

INFERÊNCIA SOBRE ERROS DE  
CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE MEDIÇÃO  
COM RESPOSTAS DO TIPO ATRIBUTO



RICARDO SALDANHA DE MORAIS

INFERÊNCIA SOBRE ERROS DE  
CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE MEDIÇÃO  
COM RESPOSTAS DO TIPO ATRIBUTO

Tese apresentada ao Programa de Pós-  
-Graduação em Estatística do Instituto de  
Ciências Exatas da Universidade Federal de  
Minas Gerais como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Doutor em Estatística.

ORIENTADOR: ROBERTO DA COSTA QUININO  
COORIENTADOR: EMÍLIO SUYAMA

Belo Horizonte  
20 de dezembro de 2016

© 2016, Ricardo Saldanha de Moraes.  
Todos os direitos reservados.

Morais, Ricardo Saldanha de

M827i Inferência sobre Erros de Classificação de Sistemas de Medição com Respostas do Tipo Atributo / Ricardo Saldanha de Moraes. — Belo Horizonte, 2016  
xviii, 121 f. : il. ; 29cm

Tese (doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais

Orientador: Roberto da Costa Quinino

1. Erros de classificação. 2. Sistemas de medição.  
3. Mistura de distribuições multinomiais. 4. Resultados de maioria simples. 5. Modelos de classe latente.  
6. Algoritmo EM. 7. Estimadores de máxima verossimilhança. 8. Simulação de Monte Carlo.  
I. Título.

CDU 519.2

# [Folha de Aprovação]

Quando a secretaria do Curso fornecer esta folha, ela deve ser digitalizada e armazenada no disco em formato gráfico.

Se você estiver usando o `pdflatex`, armazene o arquivo preferencialmente em formato PNG (o formato JPEG é pior neste caso).

Se você estiver usando o `latex` (não o `pdflatex`), terá que converter o arquivo gráfico para o formato EPS.

Em seguida, acrescente a opção `approval={nome do arquivo}` ao comando `\ppgccufmg`.

Se a imagem da folha de aprovação precisar ser ajustada, use:  
`approval=[ajuste] [escala] {nome do arquivo}`  
onde *ajuste* é uma distância para deslocar a imagem para baixo e *escala* é um fator de escala para a imagem. Por exemplo:  
`approval=[-2cm] [0.9] {nome do arquivo}`  
desloca a imagem 2cm para cima e a escala em 90%.



# Agradecimentos

Aos meus pais por tudo.

Ao Professor Roberto da Costa Quinino pela oportunidade e pela paciente e sempre disponível orientação.

Ao Professor Emílio Suyama pelas disposição em cooperar e leitura atenta.

Ao Programa de Capacitação de Servidores, ao Departamento de Física e Matemática e à Unidade Nepomuceno, do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, pelo apoio financeiro e institucional.

Ao Programa de Pós-Graduação em Estatística, da Universidade Federal de Minas Gerais, pela oportunidade de qualificação acadêmica.





# Resumo

Para estimar os erros de classificação de sistemas de medição que classificam itens dicotomicamente com possibilidade de classificações repetidas, o método de máxima verossimilhança é comumente utilizado, principalmente em razão de sua eficiência em obter estimativas para os parâmetros de uma mistura de duas distribuições binomiais. Uma alternativa mais intuitiva e operacionalmente mais simples é dada pelo método de maioria simples. Nessa abordagem, cada item é classificado  $r$  vezes como *conforme* ou *não-conforme*. A classificação final do objeto é determinada pelo valor categórico mais frequente. Um estudo prévio indicou que os estimadores – para as probabilidades dos erros de classificação de sistemas de medição com respostas dicotômicas – baseados no procedimento de maioria simples possuem menor erro quadrático médio que os correspondentes estimadores de máxima verossimilhança, além de terem as mesmas propriedades assintóticas desses. Nesta tese, introduzimos uma variação do procedimento de maioria simples na qual a realização de um número fixo de  $r$  medições repetidas não é necessário para a definição da classificação final de uma unidade. Nessa nova abordagem, cada item é sequencialmente classificado como *conforme* ou *não-conforme* e processo cessa quando a frequência do resultado conforme ou do resultado não-conforme atinge um determinado valor inteiro. Mostramos que os estimadores baseados nesse procedimento são assintoticamente consistentes e não-enviesados. Além disso, por meio de simulação de Monte Carlo, verificamos que essa abordagem apresenta menor erro quadrático médio que os métodos de maioria simples (para um número médio de repetições similar a  $r$ ) e de máxima verossimilhança. Entretanto, existem circunstâncias que requerem o emprego de sistemas de medição com respostas em uma escala mais ampla de valores categóricos nominais. Nesta tese, propomos também estimadores fundamentados em resultados de maioria simples para avaliar os erros de classificação de sistemas de medição que classificam objetos em um domínio nominal tricotômico. Modelamos o procedimento de maioria simples para o caso tricotômico usando uma mistura de três distribuições multinomiais. Demonstramos que esses estimadores são assintoticamente consistentes e não-enviesados, e comparamos seu

desempenho com os correspondentes estimadores de máxima verossimilhança via simulação de Monte Carlo. Constatamos que os estimadores propostos são uma alternativa competitiva porque são computacionalmente mais simples e apresentam performance similar ao método de máxima verossimilhança. Esclarecemos que, nesta tese, estamos interessados no contexto em que o real estado de qualidade dos objetos não pode ser determinado.

**Palavras-chave:** Erros de classificação, Sistemas de medição, Mistura de distribuições multinomiais, Resultados de maioria simples, Modelos de classe latente, Algoritmo EM, Simulação de Monte Carlo.

# Abstract

For assessing the precision of measurement systems that classify items dichotomically with the possibility of repeated ratings, the maximum likelihood method is commonly used to evaluate misclassification probabilities. One simpler alternative that is operationally easier is to consider the simple majority method. In this method, each of  $n$  items are classified  $r$  times as conforming or non-conforming. The final classification of the item is determined by the most frequent class. This method yielded lower mean squared errors than the maximum likelihood is asymptotically efficient. In this thesis, we introduce a new approach in which the realization of all  $r$  repeated classifications of each item may not be needed. Each of  $n$  items is sequentially classified as conforming or non-conforming, and the process ceases when the frequency of conforming or non-conforming classification reaches the integer  $\rho$ . We show that, by a Monte Carlo simulation, the last procedure presents a lower mean squared error than the simple majority results and maximum likelihood method for a similar number of  $r$  repeated classifications. However, there are circumstances in which the use of measurement systems with a wider scale of responses is necessary. In this thesis, we propose estimators based on simple majority results for evaluating the classification errors of measurement systems that rate items in a trichotomous domain. We investigate their properties and compare their performance with that of maximum likelihood estimators. The simple majority procedure is modelled using a mixture of three multinomial distributions. The proposed estimators are shown to be a competitive alternative because they offer closed-form expressions and demonstrate a performance similar to that of maximum likelihood estimators. We clarify that, in this work, we focus on the context in which the true quality states of the objects cannot be determined.

**Keywords:** Misclassification, Measurement system, Mixture of multinomial distributions, Simple majority results, Latent class model, Maximum likelihood estimators, EM algorithm, Monte Carlo simulation.



# Lista de Figuras

3.1	Regiões de “integração”. . . . .	58
3.2	Probabilidade de ausência de um ou mais valores categóricos no conjunto de resultados de classificações finais. . . . .	73
3.3	Probabilidade de predição correta (geral) em função do número de repetições $r$ , por MMSP e MMVP, para cenário 22 na Tabela 3.2. . . . .	86



# Lista de Tabelas

1.1	Cenários e realizações . . . . .	16
1.2	Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de $\theta$ estimados pelos métodos de MV e MS. . . . .	17
1.3	Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de $\pi_0^1$ estimados pelos métodos de MV e MS. . . . .	18
1.4	Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de $\pi_1^0$ estimados pelos métodos de MV e MS. . . . .	19
1.5	Média dos valores dos EQMs, dos vieses absolutos (VAs) e dos DPs, bem como porcentagens de casos favoráveis ao método de MS (entre parênteses) em relação aos cenários descritos na Tabela 1.1. . . . .	20
2.1	Exemplo de classificações repetidas sequenciais . . . . .	23
2.2	Cenários e realizações . . . . .	39
2.3	Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de $\theta$ estimados pelos métodos de MS e MSS. . . . .	40
2.4	Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de $\pi_0^1$ estimados pelos métodos de MS e MSS. . . . .	41
2.5	Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de $\pi_1^0$ estimados pelos métodos de MS e MSS. . . . .	42
2.6	Valores médios dos EQMs, vieses absolutos (VAs) e DPs, bem como porcentagens de casos favoráveis ao método de MSS (entre parênteses) em relação aos cenários descritos na Tabela 2.2. . . . .	43
2.7	Cenários e realizações . . . . .	44
2.8	Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de $\theta$ estimados pelos métodos de MV e MSS. . . . .	45
2.9	Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de $\pi_0^1$ estimados pelos métodos de MV e MSS. . . . .	46

2.10	Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de $\pi_1^0$ estimados pelos métodos de MV e MSS. . . . .	47
2.11	Valores médios dos EQMs, viéses absolutos (VAs) e DPs, bem como porcentagens de casos favoráveis ao procedimento de MSS (entre parênteses) em relação aos cenários descritos na Tabela 2.7. . . . .	48
2.12	Valores médios dos EQMs, viéses absolutos (VAs) e DPs relativos aos cenários descritos na Tabela 2.2. . . . .	48
3.1	Valores selecionados. . . . .	73
3.2	Cenários e número de realizações. . . . .	74
3.3	Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de $\theta_0$ pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples. . . . .	75
3.4	Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de $\theta_1$ pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples. . . . .	76
3.5	Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de $\theta_2$ pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples. . . . .	77
3.6	Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de $\pi_0^1$ pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples. . . . .	78
3.7	Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de $\pi_0^2$ pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples. . . . .	79
3.8	Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de $\pi_1^0$ pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples. . . . .	80
3.9	Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de $\pi_1^2$ pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples. . . . .	81
3.10	Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de $\pi_2^0$ pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples. . . . .	82
3.11	Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de $\pi_2^1$ pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples. . . . .	83
3.12	Valores médios dos EQMs, viéses absolutos (VAs) e DPs, bem como porcentagens de casos favoráveis ao procedimento de MS (entre parênteses) em relação aos cenários descritos na Tabela 3.2. . . . .	84
3.13	Probabilidades de predição correta (geral e por categoria) relativas ao cenário 22 na Tabela 3.2, por MMSP e MMVP. . . . .	85
3.14	Médias das probabilidades de predição correta (geral e por categoria) relativas aos cenários na Tabela 3.2, por MMSP e MMVP. . . . .	86



# Sumário

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
<b>1 Estimadores de maioria simples</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Objetivos e organização da tese . . . . .	3
1.3 Estimadores de maioria simples para análise de SsMD . . . . .	5
1.4 Propriedades assintóticas dos EsMS . . . . .	7
1.5 Comparação entre EsMS e EsMV . . . . .	14
1.6 Considerações finais . . . . .	15
<b>2 Estimadores de maioria simples sequencial</b>	<b>21</b>
2.1 Estimadores de maioria simples sequencial . . . . .	21
2.2 Propriedades assintóticas dos EsMSS . . . . .	25
2.3 Estimadores de máxima verossimilhança . . . . .	32
2.4 Desempenho dos EsMSS . . . . .	36
2.4.1 Comparação entre EsMSS e EsMS . . . . .	37
2.4.2 Comparação entre EsMSS e EsMV . . . . .	39
2.5 Conclusões . . . . .	48
<b>3 EsMS para análise de SsMT</b>	<b>51</b>
3.1 Estimadores de maioria simples para análise de SsMT . . . . .	51
3.2 Propriedades assintóticas dos EsMS . . . . .	57

3.3	Estimadores de máxima verossimilhança . . . . .	64
3.4	Comparação entre EsMS e EsMV . . . . .	70
3.5	Predições via métodos de MS e de MV . . . . .	84
3.6	Conclusões . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>89</b>
4.1	Conclusões . . . . .	89
4.2	Trabalhos futuros . . . . .	91
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>93</b>
	<b>Anexo A Código R: respostas dicotômicas</b>	<b>97</b>
	<b>Anexo B Código R: respostas tricotômicas</b>	<b>105</b>

# Capítulo 1

## Estimadores de maioria simples: objetivos da tese

### 1.1 Introdução

Na indústria, decisões críticas sobre o processo de fabricação dependem da precisão dos sistemas de medição empregados no monitoramento da produção. Como consequência, avaliações periódicas de performance desses sistemas são necessárias. No caso de um sistema de medição com respostas dicotômicas (SMD) – isto é, a característica de interesse assume um de dois valores possíveis – em cada avaliação de desempenho, é imprescindível levar em consideração a eficácia do sistema em classificar, por exemplo, itens manufaturados como *conforme* ou *não-conforme*, uma vez que dois erros podem ocorrer durante a inspeção: o primeiro (conhecido como erro do tipo I) surge quando um item conforme é classificado como não-conforme, e o segundo (chamado erro do tipo II) refere-se à situação em que um item não-conforme é classificado como conforme. Problemas similares podem ocorrer em contextos diferentes, por exemplo, na área da saúde, quando são necessárias avaliações da *sensibilidade* e da *especificidade* de determinados testes de diagnóstico<sup>1</sup>.

Diversos estudos, tais como Burke et al. [1995], Gustafson [2003], Johnson & Kotz [1985], Johnson & Kotz [1988], Johnson et al. [1991], Pham-Gia & Turkhan [2005], Greenberg & Stokes [1995] e Fujisawa & Izume [2000], enfatizam que, se os erros de classificação são ignorados, a capacidade para identificar o verdadeiro nível de eficácia dos procedimentos de controle de qualidade envolvendo sistemas de medição

---

<sup>1</sup>sensibilidade =  $P(\text{resultado positivo} \mid \text{indivíduo possui o atributo})$  e especificidade =  $P(\text{resultado negativo} \mid \text{indivíduo não possui o atributo})$ .

pode ser prejudicada, de modo a comprometer severamente toda a inferência acerca do processo de manufatura. Exemplos de sistemas de medição para dados dicotômicos podem ser encontradas nos artigos listados acima, além de Boyles [2001] e Van Wieringen & De Mast [2008]. Nessas duas últimas referências, os autores propuseram métodos para avaliar SsMD em um contexto em que um sistema “padrão ouro” de medição não existe ou é operacionalmente inviável, ou seja, o verdadeiro estado de qualidade dos objetos não pode ser determinado. Em ambos os trabalhos, os autores classificaram repetidamente itens de uma amostra, usando exclusivamente o sistema em análise, e então aplicaram um modelo de classe latente para descrever os resultados. Esse modelo ofereceu uma explicação intuitiva para a estrutura dos dados observados e permitiu que as probabilidades associadas aos dois tipos de erros de classificação compusessem os parâmetros do modelo. Nesses dois trabalhos, as estimativas dos parâmetros foram obtidas usando o método de máxima verossimilhança, especificamente o algoritmo EM.

Como abordagem alternativa, Quinino et al. [2013] consideraram o mesmo desenho experimental para a análise de SsMD e propuseram estimadores baseados na noção de maioria simples, isto é, estimadores formulados em termos da variável aleatória de Bernoulli  $F_i$  – que representa a classificação final da  $i$ -ésima peça após  $r$  medições – sendo definida por  $F_i = 1$  se e somente se  $X_i \geq r/2$ , em que  $X_i = \sum_{j=1}^r X_{ij}$  e  $X_{ij}$  é o  $j$ -ésimo resultado de classificação para o  $i$ -ésimo item, isto é,

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o item é classificado como conforme,} \\ 0 & \text{se o item é classificado como não-conforme.} \end{cases}$$

Os autores dividiram a amostra em grupos de peças com  $F_i = 1$  e  $F_i = 0$  e estimaram os erros de classificação pelas proporções de medições supostamente equivocadas em cada um dos subgrupos. O percentual de objetos com  $F_i = 1$  constituiu a estimativa para a fração de itens conformes. Além da evidente simplicidade computacional desse método, denominado estimador de maioria simples (EMS), Quinino, Ho & Suyama mostraram que os EsMS são assintoticamente eficientes e não-tendenciosos. Concluíram também que os EsMS apresentam boa performance em razão de exibirem menor *erro quadrático médio* que os estimadores de momentos (propostos por Blischke [1962]) e os estimadores de máxima verossimilhança (EsMV), nos casos analisados em um estudo de simulação de Monte Carlo.

Há também situações que requerem sistemas capazes de classificar itens em uma escala

mais ampla de respostas, isto é, os valores medidos pertencem a conjunto de categorias não-binário. Um exemplo da ocorrência de dados nominais na indústria – pertencentes a um domínio com mais do que dois elementos – é dado pela necessidade de classificar peças manufaturadas como possuindo *transparência perfeita*, *transparência boa* ou *nenhuma transparência* (Chena et al. [2011]). Um outro exemplo é apresentado por Li et al. [2014] e diz respeito à classificação de serviços como *excelente*, *aceitável* ou *inaceitável*. Ilustrações adicionais de tais sistemas podem ser encontrados em De Mast & Van Wieringen [2007]. Esses exemplos evidenciam particularmente a relevância prática do caso tricotômico, e portanto justificam uma investigação de métodos para análise de sistemas de medição com respostas tricotômicas. Quinino et al. [2013] não discutiram uma adaptação do método da maioria simples para o caso de múltiplas categorias nominais, embora a tenham citado como uma extensão do trabalho para o futuro.

