O_k}{E_k} \right). \quad (2.16)$$

A minimização de χ_λ^2 leva às mesmas estimativas obtidas pelo método de MV. Berkson (1980) argumentou que, uma vez que o MV pode ser derivado como uma estimativa de mínimo qui-quadrado, o método do mínimo qui-quadrado é o princípio da estimação. Fisher (1924) notou que χ_λ^2 é assintoticamente equivalente à estatística χ^2 de Pearson.

- **χ^2 da informação discriminativa de Kullback:** a informação discriminativa de Kullback, χ_I^2 , é baseada na divergência de Kullback-Leibler, $D_{KL}(\cdot \parallel \cdot)$, também conhecida como *entropia relativa*, que foi introduzida por Kullback & Leibler (1951) como uma medida de discrepância entre O_k e E_k , e definida como:

$$\chi_I^2 = 2 \times D_{KL}(\mathbf{E} \parallel \mathbf{O}) = 2 \sum_{k=0}^r E_k \ln \left(\frac{E_k}{O_k} \right). \quad (2.17)$$

Apesar da medida de Kullback e Leibler ser uma divergência, pode ser vista também como uma informação perdida ao tentar aproximar as frequências observadas, O_0, O_1, \dots, O_r , pelas esperadas, E_0, E_1, \dots, E_r . A ideia básica é buscar uma aproximação entre tais frequências de maneira que seja perdida pouca informação, isto é equivalente a minimizar a Equação (2.17).

Além desta citadas por Berkson, na literatura, existem ainda outras funções χ^2 alternativas que podem ser empregadas no procedimento de minimização do MQQ, como por exemplo:

- **χ^2 probito:** a função qui-quadrado probito baseia-se na função de distribuição acumulada da normal para comparar as frequências observadas e esperadas. Seja χ_B^2 dada por:

$$\chi_B^2 = \sum_{k=0}^k \frac{n}{p_k q_k} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[\Phi^{-1}(p_k)]^2} \right]^2 [\Phi^{-1}(p_k) - \Phi^{-1}(P_k)]^2, \quad (2.18)$$

onde p_k , q_k e P_k são definidos como na função χ_I^2 . A função Φ representa a função de distribuição acumulada da normal padrão e, sua inversa, Φ^{-1} , é denominada função *probit* cuja expressão é definida como:

$$\Phi^{-1}(p) = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2p - 1), \quad 0 < p < 1,$$

onde $\operatorname{erf}^{-1}(\cdot)$ é o inverso da *função erro*, que possui a seguinte forma:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- **χ^2 de Hellinger:** a estatística χ_H^2 é conhecida como χ^2 de Hellinger porque é definida em função da distância de Hellinger, sendo expressa como:

$$\chi_H^2 = 4n \sum_{k=0}^r (\sqrt{O_k/n} - \sqrt{E_k})^2. \quad (2.19)$$

- **Divergência de Potência (P-D):** a família de estatísticas de divergência de potência (P-D, do inglês *power-divergence*) foi proposta por [Cressie & Read \(1984\)](#) para avaliar qualidade de ajuste e é definida como:

$$P-D = \frac{2}{\lambda(\lambda + 1)} \sum_{k=0}^r O_k \left[\left(\frac{O_k}{E_k} \right)^\lambda - 1 \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Uma das vantagens da família P-D é a flexibilidade que a equação definida em (2.20) possui devido ao parâmetro de tunagem λ . Por exemplo, quando $\lambda = 1$, a Equação (2.20) é equivalente à χ_P^2 (Pearson); $\lambda \rightarrow 0$ equivale à χ_λ^2 (verossimilhança); para $\lambda \rightarrow -1$, à χ_I^2 (informação discriminativa de Kullback); e para $\lambda = -2$, à estatística χ_N^2 (Neyman). A função χ^2 de Cressie e Read pode ser obtida fazendo $\lambda = 2/3$, que resulta na seguinte estatística:

$$\chi_{CR}^2 = \frac{9}{5} \sum_{k=0}^r O_k \left[\left(\frac{O_k}{E_k} \right)^{2/3} - 1 \right]. \quad (2.21)$$

Embora não exista nenhum critério para a escolha da melhor função χ^2 , a estatística χ^2_λ é interessante, pois fornece estimativas que coincidem com as obtidas pelo método de máxima verossimilhança. Assim, ao minimizar χ^2_λ , o MQQ produz estimativas de máxima verossimilhança e, ao minimizar qualquer outra função qui-quadrado, produz estimativas assintoticamente equivalentes. É importante citar que não há uma demonstração matemática de que existe algum método de estimação que assegure que a estimativa obtida seja a melhor em todas as circunstâncias.

2.5 Discussão sobre o Mínimo Qui-Quadrado

O método de mínimo qui-quadrado foi bastante discutido por Berkson, em 1980, no seu artigo "*Minimum Chi-Squared, not Maximum Likelihood!*", sendo este, talvez, o principal texto relacionado a este método. Berkson questiona a soberania da máxima verossimilhança, defendendo que o método MQQ pode ser superior e com erro quadrático médio menor. Além disso, ele comenta que o estimador de mínimo qui-quadrado possui as mesmas propriedades assintóticas presentes no estimador de máxima verossimilhança. Porém, Berkson argumenta que os resultados assintóticos não são tudo. Para ele, “a Estatística é uma ciência aplicada e que lida com amostras finitas, onde os teoremas assintóticos estão relacionados a limites que, por definição, nunca são atingidos”. Berkson cita que, em algumas situações, as estimativas de máxima verossimilhança podem não existir, enquanto que as de MQQ sempre existem.

Como esperado, o artigo de Berkson (1980) gerou uma discussão que envolveu grandes especialistas como Bradley Efron (Stanford University), J. K. Gosh (Indian Statistical Institute), L. Le Cam (University of California, Berkeley), Johann Pfanzagl (University of Cologne) e C. Radhakrishna Rao (Indian Statistical Institute). Essencialmente, os convidados tendem a concordar com Berkson, exceto Rao. Efron ressalta que o mínimo qui-quadrado é natural no caso discreto, porém, pode apresentar problemas no caso contínuo devido à necessidade de agrupamentos impostos aos dados. Gosh argumenta que as estimativas de MQQ podem estar bem adequadas para análises de dados onde se conhece muito pouco sobre o fenômeno em estudo. Le Cam cita que, há algum tempo, as estimativas de MV nem sempre são as melhores.

No entanto, Rao defende a importância das propriedades assintóticas, argumentando que as declarações feitas por Berkson são “enganosas” e que ele enfatiza alguns princípios inaceitáveis em todas as situações, como por exemplo, a consistência e a minimização do erro quadrático médio. Numa visão geral de aplicabilidade do método de máxima verossimilhança, Rao cita suas propriedades assintóticas em grandes amostras e superioridade em amostras pequenas presentes em várias situações, porém, não exemplifica o que poderia ajudar em casos de amostras “pequenas” ou finitas. Para Rao, um melhor título seria “*Maximum Likelihood, sometimes Minimum Chi-Square*”.

Infelizmente, Berkson faleceu em 1982, o que impossibilitou a evolução dessa discussão. Nos últimos anos, pouco se discutiu sobre o método de estimação mínimo qui-quadrado, principalmente quando o foco é estimar quantidades desconhecidas. Porém, os comentários realizados por Berkson permanecem estimulantes para alguns pesquisadores em problemas de es-

timação e motivou trabalhos na literatura a investigar o desempenho do mínimo qui-quadrado, como [Harris & Kanji \(1983\)](#), [Kominek \(2002\)](#), [Barbiero \(2017\)](#), por exemplo.

Capítulo 3

Estudo de Simulação

Neste capítulo, estão apresentados a descrição do estudo de simulação Monte Carlo e os resultados obtidos, a fim de investigar a performance do estimador de mínimo qui-quadrado considerando as funções χ^2 alternativas apresentadas no Capítulo 2.

3.1 Descrição do Estudo de Simulação Monte Carlo

Para comparar o desempenho do estimador mínimo qui-quadrado (MQQ) com o de momentos (MM), maioria simples (MS) e máxima verossimilhança (MV), foi realizado um estudo de simulação Monte Carlo. O estudo foi conduzido em 162 cenários resultantes das combinações dos níveis: número de classificações repetidas $r = (3, 5, 7)$, quantidade de itens $n = (50, 100)$, os parâmetros $e_1 = (0.05, 0.1, 0.15)$, $e_2 = (0.05, 0.1, 0.15)$ e $p = (0.7, 0.8, 0.9)$. Os valores dos parâmetros foram definidos a fim de representar problemas reais nos casos onde o tamanho da amostra é relativamente pequeno (finito). Para cada cenário, fixamos o número de corridas igual a 3 mil.

As Tabelas 1, 2 e 3, do Apêndice A, apresentam um resumo do valor médio, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão (DP) das estimativas de p , e_1 e e_2 obtidas pelos estimadores em cada cenário. O erro quadrático médio das estimativas de p é obtido como $E[(\hat{p} - p)^2] = \sigma^2 + b^2$, onde σ^2 e $b = E[\hat{p}] - p$ representam a variância e o viés de \hat{p} , respectivamente. Este valor pode ser estimado como sendo a média dos 3 mil valores simulados de $(\hat{p} - p)^2$ no estudo de simulação. Para os parâmetros e_1 e e_2 , o EQM pode ser obtido de maneira similar. As simulações foram realizadas no *software* R (R Core Team (2017)).

3.2 Comparação dos Estimadores via Simulação Monte Carlo

A princípio, o desempenho dos estimadores de p , e_1 e e_2 obtidos pelos métodos MM, MS, MV e MQQ foi investigado através de um resumo geral, isto é, considerando todos os cenários e avaliando os valores médios do desvio padrão (DP), viés e EQM. Para o método do mínimo qui-quadrado, foram consideradas as funções χ^2 alternativas dadas no Capítulo 2, exceto a função χ_λ^2 , uma vez que as estimativas geradas são coincidentes com as de máxima verossimilhança. Além disso, foi analisado o comportamento dos EQM's dos estimadores quando o número de classificações repetidas foi igual a 3, 5 e 7.

Os resultados corroboram o fato de que as estimativas obtidas pelos métodos dos momentos coincidem com as de máxima verossimilhança quando o número de classificações repetidas é igual a três. Além disso, foi possível notar que, ao minimizar qualquer função χ^2 alternativa, os estimadores de mínimo qui-quadrado foram coincidentes com os de momentos e MV quando $r = 3$. Os resultados obtidos pelo MQQ minimizando a função χ_I^2 (informação discriminativa de Kullback) não estão apresentados, pois foram menos satisfatórios do que os demais métodos.

A Tabela 3.1 apresenta um resumo geral das estimativas de p , considerando todos os cenários. O método da maioria simples apresentou menor valor médio do EQM e desvio padrão dentre o demais métodos. No entanto, é possível notar que a MS obteve maior valor médio do viés em comparação ao MQQ minimizando as funções χ_H^2 (Hellinger), χ_I^2 (logito), χ_N^2 (Neyman) e χ_{CR}^2 (Cressie-Read). Minimizando as funções χ_I^2 e χ_{CR}^2 , o estimador de mínimo qui-quadrado apresentou melhor performance em comparação ao MM, se comparados segundo os valores médios do EQM e desvio padrão. Observando o viés, as estimativas do mínimo χ_I^2 apresentaram menor valor médio em relação aos métodos dos momentos, maioria simples e máxima verossimilhança. Diante disso, o estimador de mínimo χ_I^2 é uma boa alternativa para estimar a taxa de conformidade (p), sendo ligeiramente superior ao método dos momentos e competitivo em relação à máxima verossimilhança.

Métodos	Função χ^2	DP	Viés	EQM
MM		0.05256	-0.00622	0.00314
MS		0.04668	-0.01251	0.00277
MV		0.05213	-0.00668	0.00311
	Hellinger	0.05321	-0.01207	0.00334
	logito	0.05246	-0.00581	0.00314
MQQ	Neyman	0.05495	-0.01105	0.00355
	Cressie-Read	0.05214	-0.00948	0.00313
	Pearson	0.05319	-0.01466	0.00339
	probito	0.05296	-0.01311	0.00333

Tabela 3.1: Valores médios do desvio padrão, viés e EQM para p nos cenários simulados.

Em relação ao parâmetro e_1 , todos os estimadores apresentaram valores médios do EQM relativamente próximos, com uma vantagem para o estimador da maioria simples. Os resultados estão presentes na Tabela 3.2. Observando o EQM, os estimadores de mínimo χ_H^2 (Hellinger), χ_l^2 (logito), χ_P^2 (Pearson) e χ_B^2 (probito) foram equivalentes ao método dos momentos. No entanto, o estimador de mínimo χ_{CR}^2 (Cressie-Read) foi ligeiramente superior ao de momentos e competitivo com o de máxima verossimilhança. É interessante observar que os valores médios do viés foram menores para as estimativas de MQQ, exceto quando são minimizadas as funções de logito e de Neyman.

Métodos	Função χ^2	DP	Viés	EQM
MM		0.02177	-0.00319	0.00058
MS		0.01632	-0.00997	0.00052
MV		0.02111	-0.00352	0.00055
	Hellinger	0.02175	-0.00257	0.00058
	logito	0.02188	-0.00420	0.00058
MQQ	Neyman	0.02226	-0.00445	0.00061
	Cressie-Read	0.02131	-0.00213	0.00056
	Pearson	0.02179	-0.00101	0.00058
	probito	0.02191	-0.00194	0.00058

Tabela 3.2: Valores médios do DP, viés e EQM para e_1 nos cenários simulados.

Observando os resultados das estimativas de e_2 , apresentados na Tabela 3.3, é possível notar que o MQQ apresentou resultados mais interessantes em relação às estimativas de p e e_1 . Minimizando a χ^2 logito, o estimador de mínimo qui-quadrado foi superior aos de momentos e de máxima verossimilhança, em relação ao valor médio do EQM. Além disso, o valor médio do viés foi menor para o estimador de mínimo χ^2 , em relação aos métodos de MV e MS. As estimativas de mínimo χ^2_{CR} apresentaram menores valores médios do DP e EQM, em comparação ao método dos momentos, porém com o valor médio do viés maior.

Métodos	Função χ^2	DP	Viés	EQM
MM		0.05763	0.01006	0.00470
MS		0.03625	0.01277	0.00230
MV		0.05562	0.01105	0.00455
	Hellinger	0.05963	0.02159	0.00529
	logito	0.05521	0.01024	0.00449
MQQ	Neyman	0.06328	0.01871	0.00576
	Cressie-Read	0.05595	0.01595	0.00462
	Pearson	0.05858	0.02496	0.00528
	probito	0.05908	0.02420	0.00534

Tabela 3.3: Valores médios dos desvio padrão, viés e EQM para e_2 nos cenários simulados.

Para visualizar o desempenho dos estimadores de p , e_2 e e_1 segundo o erro quadrático médio (EQM), a Figura 3.1 ilustra os valores médios obtido por cada método considerando todos os cenários. É possível notar que, para cada parâmetro, o valor médio do EQM apresentou um comportamento diferente. Para o parâmetro e_2 , houve uma variação maior do EQM médio entre os estimadores, onde o estimador de mínimo χ^2 obteve menor valor médio que os estimadores de momentos e MV. No entanto, a variação do valor médio do EQM diminuiu para p e para e_1 , todos os métodos foram bem próximos. Assim, os estimadores de mínimo χ^2 para p , e_1 e e_2 , podem ser sugeridos como estimadores competitivos em relação aos de momentos e máxima verossimilhança, em relação ao valor médio do EQM.

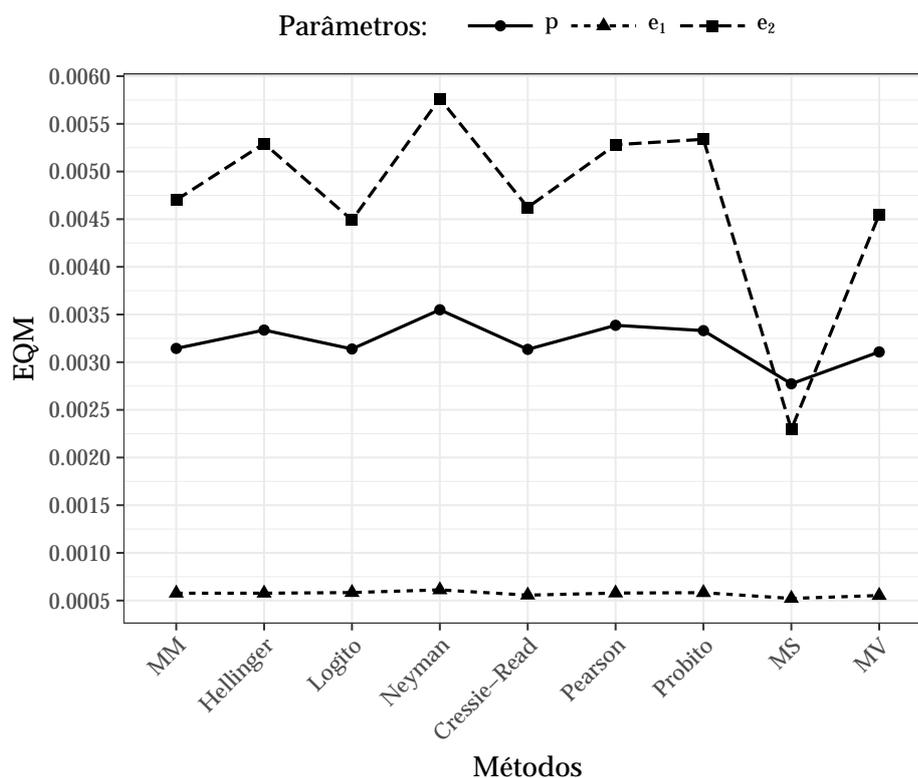


Figura 3.1: Valores médios dos EQM's nos cenários simulados.

A Figura 3.2 apresenta uma ilustração dos valores médios do desvio padrão das estimativas de p , e_2 e e_1 . Claramente, é possível observar que os estimadores obtidos pelo método da maioria simples apresentaram menor DP médio em relação aos de MQQ, MV e de momentos. No entanto, observe que os estimadores de MQQ minimizando as funções χ^2 logito e de Cressie-Read atingiram valores médios do desvio padrão bem próximos aos obtidos pelo método dos momentos e máxima verossimilhança.

Apesar de obter valores médios do desvio padrão e EQM menores, os estimadores da maioria simples apresentaram maior viés em relação ao MM, MV e MQQ utilizando a função logito. De acordo com a Figura 3.3, é possível observar que as estimativas de p e e_1 resultaram em vieses médios negativos. O contrário foi observado para as estimativas de e_2 , onde os vieses médios foram relativamente maiores e positivos. Além disso, as estimativas de e_1 obtiveram um viés pequeno, em geral, exceto para o MS.

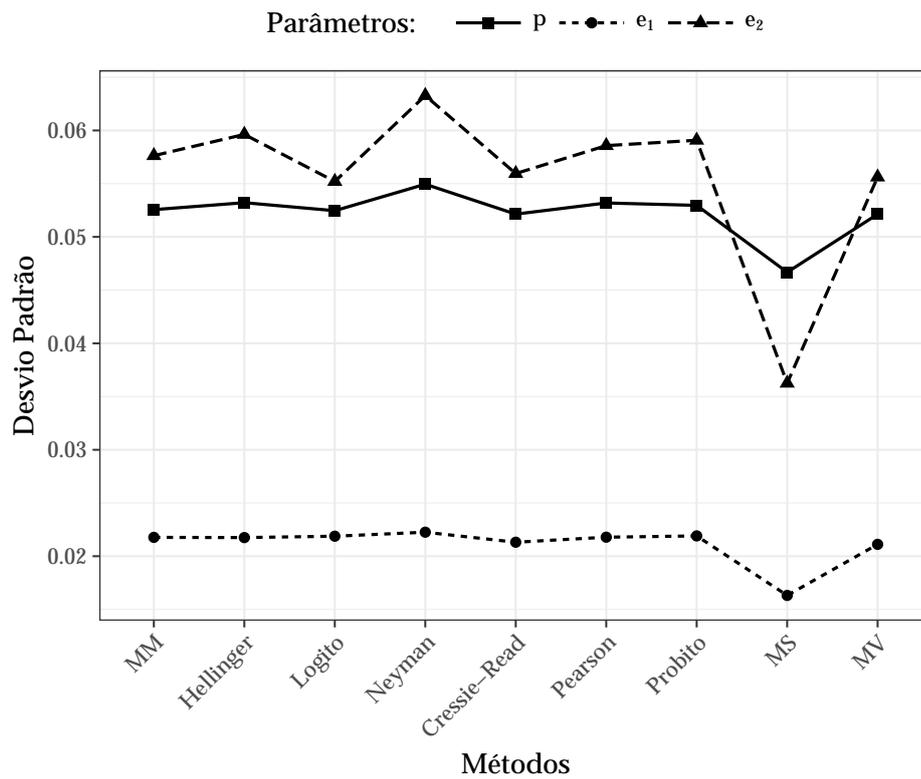


Figura 3.2: Valores médios dos desvios padrões nos cenários simulados.

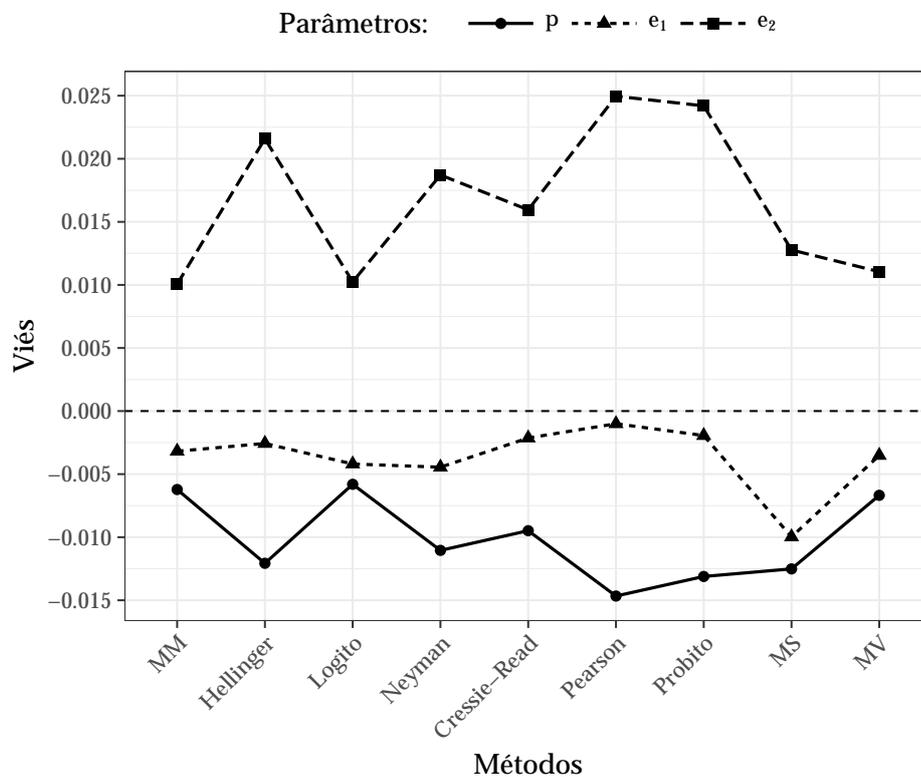


Figura 3.3: Valores médios dos vieses nos cenários simulados.

Através deste estudo comparativo, foi possível observar que estimar o risco do consumidor (e_2) é uma tarefa mais difícil do que estimar o risco do produtor (e_1) e a taxa de conformidade (p). Tal problema em estimar o risco e_2 também foi notado por [Danila et al. \(2013\)](#). Em [Quinino et al. \(2013\)](#), os autores também observaram que as estimativas obtidas pela maioria simples apresentaram maior viés em comparação ao métodos dos momentos. Observando o erro e_1 , os valores médios do viés das estimativas foram maiores para o MS em comparação ao MQQ considerando todas as funções χ^2 alternativas apresentadas. Em relação à taxa de conformidade p , o valor médio do viés absoluto foi menor para a MS em relação ao MQQ minimizando as funções χ^2 probito e Pearson.