## 1.2 Objetivos e organização da tese

O objeto de interesse desta tese é avaliação da qualidade (precisão) das classificações realizadas por sistemas de medição com respostas nominais dicotômicas ou tricotômicas, por meio do uso de modelos de classe latente e da estimação das probabilidades associadas a cada um dos tipos existentes de erros de classificação – no contexto em que um sistema “padrão ouro” de medição não está disponível, isto é, o real estado de qualidade das unidades experimentais é desconhecido.

Nosso interesse é motivado pela percepção – apontada há algum tempo por Van Wieringen [2003] – de que na literatura de estatística industrial existem poucos estudos dedicados à análise de sistemas de medição com respostas nominais, embora esses sejam frequentemente encontrados na prática. As técnicas disponíveis para esse propósito geralmente se baseiam em estatísticas amostrais que resumem em apenas um número o grau de precisão (por exemplo, *measure of agreement*), sem fundamentação matemática na forma de um modelo. Ou então, quando baseadas em modelos, dependem de parâmetros que são extrínsecos ao sistema de medição, como, por exemplo, a fração de itens conformes do processo de fabricação. Cabe notar que, diferentemente de índices unidimensionais de qualidade, o conhecimento de cada uma das probabilidades associadas aos diferentes tipos de erros de classificação

permite uma intervenção mais objetiva no aprimoramento do sistema de medição. Como motivo final, destacamos que estimadores baseados na noção maioria simples raramente são objeto de estudos mais detalhados. São usados normalmente apenas como valores iniciais de processos iterativos.

Especificamente, são dois os objetivos desta tese. O primeiro deles é modificar o desenho experimental considerado por Quinino et al. [2013] (descrito no terceiro parágrafo da seção anterior) de modo que não seja necessário um número fixo de medições repetidas para a definição da classificação final  $F_i$  de cada peça. Nessa nova proposta, cada objeto é submetido a julgamentos repetidos até que a quantidade de ocorrências do atributo *conforme* ou do atributo *não-conforme* seja igual a um determinado número inteiro positivo  $\rho$ . O valor de  $F_i$  corresponde então ao atributo que primeiramente figurou  $\rho$  vezes, na sequência das medições. Denominamos os EsMS, quando baseados nessa segunda versão de  $F_i$ , por estimadores de maioria simples sequencial (EsMSS). Demonstramos que esses estimadores são consistentes e assintoticamente não-tendenciosos. Verificamos também que os EsMMS possuem, em geral, menor *erro quadrático médio* e menor *viés* que os EsMS. Esse método é apresentado no Capítulo 2.

O segundo o objetivo é estender o procedimento de maioria simples para o contexto de sistemas de medição com respostas tricotômicas (SsMT), isto é, sistemas cujas respostas pertencem a um conjunto de três valores nominais distintos. A técnica consiste em classificar uma peça, independente e repetidamente, um número fixo de vezes. A categoria mais frequentemente observada é designada como a “verdadeira” categoria da peça. Nos casos de empate, executamos um sorteio para definir a categoria do item. A configuração experimental é baseada em um modelo de classe latente, definido de tal modo que as quantidades de interesse, isto é, as probabilidades dos erros de classificação, coincidem com parte dos parâmetros de uma mistura de três distribuições multinomiais. Provamos que tais estimadores são consistentes e assintoticamente não-tendenciosos. Para uma configuração populacional na qual uma categoria é substancialmente mais frequente que as demais e as probabilidades dos erros de classificação não são muito altas, constatamos que a abordagem de maioria simples também é apropriada para análise de SsMT, pois, além de ser computacionalmente simples (expressões fechadas), apresentou menor *erro quadrático médio* e menor *desvio padrão* em relação aos estimadores de máxima verossimilhança, para a maioria dos cenários investigados. Essa abordagem é apresentada no Capítulo 3.

No Capítulo 4, são apresentadas as conclusões e indicações de trabalhos futuros.

As demais seções deste capítulo são dedicadas à apresentação de parte dos resultados do artigo Quinino et al. [2013] que serão adaptados e/ou estendidos, nos Capítulos 2 e 3. Esclarecemos que modificamos as notações e demonstrações originais, com intuito de conferir maior formalismo matemático e, sobretudo, de facilitar as extensões pretendidas.

### 1.3 Estimadores de maioria simples para análise de sistemas de medição com respostas dicotômicas

Nesta seção, apresentamos os estimadores de maioria simples para análise de sistemas de medição com respostas dicotômicas.

Consideremos um experimento que envolve uma amostra aleatória de  $n$  objetos que são julgados repetidamente,  $r$  vezes, por um mesmo avaliador, que classifica itens manufaturados como conformes ou não-conformes. Supomos que classificações de itens diferentes são independentes.

Os dados observados são denotados por  $X_{ij}$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, r$  indexando os objetos e julgamentos repetidos, respectivamente. Os  $X_{ij}$ 's assumem os valores 0 (não-conforme) ou 1 (conforme).

Admitimos que o verdadeiro estado de qualidade dos objetos,  $Y_i$ , que é também 0 ou 1, não pode ser observado, e que, condicionalmente em  $Y_i$ , os  $X_{ij}$ 's são independentes –  $Y_i$  é uma variável categórica subjacente, latente, usada para explicar a estrutura de correlação dos dados observados.

A medida  $X_{ij}$  depende de  $Y_i$ ; definimos então

$$\pi_y^x = P(X_{ij} = x | Y_i = y), \quad x, y = 0, 1,$$

de modo que as probabilidades associadas ao erro do tipo I e ao erro do tipo II são  $\pi_1^0$  e  $\pi_0^1$ , respectivamente. Denotamos a proporção populacional de itens conformes por  $\theta$ ,

ou seja,

$$\theta = P(Y_i = 1).$$

Nas condições acima, para  $X_i = \sum_{j=1}^r X_{ij}$ , que representa o número de vezes em que o item  $i$  é classificado como conforme, podemos afirmar que  $X_i|Y_i = y$  tem distribuição binomial, com parâmetros  $r$  e  $\pi_y^1$ , e que sua função de probabilidade é

$$\begin{aligned} P(X_i = x) &= P(X_i = x | Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0) + P(X_i = x | Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1) \\ &= (1 - \theta) \cdot \binom{r}{x} [1 - \pi_0^1]^{r-x} [\pi_0^1]^x \\ &\quad + \theta \cdot \binom{r}{x} [\pi_1^0]^{r-x} [1 - \pi_1^0]^x \end{aligned} \tag{1.1}$$

Para  $\theta \in (0, 1)$  e  $0 < \pi_0^1 < (1 - \pi_1^0) < 1$ , a expressão acima é uma mistura de binomiais e, de acordo com Teicher [1961] e Blischke [1964], esse modelo é identificável se e somente se  $r \geq 3$ . Adicionamos então às hipóteses do experimento, as seguintes restrições

$$r \geq 3, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \pi_0^1 < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 0 < \pi_1^0 < \frac{1}{2}.$$

Para a estimação dos parâmetros  $\theta$ ,  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$ , propomos estimadores fundamentados na noção de maioria simples, isto é, formulados em termos da variável aleatória de Bernoulli,  $F_i$ , definida por

$$F_i = 1 \text{ se e somente se } X_i \geq \frac{r}{2}.$$

$F_i$  é interpretado como a classificação final do  $i$ -ésimo objeto, após  $r$  medições.

Intuitivamente, a medida que  $r$  aumenta, os efeitos dos erros de classificação seriam amenizados, de modo que  $F_i$  expressaria com correção ascendente o verdadeiro estado do  $i$ -ésimo objeto. Por esse motivo, para a estimação dos parâmetros, sugerimos as proporções abaixo, que denominamos *estimadores de maioria simples* (EsMS):

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{n}, \quad \hat{\pi}_1^0 = \frac{\sum_{i=1}^n (r - X_i) F_i}{r \sum_{i=1}^n F_i} \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_0^1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i (1 - F_i)}{r \sum_{i=1}^n (1 - F_i)}. \tag{1.2}$$



## 1.4 Propriedades assintóticas dos EsMS

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades dos EsMS. Iniciamos com a formalização matemática da intuição de que, à medida que o número de repetições cresce, a classificação final de um objeto tende a coincidir com o seu estado verdadeiro, isto é :

**Lema 1.1.**

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = k \mid Y_i = k) = 1 \quad (1.3)$$

ou, *equivalentemente*,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = k' \mid Y_i = k) = 0 \text{ para } k' \neq k. \quad (1.4)$$

Além disso,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = 1) = \theta. \quad (1.5)$$

*Demonstração.* Podemos escrever

$$P(F_i = 1 \mid Y_i = 1) = P(X_i \geq r/2 \mid Y_i = 1) = \sum_{x_i=\lceil r/2 \rceil}^r \binom{r}{x_i} [\pi_1^0]^{r-x_i} [1 - \pi_1^0]^{x_i},$$

em que  $\lceil a \rceil$  denota o menor inteiro maior ou igual a  $a$ . A distribuição binomial pode ser aproximada por uma distribuição normal, de modo que, para  $r$  suficientemente grande, vale

$$\begin{aligned} P(F_i = 1 \mid Y_i = 1) &\approx P\left(Z \geq \frac{\lceil r/2 \rceil - r \cdot (1 - \pi_1^0)}{\sqrt{r \cdot \pi_1^0 \cdot (1 - \pi_1^0)}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\lceil r/2 \rceil - r \cdot (1 - \pi_1^0)}{\sqrt{r \cdot \pi_1^0 \cdot (1 - \pi_1^0)}}\right) \end{aligned}$$

em que  $Z \sim N(0, 1)$  e  $\Phi$  é sua função de distribuição acumulada. Como  $0 < \pi_1^0 < \frac{1}{2}$ , temos<sup>2</sup>  $\lceil r/2 \rceil - r \cdot (1 - \pi_1^0) < 0$ , donde  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lceil r/2 \rceil - r \cdot (1 - \pi_1^0)}{\sqrt{r \cdot \pi_1^0 \cdot (1 - \pi_1^0)}} = -\infty$ . Por conseguinte,  $\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = k \mid Y_i = k) = 1$  para  $k = 1$ . A prova é inteiramente análoga para  $k = 0$ . Como

$$\begin{aligned} P(F_i = 1) &= P(F_i = 1 \mid Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0) + P(F_i = 1 \mid Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1) \\ &= (1 - \theta) \cdot P(F_i = 1 \mid Y_i = 0) + \theta \cdot P(F_i = 1 \mid Y_i = 1), \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> $\lceil r/2 \rceil = r/2$  ou  $\lceil r/2 \rceil = (r + 1)/2$

os limites (1.3) e (1.4) implicam que  $\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = 1) = \theta$ . ■

Para estabelecer as propriedades assintóticas dos EsMS, são necessários também as seguintes definição e lema.

**Definição 1.1.** Dizemos que a sequência de variáveis (ou de vetores) aleatórias  $\{Z_{n,r}\}_{n,r \in \mathbb{N}}$  converge em **probabilidade** para a variável (o vetor)  $Z$  se, dados  $\epsilon > 0$  e  $\eta > 0$ , existem  $n_0 = n_0(\epsilon, \eta) \in \mathbb{N}$  e  $r_0 = r_0(\epsilon, \eta) \in \mathbb{N}$  tais que

$$P(|Z_{n,r} - Z| \geq \epsilon) \leq \eta \text{ sempre que } n > n_0 \text{ e } r > r_0.$$

**Notação:**  $Z_{n,r} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} Z$ .

**Lema 1.2.** Se as sequências  $\{T_{n,r}\}_{n,r \in \mathbb{N}}$  e  $\{U_{n,r}\}_{n,r \in \mathbb{N}}$  são tais que

$$T_{n,r} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} a \text{ e } U_{n,r} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} b,$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $b \neq 0$ , então

$$\frac{T_{n,r}}{U_{n,r}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} \frac{a}{b}.$$

Nos casos em que  $P(U_{n,r} = 0) \neq 0$ ,  $\frac{T_{n,r}}{U_{n,r}}$  pode ser definido como  $\frac{T_{n,r}}{U_{n,r}} = k$  se  $U_{n,r} = 0$ , em que  $k$  é constante qualquer.

*Demonstração.* Pode-se verificar facilmente que  $(T_{n,r}, U_{n,r}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} (a, b)$ . A função  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  é contínua em  $(a, b)$ . Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < |b|$  tal que  $|(x, y) - (a, b)| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \frac{a}{b}| < \epsilon$ . Então, definindo  $Z_{n,r} =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{T_{n,r}}{U_{n,r}} & \text{se } U_{n,r} \neq 0 \\ k & \text{se } U_{n,r} = 0 \end{array} \right., \text{ podemos escrever}$$

$$\begin{aligned} P\left(\left|Z_{n,r} - \frac{a}{b}\right| \geq \epsilon\right) &= P\left(\left|Z_{n,r} - \frac{a}{b}\right| \geq \epsilon \mid U_{n,r} = 0\right) \cdot P(U_{n,r} = 0) \\ &+ P\left(\left|Z_{n,r} - \frac{a}{b}\right| \geq \epsilon \mid U_{n,r} \neq 0\right) \cdot P(U_{n,r} \neq 0) \\ &= P\left(\left|k - \frac{a}{b}\right| \geq \epsilon \mid U_{n,r} = 0\right) \cdot P(U_{n,r} = 0) \\ &+ P\left(\left|\frac{T_{n,r}}{U_{n,r}} - \frac{a}{b}\right| \geq \epsilon \mid U_{n,r} \neq 0\right) \cdot P(U_{n,r} \neq 0) \\ &\leq P\left(\left|k - \frac{a}{b}\right| \geq \epsilon \mid U_{n,r} = 0\right) \cdot P(U_{n,r} = 0) \\ &+ P\left(\left|(T_{n,r}, U_{n,r}) - (a, b)\right| \geq \delta \mid U_{n,r} \neq 0\right) \cdot P(U_{n,r} \neq 0) \\ &\leq P(U_{n,r} = 0) + P\left(\left|(T_{n,r}, U_{n,r}) - (a, b)\right| \geq \delta \mid U_{n,r} \neq 0\right). \end{aligned}$$

Como  $P(U_{n,r} = 0) \leq P\left(\left|(T_{n,r}, U_{n,r}) - (a, b)\right| \geq \delta\right)$  (pois,  $0 < \delta < |b|$ ),  
 $P\left(\left|(T_{n,r}, U_{n,r}) - (a, b)\right| \geq \delta \mid U_{n,r} \neq 0\right) \leq \frac{P\left(\left|(T_{n,r}, U_{n,r}) - (a, b)\right| \geq \delta\right)}{P(U_{n,r} \neq 0)}$  e  
 $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} P\left(\left|(T_{n,r}, U_{n,r}) - (a, b)\right| \geq \delta\right) = 0$ , concluímos que  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} P(U_{n,r} \neq 0) = 1$  e

$$Z_{n,r} = \frac{T_{n,r}}{U_{n,r}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} \frac{a}{b}$$

conforme queríamos demonstrar. ■

A partir dos lemas acima, podemos estabelecer os seguintes teoremas.

**Teorema 1.1.** *Em relação ao número de repetições, o estimador  $\hat{\theta}$  é assintoticamente não-enviesado.*

*Demonstração.* Temos que  $E[\hat{\theta}] = \frac{\sum_{i=1}^n E[F_i]}{n} = E[F_i] = P(F_i = 1)$ . Aplicando então o

limite (1.5), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = 1) = \theta,$$

ou seja, o estimador  $\hat{\theta}$  é assintoticamente não-enviesado. ■

**Teorema 1.2.** *Em relação ao aumento, simultâneo, do número de objetos  $n$  e da quantidade de repetições  $r$ , o estimador  $\hat{\theta}$  é consistente.*

*Demonstração.* A variância de  $\hat{\theta}$  pode ser expressa como<sup>3</sup>

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}[F_i]}{n^2} = \frac{P(F_i = 1)[1 - P(F_i = 1)]}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Pela desigualdade de Chebyshev, para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \epsilon) \leq \frac{E[(\hat{\theta} - \theta)^2]}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}[\hat{\theta}] + (E[\hat{\theta}] - \theta)^2}{\epsilon^2}.$$

Além disso,  $\text{Var}[\hat{\theta}] \rightarrow 0$  uniformemente (isto é, a aproximação não depende de  $r$ ) quando  $n \rightarrow \infty$ , e  $E[\hat{\theta}] \rightarrow \theta$  uniformemente quando  $r \rightarrow \infty$ . Consequentemente,

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} \theta,$$

isto é,  $\hat{\theta}$  é um estimador consistente. ■

**Teorema 1.3.** *Em relação ao aumento, simultâneo, do número de objetos  $n$  e da quantidade de repetições  $r$ , os estimadores  $\hat{\pi}_0^1$  e  $\hat{\pi}_1^0$  são assintoticamente não-enviesados e consistentes.*

*Demonstração.* Para provar que  $\hat{\pi}_1^0$  cumpre as condições descritas, começamos com a afirmação de que a sequência  $\{F_i\}_{r \geq 1}$  converge em *média* para a variável aleatória  $Y_i$ , isto é,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E[|F_i - Y_i|] = 0. \tag{1.6}$$

---

<sup>3</sup>Aplicando o limite (1.5), temos  $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{\theta}] = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

Com efeito, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|F_i - Y_i|] &= \sum_{y=0}^1 \sum_{f=0}^1 \mathbb{E}[|F_i - Y_i| \mid Y_i = y, F_i = f] \cdot P(Y_i = y, F_i = f) \\
&= P(Y_i = 0, F_i = 1) + P(Y_i = 1, F_i = 0) \\
&= P(F_i = 1 \mid Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0) + P(F_i = 0 \mid Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1) .
\end{aligned}$$

Assim, aplicando os limites (1.4), obtemos a igualdade (1.6), que garante a convergência mencionada.

Além disso, a sequência  $\left\{ \frac{(r - X_i)F_i}{r} \right\}_{r \geq 1}$  converge em *média quadrática* para a variável aleatória  $\pi_1^0 \cdot Y_i$ , isto é,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left\{ \frac{(r - X_i)F_i}{r} - \pi_1^0 \cdot Y_i \right\}^2 \right] = 0 . \quad (1.7)$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[ \left\{ \frac{(r - X_i) \cdot F_i}{r} - \pi_1^0 \cdot Y_i \right\}^2 \right] \\
&= \sum_{y=0}^1 \sum_{f=0}^1 \mathbb{E} \left[ \left\{ \frac{(r - X_i) \cdot F_i}{r} - \pi_1^0 \cdot Y_i \right\}^2 \mid Y_i = y, F_i = f \right] \cdot P(Y_i = y, F_i = f) \\
&= \mathbb{E} \left[ \left\{ \frac{(r - X_i)}{r} - \pi_1^0 \right\}^2 \mid Y_i = 1, F_i = 1 \right] \cdot P(F_i = 1 \mid Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1) + \mathfrak{R} ,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= \mathbb{E} \left[ \left\{ \frac{r - X_i}{r} \right\}^2 \mid Y_i = 0, F_i = 1 \right] \cdot P(F_i = 1 \mid Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0) \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ \left\{ -\pi_1^0 \right\}^2 \mid Y_i = 1, F_i = 0 \right] \cdot P(F_i = 0 \mid Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1) .
\end{aligned}$$

Como os valores esperados que figuram em  $\mathfrak{R}$  são limitados, os limites (1.4) garantem

que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{R} = 0$ . Por isso, limitamos agora nossa atenção ao comportamento do valor

esperado  $\mathfrak{E} = \mathbb{E} \left[ \left\{ \frac{r - X_i}{r} - \pi_1^0 \right\}^2 \middle| Y_i = 1, F_i = 1 \right]$ . Notemos que

$$\begin{aligned} P(X_i = x_i | Y_i = 1, F_i = 1) &= \frac{P(X_i = x_i, Y_i = 1, F_i = 1)}{P(Y_i = 1, F_i = 1)} \\ &\leq \frac{P(X_i = x_i, Y_i = 1)}{P(Y_i = 1, F_i = 1)} \\ &= \frac{P(X_i = x_i, Y_i = 1)}{P(Y_i = 1)} \cdot \frac{P(Y_i = 1)}{P(Y_i = 1, F_i = 1)} \\ &= P(X_i = x_i | Y_i = 1) \cdot \frac{1}{P(F_i = 1 | Y_i = 1)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathfrak{E} \leq \mathbb{E} \left[ \left\{ \frac{r - X_i}{r} - \pi_1^0 \right\}^2 \middle| Y_i = 1 \right] \cdot \frac{1}{P(F_i = 1 | Y_i = 1)}. \quad (1.8)$$

Como  $X_i | Y_i = 1$  tem distribuição binomial com número de ensaios  $r$  e probabilidade de “sucesso”  $1 - \pi_1^0$ ,  $\mathbb{E} \left[ \frac{r - X_i}{r} \middle| Y_i = 1 \right] = \pi_1^0$  e

$$\mathbb{E} \left[ \left\{ \frac{r - X_i}{r} - \pi_1^0 \right\}^2 \middle| Y_i = 0 \right] = \text{Var} \left[ \frac{r - X_i}{r} \middle| Y_i = 1 \right] = \frac{1}{r} \cdot [1 - \pi_1^0] \cdot \pi_1^0.$$

Decorre então da última igualdade, da desigualdade (1.8) e do limite (1.3) que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{E} = 0$ , o que prova (1.7) e assegura a convergência em *média quadrática* supracitada.

Resulta do fato  $\mathbb{E}[|X|^2] \geq (\mathbb{E}[|X|])^2$  (desigualdade de Jensen) que convergência em *média quadrática* implica convergência em *média*. Desse modo, vale

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left| \frac{(r - X_i) F_i}{r} - \pi_1^0 \cdot Y_i \right| \right] = 0. \quad (1.9)$$

Sejam  $T_{n,r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(r - X_i) F_i}{r}$ ,  $U_{n,r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i$  e  $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ . Pode-se verificar

facilmente a validade das seguintes desigualdades

$$E[|T_{n,r} - \pi_1^0 \cdot V_n|] \leq E\left[\left|\frac{(r - X_i)F_i}{r} - \pi_1^0 \cdot Y_i\right|\right] \text{ e } E[|U_{n,r} - V_n|] \leq E[|F_i - Y_i|].$$

Dado  $\epsilon > 0$ , a desigualdade de Markov, juntamente com desigualdades acima, implicam que

$$P\left(|T_{n,r} - \pi_1^0 \cdot V_n| \geq \epsilon\right) \leq \frac{E[|T_{n,r} - \pi_1^0 \cdot V_n|]}{\epsilon} \leq \frac{E\left[\left|\frac{(r - X_i)F_i}{r} - \pi_1^0 \cdot Y_i\right|\right]}{\epsilon} \quad (1.10)$$

e

$$P\left(|U_{n,r} - V_n| \geq \epsilon\right) \leq \frac{E[|U_{n,r} - V_n|]}{\epsilon} \leq \frac{E[|F_i - Y_i|]}{\epsilon}. \quad (1.11)$$

As desigualdades (1.10) e (1.11) e os limites (1.6) e (1.9) permitem concluir portanto que

$$U_{n,r} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{P} V_n \quad (1.12)$$

e

$$T_{n,r} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{P} \pi_1^0 \cdot V_n.$$

Ressaltamos que as desigualdades (1.10) e (1.11) garantem também que essas convergências são uniformes. Ou seja, no caso do limite (1.12), por exemplo, dados  $\epsilon$  e  $\eta$  positivos, existe  $r_0 = r_0(\epsilon, \eta)$  (que **não** depende de  $n$ ) tal que

$$P\left(|U_{n,r} - V_n| \geq \epsilon\right) \leq \eta \text{ sempre que } r > r_0.$$

Pela Lei Fraca de Khintchin,  $V_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ , pois  $E[Y_i] = \theta$ .

Para  $\epsilon > 0$  arbitrário, podemos escrever

$$P\left(|U_{n,r} - \theta| \geq \epsilon\right) \leq P\left(|U_{n,r} - V_n| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(|V_n - \theta| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) \quad (1.13)$$

e

$$P\left(|T_{n,r} - \pi_1^0 \cdot \theta| \geq \epsilon\right) \leq P\left(|T_{n,r} - \pi_1^0 \cdot V_n| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(|V_n - \theta| \geq \frac{\epsilon}{2\pi_1^0}\right). \quad (1.14)$$

De acordo com as convergências em *probabilidade* já estabelecidas, na desigualdade (1.13), o primeiro termo do lado direito tende uniformemente a zero, quando  $r \rightarrow \infty$ ,

e o segundo termo tende uniformemente a zero, quando  $n \rightarrow \infty$ . O mesmo vale para a desigualdade (1.14). Assim,

$$T_{n,r} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} \pi_1^0 \cdot \theta \quad \text{e} \quad U_{n,r} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} \theta.$$

Então, pelo Lema 1.2,

$$\widehat{\pi}_1^0 = \frac{T_{n,r}}{U_{n,r}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} \frac{\pi_1^0 \cdot \theta}{\theta} = \pi_1^0,$$

isto é,  $\widehat{\pi}_1^0$  é um estimador consistente. Além disso, uma vez que essa estatística é limitada<sup>4</sup>,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} \mathbb{E} \left[ \widehat{\pi}_1^0 \right] = \pi_1^0,$$

ou seja,  $\widehat{\pi}_1^0$  é assintoticamente não-enviesado. Similarmente, podemos mostrar que o estimador  $\widehat{\pi}_0^1$  é consistente e assintoticamente não-enviesado. ■

Os resultados de teoria de probabilidade citados aqui podem ser encontrados, por exemplo, em van der Vaart [1998], Chung [1974], Breiman [1968], James [2002] e Billingsley [1968].

## 1.5 Comparação entre EsMS e EsMV via simulação de Monte Carlo

Para comparar os desempenhos dos métodos de maioria simples (MS) e de máxima verossimilhança (MV), em amostras finitas, reproduzimos parte do estudo de simulação de Monte Carlo realizado por Quinino et al. [2013]. Todas as simulações realizadas nesta tese foram produzidas empregando-se o *software* R (R Development Core Team [2016]). Parte do código utilizado pode ser encontrada nos anexos A e B.

Em nosso estudo, o número de objetos  $n$  variou de 25 a 150, o número de repetições  $r$ , de 3 a 7, a fração de itens conformes  $\theta$ , de 0,75 a 0,90 e as probabilidades dos erros de classificação  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$  variaram de 0,05 a 0,15. Esses valores foram escolhidos para representar níveis altos e baixos de cada um dos parâmetros. Além disso, são próximos dos encontrados em exemplos reais de implementação de cartas de controle e em estudos de repetitividade e reprodutibilidade (R&R) descritos, por

---

<sup>4</sup> $|\widehat{\pi}_1^0| \leq 1, \forall r.$



exemplo, em Van Wieringen & De Mast [2008], Burke et al. [1995] e Montgomery [2001]. O experimento de simulação consistiu em gerar amostras, a partir do modelo (1.1), seguidas dos cálculos das estimativas dos parâmetros pelos métodos de máxima verossimilhança e de maioria simples. Para cada combinação particular de  $n$ ,  $r$  e  $\Psi = (\theta, \pi_0^1, \pi_1^0)$ , geramos 25.000 amostras e calculamos a média, o desvio padrão (DP) e o erro quadrático médio (EQM) das estimativas produzidas.

As estimativas de máxima verossimilhança foram obtidas via algoritmo EM e o erro quadrático médio das estimativas de  $\theta$  foi calculado como a média de todos os valores  $(\hat{\theta} - \theta)^2$  simulados. Os erros quadráticos médios das estimativas de  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$  foram obtidos de modo inteiramente análogo.

Amostras representativas dos resultados da reprodução são apresentadas nas Tabelas 1.1 - 1.4. Nas Tabelas 1.2 - 1.4, diferenças de vieses absolutos relativos (DVAR) das estimativas de MV e de MS, bem como razões de EQM das estimativas de MV por EQM das estimativas de MS, são calculados para cada um dos parâmetros. Similarmente, razões de DP são obtidas para cada um dos parâmetros. Diferenças positivas e razões maiores que um indicam melhor performance para o método de maioria simples. A Tabela 1.5 resume a informação contida nas Tabelas 1.2 - 1.4. Precisamente, a Tabela 1.5 exhibe as médias dos vieses absolutos (VAs), dos DPs e dos EQMs para cada um dos parâmetros e métodos. Exhibe também o percentual de cenários nos quais o método de maioria simples apresentou melhor desempenho, segundo os critérios de VA, EQM e DP.

De modo geral, para os parâmetros  $\theta$ ,  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$ , os EsMS apresentaram menor EQM e menor DP, respectivamente, em pelo menos 70% e 85% dos cenários examinados. Entretanto, para os três parâmetros, os EsMS apresentaram maior viés em pelo menos 80% dos casos.

Ocasionalmente, as expressões de maioria simples conduzem a divisões por zero ou os cálculos para a obtenção das estimativas de MV requerem tempo excessivo para atingir a convergência. A frequência com que esses problemas ocorrem tende a diminuir a medida que o tamanho da amostra  $n$  aumenta.

**Tabela 1.1.** Cenários e realizações

id	Cenários					Realizações	
	$n$	$r$	$\theta$	$\pi_0^1$	$\pi_1^0$	MV	MS
1	50	3	0,75	0,05	0,05	24982	25000
2	50	3	0,75	0,05	0,15	24855	25000
3	50	3	0,75	0,15	0,05	24928	24999
4	50	3	0,75	0,15	0,15	24931	25000
5	50	3	0,90	0,05	0,05	24989	24917
6	50	3	0,90	0,05	0,15	24897	24996
7	50	3	0,90	0,15	0,05	24906	24866
8	50	3	0,90	0,15	0,15	24840	24994
9	150	3	0,75	0,05	0,05	24999	25000
10	150	3	0,75	0,05	0,15	24996	25000
11	150	3	0,75	0,15	0,05	24999	25000
12	150	3	0,75	0,15	0,15	24996	25000
13	150	3	0,90	0,05	0,05	25000	25000
14	150	3	0,90	0,05	0,15	24990	25000
15	150	3	0,90	0,15	0,05	25000	25000
16	150	3	0,90	0,15	0,15	24998	25000
17	50	5	0,75	0,05	0,05	25000	25000
18	50	5	0,75	0,05	0,15	25000	25000
19	50	5	0,75	0,15	0,05	25000	25000
20	50	5	0,75	0,15	0,15	25000	25000
21	50	5	0,90	0,05	0,05	24996	24864
22	50	5	0,90	0,05	0,15	24996	24973
23	50	5	0,90	0,15	0,05	24992	24877
24	50	5	0,90	0,15	0,15	24991	24965
25	150	5	0,75	0,05	0,05	25000	25000
26	150	5	0,75	0,05	0,15	25000	25000
27	150	5	0,75	0,15	0,05	25000	25000
28	150	5	0,75	0,15	0,15	25000	25000
29	150	5	0,90	0,05	0,05	25000	25000
30	150	5	0,90	0,05	0,15	25000	25000
31	150	5	0,90	0,15	0,05	25000	25000
32	150	5	0,90	0,15	0,15	25000	25000
33	50	7	0,75	0,05	0,05	25000	25000
34	50	7	0,75	0,05	0,15	25000	25000
35	50	7	0,75	0,15	0,05	25000	25000
36	50	7	0,75	0,15	0,15	25000	24999
37	50	7	0,90	0,05	0,05	24998	24886
38	50	7	0,90	0,05	0,15	24998	24933
39	50	7	0,90	0,15	0,05	24995	24885
40	50	7	0,90	0,15	0,15	24992	24943
41	150	7	0,75	0,05	0,05	25000	25000
42	150	7	0,75	0,05	0,15	25000	25000
43	150	7	0,75	0,15	0,05	25000	25000
44	150	7	0,75	0,15	0,15	25000	25000
45	150	7	0,90	0,05	0,05	25000	25000
46	150	7	0,90	0,05	0,15	25000	25000
47	150	7	0,90	0,15	0,05	25000	25000
48	150	7	0,90	0,15	0,15	25000	25000