No geral, os resultados das estimativas dos parâmetros (p , e_2 , e_1) obtidas pelo mínimo qui-quadrado foram interessantes, pois mostram que o MQQ apresentou um desempenho bastante competitivo em relação aos métodos mais tradicionais na literatura, como o de máxima verossimilhança e dos momentos. Dentre as funções pertencentes à família χ^2 apresentadas no Capítulo 2, a função χ_t^2 apresentou melhores resultados. Minimizando a função χ^2 logito, o MQQ atingiu resultados superiores ao método dos momentos e competitivos em relação aos de máxima verossimilhança, se comparados segundo o EQM. Por outro lado, as funções χ_H^2 (Hellinger), χ_P^2 (Pearson) e χ_B^2 (probit) apresentaram resultados piores.

Outra função χ^2 que apresentou resultados notórios foi a estatística de χ_{CR}^2 (Cressie-Read), pertencente à família de divergências de potência (P-D). A estatística χ_{CR}^2 é obtida através da função P-D (2.20) fazendo o parâmetro de tunagem λ igual a $2/3$. Avaliando segundo o EQM, as estimativas de p e e_1 obtidas pelo mínimo χ_{CR}^2 apresentaram valores médios ligeiramente menores do que os estimadores de momentos.

As figuras 3.4, 3.5 e 3.6 apresentam os *boxplots* dos valores médios do EQM, desvio padrão e viés obtidos nos 162 cenários simulados, respectivamente. Nas figuras 3.4 e 3.5, é possível notar que os EQM's e DP's das estimativas de MM, MQQ e MV têm comportamentos equivalentes e assimétricos em torno do valor médio, indicado pelo símbolo "+". Na Figura 3.6, pode-se notar que o comportamento dos valores médios do viés foi bem assimétrico em torno de zero. Além disso, as estimativas da MS apresentaram uma maior dispersão do viés médio, em comparação aos demais métodos. Apenas os *boxplots* das estimativas de mínimo χ_t^2 e χ_{CR}^2 foram apresentados, pois apresentaram resultados mais interessantes e competitivos aos métodos dos momentos, maioria simples e máxima verossimilhança.

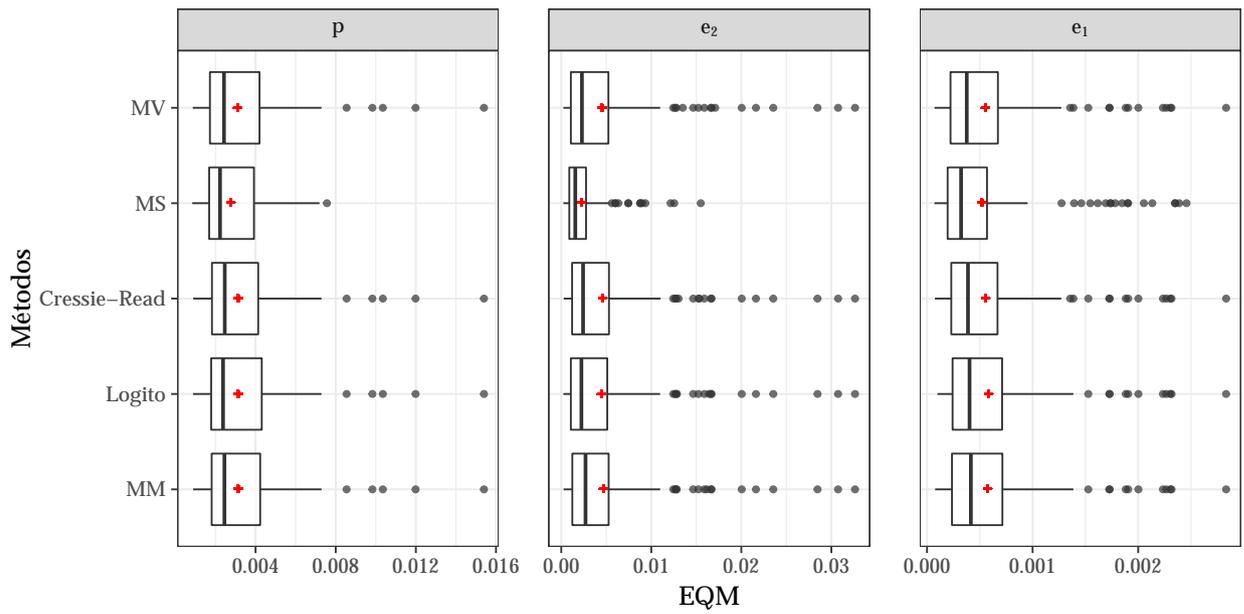


Figura 3.4: *Boxplots* dos EQM's nos cenários simulados.

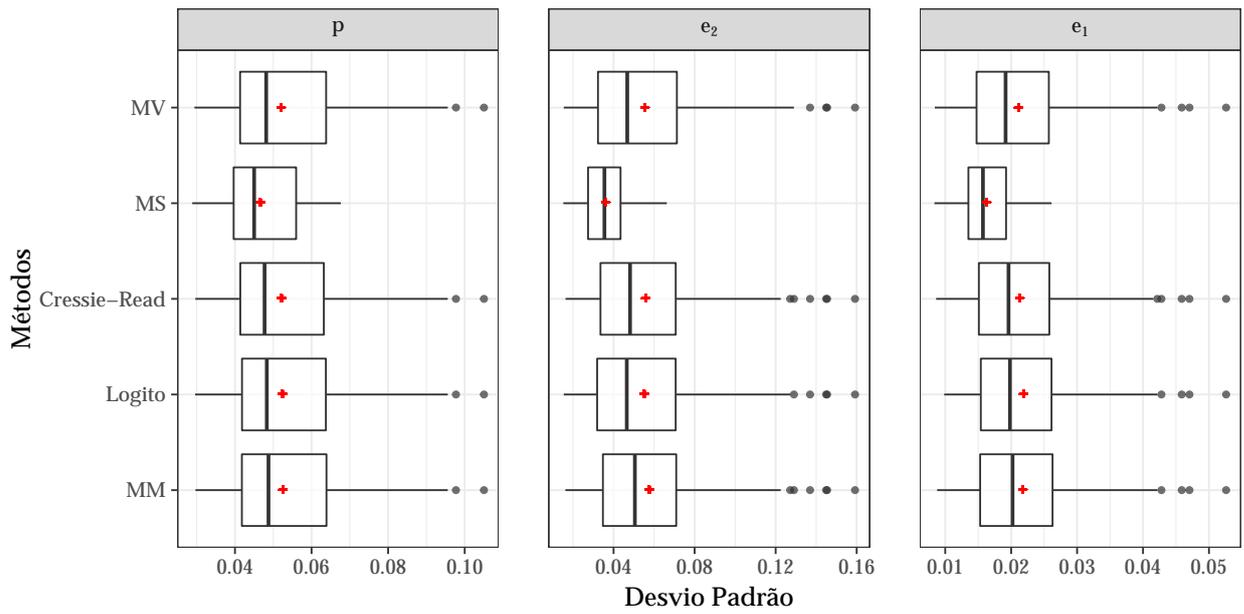


Figura 3.5: *Boxplots* dos desvios padrões nos cenários simulados.

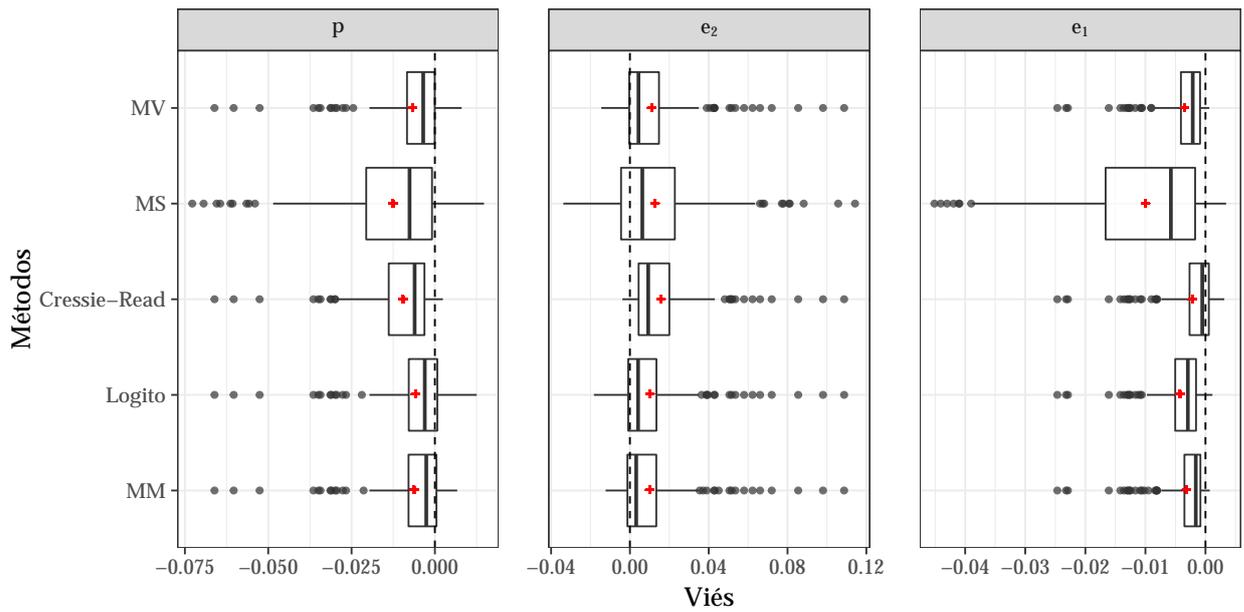


Figura 3.6: *Boxplots* dos vieses nos cenários simulados.

A performance dos estimadores de mínimo qui-quadrado também foi avaliada de acordo com o número de classificações repetidas (r) realizada em cada item. Os resultados apresentados nas tabelas 3.4, 3.5 e 3.6 revelam que todas as funções χ^2 apresentaram resultados equivalentes ao método dos momentos e à máxima verossimilhança quando $r = 3$. Fixando o número de classificações repetidas iguais a 5 e 7, o estimador de mínimo χ_{CR}^2 foi superior ao método dos momentos, segundo o valor médio do EQM. Quando $r = 7$, o estimador de mínimo χ_l^2 foi ligeiramente superior ao MM. A Figura 3.7 ilustra da distribuição dos EQM's à medida que o número de repetições aumenta através dos *boxplots*, onde é possível notar que há uma maior dispersão na distribuição dos EQM's quando $r = 3$. Ainda, quando o número de classificações repetidas aumenta, os valores do EQM tendem a diminuir.

r	θ	MM	MS	MV	MQQ						
					χ_H^2	χ_I^2	χ_N^2	χ_{CR}^2	χ_P^2	χ_B^2	
3	p	0.00435	0.00346	0.00435	0.00435	0.00436	0.00435	0.00435	0.00435	0.00435	0.00435
	e_2	0.00872	0.00303	0.00872	0.00872	0.00872	0.00872	0.00872	0.00872	0.00872	0.00872
	e_1	0.00099	0.00093	0.00099	0.00099	0.00099	0.00099	0.00099	0.00099	0.00099	0.00099
5	p	0.00268	0.00255	0.00264	0.00301	0.00268	0.00343	0.00268	0.00304	0.00301	0.00301
	e_2	0.00355	0.00242	0.00335	0.00444	0.00319	0.00532	0.00342	0.00441	0.00461	0.00461
	e_1	0.00045	0.00039	0.00041	0.00045	0.00048	0.00051	0.00041	0.00044	0.00046	0.00046
7	p	0.00240	0.00232	0.00233	0.00265	0.00237	0.00286	0.00236	0.00276	0.00263	0.00263
	e_2	0.00183	0.00144	0.00157	0.00272	0.00155	0.00325	0.00173	0.00271	0.00268	0.00268
	e_1	0.00029	0.00025	0.00026	0.00029	0.00029	0.00033	0.00027	0.00030	0.00030	0.00030

Tabela 3.4: Valores médios do EQM estratificado pelo número de repetições r .

r	θ	MM	MS	MV	MQQ						
					χ_H^2	χ_I^2	χ_N^2	χ_{CR}^2	χ_P^2	χ_B^2	
3	p	0.06026	0.04705	0.06026	0.06026	0.06031	0.06026	0.06026	0.06026	0.06026	0.06026
	e_2	0.08002	0.03782	0.08002	0.08002	0.08002	0.08002	0.08002	0.08002	0.08002	0.08002
	e_1	0.02883	0.01801	0.02883	0.02883	0.02883	0.02883	0.02883	0.02883	0.02883	0.02883
5	p	0.04994	0.04686	0.04946	0.05133	0.04995	0.05442	0.04955	0.05113	0.05107	0.05107
	e_2	0.05336	0.03788	0.05071	0.05536	0.04968	0.06079	0.05068	0.05375	0.05502	0.05502
	e_1	0.02011	0.01637	0.01907	0.02003	0.02059	0.02079	0.01935	0.02008	0.02033	0.02033
7	p	0.04748	0.04612	0.04668	0.04805	0.04713	0.05016	0.04661	0.04817	0.04756	0.04756
	e_2	0.03952	0.03307	0.03613	0.04351	0.03593	0.04902	0.03715	0.04196	0.04219	0.04219
	e_1	0.01637	0.01457	0.01544	0.01639	0.01621	0.01714	0.01576	0.01644	0.01656	0.01656

Tabela 3.5: Valores médios do desvio padrão estratificado pelo número de repetições r .

r	θ	MM	MS	MV	MQQ						
					χ_H^2	χ_I^2	χ_N^2	χ_{CR}^2	χ_P^2	χ_B^2	
3	p	-0.01509	-0.02475	-0.01509	-0.01509	-0.01511	-0.01509	-0.01509	-0.01509	-0.01509	-0.01509
	e_2	0.02456	0.01941	0.02456	0.02456	0.02456	0.02456	0.02456	0.02456	0.02456	0.02456
	e_1	-0.00598	-0.01925	-0.00598	-0.00598	-0.00598	-0.00598	-0.00598	-0.00598	-0.00598	-0.00598
5	p	-0.00224	-0.00842	-0.00311	-0.01013	-0.00140	-0.00931	-0.00656	-0.01348	-0.01157	
	e_2	0.00535	0.01317	0.00720	0.02188	0.00544	0.01796	0.01406	0.02713	0.02633	
	e_1	-0.00260	-0.00753	-0.00311	-0.00200	-0.00404	-0.00467	-0.00141	-0.00012	-0.00146	
7	p	-0.00132	-0.00437	-0.00184	-0.01099	-0.00091	-0.00873	-0.00680	-0.01542	-0.01268	
	e_2	0.00028	0.00573	0.00138	0.01832	0.00073	0.01363	0.00924	0.02319	0.02169	
	e_1	-0.00098	-0.00314	-0.00146	0.00028	-0.00256	-0.00270	0.00099	0.00308	0.00162	

Tabela 3.6: Valores médios do viés estratificado pelo número de repetições r .

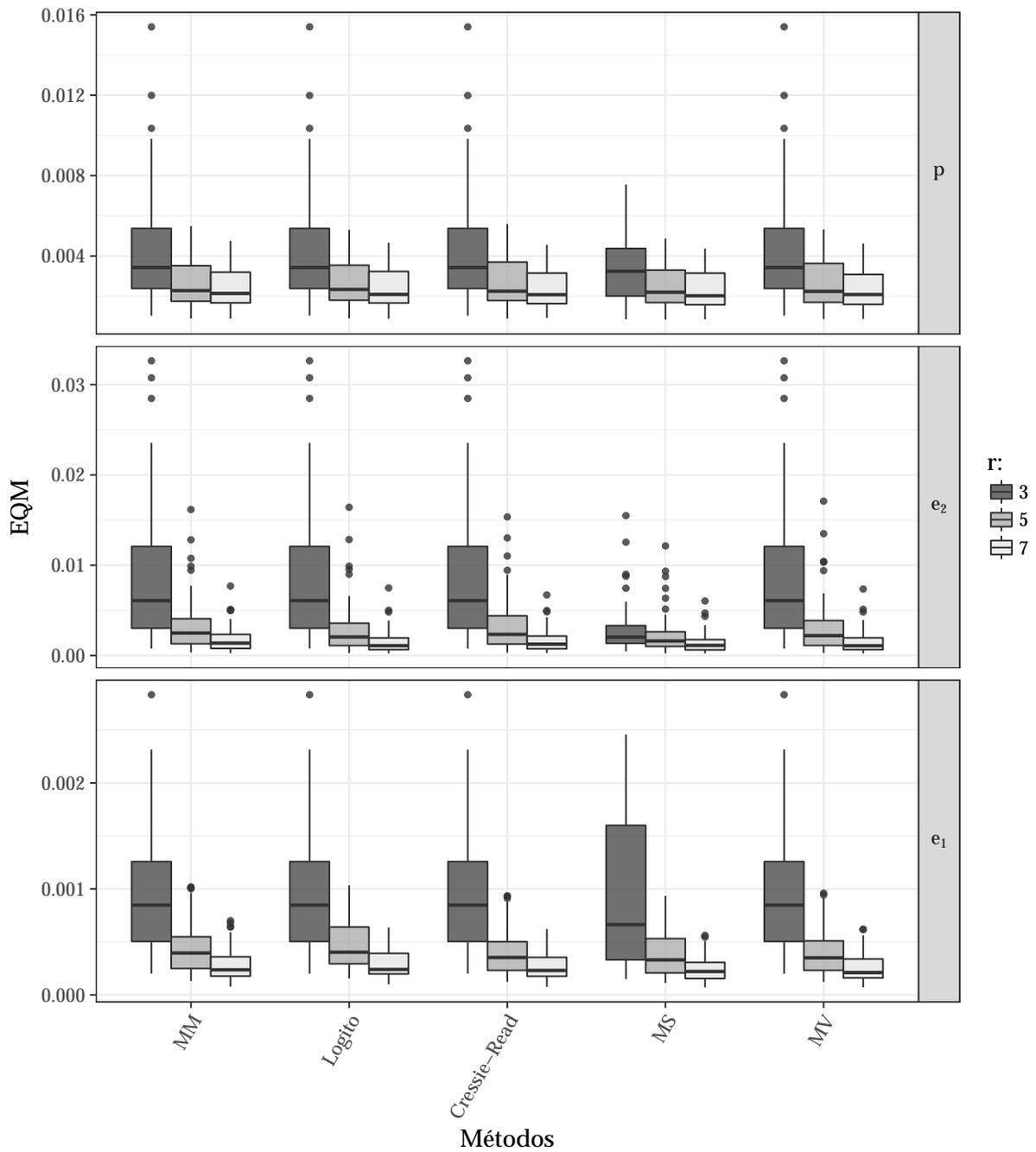


Figura 3.7: *Boxplots* dos valores médios do EQM estratificado pelo número de repetições.

Capítulo 4

Exemplo de Aplicação

Neste capítulo, pretendemos apresentar ao leitor como empregar o processo de inferência discutido nesta dissertação, de forma efetiva, para avaliação do sistema de classificação dicotômico. Os trabalhos de [Quinino et al. \(2013\)](#), de [Morais et al. \(2017a, 2017b\)](#) discutiram o processo de inferência de p , e_1 e e_2 , mas não avaliaram a efetiva realização de testes de hipóteses.

Suponha que uma empresa de azulejos deseja avaliar a eficiência de um sistema de medição. A característica de qualidade observada pelo processo de inspeção é a cor do azulejo. Assim, cada um dos azulejos amostrados são classificados como “conforme” ou “não conforme”. A empresa considera um sistema de classificação eficiente e apresenta $e_1 \leq 0.05$ e $e_2 \leq 0.1$. Além disso, espera-se que a taxa de conformidade dos azulejos seja superior a 80%. Então, foi extraída uma amostra de 150 azulejos, em que cada azulejo foi classificado 5 vezes pelo sistema de classificação, de forma independente. Os resultados obtidos estão descritos na Tabela 4.1.

Número de conformes nas classificações repetidas	Observados
0	13
1	19
2	8
3	7
4	28
5	75
Total	150

Tabela 4.1: Cinco classificações repetidas de 150 azulejos.

Efetivamente, estamos interessados em testar as seguintes hipóteses:

$$(I) \begin{cases} H_0 : e_1 \leq 0.05 \\ H_1 : e_1 > 0.05 \end{cases}, \quad (II) \begin{cases} H_0 : e_2 \leq 0.1 \\ H_1 : e_2 > 0.1 \end{cases}, \quad (III) \begin{cases} H_0 : p > 0.8 \\ H_1 : p \leq 0.8 \end{cases}.$$

Primeiramente, é importante citar que todas as estimativas de mínimo qui-quadrado atingiram resultados satisfatórios, em relação às discrepâncias entre as frequências observadas (O_k) e esperadas (E_k). A estatística χ^2_I obteve menor discrepância em comparação às demais estatísticas χ^2 . A Tabela 4.2 apresenta as estimativas das frequências esperadas que minimizam a estatística χ^2_I .

Número de conformes nas classificações repetidas (k)	Observado (O_k)	Esperado (E_k)
0	13	13.7752
1	19	17.3564
2	8	9.0676
3	7	6.5541
4	28	28.7519
5	75	74.4948
Total	150	150.0000

Tabela 4.2: Inspeção de azulejos - Estimativas de mínimo χ^2_I dos valores esperados.

A estimativa de mínimo χ^2_I da taxa de conformidade foi $\hat{p} = 0.7177$, que foi abaixo do valor esperado pela empresa. Para os erros de classificação (riscos do produtor e consumidor), as estimativas foram $\hat{e}_1 = 0.0710$ e $\hat{e}_2 = 0.2012$, respectivamente, que estão acima dos valores apresentados pela empresa. Vale ressaltar que tais estimativas são os valores que minimizam a estatística χ^2_I , cujo valor foi igual a 0.1683.

Para testar as hipóteses, empregamos a técnica de reamostragem *bootstrap*, proposta por Efron (1979). Assim, considerando as estimativas de mínimo χ^2_I para p , e_1 e e_2 , fixamos o número de amostras *bootstrap* (B) igual a 10000 e, em cada amostra, foram computadas as estimativas *bootstrap* (p^* , e_1^* , e_2^*). Assim, se desejamos testar as hipóteses $H_0 : p > 0.8$ versus $H_1 : p \leq 0.8$ com 95% de confiança, temos os seguintes passos:

1. considerar as estimativas $\hat{p} = 0.7177$, $\hat{e}_1 = 0.0710$, $\hat{e}_2 = 0.2012$ obtidas pelo mínimo χ^2_I ;
2. realizar o processo de reamostragem *bootstrap* supondo que H_0 é verdadeira, ou seja,

fixamos $e_1 = \hat{e}_1$, $e_2 = \hat{e}_2$ e $p = 0.8$, e obter a distribuição das estimativas *bootstrap* de p sob a hipótese nula;

3. encontrar o percentil 95%, $p_{(0.95)}^*$, da distribuição obtida em (2). Se $\hat{p} < p_{(0.95)}^*$, então rejeitamos H_0 , caso contrário, não rejeitamos.