**Tabela 1.2.** Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de  $\theta$  estimados pelos métodos de MV e MS.

id	$\theta$	MV			MS			DVAR	Razões	
		Média	EQM	DP	Média	EQM	DP		EQM	DP
1	0,75	<b>0,7493</b>	0,0040	0,0631	0,7470	<b>0,0039</b>	<b>0,0620</b>	-0,3071	1,0340	1,0180
2	0,75	<b>0,7427</b>	<b>0,0053</b>	0,0728	0,7064	0,0061	<b>0,0647</b>	-4,8390	0,8779	1,1244
3	0,75	<b>0,7439</b>	0,0052	0,0717	0,7600	<b>0,0038</b>	<b>0,0606</b>	-0,5209	1,3720	1,1829
4	0,75	<b>0,7362</b>	0,0112	0,1048	0,7203	<b>0,0050</b>	<b>0,0640</b>	-2,1288	2,2430	1,6375
5	0,90	0,8924	0,0029	0,0533	<b>0,8936</b>	<b>0,0019</b>	<b>0,0430</b>	0,1358	1,5304	1,2381
6	0,90	<b>0,8738</b>	0,0076	0,0833	0,8463	<b>0,0055</b>	<b>0,0510</b>	-3,0518	1,3884	1,6317
7	0,90	0,8801	0,0067	0,0792	<b>0,8994</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0421</b>	2,1423	3,7645	1,8820
8	0,90	0,8470	0,0238	0,1448	<b>0,8516</b>	<b>0,0049</b>	<b>0,0506</b>	0,5127	4,8449	2,8592
9	0,75	<b>0,7496</b>	0,0013	0,0364	0,7460	<b>0,0013</b>	<b>0,0355</b>	-0,4697	1,0389	1,0255
10	0,75	<b>0,7489</b>	<b>0,0019</b>	0,0434	0,7064	0,0033	<b>0,0373</b>	-5,6695	0,5737	1,1654
11	0,75	<b>0,7481</b>	0,0017	0,0407	0,7599	<b>0,0013</b>	<b>0,0352</b>	-1,0615	1,2425	1,1567
12	0,75	<b>0,7468</b>	0,0032	0,0566	0,7194	<b>0,0023</b>	<b>0,0366</b>	-3,6600	1,4115	1,5467
13	0,90	<b>0,8992</b>	<b>0,0007</b>	0,0257	0,8943	0,0007	<b>0,0251</b>	-0,5473	0,9948	1,0224
14	0,90	<b>0,8916</b>	<b>0,0014</b>	0,0361	0,8459	0,0038	<b>0,0292</b>	-5,0858	0,3621	1,2332
15	0,90	0,8968	0,0009	0,0305	<b>0,8996</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0245</b>	0,3122	1,5693	1,2459
16	0,90	<b>0,8863</b>	0,0040	0,0618	0,8512	<b>0,0032</b>	<b>0,0290</b>	-3,9014	1,2432	2,1295
17	0,75	<b>0,7498</b>	0,0038	0,0616	0,7495	<b>0,0038</b>	<b>0,0615</b>	-0,0415	1,0036	1,0018
18	0,75	<b>0,7475</b>	<b>0,0040</b>	<b>0,0630</b>	0,7299	0,0044	0,0632	-2,3455	0,9058	0,9981
19	0,75	<b>0,7483</b>	0,0039	0,0623	0,7555	<b>0,0037</b>	<b>0,0604</b>	-0,5063	1,0558	1,0314
20	0,75	<b>0,7465</b>	0,0048	0,0692	0,7367	<b>0,0040</b>	<b>0,0621</b>	-1,3068	1,1913	1,1149
21	0,90	0,8981	0,0021	0,0461	<b>0,8984</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0422</b>	0,0354	1,1940	1,0925
22	0,90	<b>0,8932</b>	0,0028	0,0529	0,8759	<b>0,0027</b>	<b>0,0462</b>	-1,9160	1,0513	1,1469
23	0,90	0,8952	0,0025	0,0497	<b>0,9007</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0417</b>	0,4473	1,4326	1,1917
24	0,90	<b>0,8826</b>	0,0064	0,0781	0,8781	<b>0,0026</b>	<b>0,0461</b>	-0,4986	2,4593	1,6942
25	0,75	<b>0,7498</b>	0,0013	0,0356	0,7493	<b>0,0013</b>	<b>0,0355</b>	-0,0698	1,0037	1,0020
26	0,75	<b>0,7496</b>	<b>0,0013</b>	0,0365	0,7304	0,0017	<b>0,0364</b>	-2,5482	0,7798	1,0026
27	0,75	<b>0,7493</b>	0,0013	0,0362	0,7555	<b>0,0013</b>	<b>0,0351</b>	-0,6377	1,0410	1,0325
28	0,75	<b>0,7494</b>	0,0016	0,0395	0,7370	<b>0,0015</b>	<b>0,0359</b>	-1,6502	1,0727	1,1012
29	0,90	<b>0,9001</b>	0,0006	0,0245	0,8994	<b>0,0006</b>	<b>0,0245</b>	-0,0592	1,0022	1,0014
30	0,90	<b>0,8990</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0254</b>	0,8763	0,0013	0,0269	-2,5264	0,5017	0,9444
31	0,90	<b>0,8991</b>	0,0006	0,0252	0,9015	<b>0,0006</b>	<b>0,0242</b>	-0,0717	1,0759	1,0387
32	0,90	<b>0,8973</b>	<b>0,0009</b>	0,0298	0,8788	0,0012	<b>0,0267</b>	-2,0578	0,7681	1,1136
33	0,75	0,7502	<b>0,0037</b>	<b>0,0610</b>	<b>0,7501</b>	0,0037	0,0610	0,0039	0,9999	1,0000
34	0,75	<b>0,7490</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0615</b>	0,7407	0,0039	0,0620	-1,1080	0,9645	0,9930
35	0,75	<b>0,7503</b>	0,0038	0,0614	0,7535	<b>0,0037</b>	<b>0,0609</b>	-0,4285	1,0138	1,0085
36	0,75	<b>0,7492</b>	0,0040	0,0633	0,7447	<b>0,0038</b>	<b>0,0614</b>	-0,6060	1,0525	1,0297
37	0,90	0,8984	0,0022	0,0468	<b>0,8990</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0419</b>	0,0591	1,2465	1,1162
38	0,90	<b>0,8973</b>	0,0026	0,0509	0,8892	<b>0,0021</b>	<b>0,0440</b>	-0,9048	1,2636	1,1560
39	0,90	0,8980	0,0022	0,0466	<b>0,9005</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0416</b>	0,1565	1,2610	1,1221
40	0,90	<b>0,8934</b>	0,0031	0,0549	0,8899	<b>0,0020</b>	<b>0,0437</b>	-0,3921	1,5215	1,2571
41	0,75	<b>0,7497</b>	0,0013	0,0354	0,7496	<b>0,0013</b>	<b>0,0354</b>	-0,0096	1,0002	1,0001
42	0,75	<b>0,7498</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0357</b>	0,7409	0,0014	0,0358	-1,1765	0,9322	0,9959
43	0,75	<b>0,7500</b>	0,0013	0,0355	0,7530	<b>0,0012</b>	<b>0,0351</b>	-0,4001	1,0112	1,0093
44	0,75	<b>0,7497</b>	0,0013	0,0364	0,7441	<b>0,0013</b>	<b>0,0354</b>	-0,7497	1,0292	1,0284
45	0,90	<b>0,9000</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0245</b>	0,8999	0,0006	0,0245	-0,0089	0,9997	0,9998
46	0,90	<b>0,8997</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0248</b>	0,8890	0,0008	0,0257	-1,1795	0,7827	0,9615
47	0,90	<b>0,8996</b>	0,0006	0,0247	0,9009	<b>0,0006</b>	<b>0,0244</b>	-0,0623	1,0217	1,0114
48	0,90	<b>0,8992</b>	<b>0,0007</b>	0,0259	0,8907	0,0007	<b>0,0256</b>	-0,9461	0,9073	1,0131
Casos favoráveis ao método de maioria simples (%):								18,7500	70,8333	85,4167

**Tabela 1.3.** Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de  $\pi_0^1$  estimados pelos métodos de MV e MS.

id	$\pi_0^1$	MV			MS			DVAR	Razões	
		Média	EQM	DP	Média	EQM	DP		EQM	DP
1	0,05	0,0525	0,0021	0,0455	<b>0,0513</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0349</b>	2,2993	1,7089	1,3063
2	0,05	<b>0,0572</b>	0,0039	0,0621	0,0873	<b>0,0030</b>	<b>0,0395</b>	-60,1524	1,3255	1,5719
3	0,15	<b>0,1571</b>	0,0082	0,0905	0,1205	<b>0,0032</b>	<b>0,0479</b>	-14,9542	2,5977	1,8870
4	0,15	0,1532	0,0138	0,1172	<b>0,1479</b>	<b>0,0021</b>	<b>0,0459</b>	0,7674	6,5232	2,5557
5	0,05	0,0734	0,0147	0,1191	<b>0,0632</b>	<b>0,0043</b>	<b>0,0639</b>	20,3580	3,4576	1,8633
6	0,05	<b>0,0976</b>	0,0230	0,1442	0,1409	<b>0,0123</b>	<b>0,0635</b>	-86,6176	1,8742	2,2699
7	0,15	0,1849	0,0355	0,1850	<b>0,1291</b>	<b>0,0071</b>	<b>0,0815</b>	9,3187	5,0114	2,2712
8	0,15	0,1949	0,0484	0,2155	<b>0,1890</b>	<b>0,0058</b>	<b>0,0652</b>	3,9335	8,3909	3,3041
9	0,05	<b>0,0503</b>	0,0006	0,0254	0,0514	<b>0,0004</b>	<b>0,0196</b>	-2,3121	1,6638	1,2932
10	0,05	<b>0,0504</b>	<b>0,0014</b>	0,0379	0,0873	0,0019	<b>0,0225</b>	-73,8276	0,7574	1,6875
11	0,15	<b>0,1527</b>	0,0025	0,0499	0,1203	<b>0,0016</b>	<b>0,0271</b>	-18,0503	1,5448	1,8427
12	0,15	<b>0,1490</b>	0,0045	0,0671	0,1476	<b>0,0007</b>	<b>0,0258</b>	-0,9379	6,7315	2,6053
13	0,05	<b>0,0527</b>	0,0021	0,0458	0,0627	<b>0,0013</b>	<b>0,0337</b>	-20,0799	1,6197	1,3580
14	0,05	<b>0,0667</b>	<b>0,0060</b>	0,0755	0,1413	0,0095	<b>0,0348</b>	-149,1487	0,6271	2,1698
15	0,15	<b>0,1575</b>	0,0080	0,0891	0,1295	<b>0,0023</b>	<b>0,0433</b>	-8,6785	3,4789	2,0571
16	0,15	<b>0,1563</b>	0,0168	0,1293	0,1886	<b>0,0028</b>	<b>0,0358</b>	-21,5345	6,0398	3,6126
17	0,05	<b>0,0505</b>	0,0009	0,0307	0,0505	<b>0,0008</b>	<b>0,0286</b>	-0,0993	1,1511	1,0730
18	0,05	<b>0,0529</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0357</b>	0,0743	0,0019	0,0357	-42,8116	0,6854	0,9981
19	0,15	<b>0,1521</b>	0,0029	0,0537	0,1386	<b>0,0019</b>	<b>0,0421</b>	-6,2259	1,5198	1,2765
20	0,15	<b>0,1518</b>	0,0043	0,0658	0,1558	<b>0,0019</b>	<b>0,0433</b>	-2,6257	2,2664	1,5182
21	0,05	0,0588	0,0078	0,0877	<b>0,0527</b>	<b>0,0026</b>	<b>0,0505</b>	12,2357	3,0443	1,7385
22	0,05	<b>0,0669</b>	0,0090	0,0936	0,1133	<b>0,0090</b>	<b>0,0704</b>	-92,8908	1,0093	1,3295
23	0,15	0,1623	0,0136	0,1159	<b>0,1395</b>	<b>0,0054</b>	<b>0,0728</b>	1,1931	2,5100	1,5918
24	0,15	<b>0,1728</b>	0,0204	0,1408	0,1854	<b>0,0065</b>	<b>0,0721</b>	-8,4151	3,1504	1,9520
25	0,05	<b>0,0500</b>	0,0003	0,0168	0,0505	<b>0,0003</b>	<b>0,0161</b>	-0,8972	1,0966	1,0476
26	0,05	<b>0,0508</b>	<b>0,0004</b>	<b>0,0196</b>	0,0742	0,0010	0,0205	-46,7504	0,3847	0,9593
27	0,15	<b>0,1503</b>	0,0009	0,0300	0,1380	<b>0,0007</b>	<b>0,0237</b>	-7,8160	1,2738	1,2656
28	0,15	<b>0,1504</b>	0,0012	0,0353	0,1558	<b>0,0006</b>	<b>0,0242</b>	-3,5961	2,0132	1,4586
29	0,05	<b>0,0506</b>	0,0008	0,0286	0,0528	<b>0,0007</b>	<b>0,0270</b>	-4,5251	1,1134	1,0608
30	0,05	<b>0,0526</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0349</b>	0,1135	0,0055	0,0381	-121,7876	0,2235	0,9159
31	0,15	<b>0,1523</b>	0,0026	0,0509	0,1399	<b>0,0016</b>	<b>0,0383</b>	-5,1913	1,6606	1,3317
32	0,15	<b>0,1538</b>	0,0044	0,0664	0,1858	<b>0,0028</b>	<b>0,0393</b>	-21,3375	1,5650	1,6906
33	0,05	0,0500	0,0006	0,0246	<b>0,0500</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0242</b>	0,0255	1,0341	1,0169
34	0,05	<b>0,0510</b>	<b>0,0007</b>	<b>0,0264</b>	0,0627	0,0011	0,0299	-23,2629	0,6605	0,8819
35	0,15	<b>0,1507</b>	0,0018	0,0419	0,1451	<b>0,0014</b>	<b>0,0376</b>	-2,8273	1,2185	1,1131
36	0,15	<b>0,1512</b>	0,0023	0,0475	0,1541	<b>0,0015</b>	<b>0,0389</b>	-1,9568	1,4748	1,2209
37	0,05	0,0546	0,0054	0,0732	<b>0,0501</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0414</b>	9,1178	3,1461	1,7702
38	0,05	<b>0,0588</b>	0,0060	0,0771	0,0858	<b>0,0054</b>	<b>0,0644</b>	-53,8150	1,1088	1,1963
39	0,15	0,1572	0,0085	0,0918	<b>0,1453</b>	<b>0,0042</b>	<b>0,0644</b>	1,6794	2,0328	1,4252
40	0,15	<b>0,1635</b>	0,0109	0,1035	0,1719	<b>0,0053</b>	<b>0,0691</b>	-5,5592	2,0707	1,4965
41	0,05	<b>0,0502</b>	0,0002	0,0139	0,0502	<b>0,0002</b>	<b>0,0137</b>	-0,1400	1,0197	1,0099
42	0,05	<b>0,0503</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0145</b>	0,0626	0,0005	0,0170	-24,7603	0,4666	0,8501
43	0,15	<b>0,1502</b>	0,0005	0,0233	0,1448	<b>0,0005</b>	<b>0,0210</b>	-3,3371	1,1574	1,1079
44	0,15	<b>0,1500</b>	0,0007	0,0257	0,1539	<b>0,0005</b>	<b>0,0218</b>	-2,5748	1,3501	1,1803
45	0,05	<b>0,0504</b>	0,0005	0,0225	0,0507	<b>0,0005</b>	<b>0,0222</b>	-0,6198	1,0262	1,0133
46	0,05	<b>0,0511</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0247</b>	0,0860	0,0024	0,0339	-69,6937	0,2512	0,7297
47	0,15	<b>0,1508</b>	0,0015	0,0390	0,1450	<b>0,0012</b>	<b>0,0342</b>	-2,7924	1,2709	1,1389
48	0,15	<b>0,1527</b>	0,0021	0,0457	0,1717	<b>0,0018</b>	<b>0,0370</b>	-12,7186	1,1382	1,2356
Casos favoráveis ao método de maioria simples (%):								20,8333	83,3333	87,5000