Com isso, a região crítica (RC) para \hat{p} pode ser dada por:

$$RC_{\hat{p}} = \{\hat{p} \leq p_{(0.95)}^*\},$$

onde $p_{(0.95)}^*$ representa o valor da estimativa *bootstrap* correspondente ao percentil 95%. Portanto, rejeitamos H_0 se \hat{p} for menor ou igual a $p_{0.95}^*$, caso contrário, não rejeitamos. A mesma ideia é utilizada para \hat{e}_1 e \hat{e}_2 . No entanto, para o teste (I), rejeitamos H_0 se \hat{e}_1 for maior que $\hat{e}_{1;(0.95)}^*$ e, para o teste (II), se \hat{e}_2 for maior que $\hat{e}_{2;(0.95)}^*$. Ou seja,

$$RC_{\hat{e}_1} = \{\hat{e}_1 > \hat{e}_{1;(0.95)}^*\};$$

$$RC_{\hat{e}_2} = \{\hat{e}_2 > \hat{e}_{2;(0.95)}^*\}.$$

Além disso, é possível computar os P-valores para cada teste. Por exemplo, para o teste (III), se desejamos rejeitar H_0 quando \hat{p} estiver na cauda inferior, o P-valor *bootstrap*, $\hat{P}_{boot}(p)$, pode ser dado por:

$$\hat{P}_{boot}(p) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B I(p_j^* \leq \hat{p}),$$

onde $I(\cdot)$ denota a função indicadora, que assume 1 quando seu argumento é satisfeito e zero, caso contrário. Observe que, $\hat{P}_{boot}(p)$ representa a proporção de estimativas p_{boot}^* menores que \hat{p} . Assim, com base nas estimativas destes P-valores, rejeitamos H_0 se $\hat{P}(p)_{boot} < \alpha$, onde α é um nível de significância fixado. Como estamos interessados em testar as hipóteses com 95% de confiança, temos que $\alpha = 5\%$. A mesma ideia é utilizada para os testes (I) e (II), porém, desejamos rejeitar H_0 quando \hat{e}_1 e \hat{e}_2 estiverem na cauda superior. Sendo assim, temos que:

$$\hat{P}_{boot}(e_1) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B I(e_{1j}^* > \hat{e}_1)$$

e

$$\hat{P}_{boot}(e_2) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B I(e_{2j}^* > \hat{e}_2).$$

A Tabela 4.3 apresenta os valores médios e erros padrões das estimativas *bootstrap* \hat{p}^* , \hat{e}_1^* e \hat{e}_2^* , bem como os percentis (0.05; 0.95) destas estimativas e os P-valores para os testes definidos em (I), (II) e (III).

$\hat{\theta}^*$	Média	Erro Padrão	$(\hat{\theta}_{(0.05)}^*; \hat{\theta}_{(0.95)}^*)$	P-valor
\hat{e}_1^*	0.0496	0.0110	(0.0324; 0.0683)	0.0338
\hat{e}_2^*	0.0999	0.0230	(0.0645; 0.1391)	3e-04
\hat{p}^*	0.8007	0.0351	(0.7422; 0.8578)	0.0104

Tabela 4.3: Valores médios, erros padrões e percentis (0.05; 0.95) das estimativas MQQ *bootstrap* de p , e_1 e e_2 .

Com base nos percentis das estimativas *bootstrap*, apresentados na Tabela 4.3, podemos concluir que há evidências de que a taxa de conformidade dos azulejos não é superior a 80%, uma vez que $\hat{p} = 0.7177$ pertence à $RC_{\hat{p}}$. Além disso, os resultados fornecem evidências de que o risco do consumidor (e_2) não é menor que 0.1, ou seja, a probabilidade de o sistema classificar um azulejo não conforme como conforme não é menor que 10%. Ainda, há indícios de que o risco do produtor (e_1) não é menor que 0.05, isto é, a probabilidade de o sistema classificar um azulejo conforme como não conforme não é menor que 5%. Note que, os P-valores estimados foram inferiores ao nível de significância 0.05, concordando com as decisões baseadas nas regiões críticas. Nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3, são ilustradas as RC's (área em vermelho no gráfico) para os testes (I), (II) e (III), onde é possível notar que as estimativas \hat{p} , \hat{e}_1 e \hat{e}_2 estão contidas em tais regiões de rejeição de H_0 , ao nível de significância de 5%.

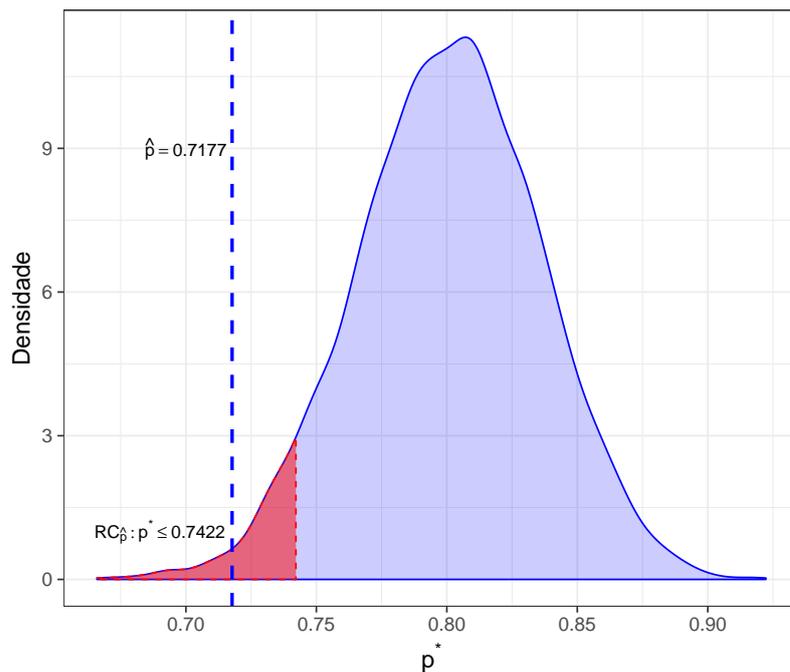


Figura 4.1: Distribuição de densidade das estimativas *bootstrap* de p .

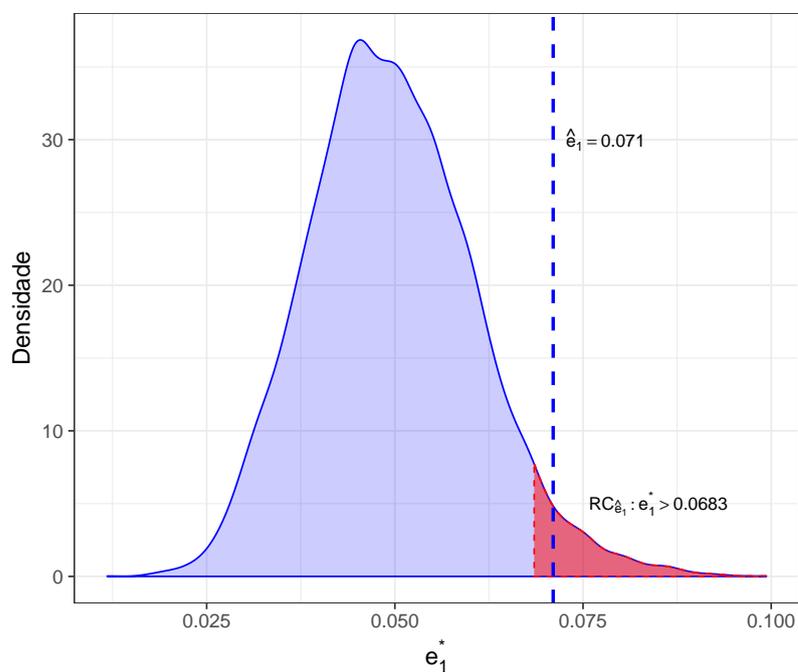


Figura 4.2: Distribuição de densidade das estimativas *bootstrap* de e_1 .

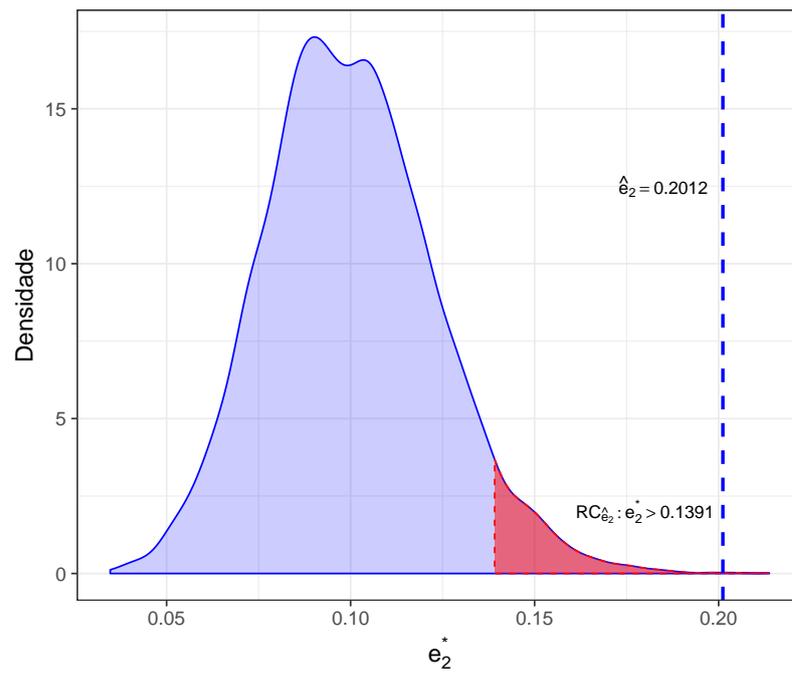


Figura 4.3: Distribuição de densidade das estimativas *bootstrap* de e_2 .

Capítulo 5

Discussão e Conclusões

Neste trabalho, foi realizado um estudo para avaliação dos sistemas de medição binária (BMS) considerando padrão ouro indisponível. Nesta situação, empregamos uma abordagem usual que considera r classificações repetidas em cada item e um modelo de classe latente, este sendo definido por uma mistura de duas distribuições binomiais. Assim, avaliar um BMS é equivalente a estimar os parâmetros deste modelo, p , e_1 e e_2 , que caracterizam o sistema. No contexto de controle de qualidade, p representa a proporção de itens conformes no processo de fabricação e e_1 e e_2 representam os erros de classificação na inspeção realizada por um BMS.

Para realizar a estimação dos parâmetros do modelo de mistura, foi proposto o método de mínimo qui-quadrado (MQQ). Para isso, realizou-se um estudo de simulação Monte Carlo a fim de comparar o desempenho deste método com os da maioria simples (MS), máxima verossimilhança (MV) e de momentos (MM). Estes dois últimos são amplamente mencionados na literatura quando se trata de estimação, o que motivou a realização de um estudo comparativo dos estimadores de mínimo qui-quadrado, que são pouco discutidos em estudos de estimação.

O estudo foi conduzido sob 162 cenários diferentes com a finalidade de cobrir situações da prática em que dispomos de uma amostra relativamente pequena/finita. No geral, o MQQ apresentou um desempenho notável e competitivo com os métodos de máxima verossimilhança e de momentos, em relação aos valores médios do EQM. Considerando as alternativas apresentadas no Capítulo 2, os estimadores de mínimo χ^2 (logito) e χ^2_{CR} (Cressie-Read) apresentaram desempenhos interessantes, sendo superiores ao MM e competitivo em relação ao MV. Além disso, quando $r = 3$, as estimativas de mínimo χ^2 foram equivalentes às de MV e MM. No entanto, os resultados da maioria simples foram superiores aos demais estimadores, se comparados pelos

valores médios do EQM e desvio padrão, porém, com um viés maior.

Realizamos, ainda, uma aplicação do estimador mínimo χ^2 para ilustrar o uso do MQQ na prática. O objetivo era avaliar a eficiência de um sistema de medição binário através de testes de hipóteses para os parâmetros p , e_1 e e_2 . Para isso, utilizamos a abordagem de reamostragem *bootstrap*. Assim, com base nas estimativas *bootstrap*, obtivemos as regiões críticas e os P-valores correspondentes aos testes.

Como alternativa ao método do mínimo qui-quadrado, uma sugestão é o estimador de *mínima divergência* (MD), que emprega a mesma ideia utilizada no MQQ, porém, com objetivo de minimizar uma determinada medida de divergência para obter as estimativas de interesse. Na literatura, existem algumas medidas alternativas, como a distância de Bhattacharyya, Jeffreys e Jansen-Shannon, por exemplo. Em uma breve simulação, foi possível observar que algumas divergências apresentaram comportamento semelhante ao MQQ, como a distância de Bathacharyya, por exemplo, que é superior ao do método dos momentos. Diante disso, realizar um estudo rigoroso sobre as propriedades do estimador MD, bem como avaliar seu desempenho, pode ser promissor.

Neste trabalho, o problema de avaliação de um BMS foi conduzido sob a suposição de que os erros e_1 e e_2 são os mesmos para cada item. Isto é, dado que os itens i e j são conformes ($X_i = X_j = 1$), a probabilidade de o sistema classificá-los como não conforme é a mesma, para $i \neq j = 1, \dots, n$. Na prática, tal situação pode não ser razoável. No exemplo dos azulejos, suponha que a empresa está interessada em inspecionar os azulejos a fim de detectar rachaduras superficiais. Para isso, podemos considerar um líquido-penetrante e, então, aplicar em cada um dos 150 azulejos. Assim, cada objeto é inspecionado sob luz ultravioleta e falha ou passa se uma falha é visível ou não. Porém, um determinado azulejo pode ser mais difícil de classificar do que outro e, portanto, os erros podem não ser os mesmos. Sendo assim, uma sugestão é realizar um estudo para investigar a performance dos estimadores de mínimo qui-quadrado considerando que os erros variam entre os itens.

Referências Bibliográficas

- Barbiero, A. (2017), 'Least-squares and minimum chi-square estimation in a discrete weibull model', *Communications in Statistics-Simulation and Computation* pp. 1–21.
- Berkson, J. (1944), 'Application of the logistic function to bio-assay', *Journal of the American Statistical Association* **39**(227), 357–365.
- Berkson, J. (1955), 'Maximum likelihood and minimum χ^2 estimates of the logistic function', *Journal of the American Statistical Association* **50**(269), 130–162.
- Berkson, J. (1980), 'Minimum chi-square, not maximum likelihood!', *The Annals of Statistics* **8**(3), 457–487.
- Blischke, W. (1962), 'Moment estimators for the parameters of a mixture of two binomial distributions', *The Annals of Mathematical Statistics* **33**, 444–454.
- Blischke, W. (1964), 'Estimating the parameters of mixture of binomial distributions', *J Am Stat Assoc* **59**, 510–528.
- Boyles, R. (2001), 'Gauge capability for pass–fail inspection', *Technometrics* **43**, 223–229.
- Bross, I. (1954), 'Misclassification in 2×2 tables', *Biometrics* **10**, 478–486.
- Cressie, N. & Read, T. (1984), 'Multinomial goodness-of-fit tests', *Journal of the Royal Statistical Society* **46**(3), 440–464.
- Danila, O., Steiner, S. H. & MacKay, R. J. (2009), 'Routine assessment of a binary measurement system', *Journal Of Quality Technology*. (3).
- Danila, O., Steiner, S. H. & MacKay, R. J. (2013), 'Assessing a binary measurement system with varying misclassification rates when a gold standard is available', *Technometrics* **55**(3), 335–345.

- Danila, O., Steiner, S. & Mackay, R. (2012), 'Assessing a binary measurement system with varying misclassification rates using a latent class random effects model', **44**, 179–191.
- de Moraes, R. S., da Costa Quinino, R., Suyama, E. & Ho, L. L. (2017a), 'Estimators of parameters of a mixture of three multinomial distributions based on simple majority results', *Statistical Papers* .
- de Moraes, R. S., da Costa Quinino, R., Suyama, E. & Ho, L. L. (2017b), 'Inferences in dichotomous classifications with misclassifications based on sequential repetitive classifications', *Communications in Statistics - Simulation and Computation* **46**(10), 8264–8282.
- Efron, B. (1979), 'Bootstrap methods: Another look at the jackknife', *Ann. Statist.* **7**(1), 1–26.
- Everitt, B. & Hand, D. (1981), *Finite mixture distributions*, Chapman & Hall.
- Fisher, R. (1924), 'The conditions under which χ^2 measures the discrepancy between observation and hypothesis', *J. Roy. Statist. Soc.* **87**, 442–450.
- Fujisawa, H. & Izume, S. (2000), 'Inference about misclassification probabilities from repeated binary responses', *Biometrics* **56**, 706–711.
- Greenberg, B. S. & Stokes, S. L. (1995), 'Repetitive testing in the presence of inspection errors', *Technometrics* **37**(1), 102–111.
- Gustafson, P. (2003), *Measurement error and misclassification in statistics and epidemiology: impacts and Bayesian adjustments*, CRC Press.
- Harris, R. & Kanji, G. (1983), 'On the use of minimum chi-square estimation', *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)* **32**(4), 379–394.
- Johnson, N., Kotz, S. & Wu, X. (1991), *Inspection Errors for Attributes in Quality Control*, Chapman and Hall.
- Kominek, Z. (2002), 'Minimum chi-squared estimation of stable distributions parameters: An application to the warsaw stock exchange', *Journal of Applied Statistics* **29**(5), 729–744.
- Kukush, A., Schneeweis, H. & Wolf, R. (2004), 'Three estimators for the poisson regression model with measurement errors', *Statistical Papers* **45**(3), 351–368.

- Kullback, S. & Leibler, R. A. (1951), 'On information and sufficiency', *The annals of mathematical statistics* **22**(1), 79–86.
- Neyman, J. (1949), Contribution to the theory of the χ^2 test, in 'Proceedings of the Berkeley symposium on mathematical statistics and probability', Vol. 1, University of California Press Berkeley, pp. 239–273.
- Pearson, K. (1900), 'X. on the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling', *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **50**(302), 157–175.
- Quinino, R. C., Ho, L. L. & Suyama, E. (2013), 'Alternative estimator for the parameters of a mixture of two binomial distributions', *Statistical Papers* **54**(1), 47–69.
- R Core Team (2017), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
URL: <https://www.R-project.org/>
- Steiner, S. & MacKay, R. (2005), *Statistical Engineering: an algorithm for reducing variation in manufacturing processes*, Vol. 1, ASQ Quality Press.
- Taylor, W. F. et al. (1953), 'Distance functions and regular best asymptotically normal estimates', *The Annals of Mathematical Statistics* **24**(1), 85–92.
- Teicher, H. et al. (1961), 'Identifiability of mixtures', *The annals of Mathematical statistics* **32**(1), 244–248.
- Van Wieringen, W. N. & De Mast, J. (2008), 'Measurement system analysis for binary data', *Technometrics* **50**(4), 468–478.
- van Wieringen, W. N. & Van Den Heuvel, E. R. (2005), 'A comparison of methods for the evaluation of binary measurement systems', *Quality Engineering* **17**(4), 495–507.

Apêndice

A - Tabelas

Tabela 1: EQM, valor médio e desvio padrão (DP) para as estimativas de p considerando a função χ^2 logito no método MQQ.

r	n	p	e_2	e_1	MM			MS			MV			MQQ		
					Média	DP	EQM									
3	50	0.70	0.05	0.05	0.6952	0.0655	0.0043	0.6933	0.0640	0.0041	0.6952	0.0655	0.0043	0.6951	0.0656	0.0043
3	50	0.70	0.05	0.10	0.6904	0.0684	0.0048	0.6762	0.0641	0.0047	0.6904	0.0684	0.0048	0.6904	0.0684	0.0048
3	50	0.70	0.05	0.15	0.6819	0.0724	0.0056	0.6515	0.0640	0.0064	0.6819	0.0724	0.0056	0.6819	0.0724	0.0056
3	50	0.70	0.10	0.05	0.6982	0.0675	0.0046	0.7042	0.0631	0.0040	0.6982	0.0675	0.0046	0.6982	0.0675	0.0046
3	50	0.70	0.10	0.10	0.6938	0.0732	0.0054	0.6861	0.0642	0.0043	0.6938	0.0732	0.0054	0.6938	0.0732	0.0054
3	50	0.70	0.10	0.15	0.6864	0.0807	0.0067	0.6609	0.0631	0.0055	0.6864	0.0807	0.0067	0.6864	0.0807	0.0067
3	50	0.70	0.15	0.05	0.6973	0.0728	0.0053	0.7136	0.0640	0.0043	0.6973	0.0728	0.0053	0.6973	0.0728	0.0053
3	50	0.70	0.15	0.10	0.6921	0.0850	0.0073	0.6966	0.0661	0.0044	0.6921	0.0850	0.0073	0.6921	0.0850	0.0073

3	50	0.70	0.15	0.15	0.6832	0.0977	0.0098	0.6716	0.0653	0.0051	0.6832	0.0977	0.0098	0.6832	0.0977	0.0098
3	50	0.80	0.05	0.05	0.7932	0.0572	0.0033	0.7906	0.0557	0.0032	0.7932	0.0572	0.0033	0.7932	0.0572	0.0033
3	50	0.80	0.05	0.10	0.7837	0.0612	0.0040	0.7689	0.0573	0.0042	0.7837	0.0612	0.0040	0.7837	0.0612	0.0040
3	50	0.80	0.05	0.15	0.7700	0.0680	0.0055	0.7387	0.0586	0.0072	0.7700	0.0680	0.0055	0.7700	0.0680	0.0055
3	50	0.80	0.10	0.05	0.7950	0.0583	0.0034	0.7978	0.0541	0.0029	0.7950	0.0583	0.0034	0.7950	0.0583	0.0034
3	50	0.80	0.10	0.10	0.7835	0.0656	0.0046	0.7754	0.0561	0.0038	0.7835	0.0656	0.0046	0.7835	0.0656	0.0046
3	50	0.80	0.10	0.15	0.7687	0.0773	0.0070	0.7443	0.0569	0.0063	0.7687	0.0773	0.0070	0.7687	0.0773	0.0070
3	50	0.80	0.15	0.05	0.7918	0.0645	0.0042	0.8047	0.0548	0.0030	0.7918	0.0645	0.0042	0.7918	0.0645	0.0042
3	50	0.80	0.15	0.10	0.7804	0.0767	0.0063	0.7851	0.0558	0.0033	0.7804	0.0767	0.0063	0.7804	0.0767	0.0063
3	50	0.80	0.15	0.15	0.7651	0.0956	0.0104	0.7543	0.0589	0.0056	0.7651	0.0956	0.0104	0.7651	0.0956	0.0104
3	50	0.90	0.05	0.05	0.8851	0.0424	0.0020	0.8833	0.0406	0.0019	0.8851	0.0424	0.0020	0.8845	0.0446	0.0022
3	50	0.90	0.05	0.10	0.8733	0.0520	0.0034	0.8622	0.0443	0.0034	0.8733	0.0520	0.0034	0.8733	0.0520	0.0034
3	50	0.90	0.05	0.15	0.8474	0.0760	0.0085	0.8272	0.0476	0.0076	0.8474	0.0760	0.0085	0.8474	0.0760	0.0085
3	50	0.90	0.10	0.05	0.8835	0.0457	0.0024	0.8865	0.0400	0.0018	0.8835	0.0457	0.0024	0.8835	0.0457	0.0024
3	50	0.90	0.10	0.10	0.8689	0.0617	0.0048	0.8643	0.0434	0.0032	0.8689	0.0617	0.0048	0.8689	0.0617	0.0048
3	50	0.90	0.10	0.15	0.8396	0.0914	0.0120	0.8306	0.0477	0.0071	0.8396	0.0914	0.0120	0.8396	0.0914	0.0120
3	50	0.90	0.15	0.05	0.8820	0.0520	0.0030	0.8911	0.0390	0.0016	0.8820	0.0520	0.0030	0.8820	0.0520	0.0030
3	50	0.90	0.15	0.10	0.8657	0.0718	0.0063	0.8690	0.0421	0.0027	0.8657	0.0718	0.0063	0.8657	0.0718	0.0063
3	50	0.90	0.15	0.15	0.8339	0.1050	0.0154	0.8356	0.0466	0.0063	0.8339	0.1050	0.0154	0.8339	0.1050	0.0154
3	100	0.70	0.05	0.05	0.7003	0.0467	0.0022	0.6975	0.0457	0.0021	0.7003	0.0467	0.0022	0.7003	0.0467	0.0022
3	100	0.70	0.05	0.10	0.6977	0.0495	0.0025	0.6808	0.0463	0.0025	0.6977	0.0495	0.0025	0.6977	0.0495	0.0025
3	100	0.70	0.05	0.15	0.6924	0.0528	0.0028	0.6555	0.0462	0.0041	0.6924	0.0528	0.0028	0.6924	0.0528	0.0028
3	100	0.70	0.10	0.05	0.7001	0.0475	0.0023	0.7043	0.0445	0.0020	0.7001	0.0475	0.0023	0.7001	0.0475	0.0023
3	100	0.70	0.10	0.10	0.6998	0.0534	0.0028	0.6893	0.0462	0.0022	0.6998	0.0534	0.0028	0.6998	0.0534	0.0028

3	100	0.70	0.10	0.15	0.6952	0.0595	0.0036	0.6637	0.0465	0.0035	0.6952	0.0595	0.0036	0.6952	0.0595	0.0036	0.6952	0.0595	0.0036
3	100	0.70	0.15	0.05	0.6966	0.0514	0.0027	0.7121	0.0451	0.0022	0.6966	0.0514	0.0027	0.6966	0.0514	0.0027	0.6966	0.0514	0.0027
3	100	0.70	0.15	0.10	0.6978	0.0585	0.0034	0.6994	0.0453	0.0021	0.6978	0.0585	0.0034	0.6978	0.0585	0.0034	0.6978	0.0585	0.0034
3	100	0.70	0.15	0.15	0.6931	0.0713	0.0051	0.6741	0.0465	0.0028	0.6931	0.0713	0.0051	0.6931	0.0713	0.0051	0.6931	0.0713	0.0051
3	100	0.80	0.05	0.05	0.7970	0.0404	0.0016	0.7932	0.0394	0.0016	0.7970	0.0404	0.0016	0.7970	0.0404	0.0016	0.7970	0.0404	0.0016
3	100	0.80	0.05	0.10	0.7926	0.0429	0.0019	0.7744	0.0400	0.0023	0.7926	0.0429	0.0019	0.7926	0.0429	0.0019	0.7926	0.0429	0.0019
3	100	0.80	0.05	0.15	0.7858	0.0476	0.0025	0.7460	0.0413	0.0046	0.7858	0.0476	0.0025	0.7858	0.0476	0.0025	0.7858	0.0476	0.0025
3	100	0.80	0.10	0.05	0.7985	0.0440	0.0019	0.8000	0.0409	0.0017	0.7985	0.0440	0.0019	0.7985	0.0440	0.0019	0.7985	0.0440	0.0019
3	100	0.80	0.10	0.10	0.7962	0.0469	0.0022	0.7822	0.0400	0.0019	0.7962	0.0469	0.0022	0.7962	0.0469	0.0022	0.7962	0.0469	0.0022
3	100	0.80	0.10	0.15	0.7889	0.0547	0.0031	0.7529	0.0412	0.0039	0.7889	0.0547	0.0031	0.7889	0.0547	0.0031	0.7889	0.0547	0.0031
3	100	0.80	0.15	0.05	0.7964	0.0469	0.0022	0.8062	0.0393	0.0016	0.7964	0.0469	0.0022	0.7964	0.0469	0.0022	0.7964	0.0469	0.0022
3	100	0.80	0.15	0.10	0.7940	0.0543	0.0030	0.7891	0.0401	0.0017	0.7940	0.0543	0.0030	0.7940	0.0543	0.0030	0.7940	0.0543	0.0030
3	100	0.80	0.15	0.15	0.7857	0.0691	0.0050	0.7608	0.0420	0.0033	0.7857	0.0691	0.0050	0.7857	0.0691	0.0050	0.7857	0.0691	0.0050
3	100	0.90	0.05	0.05	0.8951	0.0318	0.0010	0.8909	0.0306	0.0010	0.8951	0.0318	0.0010	0.8951	0.0318	0.0010	0.8951	0.0318	0.0010
3	100	0.90	0.05	0.10	0.8866	0.0356	0.0014	0.8681	0.0317	0.0020	0.8866	0.0356	0.0014	0.8866	0.0356	0.0014	0.8866	0.0356	0.0014
3	100	0.90	0.05	0.15	0.8723	0.0449	0.0028	0.8345	0.0341	0.0054	0.8723	0.0449	0.0028	0.8723	0.0449	0.0028	0.8723	0.0449	0.0028
3	100	0.90	0.10	0.05	0.8939	0.0331	0.0011	0.8931	0.0301	0.0010	0.8939	0.0331	0.0011	0.8939	0.0331	0.0011	0.8939	0.0331	0.0011
3	100	0.90	0.10	0.10	0.8872	0.0420	0.0019	0.8730	0.0317	0.0017	0.8872	0.0420	0.0019	0.8872	0.0420	0.0019	0.8872	0.0420	0.0019
3	100	0.90	0.10	0.15	0.8706	0.0590	0.0044	0.8393	0.0342	0.0049	0.8706	0.0590	0.0043	0.8706	0.0590	0.0043	0.8706	0.0590	0.0043
3	100	0.90	0.15	0.05	0.8940	0.0373	0.0014	0.8985	0.0292	0.0009	0.8940	0.0373	0.0014	0.8940	0.0373	0.0014	0.8940	0.0373	0.0014
3	100	0.90	0.15	0.10	0.8844	0.0509	0.0028	0.8775	0.0319	0.0015	0.8844	0.0509	0.0028	0.8844	0.0509	0.0028	0.8844	0.0509	0.0028
3	100	0.90	0.15	0.15	0.8636	0.0767	0.0072	0.8435	0.0338	0.0043	0.8636	0.0767	0.0072	0.8636	0.0767	0.0072	0.8636	0.0767	0.0072
5	50	0.70	0.05	0.05	0.6982	0.0653	0.0043	0.6972	0.0645	0.0042	0.6976	0.0649	0.0042	0.7013	0.0673	0.0045			
5	50	0.70	0.05	0.10	0.6996	0.0671	0.0045	0.6929	0.0659	0.0044	0.6981	0.0662	0.0044	0.6985	0.0669	0.0045			

5	50	0.70	0.05	0.15	0.7009	0.0690	0.0048	0.6815	0.0673	0.0049	0.6963	0.0672	0.0045	0.6944	0.0676	0.0046
5	50	0.70	0.10	0.05	0.7040	0.0656	0.0043	0.7063	0.0643	0.0042	0.7044	0.0649	0.0042	0.7083	0.0667	0.0045
5	50	0.70	0.10	0.10	0.7019	0.0680	0.0046	0.6990	0.0653	0.0043	0.7016	0.0671	0.0045	0.7027	0.0679	0.0046
5	50	0.70	0.10	0.15	0.6988	0.0722	0.0052	0.6841	0.0676	0.0048	0.6978	0.0705	0.0050	0.6975	0.0707	0.0050
5	50	0.70	0.15	0.05	0.7067	0.0672	0.0046	0.7147	0.0641	0.0043	0.7080	0.0661	0.0044	0.7125	0.0670	0.0046
5	50	0.70	0.15	0.10	0.7049	0.0705	0.0050	0.7088	0.0652	0.0043	0.7051	0.0692	0.0048	0.7070	0.0699	0.0049
5	50	0.70	0.15	0.15	0.6956	0.0740	0.0055	0.6884	0.0655	0.0044	0.6957	0.0728	0.0053	0.6967	0.0728	0.0053
5	50	0.80	0.05	0.05	0.7959	0.0555	0.0031	0.7948	0.0549	0.0030	0.7952	0.0550	0.0031	0.8003	0.0578	0.0033
5	50	0.80	0.05	0.10	0.7977	0.0577	0.0033	0.7902	0.0570	0.0033	0.7964	0.0570	0.0033	0.7974	0.0575	0.0033
5	50	0.80	0.05	0.15	0.7967	0.0593	0.0035	0.7765	0.0588	0.0040	0.7939	0.0586	0.0035	0.7933	0.0590	0.0035
5	50	0.80	0.10	0.05	0.8007	0.0563	0.0032	0.8023	0.0554	0.0031	0.8010	0.0559	0.0031	0.8060	0.0582	0.0034
5	50	0.80	0.10	0.10	0.8010	0.0591	0.0035	0.7967	0.0560	0.0031	0.8000	0.0572	0.0033	0.8021	0.0578	0.0033
5	50	0.80	0.10	0.15	0.7943	0.0633	0.0040	0.7785	0.0588	0.0039	0.7921	0.0612	0.0038	0.7926	0.0612	0.0038
5	50	0.80	0.15	0.05	0.8052	0.0569	0.0033	0.8100	0.0546	0.0031	0.8057	0.0563	0.0032	0.8111	0.0580	0.0035
5	50	0.80	0.15	0.10	0.8022	0.0621	0.0039	0.8029	0.0558	0.0031	0.8016	0.0607	0.0037	0.8040	0.0613	0.0038
5	50	0.80	0.15	0.15	0.7912	0.0686	0.0048	0.7818	0.0577	0.0037	0.7901	0.0682	0.0047	0.7915	0.0667	0.0045
5	50	0.90	0.05	0.05	0.8908	0.0415	0.0018	0.8902	0.0413	0.0018	0.8904	0.0414	0.0018	0.8955	0.0439	0.0019
5	50	0.90	0.05	0.10	0.8904	0.0418	0.0018	0.8835	0.0416	0.0020	0.8900	0.0426	0.0019	0.8911	0.0421	0.0018
5	50	0.90	0.05	0.15	0.8816	0.0468	0.0025	0.8627	0.0455	0.0035	0.8828	0.0503	0.0028	0.8837	0.0486	0.0026
5	50	0.90	0.10	0.05	0.8921	0.0405	0.0017	0.8931	0.0391	0.0016	0.8922	0.0396	0.0016	0.8977	0.0427	0.0018
5	50	0.90	0.10	0.10	0.8926	0.0431	0.0019	0.8884	0.0401	0.0017	0.8916	0.0438	0.0020	0.8936	0.0428	0.0019
5	50	0.90	0.10	0.15	0.8831	0.0544	0.0032	0.8686	0.0449	0.0030	0.8808	0.0597	0.0039	0.8820	0.0567	0.0035
5	50	0.90	0.15	0.05	0.8950	0.0402	0.0016	0.8976	0.0379	0.0014	0.8949	0.0402	0.0016	0.9007	0.0422	0.0018
5	50	0.90	0.15	0.10	0.8932	0.0456	0.0021	0.8927	0.0392	0.0016	0.8916	0.0482	0.0024	0.8942	0.0482	0.0024

5	50	0.90	0.15	0.15	0.8786	0.0624	0.0044	0.8715	0.0440	0.0028	0.8755	0.0687	0.0053	0.8781	0.0634	0.0045
5	100	0.70	0.05	0.05	0.6997	0.0465	0.0022	0.6990	0.0462	0.0021	0.6995	0.0464	0.0021	0.7017	0.0478	0.0023
5	100	0.70	0.05	0.10	0.7019	0.0471	0.0022	0.6953	0.0464	0.0022	0.7008	0.0464	0.0021	0.7012	0.0467	0.0022
5	100	0.70	0.05	0.15	0.7004	0.0492	0.0024	0.6794	0.0480	0.0027	0.6969	0.0473	0.0022	0.6959	0.0472	0.0022
5	100	0.70	0.10	0.05	0.7025	0.0472	0.0022	0.7049	0.0467	0.0022	0.7029	0.0471	0.0022	0.7046	0.0481	0.0023
5	100	0.70	0.10	0.10	0.7016	0.0489	0.0024	0.6972	0.0468	0.0022	0.7009	0.0480	0.0023	0.7013	0.0483	0.0023
5	100	0.70	0.10	0.15	0.6968	0.0493	0.0024	0.6788	0.0461	0.0026	0.6964	0.0483	0.0023	0.6966	0.0483	0.0023
5	100	0.70	0.15	0.05	0.7027	0.0476	0.0023	0.7115	0.0452	0.0022	0.7030	0.0472	0.0022	0.7030	0.0485	0.0024
5	100	0.70	0.15	0.10	0.7003	0.0494	0.0024	0.7038	0.0451	0.0020	0.7004	0.0482	0.0023	0.7006	0.0487	0.0024
5	100	0.70	0.15	0.15	0.6948	0.0509	0.0026	0.6856	0.0447	0.0022	0.6949	0.0501	0.0025	0.6956	0.0504	0.0026
5	100	0.80	0.05	0.05	0.7993	0.0404	0.0016	0.7983	0.0398	0.0016	0.7989	0.0399	0.0016	0.8019	0.0424	0.0018
5	100	0.80	0.05	0.10	0.8030	0.0411	0.0017	0.7948	0.0407	0.0017	0.8008	0.0404	0.0016	0.8018	0.0406	0.0017
5	100	0.80	0.05	0.15	0.8005	0.0429	0.0018	0.7761	0.0424	0.0024	0.7964	0.0413	0.0017	0.7958	0.0414	0.0017
5	100	0.80	0.10	0.05	0.8024	0.0416	0.0017	0.8039	0.0404	0.0017	0.8028	0.0410	0.0017	0.8052	0.0431	0.0019
5	100	0.80	0.10	0.10	0.8028	0.0424	0.0018	0.7966	0.0411	0.0017	0.8016	0.0415	0.0017	0.8024	0.0418	0.0018
5	100	0.80	0.10	0.15	0.7977	0.0448	0.0020	0.7762	0.0415	0.0023	0.7963	0.0429	0.0019	0.7964	0.0427	0.0018
5	100	0.80	0.15	0.05	0.8032	0.0411	0.0017	0.8091	0.0393	0.0016	0.8035	0.0409	0.0017	0.8044	0.0433	0.0019
5	100	0.80	0.15	0.10	0.8004	0.0443	0.0020	0.7994	0.0397	0.0016	0.8000	0.0428	0.0018	0.8008	0.0433	0.0019
5	100	0.80	0.15	0.15	0.7930	0.0473	0.0023	0.7795	0.0406	0.0021	0.7929	0.0460	0.0022	0.7940	0.0459	0.0021
5	100	0.90	0.05	0.05	0.8979	0.0298	0.0009	0.8968	0.0296	0.0009	0.8976	0.0297	0.0009	0.9005	0.0313	0.0010
5	100	0.90	0.05	0.10	0.8987	0.0303	0.0009	0.8902	0.0306	0.0010	0.8968	0.0301	0.0009	0.8977	0.0299	0.0009
5	100	0.90	0.05	0.15	0.8959	0.0331	0.0011	0.8709	0.0331	0.0019	0.8950	0.0323	0.0011	0.8951	0.0322	0.0011
5	100	0.90	0.10	0.05	0.9007	0.0300	0.0009	0.9008	0.0290	0.0008	0.9006	0.0294	0.0009	0.9038	0.0317	0.0010
5	100	0.90	0.10	0.10	0.9008	0.0321	0.0010	0.8937	0.0307	0.0010	0.8991	0.0308	0.0010	0.9002	0.0308	0.0009

5	100	0.90	0.10	0.15	0.8940	0.0380	0.0015	0.8724	0.0336	0.0019	0.8922	0.0351	0.0013	0.8927	0.0347	0.0013
5	100	0.90	0.15	0.05	0.9032	0.0305	0.0009	0.9057	0.0288	0.0009	0.9033	0.0300	0.0009	0.9062	0.0321	0.0011
5	100	0.90	0.15	0.10	0.9011	0.0341	0.0012	0.8968	0.0301	0.0009	0.8996	0.0324	0.0011	0.9010	0.0321	0.0010
5	100	0.90	0.15	0.15	0.8906	0.0430	0.0019	0.8742	0.0325	0.0017	0.8889	0.0415	0.0018	0.8901	0.0390	0.0016
7	50	0.70	0.05	0.05	0.6997	0.0661	0.0044	0.6994	0.0658	0.0043	0.6994	0.0658	0.0043	0.7021	0.0678	0.0046
7	50	0.70	0.05	0.10	0.7001	0.0660	0.0044	0.6964	0.0655	0.0043	0.6982	0.0654	0.0043	0.6973	0.0660	0.0044
7	50	0.70	0.05	0.15	0.6990	0.0641	0.0041	0.6894	0.0634	0.0041	0.6974	0.0633	0.0040	0.6954	0.0639	0.0041
7	50	0.70	0.10	0.05	0.7005	0.0646	0.0042	0.7023	0.0637	0.0041	0.7014	0.0640	0.0041	0.7051	0.0651	0.0043
7	50	0.70	0.10	0.10	0.7007	0.0666	0.0044	0.6992	0.0650	0.0042	0.7000	0.0655	0.0043	0.7002	0.0658	0.0043
7	50	0.70	0.10	0.15	0.6982	0.0669	0.0045	0.6899	0.0648	0.0043	0.6973	0.0653	0.0043	0.6966	0.0657	0.0043
7	50	0.70	0.15	0.05	0.7024	0.0650	0.0042	0.7075	0.0639	0.0041	0.7038	0.0643	0.0041	0.7078	0.0653	0.0043
7	50	0.70	0.15	0.10	0.7047	0.0678	0.0046	0.7059	0.0648	0.0042	0.7039	0.0662	0.0044	0.7047	0.0663	0.0044
7	50	0.70	0.15	0.15	0.6964	0.0689	0.0048	0.6925	0.0657	0.0044	0.6963	0.0679	0.0046	0.6964	0.0682	0.0047
7	50	0.80	0.05	0.05	0.7975	0.0554	0.0031	0.7968	0.0549	0.0030	0.7969	0.0550	0.0030	0.8006	0.0570	0.0033
7	50	0.80	0.05	0.10	0.7970	0.0566	0.0032	0.7929	0.0563	0.0032	0.7950	0.0561	0.0032	0.7951	0.0566	0.0032
7	50	0.80	0.05	0.15	0.7969	0.0559	0.0031	0.7859	0.0559	0.0033	0.7956	0.0554	0.0031	0.7943	0.0558	0.0031
7	50	0.80	0.10	0.05	0.7993	0.0562	0.0032	0.8005	0.0553	0.0031	0.7998	0.0555	0.0031	0.8032	0.0567	0.0032
7	50	0.80	0.10	0.10	0.8001	0.0571	0.0033	0.7979	0.0563	0.0032	0.7991	0.0565	0.0032	0.7996	0.0567	0.0032
7	50	0.80	0.10	0.15	0.8002	0.0589	0.0035	0.7912	0.0574	0.0034	0.7995	0.0575	0.0033	0.7990	0.0578	0.0033
7	50	0.80	0.15	0.05	0.8007	0.0566	0.0032	0.8041	0.0549	0.0030	0.8014	0.0555	0.0031	0.8056	0.0568	0.0033
7	50	0.80	0.15	0.10	0.8015	0.0562	0.0032	0.8017	0.0542	0.0029	0.8007	0.0552	0.0030	0.8014	0.0553	0.0031
7	50	0.80	0.15	0.15	0.7978	0.0605	0.0037	0.7921	0.0565	0.0033	0.7977	0.0589	0.0035	0.7979	0.0587	0.0034
7	50	0.90	0.05	0.05	0.8927	0.0403	0.0017	0.8921	0.0401	0.0017	0.8920	0.0400	0.0017	0.8961	0.0415	0.0017
7	50	0.90	0.05	0.10	0.8906	0.0406	0.0017	0.8878	0.0398	0.0017	0.8899	0.0412	0.0018	0.8902	0.0415	0.0018

7	50	0.90	0.05	0.15	0.8881	0.0447	0.0021	0.8778	0.0426	0.0023	0.8889	0.0444	0.0021	0.8885	0.0439	0.0021
7	50	0.90	0.10	0.05	0.8937	0.0408	0.0017	0.8942	0.0400	0.0016	0.8935	0.0400	0.0016	0.8970	0.0417	0.0017
7	50	0.90	0.10	0.10	0.8944	0.0402	0.0016	0.8923	0.0389	0.0016	0.8937	0.0391	0.0016	0.8942	0.0390	0.0016
7	50	0.90	0.10	0.15	0.8914	0.0460	0.0022	0.8827	0.0401	0.0019	0.8905	0.0444	0.0021	0.8903	0.0441	0.0020
7	50	0.90	0.15	0.05	0.8937	0.0405	0.0017	0.8952	0.0390	0.0015	0.8933	0.0393	0.0016	0.8973	0.0406	0.0017
7	50	0.90	0.15	0.10	0.8928	0.0428	0.0019	0.8917	0.0388	0.0016	0.8913	0.0416	0.0018	0.8920	0.0414	0.0018
7	50	0.90	0.15	0.15	0.8906	0.0486	0.0024	0.8829	0.0415	0.0020	0.8881	0.0481	0.0025	0.8879	0.0473	0.0024
7	100	0.70	0.05	0.05	0.7015	0.0447	0.0020	0.7010	0.0445	0.0020	0.7011	0.0445	0.0020	0.7027	0.0456	0.0021
7	100	0.70	0.05	0.10	0.7004	0.0457	0.0021	0.6975	0.0456	0.0021	0.6997	0.0456	0.0021	0.6994	0.0457	0.0021
7	100	0.70	0.05	0.15	0.7018	0.0465	0.0022	0.6928	0.0463	0.0022	0.7005	0.0457	0.0021	0.6996	0.0459	0.0021
7	100	0.70	0.10	0.05	0.7003	0.0464	0.0021	0.7018	0.0458	0.0021	0.7009	0.0460	0.0021	0.7025	0.0469	0.0022
7	100	0.70	0.10	0.10	0.7006	0.0468	0.0022	0.6991	0.0461	0.0021	0.7002	0.0464	0.0021	0.7005	0.0465	0.0022
7	100	0.70	0.10	0.15	0.6997	0.0477	0.0023	0.6917	0.0468	0.0023	0.6997	0.0469	0.0022	0.6999	0.0469	0.0022
7	100	0.70	0.15	0.05	0.7007	0.0466	0.0022	0.7052	0.0460	0.0021	0.7017	0.0463	0.0021	0.7035	0.0470	0.0022
7	100	0.70	0.15	0.10	0.7013	0.0462	0.0021	0.7036	0.0449	0.0020	0.7013	0.0458	0.0021	0.7016	0.0460	0.0021
7	100	0.70	0.15	0.15	0.6989	0.0481	0.0023	0.6942	0.0458	0.0021	0.6991	0.0472	0.0022	0.6995	0.0473	0.0022
7	100	0.80	0.05	0.05	0.8022	0.0397	0.0016	0.8015	0.0395	0.0016	0.8016	0.0395	0.0016	0.8042	0.0407	0.0017
7	100	0.80	0.05	0.10	0.7993	0.0400	0.0016	0.7958	0.0397	0.0016	0.7983	0.0394	0.0016	0.7982	0.0396	0.0016
7	100	0.80	0.05	0.15	0.8006	0.0416	0.0017	0.7903	0.0410	0.0018	0.7987	0.0402	0.0016	0.7980	0.0404	0.0016
7	100	0.80	0.10	0.05	0.8003	0.0410	0.0017	0.8010	0.0404	0.0016	0.8004	0.0406	0.0017	0.8027	0.0415	0.0017
7	100	0.80	0.10	0.10	0.7998	0.0420	0.0018	0.7979	0.0412	0.0017	0.7994	0.0414	0.0017	0.7998	0.0415	0.0017
7	100	0.80	0.10	0.15	0.8013	0.0426	0.0018	0.7917	0.0414	0.0018	0.8008	0.0413	0.0017	0.8008	0.0412	0.0017
7	100	0.80	0.15	0.05	0.8029	0.0401	0.0016	0.8060	0.0392	0.0016	0.8035	0.0395	0.0016	0.8057	0.0405	0.0017
7	100	0.80	0.15	0.10	0.8031	0.0407	0.0017	0.8034	0.0391	0.0015	0.8028	0.0399	0.0016	0.8032	0.0400	0.0016

7	100	0.80	0.15	0.15	0.7980	0.0429	0.0018	0.7915	0.0404	0.0017	0.7983	0.0415	0.0017	0.7986	0.0415	0.0017
7	100	0.90	0.05	0.05	0.8980	0.0297	0.0009	0.8973	0.0295	0.0009	0.8974	0.0295	0.0009	0.8999	0.0302	0.0009
7	100	0.90	0.05	0.10	0.8965	0.0307	0.0010	0.8931	0.0304	0.0010	0.8958	0.0303	0.0009	0.8959	0.0303	0.0009
7	100	0.90	0.05	0.15	0.8973	0.0305	0.0009	0.8864	0.0308	0.0011	0.8966	0.0300	0.0009	0.8963	0.0302	0.0009
7	100	0.90	0.10	0.05	0.8996	0.0299	0.0009	0.8995	0.0294	0.0009	0.8992	0.0295	0.0009	0.9016	0.0303	0.0009
7	100	0.90	0.10	0.10	0.8998	0.0304	0.0009	0.8971	0.0296	0.0009	0.8992	0.0296	0.0009	0.8995	0.0296	0.0009
7	100	0.90	0.10	0.15	0.9011	0.0318	0.0010	0.8894	0.0311	0.0011	0.8993	0.0302	0.0009	0.8992	0.0301	0.0009
7	100	0.90	0.15	0.05	0.9012	0.0302	0.0009	0.9026	0.0291	0.0009	0.9012	0.0296	0.0009	0.9030	0.0305	0.0009
7	100	0.90	0.15	0.10	0.9006	0.0322	0.0010	0.8995	0.0301	0.0009	0.9000	0.0308	0.0009	0.9004	0.0307	0.0009
7	100	0.90	0.15	0.15	0.9005	0.0350	0.0012	0.8908	0.0317	0.0011	0.8992	0.0322	0.0010	0.8993	0.0320	0.0010