**Tabela 1.4.** Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de  $\pi_1^0$  estimados pelos métodos de MV e MS.

id	$\pi_1^0$	MV			MS			DVAR	Razões	
		Média	EQM	DP	Média	EQM	DP		EQM	DP
1	0,05	<b>0,0495</b>	0,0005	0,0232	0,0462	<b>0,0004</b>	<b>0,0189</b>	-6,6416	1,4404	1,2236
2	0,15	<b>0,1460</b>	<b>0,0018</b>	0,0425	0,1162	0,0019	<b>0,0268</b>	-19,8198	0,9808	1,5873
3	0,05	0,0483	0,0007	0,0272	<b>0,0510</b>	<b>0,0004</b>	<b>0,0196</b>	1,4046	1,9228	1,3858
4	0,15	<b>0,1444</b>	0,0029	0,0537	0,1196	<b>0,0016</b>	<b>0,0268</b>	-16,5150	1,7726	2,0001
5	0,05	<b>0,0476</b>	0,0004	0,0205	0,0457	<b>0,0003</b>	<b>0,0171</b>	-3,7474	1,3666	1,1971
6	0,15	<b>0,1390</b>	<b>0,0017</b>	0,0399	0,1153	0,0018	<b>0,0245</b>	-15,7868	0,9510	1,6307
7	0,05	0,0458	0,0006	0,0241	<b>0,0473</b>	<b>0,0003</b>	<b>0,0175</b>	3,1309	1,9208	1,3809
8	0,15	<b>0,1343</b>	0,0029	0,0518	0,1168	<b>0,0017</b>	<b>0,0244</b>	-11,6968	1,7234	2,1204
9	0,05	<b>0,0501</b>	0,0002	0,0135	0,0462	<b>0,0001</b>	<b>0,0110</b>	-7,4269	1,3629	1,2365
10	0,15	<b>0,1493</b>	<b>0,0007</b>	0,0256	0,1160	0,0014	<b>0,0154</b>	-22,2241	0,4723	1,6698
11	0,05	<b>0,0493</b>	0,0002	0,0154	0,0508	<b>0,0001</b>	<b>0,0113</b>	-0,2066	1,8481	1,3615
12	0,15	<b>0,1489</b>	<b>0,0009</b>	0,0304	0,1195	0,0012	<b>0,0154</b>	-19,6042	0,7939	1,9803
13	0,05	<b>0,0497</b>	0,0001	0,0119	0,0457	<b>0,0001</b>	<b>0,0099</b>	-7,9099	1,2250	1,2066
14	0,15	<b>0,1460</b>	<b>0,0005</b>	0,0221	0,1154	0,0014	<b>0,0140</b>	-20,3848	0,3622	1,5762
15	0,05	<b>0,0491</b>	0,0002	0,0133	0,0472	<b>0,0001</b>	<b>0,0101</b>	-3,7742	1,6425	1,3265
16	0,15	<b>0,1459</b>	<b>0,0008</b>	0,0276	0,1168	0,0013	<b>0,0141</b>	-19,4303	0,5991	1,9592
17	0,05	<b>0,0500</b>	0,0003	0,0164	0,0496	<b>0,0002</b>	<b>0,0157</b>	-0,7777	1,0856	1,0423
18	0,15	<b>0,1488</b>	0,0008	0,0279	0,1374	<b>0,0007</b>	<b>0,0236</b>	-7,6510	1,0903	1,1831
19	0,05	<b>0,0493</b>	0,0003	0,0172	0,0521	<b>0,0003</b>	<b>0,0163</b>	-2,7568	1,1067	1,0598
20	0,15	<b>0,1486</b>	0,0010	0,0316	0,1394	<b>0,0007</b>	<b>0,0238</b>	-6,1055	1,4764	1,3288
21	0,05	<b>0,0496</b>	0,0002	0,0149	0,0495	<b>0,0002</b>	<b>0,0143</b>	-0,1644	1,0905	1,0445
22	0,15	<b>0,1472</b>	0,0007	0,0258	0,1371	<b>0,0006</b>	<b>0,0213</b>	-6,7250	1,0862	1,2113
23	0,05	0,0489	0,0002	0,0157	<b>0,0504</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0145</b>	1,4174	1,1645	1,0770
24	0,15	<b>0,1450</b>	0,0009	0,0301	0,1378	<b>0,0006</b>	<b>0,0213</b>	-4,7853	1,5535	1,4175
25	0,05	<b>0,0501</b>	0,0001	0,0094	0,0496	<b>0,0001</b>	<b>0,0090</b>	-0,6632	1,0795	1,0400
26	0,15	<b>0,1497</b>	<b>0,0003</b>	0,0159	0,1373	0,0003	<b>0,0135</b>	-8,2348	0,7397	1,1806
27	0,05	<b>0,0498</b>	0,0001	0,0100	0,0523	<b>0,0001</b>	<b>0,0095</b>	-4,2817	1,0463	1,0523
28	0,15	<b>0,1495</b>	0,0003	0,0177	0,1393	<b>0,0003</b>	<b>0,0136</b>	-6,7760	1,0550	1,3071
29	0,05	<b>0,0499</b>	0,0001	0,0086	0,0494	<b>0,0001</b>	<b>0,0083</b>	-1,0093	1,0616	1,0331
30	0,15	<b>0,1494</b>	<b>0,0002</b>	0,0145	0,1372	0,0003	<b>0,0124</b>	-8,1468	0,6607	1,1699
31	0,05	<b>0,0498</b>	0,0001	0,0088	0,0504	<b>0,0001</b>	<b>0,0083</b>	-0,2650	1,1114	1,0549
32	0,15	<b>0,1490</b>	<b>0,0002</b>	0,0157	0,1379	0,0003	<b>0,0124</b>	-7,3866	0,8256	1,2675
33	0,05	0,0500	0,0002	0,0136	<b>0,0500</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0135</b>	0,0448	1,0185	1,0092
34	0,15	<b>0,1496</b>	0,0005	0,0226	0,1447	<b>0,0005</b>	<b>0,0209</b>	-3,2838	1,1000	1,0824
35	0,05	<b>0,0498</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0419</b>	0,0513	0,0002	0,0140	-2,3779	0,9861	0,9975
36	0,15	<b>0,1496</b>	0,0006	0,0238	0,1460	<b>0,0005</b>	<b>0,0209</b>	-2,3987	1,2531	1,1397
37	0,05	0,0497	0,0002	0,0124	<b>0,0498</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0122</b>	0,1927	1,0313	1,0154
38	0,15	<b>0,1490</b>	0,0005	0,0213	0,1447	<b>0,0004</b>	<b>0,0191</b>	-2,9110	1,1615	1,1178
39	0,05	<b>0,0497</b>	0,0002	0,0126	0,0505	<b>0,0002</b>	<b>0,0124</b>	-0,3042	1,0392	1,0198
40	0,15	<b>0,1478</b>	0,0005	0,0225	0,1447	<b>0,0004</b>	<b>0,0192</b>	-2,0655	1,2889	1,1719
41	0,05	0,0501	0,0001	0,0078	<b>0,0500</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0077</b>	0,1278	1,0157	1,0078
42	0,15	<b>0,1500</b>	<b>0,0002</b>	0,0130	0,1448	0,0002	<b>0,0120</b>	-3,4732	0,9782	1,0790
43	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0233</b>	0,0514	0,0001	0,0081	-2,6475	0,9664	0,9969
44	0,15	<b>0,1497</b>	0,0002	0,0137	0,1456	<b>0,0002</b>	<b>0,0121</b>	-2,7075	1,1325	1,1308
45	0,05	<b>0,0499</b>	0,0001	0,0071	0,0499	<b>0,0000</b>	<b>0,0071</b>	-0,1245	1,0116	1,0059
46	0,15	<b>0,1499</b>	<b>0,0001</b>	0,0117	0,1447	0,0001	<b>0,0109</b>	-3,4761	0,9309	1,0728
47	0,05	<b>0,0499</b>	0,0001	0,0072	0,0504	<b>0,0001</b>	<b>0,0072</b>	-0,6243	1,0112	1,0071
48	0,15	<b>0,1495</b>	0,0002	0,0123	0,1449	<b>0,0001</b>	<b>0,0110</b>	-3,0286	1,0307	1,1161

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 12,5000 72,9167 95,8333

**Tabela 1.5.** Média dos valores dos EQMs, dos vieses absolutos (VAs) e dos DPs, bem como porcentagens de casos favoráveis ao método de MS (entre parênteses) em relação aos cenários descritos na Tabela 1.1.

Param	MV			MS		
	VA	EQM	DP	VA	EQM	DP
$\theta$	<b>0,0048</b>	0,0032	0,0506	0,0135 (18,7500)	<b>0,0024</b> (70,8333)	<b>0,0420</b> (85,4167)
$\pi_0^1$	<b>0,0069</b>	0,0064	0,0646	0,0197 (20,8333)	<b>0,0027</b> (83,3333)	<b>0,0395</b> (87,5000)
$\pi_1^0$	<b>0,0016</b>	0,0005	0,0197	0,0091 (12,5000)	<b>0,0005</b> (72,9167)	<b>0,0151</b> (95,8333)

## 1.6 Considerações finais

Este capítulo apresentou parte dos resultados obtidos por Quinino et al. [2013]. Nesse artigo, os autores propuseram os estimadores de maioria simples como alternativa para a estimação dos parâmetros de uma mistura de duas distribuições binomiais, que pode ser vista como modelo probabilístico (de classe latente) para sistemas de medição com respostas dicotômicas, sujeitos a erros de classificação. A justificativa para a proposta baseia-se na simplicidade computacional dos EsMS e na conclusão sugerida pelo estudo de simulação de que tais estimadores exibem, de modo geral, menor erro quadrático médio e menor desvio padrão que os estimadores de máxima verossimilhança.

Quinino, Ho & Suyama compararam também o desempenho dos EsMS em relação aos estimadores de momentos, propostos por Blischke [1962]. Os autores chegaram à conclusão de que esses se comportam de modo muito similar aos EsMS, sobretudo no que diz respeito à performance em relação aos EsMV.

Para estender os resultados discutidos neste capítulo, nos sentidos descritos na Seção 1.2, enfatizamos que modificamos as notações e estratégias de demonstração (das propriedades assintóticas) apresentadas em Quinino et al. [2013].

## Capítulo 2

# Estimadores de maioria simples sequencial para análise de sistemas de medição com respostas dicotômicas

Neste capítulo, desenvolvemos uma variação do método de maioria simples. Nessa nova abordagem, a quantidade de medições repetidas necessárias para a obtenção da classificação final  $F_i$  de cada unidade experimental não é fixa. Mais precisamente, cada objeto é submetido a julgamentos repetidos até que a quantidade de ocorrências do atributo *conforme* ou do atributo *não-conforme* seja igual a um determinado número inteiro positivo  $\rho$ . O valor de  $F_i$  corresponde então ao atributo que primeiramente figurou  $\rho$  vezes, na sequência das inspeções. Intuitivamente, o número de repetições necessárias para a classificação final de um objeto particular dependeria do “tamanho” da chance de erro de classificação a que o item está submetido. Desse modo, os valores de  $F_i$  seriam mais credíveis, produzindo portanto estimativas mais acuradas.

### 2.1 Estimadores de maioria simples sequencial

Nesta seção, apresentamos os estimadores de maioria simples sequencial para análise de sistemas de medição com respostas dicotômicas.

Consideremos um experimento que envolve uma amostra aleatória de  $n$  objetos que são julgados repetidamente por um mesmo avaliador que atribui, em cada

medição, um dos valores *conforme* ou *não-conforme*.

Cada objeto é submetido a julgamentos repetidos até que o número de ocorrências do atributo *conforme* ou do atributo *não-conforme* seja igual a  $\rho$ ,  $\rho \in \mathbb{N}$ . O número de classificações repetidas do item  $i$  será designado por  $S_i$ . Assim,  $S_i$  é uma variável aleatória que pode assumir valores inteiros entre  $\rho$  e  $2\rho - 1$ .

Os dados observados são denotados por  $X_{ij}$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, S_i$  indexando os objetos e julgamentos repetidos, respectivamente. Os  $X_{ij}$ 's assumem os valores numéricos "0" (não-conforme) ou "1" (conforme).

Supomos que classificações de itens diferentes são independentes. Admitimos também que o verdadeiro estado de qualidade dos objetos,  $Y_i$ , que é também 0 ou 1, não pode ser conhecido, e que, condicionalmente em  $Y_i$ , os  $\{X_{ij}\}_j$ 's são independentes –  $Y_i$  é uma variável categórica subjacente, latente, usada para explicar a estrutura dos dados observados.

A medida  $X_{ij}$  depende de  $Y_i$ . Definimos então

$$\pi_y^x = P(X_{ij} = x | Y_i = y), \quad x, y = 0, 1,$$

de sorte que as probabilidades associadas ao erro do tipo I e ao erro do tipo II são  $\pi_1^0$  e  $\pi_0^1$ , respectivamente. Denotamos a proporção de itens conformes na população por  $\theta$ , ou seja,

$$\theta = P(Y_i = 1).$$

Por fim, adicionamos às hipóteses do experimento, as seguintes restrições

$$0 < \theta < 1, \quad 0 < \pi_0^1 < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 0 < \pi_1^0 < \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

Para a estimação dos parâmetros  $\theta$ ,  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$ , propomos estimadores fundamentados na noção de maioria simples sequencial, isto é, formulados em termos da variável aleatória de Bernoulli,  $F_i$ , definida por

$$F_i = \begin{cases} 0 & \text{se } S_i - X_i = \rho \\ 1 & \text{se } X_i = \rho \end{cases},$$



**Tabela 2.1.** Exemplo de classificações repetidas sequenciais

item	Classificações repetidas sequenciais ( $\rho = 6$ )											$X_i$	$S_i$	$F_i$
	$X_{i1}$	$X_{i2}$	$X_{i3}$	$X_{i4}$	$X_{i5}$	$X_{i6}$	$X_{i7}$	$X_{i8}$	$X_{i9}$	$X_{i10}$	$X_{i11}$			
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	6	11	1
2	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	6	6	1
3	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	6	6	1
4	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	6	6	1
5	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	6	6	1
6	1	1	0	1	1	0	1	1	-	-	-	6	8	1
7	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	6	6	1
8	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	6	6	1
9	1	0	1	1	1	1	1	-	-	-	-	6	7	1
10	1	0	0	1	1	1	1	1	-	-	-	6	8	1
11	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	6	6	1
12	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	6	6	1
13	1	1	1	1	0	1	1	-	-	-	-	6	7	1
14	1	0	0	1	1	1	1	1	-	-	-	6	8	1
15	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	6	6	1
16	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	0	6	0
17	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	1	7	0
18	0	1	0	1	0	0	0	1	0	-	-	3	9	0
19	0	0	1	1	0	0	0	1	0	-	-	3	9	0
20	0	0	0	0	1	0	0	-	-	-	-	1	7	0

em que  $X_i = \sum_{j=1}^{S_i} X_{ij}$ . A variável  $F_i$  é interpretada como a classificação final do  $i$ -ésimo objeto, após  $S_i$  medições. A título de ilustração, a Tabela (2.1) descreve uma situação na qual  $n = 20$  unidades são classificadas sequencialmente até que a frequência de  $\rho = 6$  conformidades ou  $\rho = 6$  não-conformidades seja observada.

Intuitivamente, a medida que  $\rho$  aumenta, a influência dos erros de classificação seria mitigada, de modo que  $F_i$  representaria o real estado de qualidade do  $i$ -ésimo com exatidão crescente. Desse modo, para a estimação dos parâmetros, propomos as proporções abaixo, que denominamos *estimadores de maioria simples sequencial* (EsMSS):

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{n}, \quad \hat{\pi}_0^1 = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\sum_{i=1}^n S_i \cdot (1 - F_i)} \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_1^0 = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i - \rho) \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n S_i \cdot F_i}. \quad (2.2)$$

Particularmente para o exemplo representado pela Tabela (2.1), os valores de  $\theta$ ,  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$  estimados pelo método de maioria simples sequencial são  $\hat{\theta} = 0,75$ ,  $\hat{\pi}_0^1 = 0,2105$  e  $\hat{\pi}_1^0 = 0,1262$ .

Antes de discutirmos as propriedades dos EsMSS, mostraremos que o modelo de probabilidade para a variável aleatória  $(S_i, F_i)$  – que determina  $(S_i, X_i)$ , e vice-versa – é identificável. Com efeito, para  $\Psi = (\theta, \pi_0^1, \pi_1^0)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
P_{\Psi}(S_i = s, F_i = f) &= \left[ (1 - \theta) \cdot P_{\Psi}(S_i = s, F_i = 1 \mid Y_i = 0) \right. \\
&\quad \left. + \theta \cdot P_{\Psi}(S_i = s, F_i = 1 \mid Y_i = 1) \right]^f \\
&\quad \times \left[ (1 - \theta) \cdot P_{\Psi}(S_i = s, F_i = 0 \mid Y_i = 0) \right. \\
&\quad \left. + \theta \cdot P_{\Psi}(S_i = s, F_i = 0 \mid Y_i = 1) \right]^{1-f}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

O evento  $[S_i = s] \cap [F_i = 1]$  representa a observação do valor *conforme* na  $s$ -ésima medição e a ocorrência de  $\rho - 1$  atribuições *conforme* nas  $s - 1$  classificações anteriores. Portanto, uma vez que a probabilidade de que um item seja classificado como *conforme* é  $\pi_0^1$  se  $Y_i = 0$ , vale

$$\begin{aligned}
P_{\Psi}(S_i = s, F_i = 1 \mid Y_i = 0) &= \pi_0^1 \left[ \binom{s-1}{\rho-1} [\pi_0^1]^{\rho-1} [\pi_0^0]^{s-\rho} \right] = \binom{s-1}{\rho-1} [\pi_0^1]^{\rho} [\pi_0^0]^{s-\rho} \\
&= \binom{s-1}{\rho-1} [\pi_0^1]^{\rho} [1 - \pi_0^1]^{s-\rho}.
\end{aligned}$$

De modo geral,

$$P_{\Psi}(S_i = s, F_i = f \mid Y_i = y) = \binom{s-1}{\rho-1} [\pi_y^f]^{\rho} [\pi_y^{1-f}]^{s-\rho}, \tag{2.4}$$

para  $f, y = 0, 1$  e  $s = \rho, \dots, 2\rho - 1$ , com  $\pi_k^k = 1 - \pi_k^{1-k}$  ( $k = 0$  ou  $1$ ).

Sejam  $\bar{\Psi} = (\bar{\theta}, \bar{\pi}_0^1, \bar{\pi}_1^0)$  e  $\tilde{\Psi} = (\tilde{\theta}, \tilde{\pi}_0^1, \tilde{\pi}_1^0)$  vetores de parâmetros satisfazendo as restrições (2.1). Suponhamos que

$$P_{\bar{\Psi}}(S_i = s, F_i = f) = P_{\tilde{\Psi}}(S_i = s, F_i = f), \text{ para todo } (s, f). \tag{2.5}$$

Assim, para  $f = 0$ , podemos escrever

$$(1 - \bar{\theta}) \cdot P_{\bar{\Psi}}(S_i = s, F_i = 0 \mid Y_i = 0) + \bar{\theta} \cdot P_{\bar{\Psi}}(S_i = s, F_i = 0 \mid Y_i = 1) = \\ (1 - \tilde{\theta}) \cdot P_{\tilde{\Psi}}(S_i = s, F_i = 0 \mid Y_i = 0) + \tilde{\theta} \cdot P_{\tilde{\Psi}}(S_i = s, F_i = 0 \mid Y_i = 1)$$

ou, equivalentemente,

$$(1 - \bar{\theta}) \cdot \binom{s-1}{\rho-1} [1 - \bar{\pi}_0^1]^\rho [\bar{\pi}_0^1]^{s-\rho} + \bar{\theta} \cdot \binom{s-1}{\rho-1} [\bar{\pi}_1^0]^\rho [1 - \bar{\pi}_1^0]^{s-\rho} = \\ (1 - \tilde{\theta}) \cdot \binom{s-1}{\rho-1} [1 - \tilde{\pi}_0^1]^\rho [\tilde{\pi}_0^1]^{s-\rho} + \tilde{\theta} \cdot \binom{s-1}{\rho-1} [\tilde{\pi}_1^0]^\rho [1 - \tilde{\pi}_1^0]^{s-\rho}.$$

Os lados da igualdade acima são misturas de distribuições binomiais negativas. De acordo com Yakowitz & Spargins [1968], misturas de distribuições binomiais negativas são identificáveis. Portanto, a igualdade (2.5) implica  $\bar{\Psi} = \tilde{\Psi}$ , ou seja, o modelo de probabilidade para  $(S_i, F_i)$  é identificável.