Tabela 2: EQM, valor médio e desvio padrão (DP) para as estimativas de e_2 considerando a função χ^2 logito no método MQQ.

r	n	π_c	α	β	MM			MS			MV			MQQ		
					Média	DP	EQM									
3	50	0.70	0.05	0.05	0.6952	0.0655	0.0043	0.6933	0.0640	0.0041	0.6952	0.0655	0.0043	0.0584	0.0388	0.0016
3	50	0.70	0.05	0.10	0.6904	0.0684	0.0048	0.6762	0.0641	0.0047	0.6904	0.0684	0.0048	0.0626	0.0437	0.0021
3	50	0.70	0.05	0.15	0.6819	0.0724	0.0056	0.6515	0.0640	0.0064	0.6819	0.0724	0.0056	0.0716	0.0521	0.0032
3	50	0.70	0.10	0.05	0.6982	0.0675	0.0046	0.7042	0.0631	0.0040	0.6982	0.0675	0.0046	0.1047	0.0599	0.0036
3	50	0.70	0.10	0.10	0.6938	0.0732	0.0054	0.6861	0.0642	0.0043	0.6938	0.0732	0.0054	0.1068	0.0643	0.0042
3	50	0.70	0.10	0.15	0.6864	0.0807	0.0067	0.6609	0.0631	0.0055	0.6864	0.0807	0.0067	0.1131	0.0742	0.0057
3	50	0.70	0.15	0.05	0.6973	0.0728	0.0053	0.7136	0.0640	0.0043	0.6973	0.0728	0.0053	0.1498	0.0739	0.0055
3	50	0.70	0.15	0.10	0.6921	0.0850	0.0073	0.6966	0.0661	0.0044	0.6921	0.0850	0.0073	0.1541	0.0849	0.0072

3	50	0.70	0.15	0.15	0.0098	0.6716	0.0653	0.0051	0.6832	0.0977	0.0098	0.6832	0.0977	0.0098	0.1602	0.0934	0.0088
3	50	0.80	0.05	0.05	0.0033	0.7906	0.0557	0.0032	0.7932	0.0572	0.0033	0.7932	0.0572	0.0033	0.0672	0.0501	0.0028
3	50	0.80	0.05	0.10	0.0040	0.7689	0.0573	0.0042	0.7837	0.0612	0.0040	0.7837	0.0612	0.0040	0.0761	0.0619	0.0045
3	50	0.80	0.05	0.15	0.0055	0.7387	0.0586	0.0072	0.7700	0.0680	0.0055	0.7700	0.0680	0.0055	0.0927	0.0739	0.0073
3	50	0.80	0.10	0.05	0.0034	0.7978	0.0541	0.0029	0.7950	0.0583	0.0034	0.7950	0.0583	0.0034	0.1098	0.0730	0.0054
3	50	0.80	0.10	0.10	0.0046	0.7754	0.0561	0.0038	0.7835	0.0656	0.0046	0.7835	0.0656	0.0046	0.1213	0.0861	0.0079
3	50	0.80	0.10	0.15	0.0073	0.7443	0.0569	0.0063	0.7687	0.0773	0.0073	0.7687	0.0773	0.0070	0.1348	0.0953	0.0103
3	50	0.80	0.15	0.05	0.0042	0.8047	0.0548	0.0030	0.7918	0.0645	0.0042	0.7918	0.0645	0.0042	0.1598	0.0964	0.0094
3	50	0.80	0.15	0.10	0.0063	0.7851	0.0558	0.0033	0.7804	0.0767	0.0063	0.7804	0.0767	0.0063	0.1722	0.1103	0.0127
3	50	0.80	0.15	0.15	0.0104	0.7543	0.0589	0.0056	0.7651	0.0956	0.0104	0.7651	0.0956	0.0104	0.1798	0.1174	0.0147
3	50	0.90	0.05	0.05	0.0020	0.8833	0.0406	0.0019	0.8851	0.0424	0.0020	0.8851	0.0424	0.0020	0.1016	0.0823	0.0094
3	50	0.90	0.05	0.10	0.0034	0.8622	0.0443	0.0034	0.8733	0.0520	0.0034	0.8733	0.0520	0.0034	0.1220	0.1070	0.0166
3	50	0.90	0.05	0.15	0.0085	0.8272	0.0476	0.0076	0.8474	0.0760	0.0085	0.8474	0.0760	0.0085	0.1587	0.1290	0.0285
3	50	0.90	0.10	0.05	0.0024	0.8865	0.0400	0.0018	0.8835	0.0457	0.0024	0.8835	0.0457	0.0024	0.1431	0.1046	0.0128
3	50	0.90	0.10	0.10	0.0048	0.8643	0.0434	0.0032	0.8689	0.0617	0.0048	0.8689	0.0617	0.0048	0.1623	0.1272	0.0200
3	50	0.90	0.10	0.15	0.0120	0.8306	0.0477	0.0071	0.8396	0.0914	0.0120	0.8396	0.0914	0.0120	0.1980	0.1454	0.0307
3	50	0.90	0.15	0.05	0.0030	0.8911	0.0390	0.0016	0.8820	0.0520	0.0030	0.8820	0.0520	0.0030	0.1799	0.1225	0.0159
3	50	0.90	0.15	0.10	0.0063	0.8690	0.0421	0.0027	0.8657	0.0718	0.0063	0.8657	0.0718	0.0063	0.2005	0.1449	0.0235
3	50	0.90	0.15	0.15	0.0154	0.8356	0.0466	0.0063	0.8339	0.1050	0.0154	0.8339	0.1050	0.0154	0.2354	0.1592	0.0326
3	100	0.70	0.05	0.05	0.0022	0.6975	0.0457	0.0021	0.7003	0.0467	0.0022	0.7003	0.0467	0.0022	0.0507	0.0278	0.0008
3	100	0.70	0.05	0.10	0.0025	0.6808	0.0463	0.0025	0.6977	0.0495	0.0025	0.6977	0.0495	0.0025	0.0532	0.0305	0.0009
3	100	0.70	0.05	0.15	0.0028	0.6555	0.0462	0.0041	0.6924	0.0528	0.0028	0.6924	0.0528	0.0028	0.0568	0.0359	0.0013
3	100	0.70	0.10	0.05	0.0023	0.7043	0.0445	0.0020	0.7001	0.0475	0.0023	0.7001	0.0475	0.0023	0.1013	0.0419	0.0018
3	100	0.70	0.10	0.10	0.0028	0.6893	0.0462	0.0022	0.6998	0.0534	0.0028	0.6998	0.0534	0.0028	0.1009	0.0465	0.0022

3	100	0.70	0.10	0.15	0.6952	0.0595	0.0036	0.6637	0.0465	0.0035	0.6952	0.0595	0.0036	0.1021	0.0545	0.0030
3	100	0.70	0.15	0.05	0.6966	0.0514	0.0027	0.7121	0.0451	0.0022	0.6966	0.0514	0.0027	0.1516	0.0544	0.0030
3	100	0.70	0.15	0.10	0.6978	0.0585	0.0034	0.6994	0.0453	0.0021	0.6978	0.0585	0.0034	0.1517	0.0625	0.0039
3	100	0.70	0.15	0.15	0.6931	0.0713	0.0051	0.6741	0.0465	0.0028	0.6931	0.0713	0.0051	0.1530	0.0697	0.0049
3	100	0.80	0.05	0.05	0.7970	0.0404	0.0016	0.7932	0.0394	0.0016	0.7970	0.0404	0.0016	0.0537	0.0346	0.0012
3	100	0.80	0.05	0.10	0.7926	0.0429	0.0019	0.7744	0.0400	0.0023	0.7926	0.0429	0.0019	0.0610	0.0421	0.0019
3	100	0.80	0.05	0.15	0.7858	0.0476	0.0025	0.7460	0.0413	0.0046	0.7858	0.0476	0.0025	0.0702	0.0484	0.0027
3	100	0.80	0.10	0.05	0.7985	0.0440	0.0019	0.8000	0.0409	0.0017	0.7985	0.0440	0.0019	0.1045	0.0541	0.0029
3	100	0.80	0.10	0.10	0.7962	0.0469	0.0022	0.7822	0.0400	0.0019	0.7962	0.0469	0.0022	0.1051	0.0589	0.0035
3	100	0.80	0.10	0.15	0.7889	0.0547	0.0031	0.7529	0.0412	0.0039	0.7889	0.0547	0.0031	0.1114	0.0692	0.0049
3	100	0.80	0.15	0.05	0.7964	0.0469	0.0022	0.8062	0.0393	0.0016	0.7964	0.0469	0.0022	0.1542	0.0707	0.0050
3	100	0.80	0.15	0.10	0.7940	0.0543	0.0030	0.7891	0.0401	0.0017	0.7940	0.0543	0.0030	0.1569	0.0803	0.0065
3	100	0.80	0.15	0.15	0.7857	0.0691	0.0050	0.7608	0.0420	0.0033	0.7857	0.0691	0.0050	0.1634	0.0929	0.0088
3	100	0.90	0.05	0.05	0.8951	0.0318	0.0010	0.8909	0.0306	0.0010	0.8951	0.0318	0.0010	0.0688	0.0562	0.0035
3	100	0.90	0.05	0.10	0.8866	0.0356	0.0014	0.8681	0.0317	0.0020	0.8866	0.0356	0.0014	0.0890	0.0707	0.0065
3	100	0.90	0.05	0.15	0.8723	0.0449	0.0028	0.8345	0.0341	0.0054	0.8723	0.0449	0.0028	0.1161	0.0899	0.0124
3	100	0.90	0.10	0.05	0.8939	0.0331	0.0011	0.8931	0.0301	0.0010	0.8939	0.0331	0.0011	0.1151	0.0827	0.0071
3	100	0.90	0.10	0.10	0.8872	0.0420	0.0019	0.8730	0.0317	0.0017	0.8872	0.0420	0.0019	0.1342	0.0988	0.0109
3	100	0.90	0.10	0.15	0.8706	0.0590	0.0044	0.8393	0.0342	0.0049	0.8706	0.0590	0.0043	0.1579	0.1155	0.0167
3	100	0.90	0.15	0.05	0.8940	0.0373	0.0014	0.8985	0.0292	0.0009	0.8940	0.0373	0.0014	0.1637	0.1039	0.0110
3	100	0.90	0.15	0.10	0.8844	0.0509	0.0028	0.8775	0.0319	0.0015	0.8844	0.0509	0.0028	0.1794	0.1199	0.0152
3	100	0.90	0.15	0.15	0.8636	0.0767	0.0072	0.8435	0.0338	0.0043	0.8636	0.0767	0.0072	0.2035	0.1370	0.0216
5	50	0.70	0.05	0.05	0.6982	0.0653	0.0043	0.6972	0.0645	0.0042	0.6976	0.0649	0.0042	0.0533	0.0247	0.0006
5	50	0.70	0.05	0.10	0.6996	0.0671	0.0045	0.6929	0.0659	0.0044	0.6981	0.0662	0.0044	0.0525	0.0268	0.0007

5	50	0.70	0.05	0.15	0.7009	0.0690	0.0048	0.6815	0.0673	0.0049	0.6963	0.0672	0.0045	0.0549	0.0315	0.0010
5	50	0.70	0.10	0.05	0.7040	0.0656	0.0043	0.7063	0.0643	0.0042	0.7044	0.0649	0.0042	0.0919	0.0353	0.0013
5	50	0.70	0.10	0.10	0.7019	0.0680	0.0046	0.6990	0.0653	0.0043	0.7016	0.0671	0.0045	0.0957	0.0404	0.0016
5	50	0.70	0.10	0.15	0.6988	0.0722	0.0052	0.6841	0.0676	0.0048	0.6978	0.0705	0.0050	0.1048	0.0470	0.0022
5	50	0.70	0.15	0.05	0.7067	0.0672	0.0046	0.7147	0.0641	0.0043	0.7080	0.0661	0.0044	0.1369	0.0464	0.0023
5	50	0.70	0.15	0.10	0.7049	0.0705	0.0050	0.7088	0.0652	0.0043	0.7051	0.0692	0.0048	0.1428	0.0524	0.0028
5	50	0.70	0.15	0.15	0.6956	0.0740	0.0055	0.6884	0.0655	0.0044	0.6957	0.0728	0.0053	0.1550	0.0587	0.0035
5	50	0.80	0.05	0.05	0.7959	0.0555	0.0031	0.7948	0.0549	0.0030	0.7952	0.0550	0.0031	0.0584	0.0305	0.0010
5	50	0.80	0.05	0.10	0.7977	0.0577	0.0033	0.7902	0.0570	0.0033	0.7964	0.0570	0.0033	0.0582	0.0354	0.0013
5	50	0.80	0.05	0.15	0.7967	0.0593	0.0035	0.7765	0.0588	0.0040	0.7939	0.0586	0.0035	0.0619	0.0443	0.0021
5	50	0.80	0.10	0.05	0.8007	0.0563	0.0032	0.8023	0.0554	0.0031	0.8010	0.0559	0.0031	0.0959	0.0423	0.0018
5	50	0.80	0.10	0.10	0.8010	0.0591	0.0035	0.7967	0.0560	0.0031	0.8000	0.0572	0.0033	0.0997	0.0506	0.0026
5	50	0.80	0.10	0.15	0.7943	0.0633	0.0040	0.7785	0.0588	0.0039	0.7921	0.0612	0.0038	0.1131	0.0645	0.0043
5	50	0.80	0.15	0.05	0.8052	0.0569	0.0033	0.8100	0.0546	0.0031	0.8057	0.0563	0.0032	0.1323	0.0544	0.0033
5	50	0.80	0.15	0.10	0.8022	0.0621	0.0039	0.8029	0.0558	0.0031	0.8016	0.0607	0.0037	0.1439	0.0648	0.0042
5	50	0.80	0.15	0.15	0.7912	0.0686	0.0048	0.7818	0.0577	0.0037	0.7901	0.0682	0.0047	0.1635	0.0799	0.0066
5	50	0.90	0.05	0.05	0.8908	0.0415	0.0018	0.8902	0.0413	0.0018	0.8904	0.0414	0.0018	0.0749	0.0466	0.0028
5	50	0.90	0.05	0.10	0.8904	0.0418	0.0018	0.8835	0.0416	0.0020	0.8900	0.0426	0.0019	0.0746	0.0643	0.0047
5	50	0.90	0.05	0.15	0.8816	0.0468	0.0025	0.8627	0.0455	0.0035	0.8828	0.0503	0.0028	0.0889	0.0897	0.0095
5	50	0.90	0.10	0.05	0.8921	0.0405	0.0017	0.8931	0.0391	0.0016	0.8922	0.0396	0.0016	0.1043	0.0576	0.0033
5	50	0.90	0.10	0.10	0.8926	0.0431	0.0019	0.8884	0.0401	0.0017	0.8916	0.0438	0.0020	0.1145	0.0794	0.0065
5	50	0.90	0.10	0.15	0.8831	0.0544	0.0032	0.8686	0.0449	0.0030	0.8808	0.0597	0.0039	0.1396	0.1062	0.0128
5	50	0.90	0.15	0.05	0.8950	0.0402	0.0016	0.8976	0.0379	0.0014	0.8949	0.0402	0.0016	0.1317	0.0694	0.0051
5	50	0.90	0.15	0.10	0.8932	0.0456	0.0021	0.8927	0.0392	0.0016	0.8916	0.0482	0.0024	0.1522	0.0995	0.0099

5	50	0.90	0.15	0.15	0.8786	0.0624	0.0044	0.8715	0.0440	0.0028	0.8755	0.0687	0.0053	0.1864	0.1229	0.0164
5	100	0.70	0.05	0.05	0.6997	0.0465	0.0022	0.6990	0.0462	0.0021	0.6995	0.0464	0.0021	0.0488	0.0167	0.0003
5	100	0.70	0.05	0.10	0.7019	0.0471	0.0022	0.6953	0.0464	0.0022	0.7008	0.0464	0.0021	0.0497	0.0194	0.0004
5	100	0.70	0.05	0.15	0.7004	0.0492	0.0024	0.6794	0.0480	0.0027	0.6969	0.0473	0.0022	0.0534	0.0229	0.0005
5	100	0.70	0.10	0.05	0.7025	0.0472	0.0022	0.7049	0.0467	0.0022	0.7029	0.0471	0.0022	0.0936	0.0272	0.0008
5	100	0.70	0.10	0.10	0.7016	0.0489	0.0024	0.6972	0.0468	0.0022	0.7009	0.0480	0.0023	0.0991	0.0304	0.0009
5	100	0.70	0.10	0.15	0.6968	0.0493	0.0024	0.6788	0.0461	0.0026	0.6964	0.0483	0.0023	0.1055	0.0327	0.0011
5	100	0.70	0.15	0.05	0.7027	0.0476	0.0023	0.7115	0.0452	0.0022	0.7030	0.0472	0.0022	0.1430	0.0330	0.0011
5	100	0.70	0.15	0.10	0.7003	0.0494	0.0024	0.7038	0.0451	0.0020	0.7004	0.0482	0.0023	0.1515	0.0374	0.0014
5	100	0.70	0.15	0.15	0.6948	0.0509	0.0026	0.6856	0.0447	0.0022	0.6949	0.0501	0.0025	0.1587	0.0390	0.0016
5	100	0.80	0.05	0.05	0.7993	0.0404	0.0016	0.7983	0.0398	0.0016	0.7989	0.0399	0.0016	0.0512	0.0208	0.0004
5	100	0.80	0.05	0.10	0.8030	0.0411	0.0017	0.7948	0.0407	0.0017	0.8008	0.0404	0.0016	0.0512	0.0252	0.0006
5	100	0.80	0.05	0.15	0.8005	0.0429	0.0018	0.7761	0.0424	0.0024	0.7964	0.0413	0.0017	0.0560	0.0306	0.0010
5	100	0.80	0.10	0.05	0.8024	0.0416	0.0017	0.8039	0.0404	0.0017	0.8028	0.0410	0.0017	0.0919	0.0318	0.0011
5	100	0.80	0.10	0.10	0.8028	0.0424	0.0018	0.7966	0.0411	0.0017	0.8016	0.0415	0.0017	0.0984	0.0371	0.0014
5	100	0.80	0.10	0.15	0.7977	0.0448	0.0020	0.7762	0.0415	0.0023	0.7963	0.0429	0.0019	0.1086	0.0440	0.0020
5	100	0.80	0.15	0.05	0.8032	0.0411	0.0017	0.8091	0.0393	0.0016	0.8035	0.0409	0.0017	0.1409	0.0419	0.0018
5	100	0.80	0.15	0.10	0.8004	0.0443	0.0020	0.7994	0.0397	0.0016	0.8000	0.0428	0.0018	0.1506	0.0474	0.0022
5	100	0.80	0.15	0.15	0.7930	0.0473	0.0023	0.7795	0.0406	0.0021	0.7929	0.0460	0.0022	0.1641	0.0530	0.0030
5	100	0.90	0.05	0.05	0.8979	0.0298	0.0009	0.8968	0.0296	0.0009	0.8976	0.0297	0.0009	0.0615	0.0326	0.0012
5	100	0.90	0.05	0.10	0.8987	0.0303	0.0009	0.8902	0.0306	0.0010	0.8968	0.0301	0.0009	0.0615	0.0421	0.0019
5	100	0.90	0.05	0.15	0.8959	0.0331	0.0011	0.8709	0.0331	0.0019	0.8950	0.0323	0.0011	0.0702	0.0550	0.0034
5	100	0.90	0.10	0.05	0.9007	0.0300	0.0009	0.9008	0.0290	0.0008	0.9006	0.0294	0.0009	0.0957	0.0439	0.0019
5	100	0.90	0.10	0.10	0.9008	0.0321	0.0010	0.8937	0.0307	0.0010	0.8991	0.0308	0.0010	0.1062	0.0571	0.0033

5	100	0.90	0.10	0.15	0.8940	0.0380	0.0015	0.8724	0.0336	0.0019	0.8922	0.0351	0.0013	0.1278	0.0744	0.0063
5	100	0.90	0.15	0.05	0.9032	0.0305	0.0009	0.9057	0.0288	0.0009	0.9033	0.0300	0.0009	0.1353	0.0584	0.0036
5	100	0.90	0.15	0.10	0.9011	0.0341	0.0012	0.8968	0.0301	0.0009	0.8996	0.0324	0.0011	0.1558	0.0739	0.0055
5	100	0.90	0.15	0.15	0.8906	0.0430	0.0019	0.8742	0.0325	0.0017	0.8889	0.0415	0.0018	0.1820	0.0893	0.0090
7	50	0.70	0.05	0.05	0.6997	0.0661	0.0044	0.6994	0.0658	0.0043	0.6994	0.0658	0.0043	0.0500	0.0212	0.0005
7	50	0.70	0.05	0.10	0.7001	0.0660	0.0044	0.6964	0.0655	0.0043	0.6982	0.0654	0.0043	0.0516	0.0217	0.0005
7	50	0.70	0.05	0.15	0.6990	0.0641	0.0041	0.6894	0.0634	0.0041	0.6974	0.0633	0.0040	0.0522	0.0223	0.0005
7	50	0.70	0.10	0.05	0.7005	0.0646	0.0042	0.7023	0.0637	0.0041	0.7014	0.0640	0.0041	0.0976	0.0297	0.0009
7	50	0.70	0.10	0.10	0.7007	0.0666	0.0044	0.6992	0.0650	0.0042	0.7000	0.0655	0.0043	0.0978	0.0302	0.0009
7	50	0.70	0.10	0.15	0.6982	0.0669	0.0045	0.6899	0.0648	0.0043	0.6973	0.0653	0.0043	0.0984	0.0335	0.0011
7	50	0.70	0.15	0.05	0.7024	0.0650	0.0042	0.7075	0.0639	0.0041	0.7038	0.0643	0.0041	0.1442	0.0367	0.0014
7	50	0.70	0.15	0.10	0.7047	0.0678	0.0046	0.7059	0.0648	0.0042	0.7039	0.0662	0.0044	0.1438	0.0373	0.0014
7	50	0.70	0.15	0.15	0.6964	0.0689	0.0048	0.6925	0.0657	0.0044	0.6963	0.0679	0.0046	0.1485	0.0411	0.0017
7	50	0.80	0.05	0.05	0.7975	0.0554	0.0031	0.7968	0.0549	0.0030	0.7969	0.0550	0.0030	0.0529	0.0249	0.0006
7	50	0.80	0.05	0.10	0.7970	0.0566	0.0032	0.7929	0.0563	0.0032	0.7950	0.0561	0.0032	0.0560	0.0269	0.0008
7	50	0.80	0.05	0.15	0.7969	0.0559	0.0031	0.7859	0.0559	0.0033	0.7956	0.0554	0.0031	0.0580	0.0289	0.0009
7	50	0.80	0.10	0.05	0.7993	0.0562	0.0032	0.8005	0.0553	0.0031	0.7998	0.0555	0.0031	0.0980	0.0366	0.0013
7	50	0.80	0.10	0.10	0.8001	0.0571	0.0033	0.7979	0.0563	0.0032	0.7991	0.0565	0.0032	0.0992	0.0386	0.0015
7	50	0.80	0.10	0.15	0.8002	0.0589	0.0035	0.7912	0.0574	0.0034	0.7995	0.0575	0.0033	0.0983	0.0424	0.0018
7	50	0.80	0.15	0.05	0.8007	0.0566	0.0032	0.8041	0.0549	0.0030	0.8014	0.0555	0.0031	0.1426	0.0431	0.0019
7	50	0.80	0.15	0.10	0.8015	0.0562	0.0032	0.8017	0.0542	0.0029	0.8007	0.0552	0.0030	0.1458	0.0461	0.0021
7	50	0.80	0.15	0.15	0.7978	0.0605	0.0037	0.7921	0.0565	0.0033	0.7977	0.0589	0.0035	0.1485	0.0546	0.0030
7	50	0.90	0.05	0.05	0.8927	0.0403	0.0017	0.8921	0.0401	0.0017	0.8920	0.0400	0.0017	0.0643	0.0357	0.0015
7	50	0.90	0.05	0.10	0.8906	0.0406	0.0017	0.8878	0.0398	0.0017	0.8899	0.0412	0.0018	0.0690	0.0446	0.0024

7	50	0.90	0.05	0.15	0.8881	0.0447	0.0021	0.8778	0.0426	0.0023	0.8889	0.0444	0.0021	0.0709	0.0502	0.0030
7	50	0.90	0.10	0.05	0.8937	0.0408	0.0017	0.8942	0.0400	0.0016	0.8935	0.0400	0.0016	0.1011	0.0489	0.0024
7	50	0.90	0.10	0.10	0.8944	0.0402	0.0016	0.8923	0.0389	0.0016	0.8937	0.0391	0.0016	0.1067	0.0571	0.0033
7	50	0.90	0.10	0.15	0.8914	0.0460	0.0022	0.8827	0.0401	0.0019	0.8905	0.0444	0.0021	0.1128	0.0682	0.0048
7	50	0.90	0.15	0.05	0.8937	0.0405	0.0017	0.8952	0.0390	0.0015	0.8933	0.0393	0.0016	0.1390	0.0599	0.0037
7	50	0.90	0.15	0.10	0.8928	0.0428	0.0019	0.8917	0.0388	0.0016	0.8913	0.0416	0.0018	0.1445	0.0706	0.0050
7	50	0.90	0.15	0.15	0.8906	0.0486	0.0024	0.8829	0.0415	0.0020	0.8881	0.0481	0.0025	0.1562	0.0863	0.0075
7	100	0.70	0.05	0.05	0.7015	0.0447	0.0020	0.7010	0.0445	0.0020	0.7011	0.0445	0.0020	0.0495	0.0154	0.0002
7	100	0.70	0.05	0.10	0.7004	0.0457	0.0021	0.6975	0.0456	0.0021	0.6997	0.0456	0.0021	0.0495	0.0157	0.0002
7	100	0.70	0.05	0.15	0.7018	0.0465	0.0022	0.6928	0.0463	0.0022	0.7005	0.0457	0.0021	0.0494	0.0159	0.0003
7	100	0.70	0.10	0.05	0.7003	0.0464	0.0021	0.7018	0.0458	0.0021	0.7009	0.0460	0.0021	0.0973	0.0203	0.0004
7	100	0.70	0.10	0.10	0.7006	0.0468	0.0022	0.6991	0.0461	0.0021	0.7002	0.0464	0.0021	0.0983	0.0213	0.0005
7	100	0.70	0.10	0.15	0.6997	0.0477	0.0023	0.6917	0.0468	0.0023	0.6997	0.0469	0.0022	0.0998	0.0244	0.0006
7	100	0.70	0.15	0.05	0.7007	0.0466	0.0022	0.7052	0.0460	0.0021	0.7017	0.0463	0.0021	0.1449	0.0254	0.0007
7	100	0.70	0.15	0.10	0.7013	0.0462	0.0021	0.7036	0.0449	0.0020	0.7013	0.0458	0.0021	0.1466	0.0272	0.0007
7	100	0.70	0.15	0.15	0.6989	0.0481	0.0023	0.6942	0.0458	0.0021	0.6991	0.0472	0.0022	0.1505	0.0295	0.0009
7	100	0.80	0.05	0.05	0.8022	0.0397	0.0016	0.8015	0.0395	0.0016	0.8016	0.0395	0.0016	0.0499	0.0185	0.0003
7	100	0.80	0.05	0.10	0.7993	0.0400	0.0016	0.7958	0.0397	0.0016	0.7983	0.0394	0.0016	0.0509	0.0187	0.0004
7	100	0.80	0.05	0.15	0.8006	0.0416	0.0017	0.7903	0.0410	0.0018	0.7987	0.0402	0.0016	0.0506	0.0199	0.0004
7	100	0.80	0.10	0.05	0.8003	0.0410	0.0017	0.8010	0.0404	0.0016	0.8004	0.0406	0.0017	0.0990	0.0254	0.0006
7	100	0.80	0.10	0.10	0.7998	0.0420	0.0018	0.7979	0.0412	0.0017	0.7994	0.0414	0.0017	0.0986	0.0274	0.0008
7	100	0.80	0.10	0.15	0.8013	0.0426	0.0018	0.7917	0.0414	0.0018	0.8008	0.0413	0.0017	0.0985	0.0300	0.0009
7	100	0.80	0.15	0.05	0.8029	0.0401	0.0016	0.8060	0.0392	0.0016	0.8035	0.0395	0.0016	0.1451	0.0322	0.0011
7	100	0.80	0.15	0.10	0.8031	0.0407	0.0017	0.8034	0.0391	0.0015	0.8028	0.0399	0.0016	0.1458	0.0336	0.0011

7	100	0.80	0.15	0.15	0.7980	0.0429	0.0018	0.7915	0.0404	0.0017	0.7983	0.0415	0.0017	0.1518	0.0390	0.0015
7	100	0.90	0.05	0.05	0.8980	0.0297	0.0009	0.8973	0.0295	0.0009	0.8974	0.0295	0.0009	0.0554	0.0261	0.0007
7	100	0.90	0.05	0.10	0.8965	0.0307	0.0010	0.8931	0.0304	0.0010	0.8958	0.0303	0.0009	0.0577	0.0271	0.0008
7	100	0.90	0.05	0.15	0.8973	0.0305	0.0009	0.8864	0.0308	0.0011	0.8966	0.0300	0.0009	0.0572	0.0293	0.0009
7	100	0.90	0.10	0.05	0.8996	0.0299	0.0009	0.8995	0.0294	0.0009	0.8992	0.0295	0.0009	0.0992	0.0369	0.0014
7	100	0.90	0.10	0.10	0.8998	0.0304	0.0009	0.8971	0.0296	0.0009	0.8992	0.0296	0.0009	0.1011	0.0397	0.0016
7	100	0.90	0.10	0.15	0.9011	0.0318	0.0010	0.8894	0.0311	0.0011	0.8993	0.0302	0.0009	0.1026	0.0465	0.0022
7	100	0.90	0.15	0.05	0.9012	0.0302	0.0009	0.9026	0.0291	0.0009	0.9012	0.0296	0.0009	0.1427	0.0438	0.0020
7	100	0.90	0.15	0.10	0.9006	0.0322	0.0010	0.8995	0.0301	0.0009	0.9000	0.0308	0.0009	0.1472	0.0509	0.0026
7	100	0.90	0.15	0.15	0.9005	0.0350	0.0012	0.8908	0.0317	0.0011	0.8992	0.0322	0.0010	0.1520	0.0622	0.0039

Tabela 3: EQM, valor médio e desvio padrão (DP) para as estimativas de e_1 considerando a função χ^2 logito no método MQQ.

r	n	π_c	α	β	MM			MS			MV			MQQ		
					Média	DP	EQM									
3	50	0.70	0.05	0.05	0.6952	0.0655	0.0043	0.6933	0.0640	0.0041	0.6952	0.0655	0.0043	0.0498	0.0235	0.0006
3	50	0.70	0.05	0.10	0.6904	0.0684	0.0048	0.6762	0.0641	0.0047	0.6904	0.0684	0.0048	0.0940	0.0344	0.0012
3	50	0.70	0.05	0.15	0.6819	0.0724	0.0056	0.6515	0.0640	0.0064	0.6819	0.0724	0.0056	0.1364	0.0412	0.0019
3	50	0.70	0.10	0.05	0.6982	0.0675	0.0046	0.7042	0.0631	0.0040	0.6982	0.0675	0.0046	0.0493	0.0250	0.0006
3	50	0.70	0.10	0.10	0.6938	0.0732	0.0054	0.6861	0.0642	0.0043	0.6938	0.0732	0.0054	0.0977	0.0372	0.0014
3	50	0.70	0.10	0.15	0.6864	0.0807	0.0067	0.6609	0.0631	0.0055	0.6864	0.0807	0.0067	0.1427	0.0470	0.0023
3	50	0.70	0.15	0.05	0.6973	0.0728	0.0053	0.7136	0.0640	0.0043	0.6973	0.0728	0.0053	0.0503	0.0268	0.0007
3	50	0.70	0.15	0.10	0.6921	0.0850	0.0073	0.6966	0.0661	0.0044	0.6921	0.0850	0.0073	0.0982	0.0415	0.0017

3	50	0.70	0.15	0.15	0.0098	0.6716	0.0653	0.0051	0.6832	0.0977	0.0098	0.1419	0.0526	0.0028
3	50	0.80	0.05	0.05	0.0033	0.7906	0.0557	0.0032	0.7932	0.0572	0.0033	0.0492	0.0217	0.0005
3	50	0.80	0.05	0.10	0.0040	0.7689	0.0573	0.0042	0.7837	0.0612	0.0040	0.0918	0.0306	0.0010
3	50	0.80	0.05	0.15	0.0055	0.7387	0.0586	0.0072	0.7700	0.0680	0.0055	0.1339	0.0384	0.0017
3	50	0.80	0.10	0.05	0.0034	0.7978	0.0541	0.0029	0.7950	0.0583	0.0034	0.0497	0.0236	0.0006
3	50	0.80	0.10	0.10	0.0046	0.7754	0.0561	0.0038	0.7835	0.0656	0.0046	0.0934	0.0336	0.0012
3	50	0.80	0.10	0.15	0.0070	0.7443	0.0569	0.0063	0.7687	0.0773	0.0070	0.1369	0.0428	0.0020
3	50	0.80	0.15	0.05	0.0042	0.8047	0.0548	0.0030	0.7918	0.0645	0.0042	0.0486	0.0246	0.0006
3	50	0.80	0.15	0.10	0.0063	0.7851	0.0558	0.0033	0.7804	0.0767	0.0063	0.0920	0.0359	0.0014
3	50	0.80	0.15	0.15	0.0104	0.7543	0.0589	0.0056	0.7651	0.0956	0.0104	0.1358	0.0459	0.0023
3	50	0.90	0.05	0.05	0.0020	0.8833	0.0406	0.0019	0.8851	0.0424	0.0020	0.0477	0.0199	0.0004
3	50	0.90	0.05	0.10	0.0034	0.8622	0.0443	0.0034	0.8733	0.0520	0.0034	0.0874	0.0284	0.0010
3	50	0.90	0.05	0.15	0.0085	0.8272	0.0476	0.0076	0.8474	0.0760	0.0085	0.1271	0.0372	0.0019
3	50	0.90	0.10	0.05	0.0024	0.8865	0.0400	0.0018	0.8835	0.0457	0.0024	0.0479	0.0207	0.0004
3	50	0.90	0.10	0.10	0.0048	0.8643	0.0434	0.0032	0.8689	0.0617	0.0048	0.0892	0.0301	0.0010
3	50	0.90	0.10	0.15	0.0120	0.8306	0.0477	0.0071	0.8396	0.0914	0.0120	0.1253	0.0403	0.0022
3	50	0.90	0.15	0.05	0.0030	0.8911	0.0390	0.0016	0.8820	0.0520	0.0030	0.0472	0.0221	0.0005
3	50	0.90	0.15	0.10	0.0063	0.8690	0.0421	0.0027	0.8657	0.0718	0.0063	0.0894	0.0328	0.0012
3	50	0.90	0.15	0.15	0.0154	0.8356	0.0466	0.0063	0.8339	0.1050	0.0154	0.1268	0.0422	0.0023
3	100	0.70	0.05	0.05	0.0022	0.6975	0.0457	0.0021	0.7003	0.0467	0.0022	0.0499	0.0170	0.0003
3	100	0.70	0.05	0.10	0.0025	0.6808	0.0463	0.0025	0.6977	0.0495	0.0025	0.0987	0.0247	0.0006
3	100	0.70	0.05	0.15	0.0028	0.6555	0.0462	0.0041	0.6924	0.0528	0.0028	0.1444	0.0314	0.0010
3	100	0.70	0.10	0.05	0.0023	0.7043	0.0445	0.0020	0.7001	0.0475	0.0023	0.0503	0.0183	0.0003
3	100	0.70	0.10	0.10	0.0028	0.6893	0.0462	0.0022	0.6998	0.0534	0.0028	0.1000	0.0272	0.0007

3	100	0.70	0.10	0.15	0.6952	0.0595	0.0036	0.6637	0.0465	0.0035	0.6952	0.0595	0.0036	0.1475	0.0347	0.0012
3	100	0.70	0.15	0.05	0.6966	0.0514	0.0027	0.7121	0.0451	0.0022	0.6966	0.0514	0.0027	0.0495	0.0196	0.0004
3	100	0.70	0.15	0.10	0.6978	0.0585	0.0034	0.6994	0.0453	0.0021	0.6978	0.0585	0.0034	0.0990	0.0294	0.0009
3	100	0.70	0.15	0.15	0.6931	0.0713	0.0051	0.6741	0.0465	0.0028	0.6931	0.0713	0.0051	0.1469	0.0390	0.0015
3	100	0.80	0.05	0.05	0.7970	0.0404	0.0016	0.7932	0.0394	0.0016	0.7970	0.0404	0.0016	0.0492	0.0154	0.0002
3	100	0.80	0.05	0.10	0.7926	0.0429	0.0019	0.7744	0.0400	0.0023	0.7926	0.0429	0.0019	0.0958	0.0227	0.0005
3	100	0.80	0.05	0.15	0.7858	0.0476	0.0025	0.7460	0.0413	0.0046	0.7858	0.0476	0.0025	0.1416	0.0278	0.0008
3	100	0.80	0.10	0.05	0.7985	0.0440	0.0019	0.8000	0.0409	0.0017	0.7985	0.0440	0.0019	0.0495	0.0165	0.0003
3	100	0.80	0.10	0.10	0.7962	0.0469	0.0022	0.7822	0.0400	0.0019	0.7962	0.0469	0.0022	0.0975	0.0240	0.0006
3	100	0.80	0.10	0.15	0.7889	0.0547	0.0031	0.7529	0.0412	0.0039	0.7889	0.0547	0.0031	0.1448	0.0306	0.0010
3	100	0.80	0.15	0.05	0.7964	0.0469	0.0022	0.8062	0.0393	0.0016	0.7964	0.0469	0.0022	0.0492	0.0178	0.0003
3	100	0.80	0.15	0.10	0.7940	0.0543	0.0030	0.7891	0.0401	0.0017	0.7940	0.0543	0.0030	0.0982	0.0268	0.0007
3	100	0.80	0.15	0.15	0.7857	0.0691	0.0050	0.7608	0.0420	0.0033	0.7857	0.0691	0.0050	0.1446	0.0352	0.0013
3	100	0.90	0.05	0.05	0.8951	0.0318	0.0010	0.8909	0.0306	0.0010	0.8951	0.0318	0.0010	0.0483	0.0141	0.0002
3	100	0.90	0.05	0.10	0.8866	0.0356	0.0014	0.8681	0.0317	0.0020	0.8866	0.0356	0.0014	0.0936	0.0205	0.0005
3	100	0.90	0.05	0.15	0.8723	0.0449	0.0028	0.8345	0.0341	0.0054	0.8723	0.0449	0.0028	0.1371	0.0262	0.0009
3	100	0.90	0.10	0.05	0.8939	0.0331	0.0011	0.8931	0.0301	0.0010	0.8939	0.0331	0.0011	0.0490	0.0151	0.0002
3	100	0.90	0.10	0.10	0.8872	0.0420	0.0019	0.8730	0.0317	0.0017	0.8872	0.0420	0.0019	0.0948	0.0227	0.0005
3	100	0.90	0.10	0.15	0.8706	0.0590	0.0044	0.8393	0.0342	0.0049	0.8706	0.0590	0.0043	0.1383	0.0291	0.0010
3	100	0.90	0.15	0.05	0.8940	0.0373	0.0014	0.8985	0.0292	0.0009	0.8940	0.0373	0.0014	0.0486	0.0157	0.0002
3	100	0.90	0.15	0.10	0.8844	0.0509	0.0028	0.8775	0.0319	0.0015	0.8844	0.0509	0.0028	0.0938	0.0237	0.0006
3	100	0.90	0.15	0.15	0.8636	0.0767	0.0072	0.8435	0.0338	0.0043	0.8636	0.0767	0.0072	0.1375	0.0318	0.0012
5	50	0.70	0.05	0.05	0.6982	0.0653	0.0043	0.6972	0.0645	0.0042	0.6976	0.0649	0.0042	0.0469	0.0164	0.0003
5	50	0.70	0.05	0.10	0.6996	0.0671	0.0045	0.6929	0.0659	0.0044	0.6981	0.0662	0.0044	0.0942	0.0252	0.0007

5	50	0.70	0.05	0.15	0.7009	0.0690	0.0048	0.6815	0.0673	0.0049	0.6963	0.0672	0.0045	0.1409	0.0282	0.0009
5	50	0.70	0.10	0.05	0.7040	0.0656	0.0043	0.7063	0.0643	0.0042	0.7044	0.0649	0.0042	0.0472	0.0169	0.0003
5	50	0.70	0.10	0.10	0.7019	0.0680	0.0046	0.6990	0.0653	0.0043	0.7016	0.0671	0.0045	0.0950	0.0258	0.0007
5	50	0.70	0.10	0.15	0.6988	0.0722	0.0052	0.6841	0.0676	0.0048	0.6978	0.0705	0.0050	0.1429	0.0305	0.0010
5	50	0.70	0.15	0.05	0.7067	0.0672	0.0046	0.7147	0.0641	0.0043	0.7080	0.0661	0.0044	0.0484	0.0184	0.0003
5	50	0.70	0.15	0.10	0.7049	0.0705	0.0050	0.7088	0.0652	0.0043	0.7051	0.0692	0.0048	0.0995	0.0274	0.0007
5	50	0.70	0.15	0.15	0.6956	0.0740	0.0055	0.6884	0.0655	0.0044	0.6957	0.0728	0.0053	0.1464	0.0319	0.0010
5	50	0.80	0.05	0.05	0.7959	0.0555	0.0031	0.7948	0.0549	0.0030	0.7952	0.0550	0.0031	0.0459	0.0159	0.0003
5	50	0.80	0.05	0.10	0.7977	0.0577	0.0033	0.7902	0.0570	0.0033	0.7964	0.0570	0.0033	0.0953	0.0233	0.0006
5	50	0.80	0.05	0.15	0.7967	0.0593	0.0035	0.7765	0.0588	0.0040	0.7939	0.0586	0.0035	0.1402	0.0275	0.0009
5	50	0.80	0.10	0.05	0.8007	0.0563	0.0032	0.8023	0.0554	0.0031	0.8010	0.0559	0.0031	0.0468	0.0169	0.0003
5	50	0.80	0.10	0.10	0.8010	0.0591	0.0035	0.7967	0.0560	0.0031	0.8000	0.0572	0.0033	0.0951	0.0245	0.0006
5	50	0.80	0.10	0.15	0.7943	0.0633	0.0040	0.7785	0.0588	0.0039	0.7921	0.0612	0.0038	0.1407	0.0279	0.0009
5	50	0.80	0.15	0.05	0.8052	0.0569	0.0033	0.8100	0.0546	0.0031	0.8057	0.0563	0.0032	0.0483	0.0187	0.0004
5	50	0.80	0.15	0.10	0.8022	0.0621	0.0039	0.8029	0.0558	0.0031	0.8016	0.0607	0.0037	0.0974	0.0253	0.0006
5	50	0.80	0.15	0.15	0.7912	0.0686	0.0048	0.7818	0.0577	0.0037	0.7901	0.0682	0.0047	0.1441	0.0304	0.0010
5	50	0.90	0.05	0.05	0.8908	0.0415	0.0018	0.8902	0.0413	0.0018	0.8904	0.0414	0.0018	0.0452	0.0193	0.0004
5	50	0.90	0.05	0.10	0.8904	0.0418	0.0018	0.8835	0.0416	0.0020	0.8900	0.0426	0.0019	0.0951	0.0229	0.0005
5	50	0.90	0.05	0.15	0.8816	0.0468	0.0025	0.8627	0.0455	0.0035	0.8828	0.0503	0.0028	0.1414	0.0273	0.0008
5	50	0.90	0.10	0.05	0.8921	0.0405	0.0017	0.8931	0.0391	0.0016	0.8922	0.0396	0.0016	0.0464	0.0198	0.0004
5	50	0.90	0.10	0.10	0.8926	0.0431	0.0019	0.8884	0.0401	0.0017	0.8916	0.0438	0.0020	0.0948	0.0239	0.0006
5	50	0.90	0.10	0.15	0.8831	0.0544	0.0032	0.8686	0.0449	0.0030	0.8808	0.0597	0.0039	0.1403	0.0284	0.0009
5	50	0.90	0.15	0.05	0.8950	0.0402	0.0016	0.8976	0.0379	0.0014	0.8949	0.0402	0.0016	0.0466	0.0196	0.0004
5	50	0.90	0.15	0.10	0.8932	0.0456	0.0021	0.8927	0.0392	0.0016	0.8916	0.0482	0.0024	0.0952	0.0249	0.0006

5	50	0.90	0.15	0.15	0.8786	0.0624	0.0044	0.8715	0.0440	0.0028	0.8755	0.0687	0.0053	0.1388	0.0300	0.0010
5	100	0.70	0.05	0.05	0.6997	0.0465	0.0022	0.6990	0.0462	0.0021	0.6995	0.0464	0.0021	0.0473	0.0121	0.0002
5	100	0.70	0.05	0.10	0.7019	0.0471	0.0022	0.6953	0.0464	0.0022	0.7008	0.0464	0.0021	0.0962	0.0172	0.0003
5	100	0.70	0.05	0.15	0.7004	0.0492	0.0024	0.6794	0.0480	0.0027	0.6969	0.0473	0.0022	0.1438	0.0207	0.0005
5	100	0.70	0.10	0.05	0.7025	0.0472	0.0022	0.7049	0.0467	0.0022	0.7029	0.0471	0.0022	0.0482	0.0131	0.0002
5	100	0.70	0.10	0.10	0.7016	0.0489	0.0024	0.6972	0.0468	0.0022	0.7009	0.0480	0.0023	0.0995	0.0181	0.0003
5	100	0.70	0.10	0.15	0.6968	0.0493	0.0024	0.6788	0.0461	0.0026	0.6964	0.0483	0.0023	0.1474	0.0212	0.0005
5	100	0.70	0.15	0.05	0.7027	0.0476	0.0023	0.7115	0.0452	0.0022	0.7030	0.0472	0.0022	0.0500	0.0140	0.0002
5	100	0.70	0.15	0.10	0.7003	0.0494	0.0024	0.7038	0.0451	0.0020	0.7004	0.0482	0.0023	0.1012	0.0191	0.0004
5	100	0.70	0.15	0.15	0.6948	0.0509	0.0026	0.6856	0.0447	0.0022	0.6949	0.0501	0.0025	0.1491	0.0231	0.0005
5	100	0.80	0.05	0.05	0.7993	0.0404	0.0016	0.7983	0.0398	0.0016	0.7989	0.0399	0.0016	0.0474	0.0122	0.0002
5	100	0.80	0.05	0.10	0.8030	0.0411	0.0017	0.7948	0.0407	0.0017	0.8008	0.0404	0.0016	0.0959	0.0164	0.0003
5	100	0.80	0.05	0.15	0.8005	0.0429	0.0018	0.7761	0.0424	0.0024	0.7964	0.0413	0.0017	0.1439	0.0200	0.0004
5	100	0.80	0.10	0.05	0.8024	0.0416	0.0017	0.8039	0.0404	0.0017	0.8028	0.0410	0.0017	0.0484	0.0127	0.0002
5	100	0.80	0.10	0.10	0.8028	0.0424	0.0018	0.7966	0.0411	0.0017	0.8016	0.0415	0.0017	0.0973	0.0174	0.0003
5	100	0.80	0.10	0.15	0.7977	0.0448	0.0020	0.7762	0.0415	0.0023	0.7963	0.0429	0.0019	0.1461	0.0207	0.0004
5	100	0.80	0.15	0.05	0.8032	0.0411	0.0017	0.8091	0.0393	0.0016	0.8035	0.0409	0.0017	0.0492	0.0133	0.0002
5	100	0.80	0.15	0.10	0.8004	0.0443	0.0020	0.7994	0.0397	0.0016	0.8000	0.0428	0.0018	0.0999	0.0183	0.0003
5	100	0.80	0.15	0.15	0.7930	0.0473	0.0023	0.7795	0.0406	0.0021	0.7929	0.0460	0.0022	0.1478	0.0213	0.0005
5	100	0.90	0.05	0.05	0.8979	0.0298	0.0009	0.8968	0.0296	0.0009	0.8976	0.0297	0.0009	0.0473	0.0137	0.0002
5	100	0.90	0.05	0.10	0.8987	0.0303	0.0009	0.8902	0.0306	0.0010	0.8968	0.0301	0.0009	0.0950	0.0162	0.0003
5	100	0.90	0.05	0.15	0.8959	0.0331	0.0011	0.8709	0.0331	0.0019	0.8950	0.0323	0.0011	0.1452	0.0194	0.0004
5	100	0.90	0.10	0.05	0.9007	0.0300	0.0009	0.9008	0.0290	0.0008	0.9006	0.0294	0.0009	0.0475	0.0140	0.0002
5	100	0.90	0.10	0.10	0.9008	0.0321	0.0010	0.8937	0.0307	0.0010	0.8991	0.0308	0.0010	0.0954	0.0169	0.0003