## 2.2 Propriedades assintóticas dos EsMSS

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades assintóticas dos EsMSS. Como fizemos no Capítulo 1, começamos pela formalização matemática da sugestão de que, à medida que o número mínimo de repetições aumenta, a classificação final de um objeto tende a coincidir<sup>1</sup> com o seu estado real, isto é:

**Lema 2.1.** *São válidas as seguintes igualdades:*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P(F_i = 1 \mid Y_i = 1) = 1 \quad e \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} P(F_i = 0 \mid Y_i = 0) = 1. \quad (2.6)$$

*Demonstração.* O evento  $[F_i = 1]$  corresponde à observação do valor *conforme* na  $S_i$ -ésima medição ( $S_i = \rho, \dots, 2\rho - 1$ ) e à ocorrência de  $\rho - 1$  resultados *conforme* nas  $S_i - 1$  medições anteriores. Assim, podemos escrever

$$P(F_i = 1 \mid Y_i = 1) = \sum_{s=\rho}^{2\rho-1} \binom{s-1}{\rho-1} [1 - \pi_1^0]^\rho [\pi_1^0]^{s-\rho} = \sum_{s=\rho}^{2\rho-1} P(W = s),$$

---

<sup>1</sup>De acordo com o Teorema de Bayes,  $P(Y_i = k \mid F_i = k) = \frac{P(F_i = k \mid Y_i = k) \cdot P(Y_i = k)}{P(F_i = k)}$ .

em que  $W$  é uma variável aleatória com distribuição *binomial negativa* com parâmetros  $\rho$  e  $1 - \pi_1^0$ . Para  $\rho$  suficientemente grande, a distribuição de  $W$  é aproximadamente normal, com média  $\frac{\rho}{1 - \pi_1^0}$  e variância  $\rho \cdot \frac{\pi_1^0}{(1 - \pi_1^0)^2}$ . Assim, vale

$$P(F_i = 1 | Y_i = 1) = P(W \leq 2\rho - 1) \approx P(Z \leq l) ,$$

em que  $Z \sim N(0, 1)$  e  $l = \frac{2\rho - 1 - \frac{\rho}{1 - \pi_1^0}}{\sqrt{\rho \cdot \frac{\pi_1^0}{(1 - \pi_1^0)^2}}} = \sqrt{\rho} \left( \frac{1 - 2\pi_1^0}{\pi_1^0} \right) - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{1 - \pi_1^0}{\pi_1^0} \right)$ . A

condição  $0 < \pi_1^0 < \frac{1}{2}$  garante que  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} l = \infty$ . Por isso,  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} P(F_i = 1 | Y_i = 1) = 1$ . A segunda parte de (2.6) pode ser provada de modo inteiramente análogo. ■

A partir do Lema (2.1), podemos estabelecer os seguintes resultados.

**Teorema 2.1.** *Em relação ao número mínimo de repetições  $\rho$ , o estimador  $\hat{\theta}$  é assintoticamente não-enviesado.*

*Demonstração.* Decorrem imediatamente de (2.6) que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P(F_i = 0 | Y_i = 1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} P(F_i = 1 | Y_i = 0) = 0. \quad (2.7)$$

Como

$$\begin{aligned} P(F_i = 1) &= P(F_i = 1 | Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0) + P(F_i = 1 | Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1) \\ &= (1 - \theta) \cdot P(F_i = 1 | Y_i = 0) + \theta \cdot P(F_i = 1 | Y_i = 1), \end{aligned}$$

os limites (2.6) e (2.7) implicam que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P(F_i = 1) = \theta. \quad (2.8)$$

Portanto, uma vez que  $E[\hat{\theta}] = \frac{\sum_{i=1}^n E[F_i]}{n} = E[F_i] = P(F_i = 1)$ , temos que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \lim_{\rho \rightarrow \infty} P(F_i = 1) = \theta ,$$

ou seja,  $\hat{\theta}$  é assintoticamente não-tendencioso. Cabe observar que a convergência acima é uniforme, ou seja,  $n$  não tem participação na aproximação. ■

**Teorema 2.2.** *Em relação ao aumento, simultâneo, do número de objetos  $n$  e da quantidade mínima de repetições  $\rho$ , o estimador  $\hat{\theta}$  é consistente.*

*Demonstração.* A variância do estimador  $\hat{\theta}$ , pode ser expressa como<sup>2</sup>

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}[F_i]}{n^2} = \frac{P(F_i = 1)[1 - P(F_i = 1)]}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Pela desigualdade de Chebychev, para todo número real  $\epsilon > 0$ ,

$$P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}[\hat{\theta}] + (\text{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2}{\epsilon^2}.$$

Mas,  $\text{Var}[\hat{\theta}] \rightarrow 0$  uniformemente quando  $n \rightarrow \infty$ , e  $\text{E}[\hat{\theta}] \rightarrow \theta$  uniformemente quando  $\rho \rightarrow \infty$ . Por conseguinte,  $\hat{\theta}$  converge em *probabilidade* para  $\theta$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\rho \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\hat{\theta}$  é consistente. ■

**Teorema 2.3.** *Em relação ao aumento, simultâneo, do número de objetos  $n$  e da quantidade mínima de repetições  $\rho$ , os estimadores  $\hat{\pi}_0^1$  e  $\hat{\pi}_1^0$  são assintoticamente consistentes e não-enviesados.*

*Demonstração.* Para mostrar que  $\hat{\pi}_0^1$  é uma estatística consistente e não-enviesada para  $\pi_0^1$ , afirmamos que a sequência de variáveis aleatórias  $\left\{ \frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} \right\}_{\rho \geq 1}$  converge em *média quadrática* para a variável  $\frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i)$ , isto é,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{E} \left[ \left\{ \frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i) \right\}^2 \right] = 0. \quad (2.9)$$

Com efeito, definindo

$$\text{E}_{y,f} = \text{E} \left[ \left\{ \frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i) \right\}^2 \middle| Y_i = y, F_i = f \right],$$

<sup>2</sup>Decorre do limite (2.8) que  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{\theta}] = \frac{\theta(1 - \theta)}{n}$ .

podemos escrever

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left\{ \frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i) \right\}^2 \right] \\ &= \sum_{y=0}^1 \sum_{f=0}^1 \mathbb{E}_{y,f} \cdot P(Y_i = y, F_i = f) = \sum_{y=0}^1 \sum_{f=0}^1 \mathbb{E}_{y,f} \cdot P(F_i = f | Y_i = y) \cdot P(Y_i = y) \\ &= \mathbb{E}_{0,0} \cdot P(F_i = 0 | Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0) + \mathfrak{A}, \text{ em que} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A} = \sum_{(y,f) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{y,f} \cdot P(F_i = f | Y_i = y) \cdot P(Y_i = y), \text{ sendo } \mathcal{A} = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Temos que  $\mathbb{E}_{1,1} = 0$  e que  $\mathbb{E}_{0,1}$  e  $\mathbb{E}_{1,0}$  são limitados, uma vez que  $0 < \pi_0^1 < \frac{1}{2}$  e  $S_i = \rho, \dots, 2\rho - 1$ . Desse modo, os limites (2.7) implicam que  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathfrak{A} = 0$ . Por isso, focamos agora no comportamento assintótico de  $\mathbb{E}_{0,0}$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} P(S_i = s | Y_i = 0, F_i = 0) &= \frac{P(S_i = s, Y_i = 0, F_i = 0)}{P(Y_i = 0, F_i = 0)} \\ &= \frac{P(S_i = s, Y_i = 0, F_i = 0)}{P(F_i = 0 | Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0)} \\ &= \frac{1}{P(F_i = 0 | Y_i = 0)} \cdot \frac{P(S_i = s, Y_i = 0, F_i = 0)}{P(Y_i = 0)} \\ &= \frac{1}{P(F_i = 0 | Y_i = 0)} \cdot P(S_i = s, F_i = 0 | Y_i = 0) \end{aligned}$$

e que, conforme (2.4),  $P(S_i = s, F_i = 0 | Y_i = 0) = \binom{s-1}{\rho-1} [1 - \pi_0^1]^\rho [\pi_0^1]^{s-\rho}$ ,  $s = \rho, \dots, 2\rho - 1$ . Assim, se  $W$  tem distribuição binomial negativa<sup>3</sup>, com parâmetros

---

<sup>3</sup> $P(W = w) = \binom{w-1}{\rho-1} [1 - \pi_0^1]^\rho [\pi_0^1]^{w-\rho}$ , com  $w \geq \rho$ ,  $\mathbb{E}[W] = \frac{\rho}{1 - \pi_0^1}$ ,  $\text{Var}[W] = \frac{\rho \cdot \pi_0^1}{[1 - \pi_0^1]^2}$ .

$1 - \pi_0^1$  e  $\rho$ , vale

$$\begin{aligned} E_{0,0} &= E \left[ \left\{ \frac{S_i - \rho}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \right\}^2 \middle| Y_i = 0, F_i = 0 \right] \\ &\leq \frac{1}{P(F_i = 0 | Y_i = 0)} \cdot E \left[ \left\{ \frac{W - \rho}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \right\}^2 \right] \end{aligned}$$

Ademais, uma vez que  $E \left[ \frac{W - \rho}{\rho} \right] = \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1}$ , vem

$$E \left[ \left\{ \frac{W - \rho}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \right\}^2 \right] = \text{Var} \left[ \frac{W - \rho}{\rho} \right] = \frac{1}{\rho^2} \cdot \text{Var}[W] = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\pi_0^1}{[1 - \pi_0^1]^2}.$$

Esse fato, somado à desigualdade acima e ao resultado (2.6), implica que  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} E_{0,0} = 0$ , o que prova (2.9) e garante a convergência mencionada.

Por raciocínio semelhante, pode-se mostrar que a sequência de variáveis aleatórias  $\left\{ \frac{S_i \cdot (1 - F_i)}{\rho} \right\}_{\rho \geq 1}$  converge em *média quadrática* para a variável  $\frac{1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i)$ .

Como convergência em *média quadrática* implica convergência em *média*, são válidos os seguintes limites

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} E \left[ \left| \frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i) \right| \right] = 0 \quad (2.10)$$

e

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} E \left[ \left| \frac{S_i \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i) \right| \right] = 0 \quad (2.11)$$

Sejam  $T_{n,\rho} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho}$ ,  $U_{n,\rho} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{S_i \cdot (1 - F_i)}{\rho}$  e  $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - Y_i)$ . Temos que

$$E \left[ \left| T_{n,\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot V_n \right| \right] \leq E \left[ \left| \frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i) \right| \right].$$

$$\begin{aligned}
\text{Com efeito, } E\left[\left|T_{n,\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot V_n\right|\right] &= E\left[\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot \sum_{i=1}^n (1 - Y_i)\right|\right] \\
&= \frac{1}{n} E\left[\left|\sum_{i=1}^n \left\{\frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i)\right\}\right|\right] \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left[\left|\frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i)\right|\right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \cdot E\left[\left|\frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i)\right|\right] \\
&= E\left[\left|\frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i)\right|\right].
\end{aligned}$$

Analogamente, é possível verificar que

$$E\left[\left|U_{n,\rho} - \frac{1}{1 - \pi_0^1} \cdot V_n\right|\right] \leq E\left[\left|\frac{S_i \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i)\right|\right].$$

Resultam da desigualdade de Markov e das desigualdades acima que, dado  $\epsilon > 0$ ,

$$P\left(\left|T_{n,\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot V_n\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{E\left[\left|\frac{(S_i - \rho) \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i)\right|\right]}{\epsilon} \quad (2.12)$$

e

$$P\left(\left|U_{n,\rho} - \frac{1}{1 - \pi_0^1} \cdot V_n\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{E\left[\left|\frac{S_i \cdot (1 - F_i)}{\rho} - \frac{1}{1 - \pi_0^1} \cdot (1 - Y_i)\right|\right]}{\epsilon}. \quad (2.13)$$

Portanto, as desigualdades (2.12) e (2.13) e os limites (2.10) e (2.11) garantem as convergências em *probabilidade* a seguir:

$$T_{n,\rho} \xrightarrow[\rho \rightarrow \infty]{P} \frac{\pi_0^1}{1 - \pi_0^1} \cdot V_n \quad \text{e} \quad U_{n,\rho} \xrightarrow[\rho \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{1 - \pi_0^1} \cdot V_n.$$



Vale notar que os lados direitos das desigualdades (2.12) e (2.13) implicam que as convergências em *probabilidade* são uniformes, no sentido de que as aproximações não dependem de  $n$ .

Pela Lei Fraca de Khintchin,  $V_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1 - \theta$ , uma vez que  $E[1 - Y_i] = 1 - \theta$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} P\left(\left|U_{n,\rho} - \frac{1-\theta}{1-\pi_0^1}\right| \geq \epsilon\right) &\leq P\left(\left|U_{n,\rho} - \frac{1}{1-\pi_0^1} \cdot V_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &+ P\left(\left|V_n - (1-\theta)\right| \geq \frac{\epsilon}{2} \cdot (1-\pi_0^1)\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P\left(\left|T_{n,\rho} - \frac{\pi_0^1}{1-\pi_0^1} \cdot (1-\theta)\right| \geq \epsilon\right) &\leq P\left(\left|T_{n,\rho} - \frac{\pi_0^1}{1-\pi_0^1} \cdot V_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &+ P\left(\left|V_n - (1-\theta)\right| \geq \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1-\pi_0^1}{\pi_0^1}\right). \end{aligned}$$

Essas duas desigualdades e os limites em *probabilidade* estabelecidos implicam que

$$T_{n,\rho} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } \rho \rightarrow \infty]{P} \frac{\pi_0^1}{1-\pi_0^1} \cdot (1-\theta) \quad \text{e} \quad U_{n,\rho} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } \rho \rightarrow \infty]{P} \frac{1-\theta}{1-\pi_0^1}.$$

Assim, pelo Lema 1.2, do Capítulo 1, temos

$$\widehat{\pi}_0^1 = \frac{T_{n,\rho}}{U_{n,\rho}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } \rho \rightarrow \infty]{P} \frac{\frac{\pi_0^1}{1-\pi_0^1} \cdot (1-\theta)}{\frac{1-\theta}{1-\pi_0^1}} = \pi_0^1,$$

isto é,  $\widehat{\pi}_0^1$  é um estimador consistente. Ademais, como essa estatística é limitada, vale

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow \infty}} E\left[\widehat{\pi}_0^1\right] = \pi_0^1,$$

ou seja,  $\widehat{\pi}_0^1$  é um estimador assintoticamente não-enviesado. Analogamente, pode-se mostrar que  $\widehat{\pi}_1^0$  é consistente e assintoticamente não-enviesado. ■

## 2.3 Estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção, descrevemos como os parâmetros do modelo proposto podem ser estimados através do método de máxima verossimilhança.

Para resolver o problema de maximização da função de verossimilhança, empregamos o algoritmo EM, que aborda o assunto explorando uma forma mais conveniente de verossimilhança, chamada verossimilhança de informação completa. Essa verossimilhança é obtida escrevendo-se a verossimilhança com a suposição de que o estado verdadeiro,  $Y_i$ , de cada um dos objetos é conhecido. Mais exatamente, se

$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} s_1 & f_1 \\ \vdots & \vdots \\ s_n & f_n \end{bmatrix}$  é a matriz dos dados observados, com  $s_i \in \{\rho, \dots, 2\rho - 1\}$  e

$f_i \in \{0, 1\}$  representando o número de medições e a classificação final do objeto  $i$ , respectivamente, então a verossimilhança correspondendo à situação de informação completa é

$$L_c[\Psi | (\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{w}, \mathbf{y})] = \prod_{i=1}^n \left\{ \theta^{y_i} \times \left[ P(S_i = s_i, F_i = 0 | Y_i = 1) \right]^{(1-f_i) \cdot y_i} \times \right. \\ \left. \left[ P(S_i = s_i, F_i = 1 | Y_i = 1) \right]^{f_i \cdot y_i} \times (1 - \theta)^{1-y_i} \times \left[ P(S_i = s_i, F_i = 0 | Y_i = 0) \right]^{(1-f_i) \cdot (1-y_i)} \right. \\ \left. \times \left[ P(S_i = s_i, F_i = 1 | Y_i = 0) \right]^{f_i \cdot (1-y_i)} \right\}, \text{ em que } \Psi = (\theta, \pi_0^1, \pi_1^0).$$

O algoritmo EM baseia-se na maximização da função acima, com respeito a  $\Psi$ . Por essa razão, a seguir estudamos os pontos críticos e a matriz hessiana da função log-verossimilhança de informação completa, definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \log L_c[\Psi | (\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{w}, \mathbf{y})] = \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \cdot \log \theta + (1 - y_i) \cdot \log(1 - \theta) \right. \\ &+ (1 - f_i) \cdot y_i \cdot \log P(S_i = s_i, F_i = 0 | Y_i = 1) \\ &+ f_i \cdot y_i \cdot \log P(S_i = s_i, F_i = 1 | Y_i = 1) \\ &+ (1 - f_i) \cdot (1 - y_i) \cdot \log P(S_i = s_i, F_i = 0 | Y_i = 0) \\ &\left. + f_i \cdot (1 - y_i) \cdot \log P(S_i = s_i, F_i = 1 | Y_i = 0) \right\}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i}{\theta} - \frac{1-y_i}{1-\theta} \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i \cdot (1-\theta) - \theta \cdot (1-y_i)}{\theta \cdot (1-\theta)} \right\} \\ &= \frac{1}{\theta \cdot (1-\theta)} \left\{ \sum_{i=1}^n y_i - n\theta \right\}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_0^1} &= \sum_{i=1}^n \left\{ (1-f_i) \cdot (1-y_i) \cdot \frac{\partial}{\partial \pi_0^1} \left[ \log P(S_i = s_i, F_i = 0 \mid Y_i = 0) \right] \right. \\ &\quad \left. + f_i \cdot (1-y_i) \cdot \frac{\partial}{\partial \pi_0^1} \left[ \log P(S_i = s_i, F_i = 1 \mid Y_i = 0) \right] \right\} \text{ e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_1^0} &= \sum_{i=1}^n \left\{ (1-f_i) \cdot y_i \cdot \frac{\partial}{\partial \pi_1^0} \left[ \log P(S_i = s_i, F_i = 0 \mid Y_i = 1) \right] \right. \\ &\quad \left. + f_i \cdot y_i \cdot \frac{\partial}{\partial \pi_1^0} \left[ \log P(S_i = s_i, F_i = 1 \mid Y_i = 1) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Como  $\log P(S_i = s_i, F_i = 0 \mid Y_i = 0) = \log \binom{s_i-1}{\rho-1} + \rho \cdot \log(1-\pi_0^1) + (s_i-\rho) \cdot \log \pi_0^1$   
e  $\log P(S_i = s_i, F_i = 1 \mid Y_i = 0) = \log \binom{s_i-1}{\rho-1} + \rho \cdot \log \pi_0^1 + (s_i-\rho) \cdot \log(1-\pi_0^1)$ ,  
valem  $\frac{\partial}{\partial \pi_0^1} \left[ \log P(S_i = s_i, F_i = 0 \mid Y_i = 0) \right] = \frac{s_i-\rho}{\pi_0^1} - \frac{\rho}{1-\pi_0^1} = \frac{s_i-\rho-s_i \cdot \pi_0^1}{\pi_0^1 \cdot (1-\pi_0^1)}$  e  
 $\frac{\partial}{\partial \pi_0^1} \left[ \log P(S_i = s_i, F_i = 1 \mid Y_i = 0) \right] = \frac{\rho}{\pi_0^1} - \frac{s_i-\rho}{1-\pi_0^1} = \frac{\rho-s_i \cdot \pi_0^1}{\pi_0^1 \cdot (1-\pi_0^1)}$ . Por isso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_0^1} &= \sum_{i=1}^n \left\{ (1-f_i) \cdot (1-y_i) \cdot \left( \frac{s_i-\rho-s_i \cdot \pi_0^1}{\pi_0^1 \cdot (1-\pi_0^1)} \right) + f_i \cdot (1-y_i) \cdot \left( \frac{\rho-s_i \cdot \pi_0^1}{\pi_0^1 \cdot (1-\pi_0^1)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi_0^1 \cdot (1-\pi_0^1)} \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ (1-f_i) \cdot (1-y_i) \cdot (s_i-\rho) + f_i \cdot (1-y_i) \cdot \rho \right. \\ &\quad \left. - s_i \cdot \pi_0^1 \cdot [(1-f_i) \cdot (1-y_i) + f_i \cdot (1-y_i)] \right\} \\ &= \frac{1}{\pi_0^1 \cdot (1-\pi_0^1)} \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ (1-y_i) \cdot [(1-f_i) \cdot (s_i-\rho) + f_i \cdot \rho] - s_i \cdot (1-y_i) \cdot \pi_0^1 \right\}.\end{aligned}$$

Pelo mesmo raciocínio,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_1^0} = \frac{1}{\pi_1^0 \cdot (1-\pi_1^0)} \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \cdot [(1-f_i) \cdot \rho + f_i \cdot (s_i-\rho)] - s_i \cdot y_i \cdot \pi_1^0 \right\}.$$

Conseqüentemente, matriz hessiana da log-verossimilhança de informação completa é

$$H(\theta, \pi_0^1, \pi_1^0) = H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \theta \partial \pi_0^1} & \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \theta \partial \pi_1^0} \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_0^1 \partial \theta} & \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_0^1{}^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_0^1 \partial \pi_1^0} \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_1^0 \partial \theta} & \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_1^0 \partial \pi_0^1} & \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_1^0{}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \theta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_0^1{}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_1^0{}^2} \end{bmatrix},$$

em que  $\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \theta^2} = \frac{-n \cdot \theta^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot \theta - \sum_{i=1}^n y_i}{[\theta \cdot (1 - \theta)]^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_0^1{}^2} = \frac{a \cdot (2 \cdot \pi_0^1 - 1) - b \cdot [\pi_0^1]^2}{[\pi_0^1 \cdot (1 - \pi_0^1)]^2}$  e

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_1^0{}^2} = \frac{c \cdot (2 \cdot \pi_1^0 - 1) - d \cdot [\pi_1^0]^2}{[\pi_1^0 \cdot (1 - \pi_1^0)]^2}, \text{ com } a = \sum_{i=1}^n \{(1 - y_i) \cdot [(1 - f_i) \cdot (s_i - \rho) + f_i \cdot \rho]\},$$

$$b = \sum_{i=1}^n \{s_i \cdot (1 - y_i)\}, \quad c = \sum_{i=1}^n \{y_i \cdot [(1 - f_i) \cdot \rho + f_i \cdot (s_i - \rho)]\} \text{ e } d = \sum_{i=1}^n \{s_i \cdot y_i\}.$$

Notemos que, quando  $0 < \sum_{i=1}^n y_i < n$ , temos  $b > 0$ ,  $d > 0$  e o discriminante do

numerador de  $\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \theta^2}$  (i.e.  $\Delta = \left(2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i\right)^2 - 4 \cdot (-n) \cdot \left(-\sum_{i=1}^n y_i\right)$ ) é negativo. Assim,

sempre que  $0 < \sum_{i=1}^n y_i < n$ , as condições (2.1) garantem que os elementos da diagonal

principal da matriz hessiana são quantidades negativas. Por isso, se  $H_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}$

e  $H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \theta^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \pi_0^1{}^2} \end{bmatrix}$ , valem  $\det(H_1) < 0$ ,  $\det(H_2) > 0$  e  $\det(H_3) < 0$ , em todo

ponto do domínio aberto convexo  $D = \left\{(\theta, \pi_0^1, \pi_1^0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \theta < 1 \text{ e } 0 < \pi_0^1, \pi_1^0 < \frac{1}{2}\right\}$ . Logo,  $\mathfrak{L}$  é côncava em  $D$  e todo ponto crítico é ponto de máximo global.

Igualando as derivadas parciais primeiras a zero, encontramos o único ponto de

máximo global da log-verossimilhança de informação completa, cujas componentes são

$$\pi_0^1 = \frac{\sum_{i=1}^n \{(1 - y_i) \cdot [(1 - f_i) \cdot (s_i - \rho) + f_i \cdot \rho]\}}{\sum_{i=1}^n \{s_i \cdot (1 - y_i)\}}, \quad \theta = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad \text{e}$$

$$\pi_1^0 = \frac{\sum_{i=1}^n \{y_i \cdot [(1 - f_i) \cdot \rho + f_i \cdot (s_i - \rho)]\}}{\sum_{i=1}^n \{s_i \cdot y_i\}}.$$

O algoritmo EM, aplicado à estimação de  $\Psi = (\theta, \pi_0^1, \pi_1^0)$ , pode ser descrito da seguinte maneira:

**PASSO 1:** Escolha um valor inicial para a estimativa, digamos  $\widehat{\Psi}_0$ , e especifique um critério de parada (por exemplo,  $\|\widehat{\Psi}_{t+1} - \widehat{\Psi}_t\| < \epsilon$ ).

**PASSO 2** (passo E):  $Y_i$  não é observável. Utilizando a estimativa corrente  $\widehat{\Psi}_t$ , substitua  $Y_i$  por seu valor esperado, condicionado a  $\mathbf{W} = \mathbf{w}$ , isto é,  $E_{\widehat{\Psi}_t}[Y_i | \mathbf{W} = \mathbf{w}]$ . Aplicando Teorema de Bayes, obtemos

$$\begin{aligned} E_{\widehat{\Psi}_t}^i &= E_{\widehat{\Psi}_t}[Y_i | \mathbf{W} = \mathbf{w}] = P_{\widehat{\Psi}_t}(Y_i = 1 | \mathbf{W} = \mathbf{w}) \\ &= \frac{P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W} = \mathbf{w} | Y_i = 1) \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(Y_i = 1)}{P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W} = \mathbf{w})} \\ &= \frac{\left[ \prod_{j \neq i} P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_j = \mathbf{w}_j) \right] \left[ \widehat{\theta}^{(t)} \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i | Y_i = 1) \right]}{\left[ \prod_{j \neq i} P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_j = \mathbf{w}_j) \right] P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i)} \\ &= \frac{\widehat{\theta}^{(t)} \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i | Y_i = 1)}{P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i)} \\ &= \frac{\widehat{\theta}^{(t)} \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(S_i = s_i, F_i = f_i | Y_i = 1)}{(1 - \widehat{\theta}^{(t)}) \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(S_i = s_i, F_i = f_i | Y_i = 0) + \widehat{\theta}^{(t)} \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(S_i = s_i, F_i = f_i | Y_i = 1)}. \end{aligned}$$

**PASSO 3** (passo M): Determine  $\widehat{\Psi}_{t+1}$  no qual a log-verossimilhança de informação completa — com  $y_i$  substituído<sup>4</sup> por  $E_{\widehat{\Psi}_t}^i$  — atinge seu máximo, ou seja, calcule

$$\hat{\pi}_0^{1(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ (1 - E_{\widehat{\Psi}_t}^i) \cdot [(1 - f_i) \cdot (s_i - \rho) + f_i \cdot \rho] \right\}}{\sum_{i=1}^n \left\{ s_i \cdot (1 - E_{\widehat{\Psi}_t}^i) \right\}}, \quad \hat{\theta}^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^i}{n} \quad \text{e}$$

$$\hat{\pi}_1^{0(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ E_{\widehat{\Psi}_t}^i \cdot [(1 - f_i) \cdot \rho + f_i \cdot (s_i - \rho)] \right\}}{\sum_{i=1}^n \left\{ s_i \cdot E_{\widehat{\Psi}_t}^i \right\}}.$$

Assim, a próxima estimativa  $\widehat{\Psi}_{t+1}$  do vetor de parâmetros  $\Psi$  é obtida.

**PASSO 4:** Retorne ao PASSO 2 até que o critério de parada seja satisfeito.

É possível mostrar que a estimativa de máxima verossimilhança produzida pelo algoritmo EM maximiza não somente a função de verossimilhança de informação completa, mas também a função de verossimilhança dos dados observados (McLachlan & Krishnan [1997]).

## 2.4 Desempenho dos EsMSS

Nesta seção, comparamos os desempenhos dos EsMSS e EsMS. Avaliamos também a performance do método de maioria simples sequencial relativamente ao método de máxima verossimilhança (correspondente ao desenho experimental de maioria simples sequencial). As comparações são realizados por meio de simulações de Monte Carlo (parte do código R está disponível no Anexo A). Esclarecemos que, eventualmente, as expressões de maioria simples e de maioria simples sequencial conduzem a divisões por zero ou os cálculos para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança demandam tempo excessivo (ou não ocorre convergência). Nesses casos, o processo de estimação é interrompido. Os resultados dos estudos de simulação sugerem que tais indeterminações surgem geralmente associadas a amostras que contém muito poucos (ou nenhum) elementos de uma das duas categorias. A frequência de ocorrência tais amostras tende a diminuir a medida que o tamanho da amostra aumenta.

<sup>4</sup> $\mathfrak{L}$ , com  $y_i$  substituído por  $E_{\widehat{\Psi}_t}^i$ , torna-se  $E_{\widehat{\Psi}_t}[\mathfrak{L} \mid \mathbf{W} = \mathbf{w}]$ .

### 2.4.1 Comparação entre EsMSS e EsMS via simulação de Monte Carlo

Para comparar as performances dos métodos de maioria simples sequencial (MSS) e de maioria simples (MS), uma vez definidos os valores para  $\rho$  e  $\Psi = (\theta, \pi_0^1, \pi_1^0)$ , escolhemos  $r$  (o número de classificações repetidas na abordagem de maioria simples) como sendo o número inteiro mais próximo de  $E(S_i)$  (o número médio de classificações repetidas no procedimento de maioria simples sequencial). A seguir, deduzimos uma expressão para  $E(S_i)$  em termos de  $\rho$  e  $\Psi$ . Temos que

$$\begin{aligned}
 P(S_i = s) &= P(S_i = s, F_i = 0) + P(S_i = s, F_i = 1) \\
 &= P(S_i = s, F_i = 0 | Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0) \\
 &+ P(S_i = s, F_i = 0 | Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1) \\
 &+ P(S_i = s, F_i = 1 | Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0) \\
 &+ P(S_i = s, F_i = 1 | Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1).
 \end{aligned}$$

Assim, usando (2.4), podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 P(S_i = s) &= \binom{s-1}{\rho-1} \cdot \left[ (1-\theta) \cdot [1-\pi_0^1]^\rho [\pi_0^1]^{s-\rho} + \theta \cdot [\pi_1^0]^\rho [1-\pi_1^0]^{s-\rho} \right. \\
 &\quad \left. + (1-\theta) \cdot [\pi_0^1]^\rho [1-\pi_0^1]^{s-\rho} + \theta \cdot [1-\pi_1^0]^\rho [\pi_1^0]^{s-\rho} \right].
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 E(S_i) &= \sum_{s=\rho}^{2\rho-1} \left\{ s \cdot \binom{s-1}{\rho-1} \cdot \left[ (1-\theta) \cdot [1-\pi_0^1]^\rho [\pi_0^1]^{s-\rho} + \theta \cdot [\pi_1^0]^\rho [1-\pi_1^0]^{s-\rho} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1-\theta) \cdot [\pi_0^1]^\rho [1-\pi_0^1]^{s-\rho} + \theta \cdot [1-\pi_1^0]^\rho [\pi_1^0]^{s-\rho} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Os valores selecionados para a definição dos cenários são similares<sup>5</sup> àqueles escolhidos no experimento de simulação descrito na Seção 1.5. Isto é, o número de objetos  $n$  variou de 25 a 150, o número mínimo de repetições  $\rho$ , de 3 a 7, a fração de itens conformes  $\theta$ , de 0,75 a 0,90, e as probabilidades dos erros de classificação  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$  variaram de 0,05 a 0,15.

O estudo de simulação consistiu em gerar amostras, de acordo com os modelos (1.1) e (2.3), seguidas dos cálculos das estimativas dos parâmetros pelos métodos de maioria simples e de maioria simples sequencial. Para cada combinação particular de  $n$ ,  $\rho$  e  $\Psi$ , e de  $n$ ,  $r$  e  $\Psi$ , foram geradas 25.000 amostras e calculados a média, o desvio padrão (DP) e o erro quadrático médio (EQM) das estimativas produzidas.

Segmentos representativos dos resultados do estudo são apresentados nas Tabelas 2.2 - 2.6, que relacionam os mesmos tipos de informação que as Tabelas 1.1 - 1.5, do Capítulo 1. Ou seja, nas Tabelas 2.3 - 2.5, diferenças de vieses absolutos relativos (DVAR) das estimativas de MS e de MSS, assim como razões de EQM das estimativas de MS por EQM das estimativas de MSS, são apresentadas para cada um dos parâmetros. Do mesmo modo, razões de DP são obtidas para cada um dos parâmetros. Diferenças positivas e razões maiores que um indicam melhor desempenho para o método de maioria simples sequencial. A Tabela 2.6 resume a informação contida nas Tabelas 2.2 - 2.5, exibindo as médias dos vieses absolutos (VAs), dos DPs e dos EQMs, para cada um dos parâmetros e métodos. Exibe também o percentual de cenários favoráveis ao método de maioria simples sequencial, em termos dos critérios VA, EQM e DP.

De forma geral, para os três parâmetros, os valores médios dos VAs e EQMs foram menores para o procedimento de maioria simples sequencial. Além disso, os VAs das estimativas de MSS para  $\theta$ ,  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$  tiveram menor valor, respectivamente, em cerca de 89%, 85% e 93% dos cenários relacionados na Tabela 2.2. Os EQMs das estimativas de MSS, para  $\theta$ ,  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$ , apresentaram menor valor em aproximadamente 83%, 85% e 83% dos casos, respectivamente. Com relação ao DP, as estimativas de MSS para  $\theta$  exibiram menor valor em cerca de 80% dos casos. Os valores de DP das estimativas de MSS para  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$  ficaram muito próximos dos correspondentes valores obtidos via abordagem de MS. Esses resultados indicam que o procedimento de maioria simples sequencial representa uma alternativa competitiva em relação aos EsMS, pois demonstrou melhor desempenho segundo os critérios de *erro quadrático*

---

<sup>5</sup> $r$  pode ser diferente de  $\rho$ .