5	100	0.90	0.10	0.15	0.8940	0.0380	0.0015	0.8724	0.0336	0.0019	0.8922	0.0351	0.0013	0.1438	0.0199	0.0004
5	100	0.90	0.15	0.05	0.9032	0.0305	0.0009	0.9057	0.0288	0.0009	0.9033	0.0300	0.0009	0.0485	0.0149	0.0002
5	100	0.90	0.15	0.10	0.9011	0.0341	0.0012	0.8968	0.0301	0.0009	0.8996	0.0324	0.0011	0.0967	0.0178	0.0003
5	100	0.90	0.15	0.15	0.8906	0.0430	0.0019	0.8742	0.0325	0.0017	0.8889	0.0415	0.0018	0.1448	0.0207	0.0005
7	50	0.70	0.05	0.05	0.6997	0.0661	0.0044	0.6994	0.0658	0.0043	0.6994	0.0658	0.0043	0.0484	0.0145	0.0002
7	50	0.70	0.05	0.10	0.7001	0.0660	0.0044	0.6964	0.0655	0.0043	0.6982	0.0654	0.0043	0.0958	0.0196	0.0004
7	50	0.70	0.05	0.15	0.6990	0.0641	0.0041	0.6894	0.0634	0.0041	0.6974	0.0633	0.0040	0.1466	0.0234	0.0006
7	50	0.70	0.10	0.05	0.7005	0.0646	0.0042	0.7023	0.0637	0.0041	0.7014	0.0640	0.0041	0.0490	0.0151	0.0002
7	50	0.70	0.10	0.10	0.7007	0.0666	0.0044	0.6992	0.0650	0.0042	0.7000	0.0655	0.0043	0.0961	0.0196	0.0004
7	50	0.70	0.10	0.15	0.6982	0.0669	0.0045	0.6899	0.0648	0.0043	0.6973	0.0653	0.0043	0.1456	0.0248	0.0006
7	50	0.70	0.15	0.05	0.7024	0.0650	0.0042	0.7075	0.0639	0.0041	0.7038	0.0643	0.0041	0.0489	0.0149	0.0002
7	50	0.70	0.15	0.10	0.7047	0.0678	0.0046	0.7059	0.0648	0.0042	0.7039	0.0662	0.0044	0.0967	0.0200	0.0004
7	50	0.70	0.15	0.15	0.6964	0.0689	0.0048	0.6925	0.0657	0.0044	0.6963	0.0679	0.0046	0.1462	0.0249	0.0006
7	50	0.80	0.05	0.05	0.7975	0.0554	0.0031	0.7968	0.0549	0.0030	0.7969	0.0550	0.0030	0.0480	0.0142	0.0002
7	50	0.80	0.05	0.10	0.7970	0.0566	0.0032	0.7929	0.0563	0.0032	0.7950	0.0561	0.0032	0.0952	0.0194	0.0004
7	50	0.80	0.05	0.15	0.7969	0.0559	0.0031	0.7859	0.0559	0.0033	0.7956	0.0554	0.0031	0.1470	0.0222	0.0005
7	50	0.80	0.10	0.05	0.7993	0.0562	0.0032	0.8005	0.0553	0.0031	0.7998	0.0555	0.0031	0.0488	0.0142	0.0002
7	50	0.80	0.10	0.10	0.8001	0.0571	0.0033	0.7979	0.0563	0.0032	0.7991	0.0565	0.0032	0.0964	0.0190	0.0004
7	50	0.80	0.10	0.15	0.8002	0.0589	0.0035	0.7912	0.0574	0.0034	0.7995	0.0575	0.0033	0.1463	0.0228	0.0005
7	50	0.80	0.15	0.05	0.8007	0.0566	0.0032	0.8041	0.0549	0.0030	0.8014	0.0555	0.0031	0.0490	0.0147	0.0002
7	50	0.80	0.15	0.10	0.8015	0.0562	0.0032	0.8017	0.0542	0.0029	0.8007	0.0552	0.0030	0.0961	0.0194	0.0004
7	50	0.80	0.15	0.15	0.7978	0.0605	0.0037	0.7921	0.0565	0.0033	0.7977	0.0589	0.0035	0.1458	0.0238	0.0006
7	50	0.90	0.05	0.05	0.8927	0.0403	0.0017	0.8921	0.0401	0.0017	0.8920	0.0400	0.0017	0.0467	0.0149	0.0002
7	50	0.90	0.05	0.10	0.8906	0.0406	0.0017	0.8878	0.0398	0.0017	0.8899	0.0412	0.0018	0.0962	0.0187	0.0004

7	50	0.90	0.05	0.15	0.8881	0.0447	0.0021	0.8778	0.0426	0.0023	0.8889	0.0444	0.0021	0.1463	0.0211	0.0005
7	50	0.90	0.10	0.05	0.8937	0.0408	0.0017	0.8942	0.0400	0.0016	0.8935	0.0400	0.0016	0.0476	0.0153	0.0002
7	50	0.90	0.10	0.10	0.8944	0.0402	0.0016	0.8923	0.0389	0.0016	0.8937	0.0391	0.0016	0.0955	0.0188	0.0004
7	50	0.90	0.10	0.15	0.8914	0.0460	0.0022	0.8827	0.0401	0.0019	0.8905	0.0444	0.0021	0.1453	0.0215	0.0005
7	50	0.90	0.15	0.05	0.8937	0.0405	0.0017	0.8952	0.0390	0.0015	0.8933	0.0393	0.0016	0.0475	0.0155	0.0002
7	50	0.90	0.15	0.10	0.8928	0.0428	0.0019	0.8917	0.0388	0.0016	0.8913	0.0416	0.0018	0.0960	0.0193	0.0004
7	50	0.90	0.15	0.15	0.8906	0.0486	0.0024	0.8829	0.0415	0.0020	0.8881	0.0481	0.0025	0.1450	0.0224	0.0005
7	100	0.70	0.05	0.05	0.7015	0.0447	0.0020	0.7010	0.0445	0.0020	0.7011	0.0445	0.0020	0.0493	0.0101	0.0001
7	100	0.70	0.05	0.10	0.7004	0.0457	0.0021	0.6975	0.0456	0.0021	0.6997	0.0456	0.0021	0.0979	0.0146	0.0002
7	100	0.70	0.05	0.15	0.7018	0.0465	0.0022	0.6928	0.0463	0.0022	0.7005	0.0457	0.0021	0.1475	0.0163	0.0003
7	100	0.70	0.10	0.05	0.7003	0.0464	0.0021	0.7018	0.0458	0.0021	0.7009	0.0460	0.0021	0.0497	0.0101	0.0001
7	100	0.70	0.10	0.10	0.7006	0.0468	0.0022	0.6991	0.0461	0.0021	0.7002	0.0464	0.0021	0.0974	0.0143	0.0002
7	100	0.70	0.10	0.15	0.6997	0.0477	0.0023	0.6917	0.0468	0.0023	0.6997	0.0469	0.0022	0.1477	0.0170	0.0003
7	100	0.70	0.15	0.05	0.7007	0.0466	0.0022	0.7052	0.0460	0.0021	0.7017	0.0463	0.0021	0.0495	0.0106	0.0001
7	100	0.70	0.15	0.10	0.7013	0.0462	0.0021	0.7036	0.0449	0.0020	0.7013	0.0458	0.0021	0.0986	0.0149	0.0002
7	100	0.70	0.15	0.15	0.6989	0.0481	0.0023	0.6942	0.0458	0.0021	0.6991	0.0472	0.0022	0.1485	0.0179	0.0003
7	100	0.80	0.05	0.05	0.8022	0.0397	0.0016	0.8015	0.0395	0.0016	0.8016	0.0395	0.0016	0.0487	0.0098	0.0001
7	100	0.80	0.05	0.10	0.7993	0.0400	0.0016	0.7958	0.0397	0.0016	0.7983	0.0394	0.0016	0.0980	0.0135	0.0002
7	100	0.80	0.05	0.15	0.8006	0.0416	0.0017	0.7903	0.0410	0.0018	0.7987	0.0402	0.0016	0.1470	0.0155	0.0002
7	100	0.80	0.10	0.05	0.8003	0.0410	0.0017	0.8010	0.0404	0.0016	0.8004	0.0406	0.0017	0.0492	0.0101	0.0001
7	100	0.80	0.10	0.10	0.7998	0.0420	0.0018	0.7979	0.0412	0.0017	0.7994	0.0414	0.0017	0.0976	0.0138	0.0002
7	100	0.80	0.10	0.15	0.8013	0.0426	0.0018	0.7917	0.0414	0.0018	0.8008	0.0413	0.0017	0.1471	0.0158	0.0003
7	100	0.80	0.15	0.05	0.8029	0.0401	0.0016	0.8060	0.0392	0.0016	0.8035	0.0395	0.0016	0.0490	0.0104	0.0001
7	100	0.80	0.15	0.10	0.8031	0.0407	0.0017	0.8034	0.0391	0.0015	0.8028	0.0399	0.0016	0.0980	0.0140	0.0002

7	100	0.80	0.15	0.15	0.7980	0.0429	0.0018	0.7915	0.0404	0.0017	0.7983	0.0415	0.0017	0.1477	0.0167	0.0003
7	100	0.90	0.05	0.05	0.8980	0.0297	0.0009	0.8973	0.0295	0.0009	0.8974	0.0295	0.0009	0.0476	0.0101	0.0001
7	100	0.90	0.05	0.10	0.8965	0.0307	0.0010	0.8931	0.0304	0.0010	0.8958	0.0303	0.0009	0.0983	0.0129	0.0002
7	100	0.90	0.05	0.15	0.8973	0.0305	0.0009	0.8864	0.0308	0.0011	0.8966	0.0300	0.0009	0.1475	0.0145	0.0002
7	100	0.90	0.10	0.05	0.8996	0.0299	0.0009	0.8995	0.0294	0.0009	0.8992	0.0295	0.0009	0.0484	0.0106	0.0001
7	100	0.90	0.10	0.10	0.8998	0.0304	0.0009	0.8971	0.0296	0.0009	0.8992	0.0296	0.0009	0.0976	0.0133	0.0002
7	100	0.90	0.10	0.15	0.9011	0.0318	0.0010	0.8894	0.0311	0.0011	0.8993	0.0302	0.0009	0.1472	0.0152	0.0002
7	100	0.90	0.15	0.05	0.9012	0.0302	0.0009	0.9026	0.0291	0.0009	0.9012	0.0296	0.0009	0.0491	0.0105	0.0001
7	100	0.90	0.15	0.10	0.9006	0.0322	0.0010	0.8995	0.0301	0.0009	0.9000	0.0308	0.0009	0.0978	0.0133	0.0002
7	100	0.90	0.15	0.15	0.9005	0.0350	0.0012	0.8908	0.0317	0.0011	0.8992	0.0322	0.0010	0.1476	0.0153	0.0002

B - Códigos

```
#----- calling packages -----
library(tidyverse)    # data manipulation
library(foreach)     # parallel simulation
library(purrr)       # data manipulation
library(wesanderson) # color pallete
library(xtable)      # latex tables
library(extrafont)   # import fonts
library(reshape2)    # data manipulation - melt()
library(xtable)      # LaTeX table

#-----

# Generating inspection data
#-----

rbms <- function (n = 150, r = 3, theta = NULL){
  p <- theta[1]
  e2 <- theta[2]
  e1 <- theta[3]

  x <- cbind(rbinom(n, 1, p))
  c1 <- sum(x == 1)
  c0 <- sum(x == 0)

  y <- rbind(matrix(rbinom(c1*r, 1, 1-e1), c1, r),
             matrix(rbinom(c0*r, 1, e2), c0, r))

  colnames(y) <- paste("y", 1:r, sep = "")
  return (data = y)
}

#-----
```

```
# Simple majority
#-----
ms <- function (data = NULL, npass = NULL, r = NULL){
  if (!is.null(npass) & is.null(r)) stop('r not specified!')
  if (is.null(data) & is.null(npass)) stop('no dataset or number of pass specified!')

  if (is.null(data)){
    n <- length(npass)
    ci <- npass
  }
  else {
    n <- nrow(data)
    r <- ncol(data)
    ci <- rowSums(data)
  }

  Fi <- NULL
  for (i in 1:n){
    k <- ci[i]
    if(k > r/2) Fi[i] <- 1
    if(k < r/2) Fi[i] <- 0
    if(k == r/2) Fi[i] <- sample(c(0, 1), 1)
  }

  est <- c(p = mean(Fi),
    e2 = sum((1-Fi)*ci) / (n*r - r*sum(Fi)),
    e1 = sum(Fi*(r-ci)) / (r*sum(Fi)))

  p.pass <- sapply(ci, function (w) est['p']*dbinom(w, r, 1 - est['e1']) +
    (1 - est['p'])*dbinom(w, r, est['e2']))

  return (list(pass.rate = data.frame(ci, pass.rate = p.pass),
```

```
est = est))

}

#-----
# maximum likelihood
#-----

mv <- function (data = NULL, npass = NULL, r = NULL, theta.init = NULL){
  if (!is.null(npass) & is.null(r)) stop('r not specified!')
  if (is.null(data) & is.null(npass)) stop('no dataset or number of pass specified!')
  if (is.null(theta.init)) stop('No initial values for the parameters!')

  if (is.null(data)){
    n <- length(npass)
    ci <- npass
  }
  else {
    n <- nrow(data)
    r <- ncol(data)
    ci <- rowSums(data)
  }

  loglik <- function (theta){
    p <- theta[1]
    e2 <- theta[2]
    e1 <- theta[3]
    sum(log((1 - p)*e2^ci*(1 - e2)^(r - ci) + p*e1^(r - ci)*(1 - e1)^ci))
  }

  emv <- optim(theta.init, fn = loglik,
    method = "L-BFGS-B",
    lower = c(0.5, 0.01, 0.01),
```

```

upper = c(0.99, 0.5, 0.5),
control = list(maxit = 1000, fnscale = -1))
est <- c(p = emv$par[1], e2 = emv$par[2], e1 = emv$par[3])

#genetic algorithms
# library(GA)
# GA <- ga(type = 'real-valued',
#         fitness = loglik, suggestions = theta.init,
#         min = c(0.5, 0.01, 0.01), max = c(0.99, 0.5, 0.5))
# emv <- summary(GA)[c('fitness', 'solution')]
# names(emv)[1] <- 'value'
# est <- c(p = emv$solution[1], e2 = emv$solution[2], e1 = emv$solution[3])

p.pass <- sapply(ci, function (w) est['p']*dbinom(w, r, 1 - est['e1']) +
(1 - est['p'])*dbinom(w, r, est['e2']))

return (list(pass.rate = data.frame(ci, pass.rate = p.pass),
est = est,
like_Value = emv$value))
}

#-----
# minimum chi-squared
#-----

mqq <- function (data = NULL, r = NULL, npass = NULL, theta.init = NULL,
tab.freq = NULL,
chi = c("pearson", "neyman", "kullback", "likelihood",
"logit", "probit", "pd", "hellinger",
"jeffreys", "JS", "bhattacharyya"), lambda.pd = NULL){

if (chi == "pd" & is.null(lambda.pd)) stop("Lambda not specified in PD family!")
if (!is.null(c(npass, tab.freq)) & is.null(r)) stop('r not specified!')

```

```
if (is.null(data) & is.null(npass) & is.null(tab.freq))
  stop('no dataset, number of pass specified or observed frequencies!')
if (is.null(theta.init)) stop('No initial values for the parameters!')

# data is number of pass (C_i)
if (!is.null(npass)){
  n <- length(npass)
  ci <- npass
  freq <- data.frame(obs = table(ci))
  colnames(freq) <- c('ci', 'Obs')
  O <- freq$Obs
}

# data is only inspection
if (!is.null(data)){
  n <- nrow(data)
  r <- ncol(data)
  ci <- rowSums(data)
  freq <- data.frame(obs = table(ci))
  colnames(freq) <- c('ci', 'Obs')
  O <- freq$Obs
}

# data is frequency observed
if (!is.null(tab.freq)){
  n <- sum(tab.freq[2])
  freq <- as.data.frame(tab.freq)
  colnames(freq) <- c('ci', 'Obs')
  O <- freq[, 2]
}

mqq_op <- function (par){
```

```
p <- par[1]
e2 <- par[2]
e1 <- par[3]

E <- sapply(as.numeric(as.character(freq[, 1])),
function (x) p*dbinom(x, r, 1 - e1) + (1 - p)*dbinom(x, r, e2))*n

if (chi == "pearson"){
chisq <- sum((O - E)^2/E)
}

if (chi == "neyman"){
chisq <- sum((O - E)^2/O)
}

if (chi == "kullback"){
chisq <- sum(E*log(E/O))
}

if (chi == "likelihood"){
chisq <- 2*sum(O*log(O/E))
}

if (chi == "logit"){
p_k <- O/n
P_k <- E/n
chisq <- sum(n*p_k*(1 - p_k)*(log(p_k/(1 - p_k)) - log(P_k) + log(1 - P_k)))
}

if (chi == "probit"){
p_k <- O/n
q_k <- 1 - p_k
```

```
P_k <- E/n
erfinv <- function (x) qnorm((1 + x)/2)/sqrt(2)
invnorm <- function (p) sqrt(2)*erfinv(2*p - 1)
chisq <- sum( (n/(p_k*q_k)) * ((1/(sqrt(2*pi)))) * exp(-0.5*(invnorm(p_k)^2)) )^2 *
(invnorm(p_k) - invnorm(P_k))^2 )
}

if (chi == "pd"){
chisq <- (2/(lambda.pd*(lambda.pd + 1)))*sum(0*( (0/E)^lambda.pd - 1 ))
}

if (chi == "hellinger"){
chisq <- 4*n*sum((sqrt(0/n) - sqrt(E/n))^2)
}

if (chi == "jeffreys"){
chisq <- 2*sum(E*log(E/0)) + 2*sum(0*log(0/E))
}

if (chi == "JS"){
m <- 0.5*E + 0.5*0
chisq <- 0.5*(2*sum(E*log(E/m))) + 0.5*(2*sum(0*log(0/m)))
}

if (chi == "bhattacharyya"){
chisq <- -log(sum(sqrt(E*0)))
}

return (-chisq)
}

mchi <- optim(theta.init, fn = mqg_op, method = "L-BFGS-B",
```

```

lower = c(0.5, 0.01, 0.01), upper = c(0.99, 0.5, 0.5),
control = list(maxit = 1000, fnscale = -1))

est <- c(p = mchi$par[1], e2 = mchi$par[2], e1 = mchi$par[3])

# genetic algorithms
# library(GA)
# GA <- ga(type = 'real-valued',
#         fitness = mqg_op, suggestions = theta.init,
#         min = c(0.5, 0.01, 0.01), max = c(0.99, 0.5, 0.5))
#
# mchi <- summary(GA)[c('fitness', 'solution')]
# names(mchi)[1] <- 'value'
# est <- c(p = mchi$solution[1], e2 = mchi$solution[2], e1 = mchi$solution[3])

k <- as.numeric(as.character(freq[, 1]))
E <- sapply(k, function (x) est['p']*dbinom(x, r, 1 - est['e1']) +
(1 - est['p'])*dbinom(x, r, est['e2']))*n

freq <- cbind(freq, E)
colnames(freq) <- c("Conforms", "Observed", "Expected")

p.pass <- sapply(k, function (w) est['p']*dbinom(w, r, 1 - est['e1']) +
(1 - est['p'])*dbinom(w, r, est['e2']))
names(p.pass) <- paste(k)

return (list(table.freq = data.frame(freq, p.pass),
est = est,
sumchisq = mchi$value))
}

#-----

```

```

# method of moments
#-----

mm <- function (data = NULL, r = NULL, npass = NULL){
options(warn = -1)

if (is.null(data)){
n <- length(npass)
ci <- npass
}
else {
n <- nrow(data)
r <- ncol(data)
ci <- rowSums(data)
}

V1 <- sum(ci)/(r*n)
V2 <- sum(ci*(ci - 1) )/(r*(r - 1)*n)
V3 <- sum(ci*(ci - 1)*(ci - 2) )/(r*(r - 1)*(r - 2)*n)
A <- (V3 - V1*V2)/(V2 - V1^2)

e2 <- 0.5*A - 0.5*sqrt(A^2 - 4*A*V1 + 4*V2)
e1 <- 0.5*A + 0.5*sqrt(A^2 - 4*A*V1 + 4*V2)
p <- (V1 - e2)/(e1 - e2)

est <- c(p = p, e2 = e2, e1 = 1 - e1)

p.pass <- sapply(ci, function (w) est['p']*dbinom(w, r, 1 - est['e1']) +
(1 - est['p'])*dbinom(w, r, est['e2']))

return(list(pass.rate = data.frame(ci, p.pass),
est = est))

```

```
}

#=====
# fit_methods function
# config: configuration to be simulated
#=====

fit_methods <- function(scenario){
TRUE -> error

chi2 <- c("pearson", "neyman", "kullback", "likelihood",
"logit", "probit", "pd", "hellinger")

while (any(error)) {
samp <- rbms(n = scenario$n,
r = scenario$r,
theta = c(scenario$p, scenario$e2, scenario$e1))

MS <- ms(data = samp)$est
error1 <- is.nan(MS)

MM <- mm(data = samp)$est
error2 <- any(c(MM < 0, MM > 1, is.nan(MM)))

MV <- try(mv(data = samp, theta.init = as.numeric(MM))$est, silent = TRUE)
error3 <- inherits(MV, "try-error")

MQQ <- try(sapply(chi2, FUN = function(x) mqq(data = samp,
theta.init = as.numeric(MM),
chi = x,
lambda.pd = 2/3)$est), silent = TRUE)
```

```
error4 <- inherits(MQQ, 'try-error')

error <- c(error1, error2, error3, error4)
}

vec_return <- c(MM = MM, MQQ, MS = MS, MV = MV)
names(vec_return)[4:30] <- paste0('MQQ_', rep(chi2, each = 3),
  c('.p', '.e2', '.e1'))

return(vec_return)
}

convert_method <- function (out, methods = NULL) {
meth <- vector("list", length(methods))
names(meth) <- methods
for (i in seq_along(methods)) {
  out %>%
  map(as_data_frame) %>%
  bind_rows(.id = "Scenario") %>%
  select(one_of(c(paste0(methods[i], c('.p', '.e2', '.e1')), "Scenario"))) %>%
  set_names(c("est_p", "est_e2", "est_e1", "Scenario")) -> meth[[i]]
}

meth %>%
bind_rows(.id = "Methods") %>%
mutate(Scenario = as.integer(Scenario))
}

#-----
# Monte Carlo Simulation
#-----
```

```
nlc <- parallel::detectCores() # Checking core number available
cl <- parallel::makeCluster(nlc)
doSNOW::registerDoSNOW(cl)

source("Separate Functions.R")

config <- expand.grid(e1 = c(0.05, 0.1, 0.15),
e2 = c(0.05, 0.1, 0.15),
p = c(0.7, 0.8, 0.9),
n = c(50, 100),
r = c(3, 5, 7))

config <- config[, 5:1]
runs <- 200
output <- vector("list", nrow(config))

#-----
# assessing estimates - optim()
#-----

options(warn = -1)
inicio <- Sys.time()
for (j in 1:nrow(config)){
  foreach(i = 1:runs, .combine = rbind) %dopar% {
    fit_methods(config[j, ])
  } -> output[[j]]
  print(j)
}
Sys.time() - inicio

names_methods <- c("MM", paste0("MQQ_", c("pearson", "kullback", "neyman",
"probit", "logit", "pd", "FT", "hellinger",
```

```
"modlike", "jeffreys", "JS", "bhattacharyya")),
"MS", "MV")

convert_method(out = output, methods = names_methods) %>%
mutate(r = config[Scenario, "r"],
n = config[Scenario, "n"],
sim_p = config[Scenario, "p"],
sim_e2 = config[Scenario, "e2"],
sim_e1 = config[Scenario, "e1"]) -> all_results

saveRDS(all_results, "Results.rds")
saveRDS(output, "output.RData")

#=====
# Representing Scenarios
#=====

# loading functions and packages
source("Separate Functions.R")

# importing and loading fonts
#font_import("C:/Windows/Fonts/")
loadfonts(device = "win")

# Reading the results
Results <- read_rds("Results.rds")
names(Results)[c(2:4, 8:10)] <- c('est_p', 'est_e2', 'est_e1',
'sim_p', 'sim_e2', 'sim_e1')

#*****
# Summary tables: - mean values p, e1, e2;
#                 - mean absolute bias;
```

```

#           - sd mean;
#           - MSE mean;
#*****

tab_app <- function(x, method, theta) {

x %>% filter(Methods %in% method) %>%
group_by(Methods, r, n, sim_p, sim_e2, sim_e1) %>%
mutate(bias_p = mean(est_p) - sim_p,
bias_e2 = mean(est_e2) - sim_e2,
bias_e1 = mean(est_e1) - sim_e1,
eqm_p = (est_p - sim_p)^2,
eqm_e2 = (est_e2 - sim_e2)^2,
eqm_e1 = (est_e1 - sim_e1)^2) %>%
summarise(mean_p = mean(est_p), mean_e2 = mean(est_e2), mean_e1 = mean(est_e1),
sd_p = sd(est_p), sd_e2 = sd(est_e2), sd_e1 = sd(est_e1),
bias_p = mean(bias_p), bias_e2 = mean(bias_e2), bias_e1 = mean(bias_e1),
eqm_p = mean(eqm_p), eqm_e2 = mean(eqm_e2), eqm_e1 = mean(eqm_e1)
) %>%
select('Methods': 'sim_e1', paste0(c("mean_", "sd_", "bias_", "eqm_"), theta)) %>%
ungroup() -> tabout

return(tabout)
}

cbind(tab_app(Results, "MM", "p")[, -c(1, 9)],
tab_app(Results, "MS", "p")[, -c(1:6, 9)],
tab_app(Results, "MV", "p")[, -c(1:6, 9)],
tab_app(Results, "MQQ_logit", "e1")[, -c(1:6, 9)]) %>%
xtable(digits = c(rep(0, 3), rep(2, 3), rep(4, 12))) %>%
print(include.rownames = FALSE)

```

```
#-----  
# Tables for: Mean values for MSE, SD and Absolute Bias  
#-----  
names_methods <- c("MM", paste0("MQQ_", c("pearson", "kullback", "neyman",  
"probit", "logit", "pd", "hellinger",  
"jeffreys", "JS", "battacharyya")[1:7]),  
"MS", "MV")  
  
# Names in plot  
names_methods2 <- c("MM", "Hellinger", "Logito", "Neyman",  
"Cressie-Read", "Pearson", "Probito", "MS", "MV")  
  
# Summary of p, e1 and e2  
tab_app(Results, names_methods[-3], "p") %>%  
group_by(Methods) %>%  
summarise(mean_sd_p = mean(sd_p),  
mean_bias_p = mean(bias_p),  
mean_eqm_p = mean(eqm_p)) -> tab_p  
  
tab_app(Results, names_methods[-3], "e2") %>%  
group_by(Methods) %>%  
summarise(mean_sd_e2 = mean(sd_e2),  
mean_bias_e2 = mean(bias_e2),  
mean_eqm_e2 = mean(eqm_e2)) -> tab_e2  
  
tab_app(Results, names_methods[-3], "e1") %>%  
group_by(Methods) %>%  
summarise(mean_sd_e1 = mean(sd_e1),  
mean_bias_e1 = mean(bias_e1),  
mean_eqm_e1 = mean(eqm_e1)) -> tab_e1
```

```

tab_p[,1] = tab_e1[,1] = tab_e2[,1] <- names_methods2
print(xtable(tab_e2, digits = 5))

#####
# Lineplot - General Summary
#####
all_theta <- paste0(c(rep("p", 4), rep("e2", 4), rep("e1", 4)))
theta_labels <- c(sd_p = bquote(p[c]), sd_e2 = bquote(e2), sd_e1 = bquote(e1))

# Theme plot definition
theme_caio <- function(size = 15){
  theme_bw(base_size = size) +
  theme(legend.position = "top", text = element_text(family = "Book Antiqua"),
        axis.text.x = element_text(angle = 45, hjust = 1, family = "Book Antiqua"),
        legend.key.width = unit(3, "line"))
}

#-----
# Standard Deviation
#-----
tab_app(Results, names_methods[-3], all_theta) %>%
select(Methods, contains("sd")) %>%
melt() %>%
mutate(variable = factor(variable, levels = c("sd_p", "sd_e1", "sd_e2"),
  labels = c("p", "e[1]", "e[2]")),
  Methods = factor(Methods, levels = sort(names_methods[-3]),
  labels = names_methods2)) %>%
group_by(Methods, variable) %>%
summarise(mean_sd = mean(value)) %>%
ggplot(aes(x = Methods, y = mean_sd, group = variable, shape = variable,
  linetype = variable)) +
geom_point(size = 2.5) + geom_line(size = 0.8) +

```

```
labs(x = "Métodos", y = "Desvio Padrão") +
scale_y_continuous(breaks = seq(0, 0.08, 0.01)) +
scale_shape_manual(values = 15:17, labels = c(bquote(p), bquote(e[1]),
bquote(e[2])), name = "Parâmetros:") +
scale_linetype_discrete(labels = c(bquote(p), bquote(e[1]), bquote(e[2])),
name = "Parâmetros:") +
theme_caio(size = 15)

#-----
#          Bias
#-----

tab_app(Results, names_methods[-3], all_theta) %>%
select(Methods, contains("bias")) %>%
melt() %>%
mutate(variable = factor(variable, levels =
c("bias_p", "bias_e1", "bias_e2"), labels = c("p", "e[1]", "e[2]")),
Methods = factor(Methods, levels = sort(names_methods[-3])),
labels = names_methods2)) %>%
group_by(Methods, variable) %>%
summarise(mean_bias = mean(value)) %>%
ggplot(aes(x = Methods, y = mean_bias, group = variable,
shape = variable, linetype = variable)) +
geom_point(size = 2.5) + geom_line(size = 0.8) +
geom_hline(yintercept = 0, linetype = 2) +
labs(x = "Métodos", y = "Viés") +
scale_y_continuous(breaks = seq(-0.025, 0.025, 0.005)) +
scale_shape_discrete(labels = c(bquote(p), bquote(e[1]), bquote(e[2])),
name = "Parâmetros:") +
scale_linetype_discrete(labels = c(bquote(p), bquote(e[1]), bquote(e[2])),
name = "Parâmetros:") +
theme_caio(size = 15)
```

```

#-----
# Mean Squared Error
#-----

tab_app(Results, names_methods[-3], all_theta) %>%
select(Methods, contains("eqm")) %>%
melt() %>%
mutate(variable = factor(variable, levels = c("eqm_p", "eqm_e1", "eqm_e2"),
  labels = c("p", "e[1]", "e[2]")),
Methods = factor(Methods, levels = sort(names_methods[-3]),
  labels = names_methods2)) %>%
group_by(Methods, variable) %>%
summarise(mean_eqm = mean(value)) %>%
ggplot(aes(x = Methods, y = mean_eqm, group = variable, shape = variable,
  linetype = variable)) +
geom_point(size = 2.5) + geom_line(size = 0.8) +
labs(x = "Métodos", y = "EQM") +
scale_y_continuous(breaks = seq(0, 0.006, 0.0005)) +
scale_shape_discrete(labels = c(bquote(p), bquote(e[1]), bquote(e[2])),
  name = "Parâmetros:") +
scale_linetype_discrete(labels = c(bquote(p), bquote(e[1]), bquote(e[2])),
  name = "Parâmetros:") +
theme_caio(size = 15)

#*****

# Boxplots (all scenarios)
#*****

#-----
# Standard Deviation
#-----

tab_app(Results, names_methods[c(1, 6:7, 9:10)], all_theta) %>%
select(Methods, contains("sd")) %>% melt() %>%

```

```

group_by(Methods, variable) %>%
mutate(mean = mean(value)) %>%
ungroup() %>%
mutate(variable = factor(variable, levels = c("sd_p", "sd_e2", "sd_e1"),
  labels = c("p", "e[2]", "e[1]")),
Methods = factor(Methods, levels = sort(names_methods[-3]),
  labels = names_methods2)) %>%
ggplot(aes(x = Methods, y = value)) +
geom_boxplot(alpha = 0.7, fill = "white") + coord_flip() +
geom_point(aes(y = mean), shape = "+", size = 3, colour = 'red') +
facet_wrap(~variable, scales = "free_x", labeller = label_parsed) +
labs(x = "Métodos", y = "Desvio Padrão") +
theme_bw(base_size = 15) +
guides(fill = "none") +
theme(legend.position = "right", text = element_text(family = "Book Antiqua"),
  panel.spacing = unit(2, "lines"))

#-----
#      Bias
#-----
tab_app(Results, names_methods[c(1, 6:7, 9:10)], all_theta) %>%
select(Methods, contains("bias")) %>% melt() %>%
group_by(Methods, variable) %>%
mutate(mean = mean(value)) %>%
ungroup() %>%
mutate(variable = factor(variable, levels = c("bias_p", "bias_e2", "bias_e1"),
  labels = c("p", "e[2]", "e[1]")),
Methods = factor(Methods, levels = sort(names_methods[-3]),
  labels = names_methods2)) %>%
ggplot(aes(x = Methods, y = value)) +
geom_boxplot(alpha = 0.7, fill = "white") + coord_flip() +
geom_point(aes(y = mean), shape = "+", size = 3, colour = 'red') +

```

```
facet_wrap(~variable, scales = "free_x", labeller = label_parsed) +
labs(x = "Métodos", y = "Viés") +
theme_bw(base_size = 15) +
guides(fill = "none") +
geom_hline(yintercept = 0, linetype = 2) +
theme(legend.position = "right", text = element_text(family = "Book Antiqua"),
      panel.spacing = unit(2, "lines"))

#-----
# Mean Squared Error
#-----

tab_app(Results, names_methods[c(1, 6:7, 9:10)], all_theta) %>%
select(Methods, contains("eqm")) %>% melt() %>%
group_by(Methods, variable) %>%
mutate(mean = mean(value)) %>%
ungroup() %>%
mutate(variable = factor(variable, levels = c("eqm_p", "eqm_e2", "eqm_e1"),
      labels = c("p", "e[2]", "e[1]")),
      Methods = factor(Methods, levels = sort(names_methods[-3]),
      labels = names_methods2)) %>%
ggplot(aes(x = Methods, y = value)) +
geom_boxplot(alpha = 0.7, fill = "white") + coord_flip() +
geom_point(aes(y = mean), shape = "+", size = 3, colour = 'red') +
facet_wrap(~variable, scales = "free_x", labeller = label_parsed) +
labs(x = "Métodos", y = "EQM") +
theme_bw(base_size = 15) +
guides(fill = "none") +
theme(legend.position = "right", text = element_text(family = "Book Antiqua"),
      panel.spacing = unit(2, "lines"))

#*****
# Summary by r (repetitions)
```

```
#####
```

```
sumbyr <- function(measure = 'eqm') {  
  tab_app(Results, names_methods, all_theta) %>%  
  select(Methods, r, contains(measure)) %>%  
  melt(c("Methods", "r")) %>%  
  group_by(Methods, r, variable) %>%  
  summarise(value = mean(value))  
}  
  
sumbyr('eqm') %>%  
  arrange(r) %>%  
  spread(Methods, value) %>%  
  select(r:MM, MS, MV, contains('MQQ_'), -MQQ_kullback) %>%  
  mutate(variable = factor(variable, levels = levels(variable),  
    labels = c('$p$', '$e_2$', '$e_1$')) %>%  
  xtable(digits = c(rep(0, 3), rep(5, 10))) %>%  
  print(include.row = FALSE)  
  
sumbyr('sd') %>%  
  arrange(r) %>%  
  spread(Methods, value) %>%  
  select(r:MM, MS, MV, contains('MQQ_'), -MQQ_kullback) %>%  
  mutate(variable = factor(variable, levels = levels(variable),  
    labels = c('$p$', '$e_2$', '$e_1$')) %>%  
  xtable(digits = c(rep(0,3), rep(5,10))) %>%  
  print(include.row = FALSE)  
  
sumbyr('bias') %>%  
  arrange(r) %>%  
  spread(Methods, value) %>%  
  select(r:MM, MS, MV, contains('MQQ_'), -MQQ_kullback) %>%
```

```

mutate(variable = factor(variable, levels = levels(variable),
  labels = c('$p$', '$e_2$', '$e_1$'))) %>%
xtable(digits = c(rep(0,3), rep(5,10))) %>%
print(include.row = FALSE)

#-----
# Mean Squared Error
#-----

tab_app(Results, names_methods[c(1, 6:7, 10:11)], all_theta) %>%
select(Methods, r, contains("eqm")) %>% melt(c("Methods", "r")) %>%
group_by(Methods, r, variable) %>%
mutate(mean = mean(value)) %>%
ungroup() %>%
mutate(variable = factor(variable, levels = c("eqm_p", "eqm_e2", "eqm_e1"),
  labels = c("p", "e[2]", "e[1]")),
r = factor(r)) %>%
ggplot(aes(x = Methods, y = value, fill = r, group = interaction(r, Methods) )) +
geom_boxplot(alpha = 0.8) + theme_bw(base_size = 15) +
facet_grid(variable~., scales = "free_y", labeller = label_parsed) +
scale_fill_grey(start = 0.3, end = 0.9, name = "r:") +
theme(legend.position = "right", text = element_text(family = "Book Antiqua"),
axis.text.x = element_text(angle = 60, hjust = 1, family = "Book Antiqua"),
strip.text.y = element_text(angle = 0)) +
scale_x_discrete(labels = names_methods2[c(1, 4, 6, 9:10)]) +
labs(x = "Métodos", y = "EQM")

# output: 9 x 10 dimension size

#-----
# standard deviation
#-----

```

```

tab_app(Results, names_methods[c(1, 6:7, 10:11)], all_theta) %>%
select(Methods, r, contains("sd")) %>% melt(c("Methods", "r")) %>%
group_by(Methods, r, variable) %>%
mutate(mean = mean(value)) %>%
ungroup() %>%
mutate(variable = factor(variable, levels = c("sd_p", "sd_e2", "sd_e1"),
labels = c("p", "e[2]", "e[1]")),
r = factor(r)) %>%
ggplot(aes(x = Methods, y = value, fill = r, group = interaction(r, Methods) )) +
geom_boxplot(alpha = 0.7, fill = "grey") + theme_bw(base_size = 16) +
facet_grid(variable~., scales = "free_y", labeller = label_parsed) +
scale_fill_grey(start = 0.3, end = 0.9, name = "r:") +
theme(legend.position = "right", text = element_text(family = "Book Antiqua"),
axis.text.x = element_text(angle = 60, hjust = 1, family = "Book Antiqua"),
strip.text.y = element_text(angle = 0)) +
scale_x_discrete(labels = names_methods2[c(1, 4, 6, 9:10)]) +
labs(x = "Métodos", y = "Desvio Padrão")

```

```
#-----
```

```
# Bias
```

```
#-----
```

```

tab_app(Results, names_methods[c(1, 6:7, 10:11)], all_theta) %>%
select(Methods, r, contains("bias")) %>% melt(c("Methods", "r")) %>%
group_by(Methods, r, variable) %>%
mutate(mean = mean(value)) %>%
ungroup() %>%
mutate(variable = factor(variable, levels = c("bias_p", "bias_e2", "bias_e1"),
labels = c("p", "e[2]", "e[1]")),
r = factor(r)) %>%
ggplot(aes(x = Methods, y = value, fill = r, group = interaction(r, Methods) )) +

```

```

geom_boxplot(alpha = 0.7, fill = "grey") + theme_bw(base_size = 16) +
facet_grid(variable~., scales = "free_y", labeller = label_parsed) +
scale_fill_grey(start = 0.3, end = 0.9, name = "r:") +
theme(legend.position = "right", text = element_text(family = "Comic Sans MS"),
axis.text.x = element_text(angle = 60, hjust = 1, family = "Comic Sans MS"),
strip.text.y = element_text(angle = 0)) +
scale_x_discrete(labels = names_methods2[c(1, 4, 6, 9:10)]) +
labs(x = "Métodos", y = "Viês") +
geom_hline(yintercept = 0, linetype = 2)

#=====
#           Tiles example
#   (Exemplo de Aplicação - Dados de azulejos)
#=====

source('Separate Functions.R')

df <- data_frame(conforms = factor(0:5),
observed = c(13, 19, 8, 7, 28, 75))

n <- colSums(df[2])
r <- 5

# method of moments
mm_theta <- mm(npass = c(rep(0, 13),
rep(1, 19),
rep(2, 8),
rep(3, 7),
rep(4, 28),
rep(5, 75)), r = 5)$est

```

```
est_mqq <- mqq(tab.freq = df, r = 5,
  theta.init = as.numeric(mm_theta), chi = 'logit')

est_mqq$table.freq %>%
xtable(digits = c(0, 0, 0, 4, 4)) %>%
print(include.rownames = FALSE)

#-----
#      Bootstrap
#-----

B <- 10000
theta_est <- est_mqq$est
p_boot = e1_boot = e2_boot <- NULL

for(b in 1:B) {
  data_boot_t1 <- rbms(n = 150, r = 5, theta = c(theta_est[1], theta_est[2], 0.05))
  e1_boot[b] <- mqq(data = data_boot_t1, theta.init =
  as.numeric(mm(data_boot_t1)$est), chi = 'logit')$est['e1']

  data_boot_t2 <- rbms(n = 150, r = 5, theta = c(theta_est[1], 0.1, theta_est[3]))
  e2_boot[b] <- mqq(data = data_boot_t2, theta.init =
  as.numeric(mm(data_boot_t2)$est), chi = 'logit')$est['e2']

  data_boot_t3 <- rbms(n = 150, r = 5, theta = c(0.8, theta_est[2], theta_est[3]))
  p_boot[b] <- mqq(data = data_boot_t3, theta.init =
  as.numeric(mm(data_boot_t2)$est), chi = 'logit')$est['p']
}

theta_boot <- data_frame(e1 = e1_boot, e2 = e2_boot, p = p_boot)
#saveRDS(theta_boot, 'theta_boot.RDS')
```

```
theta_boot <- readRDS('theta_boot.RDS')

theta_boot %>%
melt() %>%
group_by(variable) %>%
mutate(value = sort(value),
sq = (value - mean(value))^2) %>%
summarise(lower = nth(value, 0.05*B),
upper = nth(value, 0.95*B),
mean_boot = mean(value),
ep_boot = sqrt(sum(sq)/(B-1))) -> ic_boot

pvalue_p <- length(theta_boot$p[theta_boot$p <= est_mqq$est[1]])/B
pvalue_e1 <- length(theta_boot$e1[theta_boot$e1 > est_mqq$est[3]])/B
pvalue_e2 <- length(theta_boot$e2[theta_boot$e2 > est_mqq$est[2]])/B

xtable(ic_boot, digits = c(0, 0, rep(4, 4))) %>%
print(include.rownames = FALSE)

# plot for p_boot

dens <- density(theta_boot$p)
dd <- with(dens, data.frame(x, y))

ggplot() +
geom_density(data = theta_boot,
aes(x = p),
alpha = .2, colour = 'blue', fill = 'blue') +
theme_bw(base_size = 15) -> density_plot

density_plot
```

```

dpb <- ggplot_build(density_plot)

x1 <- min(which(dpb$data[[1]]$x >= .25))
x2 <- max(which(dpb$data[[1]]$x <= ic_boot$lower[3]))

density_plot +
  geom_area(data=data.frame(x=dpb$data[[1]]$x[x1:x2],
  y=dpb$data[[1]]$y[x1:x2]),
  aes(x=x, y=y), colour = 'red', fill = "red", alpha = 0.5, linetype = "dashed") +
  geom_vline(data = theta_boot,
  aes(xintercept = est_mqq$est[1]),
  colour = "blue", linetype = "dashed", size = 1) +
  geom_text(aes(x = 0.7, y = 9, label = 'hat(p)==0.7177'), parse = TRUE) +
  geom_text(aes(x = 0.69, y = 1, label = 'RC[hat(p)]: p^"*" <= 0.7422'), parse = TRUE)
  scale_x_continuous(name = expression(p^'*')) +
  scale_y_continuous(name = 'Densidade')

# plot for e1_boot

dens <- density(theta_boot$e1)
dd <- with(dens, data.frame(x, y))

ggplot() +
  geom_density(data = theta_boot,
  aes(x = e1),
  alpha = .2, colour = 'blue', fill = 'blue') +
  theme_bw(base_size = 15) -> density_plot

density_plot

dpb <- ggplot_build(density_plot)

```

```
x1 <- min(which(dpb$data[[1]]$x > ic_boot$upper[1]))
x2 <- max(which(dpb$data[[1]]$x <= 0.95))

density_plot +
geom_area(data=data.frame(x=dpb$data[[1]]$x[x1:x2],
y=dpb$data[[1]]$y[x1:x2]),
aes(x=x, y=y), colour = 'red', fill = "red", alpha = 0.5, linetype = "dashed") +
geom_vline(data = theta_boot,
aes(xintercept = est_mqq$est[3]),
colour = "blue", linetype = "dashed", size = 1) +
geom_text(aes(x = 0.078, y = 30, label = 'hat(e)[1]==0.0710'), parse = TRUE) +
geom_text(aes(x = 0.085, y = 5, label = 'RC[hat(e)[1]]: e[1]^"*" > 0.0683'),
parse = TRUE) +
scale_x_continuous(name = expression(e[1]^'*')) +
scale_y_continuous(name = 'Densidade')

# plot for e2_boot

dens <- density(theta_boot$e2)
dd <- with(dens, data.frame(x, y))

ggplot() +
geom_density(data = theta_boot,
aes(x = e2),
alpha = .2, colour = 'blue', fill = 'blue') +
theme_bw(base_size = 15) -> density_plot

density_plot

dpb <- ggplot_build(density_plot)

x1 <- min(which(dpb$data[[1]]$x > ic_boot$upper[2]))
```

```
x2 <- max(which(dpb$data[[1]]$x <= 0.95))

density_plot +
geom_area(data=data.frame(x = dpb$data[[1]]$x[x1:x2],
y = dpb$data[[1]]$y[x1:x2]),
aes(x = x, y = y), colour = 'red', fill = "red", alpha = 0.5, linetype = "dashed")
geom_vline(data = theta_boot,
aes(xintercept = est_mqq$est[2]),
colour = "blue", linetype = "dashed", size = 1) +
geom_text(aes(x = 0.185, y = 12.5, label = 'hat(e)[2]==0.2012'), parse = TRUE) +
geom_text(aes(x = 0.18, y = 2, label = 'RC[hat(e)[2]]: e[2]^"*" > 0.1391'),
parse = TRUE) +
scale_x_continuous(name = expression(e[2]^'*')) +
scale_y_continuous(name = 'Densidade')
```