**Tabela 2.2.** Cenários e realizações

id	$n$	Cenários					$\pi_0^1$	$\pi_1^0$	$E(S_i)$	Realizações	
		$\rho$	$r$	$\theta$	$\pi_0^0$	$\pi_1^1$				MS	MSS
1	50	3	3	0,75	0,05	0,05		3,16	25000	24999	
2	50	3	3	0,75	0,05	0,15		3,40	25000	25000	
3	50	3	3	0,75	0,15	0,05		3,24	24999	25000	
4	50	3	3	0,75	0,15	0,15		3,48	25000	25000	
5	50	3	3	0,90	0,05	0,05		3,16	24917	24889	
6	50	3	3	0,90	0,05	0,15		3,45	24996	24975	
7	50	3	3	0,90	0,15	0,05		3,19	24866	24852	
8	50	3	3	0,90	0,15	0,15		3,48	24994	24963	
9	150	3	3	0,75	0,05	0,05		3,16	25000	25000	
10	150	3	3	0,75	0,05	0,15		3,40	25000	25000	
11	150	3	3	0,75	0,15	0,05		3,24	25000	25000	
12	150	3	3	0,75	0,15	0,15		3,48	25000	25000	
13	150	3	3	0,90	0,05	0,05		3,16	25000	25000	
14	150	3	3	0,90	0,05	0,15		3,45	25000	25000	
15	150	3	3	0,90	0,15	0,05		3,19	25000	25000	
16	150	3	3	0,90	0,15	0,15		3,48	25000	25000	
17	50	4	4	0,75	0,05	0,05		4,21	25000	24999	
18	50	4	5	0,75	0,05	0,15		4,56	25000	25000	
19	50	4	4	0,75	0,15	0,05		4,33	25000	25000	
20	50	4	5	0,75	0,15	0,15		4,68	25000	25000	
21	50	4	4	0,90	0,05	0,05		4,21	24905	24894	
22	50	4	5	0,90	0,05	0,15		4,63	24963	24935	
23	50	4	4	0,90	0,15	0,05		4,26	24874	24848	
24	50	4	5	0,90	0,15	0,15		4,68	24965	24931	
25	150	4	4	0,75	0,05	0,05		4,21	25000	25000	
26	150	4	5	0,75	0,05	0,15		4,56	25000	25000	
27	150	4	4	0,75	0,15	0,05		4,33	25000	25000	
28	150	4	5	0,75	0,15	0,15		4,68	25000	25000	
29	150	4	4	0,90	0,05	0,05		4,21	25000	25000	
30	150	4	5	0,90	0,05	0,15		4,63	25000	25000	
31	150	4	4	0,90	0,15	0,05		4,26	25000	25000	
32	150	4	5	0,90	0,15	0,15		4,68	25000	25000	
33	50	7	7	0,75	0,05	0,05		7,37	25000	25000	
34	50	7	8	0,75	0,05	0,15		8,02	25000	25000	
35	50	7	8	0,75	0,15	0,05		7,58	25000	25000	
36	50	7	8	0,75	0,15	0,15		8,23	25000	25000	
37	50	7	7	0,90	0,05	0,05		7,37	24891	24873	
38	50	7	8	0,90	0,05	0,15		8,15	24938	24859	
39	50	7	7	0,90	0,15	0,05		7,45	24876	24869	
40	50	7	8	0,90	0,15	0,15		8,23	24919	24858	
41	150	7	7	0,75	0,05	0,05		7,37	25000	25000	
42	150	7	8	0,75	0,05	0,15		8,02	25000	25000	
43	150	7	8	0,75	0,15	0,05		7,58	25000	25000	
44	150	7	8	0,75	0,15	0,15		8,23	25000	25000	
45	150	7	7	0,90	0,05	0,05		7,37	25000	25000	
46	150	7	8	0,90	0,05	0,15		8,15	25000	25000	
47	150	7	7	0,90	0,15	0,05		7,45	25000	25000	
48	150	7	8	0,90	0,15	0,15		8,23	25000	25000	

médio e viés absoluto, nos casos analisados.

## 2.4.2 Comparação entre EsMSS e EsMV via simulação de Monte Carlo

Nesta subsecção, comparamos as performances dos métodos de maioria simples sequencial (MSS) e de máxima verossimilhança (MV). Para a definição dos cenários

**Tabela 2.3.** Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de  $\theta$  estimados pelos métodos de MS e MSS.

id	$\theta$	MS			MSS			DVAR	Razões	
		Média	EQM	DP	Média	EQM	DP		EQM	DP
1	0,75	0,7470	0,0039	0,0620	<b>0,7490</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0616</b>	0,2755	1,0140	1,0059
2	0,75	0,7064	0,0061	0,0647	<b>0,7305</b>	<b>0,0043</b>	<b>0,0624</b>	3,2151	1,4228	1,0362
3	0,75	0,7600	0,0038	<b>0,0606</b>	<b>0,7555</b>	<b>0,0037</b>	0,0609	0,5956	1,0096	0,9955
4	0,75	0,7203	0,0050	0,0640	<b>0,7369</b>	<b>0,0041</b>	<b>0,0624</b>	2,2245	1,2260	1,0258
5	0,90	0,8936	0,0019	0,0430	<b>0,8985</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0423</b>	0,5442	1,0581	1,0181
6	0,90	<b>0,8463</b>	0,0055	0,0510	<b>0,8760</b>	<b>0,0027</b>	<b>0,0463</b>	3,3059	2,0192	1,1019
7	0,90	<b>0,8994</b>	0,0018	0,0421	0,9010	<b>0,0017</b>	<b>0,0413</b>	-0,0408	1,0383	1,0191
8	0,90	0,8516	0,0049	0,0506	<b>0,8785</b>	<b>0,0026</b>	<b>0,0459</b>	2,9890	1,9077	1,1024
9	0,75	0,7460	0,0013	0,0355	<b>0,7494</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0354</b>	0,4477	1,0166	1,0021
10	0,75	0,7064	0,0033	0,0373	<b>0,7304</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0362</b>	3,1945	1,9436	1,0310
11	0,75	0,7599	0,0013	0,0352	<b>0,7552</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0351</b>	0,6286	1,0574	1,0006
12	0,75	0,7194	0,0023	0,0366	<b>0,7371</b>	<b>0,0015</b>	<b>0,0360</b>	2,3629	1,5589	1,0173
13	0,90	0,8943	0,0007	0,0251	<b>0,8990</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0245</b>	0,5292	1,1073	1,0268
14	0,90	0,8459	0,0038	0,0292	<b>0,8763</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0270</b>	3,3780	2,9351	1,0849
15	0,90	<b>0,8996</b>	0,0006	0,0245	0,9017	<b>0,0006</b>	<b>0,0242</b>	-0,1416	1,0193	1,0120
16	0,90	0,8512	0,0032	0,0290	<b>0,8786</b>	<b>0,0011</b>	<b>0,0263</b>	3,0524	2,8080	1,1028
17	0,75	0,7467	0,0038	0,0615	<b>0,7496</b>	<b>0,0037</b>	<b>0,0611</b>	0,3819	1,0160	1,0065
18	0,75	0,7301	0,0043	0,0629	<b>0,7411</b>	<b>0,0039</b>	<b>0,0620</b>	1,4677	1,1096	1,0146
19	0,75	0,7597	<b>0,0037</b>	<b>0,0603</b>	<b>0,7532</b>	0,0037	0,0610	0,8700	0,9993	0,9883
20	0,75	0,7369	0,0041	0,0624	<b>0,7445</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0615</b>	1,0233	1,0686	1,0156
21	0,90	0,8938	0,0019	0,0430	<b>0,8994</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0419</b>	0,6192	1,0752	1,0265
22	0,90	0,8758	0,0028	0,0466	<b>0,8887</b>	<b>0,0021</b>	<b>0,0441</b>	1,4304	1,3294	1,0566
23	0,90	0,8990	0,0018	0,0420	<b>0,9002</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0416</b>	0,0863	1,0189	1,0091
24	0,90	0,8785	0,0026	0,0463	<b>0,8902</b>	<b>0,0020</b>	<b>0,0435</b>	1,2972	1,3126	1,0655
25	0,75	0,7464	<b>0,0013</b>	<b>0,0354</b>	<b>0,7497</b>	0,0013	0,0356	0,4410	0,9938	0,9919
26	0,75	0,7302	0,0017	0,0362	<b>0,7409</b>	<b>0,0014</b>	<b>0,0358</b>	1,4204	1,2467	1,0110
27	0,75	0,7597	0,0013	0,0350	<b>0,7528</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0348</b>	0,9200	1,0823	1,0058
28	0,75	0,7374	0,0014	0,0359	<b>0,7444</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0356</b>	0,9279	1,1122	1,0075
29	0,90	0,8942	0,0007	0,0250	<b>0,8998</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0246</b>	0,6166	1,0848	1,0150
30	0,90	0,8763	0,0013	0,0266	<b>0,8892</b>	<b>0,0008</b>	<b>0,0257</b>	1,4319	1,6382	1,0377
31	0,90	<b>0,8992</b>	0,0006	0,0247	0,9009	<b>0,0006</b>	<b>0,0244</b>	-0,0136	1,0301	1,0152
32	0,90	0,8786	0,0012	0,0267	<b>0,8904</b>	<b>0,0008</b>	<b>0,0258</b>	1,3046	1,5466	1,0366
33	0,75	<b>0,7495</b>	<b>0,0037</b>	<b>0,0612</b>	0,7493	0,0037	0,0612	-0,0321	0,9997	0,9999
34	0,75	0,7414	0,0039	0,0622	<b>0,7488</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0618</b>	0,9887	1,0327	1,0069
35	0,75	0,7526	0,0038	0,0616	<b>0,7504</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0613</b>	0,2969	1,0127	1,0054
36	0,75	0,7440	0,0039	0,0620	<b>0,7494</b>	<b>0,0037</b>	<b>0,0611</b>	0,7239	1,0397	1,0149
37	0,90	0,8993	0,0018	0,0420	<b>0,8998</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0418</b>	0,0507	1,0112	1,0055
38	0,90	0,8886	0,0021	0,0442	<b>0,8983</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0419</b>	1,0809	1,1860	1,0554
39	0,90	0,9004	<b>0,0017</b>	<b>0,0415</b>	<b>0,9000</b>	0,0018	0,0419	0,0454	0,9842	0,9920
40	0,90	0,8901	0,0020	0,0439	<b>0,8988</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0422</b>	0,9681	1,1367	1,0403
41	0,75	0,7499	<b>0,0013</b>	<b>0,0355</b>	<b>0,7499</b>	0,0013	0,0357	0,0009	0,9931	0,9965
42	0,75	0,7407	0,0014	0,0358	<b>0,7494</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0352</b>	1,1542	1,0988	1,0147
43	0,75	0,7525	<b>0,0012</b>	<b>0,0351</b>	<b>0,7502</b>	0,0013	0,0354	0,3057	0,9872	0,9911
44	0,75	0,7440	0,0013	0,0355	<b>0,7492</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0355</b>	0,6902	1,0290	1,0007
45	0,90	<b>0,8999</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0243</b>	0,8996	0,0006	0,0246	-0,0273	0,9823	0,9912
46	0,90	0,8891	0,0008	0,0257	<b>0,8988</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0246</b>	1,0843	1,2798	1,0419
47	0,90	0,9010	<b>0,0006</b>	<b>0,0241</b>	<b>0,8999</b>	0,0006	0,0246	0,1059	0,9630	0,9805
48	0,90	0,8903	0,0007	0,0254	<b>0,8991</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0246</b>	0,9778	1,2189	1,0325

Casos favoráveis ao método de maioria simples sequencial (%): 89,5833 83,3333 81,2500

**Tabela 2.4.** Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de  $\pi_0^1$  estimados pelos métodos de MS e MSS.

id	$\pi_0^1$	MS			MSS			DVAR	Razões	
		Média	EQM	DP	Média	EQM	DP		EQM	DP
1	0,05	0,0513	0,0012	0,0349	<b>0,0492</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0347</b>	1,1249	1,0120	1,0055
2	0,05	0,0873	0,0030	<b>0,0395</b>	<b>0,0749</b>	<b>0,0024</b>	0,0425	24,7556	1,2187	0,9311
3	0,15	0,1205	0,0032	<b>0,0479</b>	<b>0,1297</b>	<b>0,0027</b>	0,0480	6,1454	1,1673	0,9989
4	0,15	<b>0,1479</b>	<b>0,0021</b>	<b>0,0459</b>	0,1475	0,0023	0,0475	-0,3030	0,9328	0,9662
5	0,05	0,0632	0,0043	0,0639	<b>0,0491</b>	<b>0,0033</b>	<b>0,0574</b>	24,7644	1,2905	1,1125
6	0,05	0,1409	0,0123	<b>0,0635</b>	<b>0,1112</b>	<b>0,0094</b>	0,0755	59,5046	1,3034	0,8416
7	0,15	<b>0,1291</b>	0,0071	0,0815	0,1265	<b>0,0069</b>	<b>0,0799</b>	-1,7039	1,0210	1,0201
8	0,15	0,1890	<b>0,0058</b>	<b>0,0652</b>	<b>0,1697</b>	0,0063	0,0769	12,8886	0,9170	0,8484
9	0,05	0,0514	<b>0,0004</b>	<b>0,0196</b>	<b>0,0500</b>	0,0004	0,0199	2,8726	0,9812	0,9879
10	0,05	0,0873	0,0019	<b>0,0225</b>	<b>0,0759</b>	<b>0,0013</b>	0,0241	22,8830	1,5154	0,9312
11	0,15	0,1203	0,0016	0,0271	<b>0,1313</b>	<b>0,0011</b>	<b>0,0271</b>	7,3617	1,4939	1,0003
12	0,15	0,1476	<b>0,0007</b>	<b>0,0258</b>	<b>0,1485</b>	0,0007	0,0271	0,5678	0,9058	0,9492
13	0,05	0,0627	0,0013	0,0337	<b>0,0519</b>	<b>0,0011</b>	<b>0,0328</b>	21,5657	1,2039	1,0283
14	0,05	0,1413	0,0095	<b>0,0348</b>	<b>0,1155</b>	<b>0,0061</b>	0,0424	51,5587	1,5681	0,8214
15	0,15	0,1295	0,0023	<b>0,0433</b>	<b>0,1320</b>	<b>0,0023</b>	0,0442	1,6700	1,0087	0,9801
16	0,15	0,1886	0,0028	<b>0,0358</b>	<b>0,1750</b>	<b>0,0023</b>	0,0412	9,0611	1,1948	0,8694
17	0,05	0,0558	0,0012	0,0346	<b>0,0492</b>	<b>0,0009</b>	<b>0,0306</b>	9,9754	1,3169	1,1321
18	0,05	0,0741	0,0019	<b>0,0357</b>	<b>0,0645</b>	<b>0,0016</b>	0,0377	19,1101	1,1386	0,9484
19	0,15	0,1327	0,0025	0,0473	<b>0,1401</b>	<b>0,0021</b>	<b>0,0443</b>	4,9678	1,2303	1,0669
20	0,15	0,1556	<b>0,0019</b>	<b>0,0432</b>	<b>0,1498</b>	0,0021	0,0453	3,5821	0,9239	0,9533
21	0,05	0,0732	0,0055	0,0702	<b>0,0481</b>	<b>0,0025</b>	<b>0,0500</b>	42,5759	2,1788	1,4027
22	0,05	0,1137	0,0091	<b>0,0710</b>	<b>0,0869</b>	<b>0,0066</b>	0,0724	53,6933	1,3781	0,9802
23	0,15	<b>0,1473</b>	0,0072	0,0848	0,1364	<b>0,0056</b>	<b>0,0739</b>	-7,3180	1,2755	1,1479
24	0,15	0,1853	0,0066	<b>0,0730</b>	<b>0,1625</b>	<b>0,0060</b>	0,0766	15,1686	1,0918	0,9535
25	0,05	0,0560	0,0004	0,0196	<b>0,0498</b>	<b>0,0003</b>	<b>0,0175</b>	11,6401	1,3788	1,1221
26	0,05	0,0742	0,0010	<b>0,0204</b>	<b>0,0654</b>	<b>0,0007</b>	0,0219	17,6496	1,4026	0,9336
27	0,15	0,1321	0,0010	0,0265	<b>0,1414</b>	<b>0,0007</b>	<b>0,0251</b>	6,1953	1,4466	1,0531
28	0,15	0,1557	<b>0,0006</b>	<b>0,0242</b>	<b>0,1514</b>	0,0007	0,0256	2,8666	0,9446	0,9475
29	0,05	0,0729	0,0019	0,0373	<b>0,0497</b>	<b>0,0008</b>	<b>0,0281</b>	45,1865	2,4248	1,3270
30	0,05	0,1139	0,0055	<b>0,0378</b>	<b>0,0913</b>	<b>0,0034</b>	0,0411	45,2468	1,6252	0,9202
31	0,15	<b>0,1470</b>	0,0020	0,0451	0,1403	<b>0,0017</b>	<b>0,0407</b>	-4,4243	1,1685	1,1086
32	0,15	0,1860	0,0028	<b>0,0391</b>	<b>0,1686</b>	<b>0,0021</b>	0,0419	11,5631	1,3407	0,9323
33	0,05	<b>0,0501</b>	0,0006	0,0241	0,0493	<b>0,0005</b>	<b>0,0232</b>	-1,2054	1,0790	1,0392
34	0,05	0,0646	0,0012	0,0311	<b>0,0515</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0250</b>	26,1954	1,8724	1,2411
35	0,15	0,1452	<b>0,0013</b>	<b>0,0350</b>	<b>0,1477</b>	0,0013	0,0357	1,6432	0,9766	0,9812
36	0,15	0,1568	0,0015	0,0386	<b>0,1493</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0362</b>	4,0414	1,1711	1,0661
37	0,05	<b>0,0506</b>	0,0018	0,0421	0,0483	<b>0,0015</b>	<b>0,0390</b>	-2,2239	1,1598	1,0778
38	0,05	0,0915	0,0065	0,0694	<b>0,0541</b>	<b>0,0022</b>	<b>0,0471</b>	74,6920	2,9266	1,4739
39	0,15	<b>0,1453</b>	0,0042	0,0643	0,1451	<b>0,0036</b>	<b>0,0599</b>	-0,1561	1,1486	1,0725
40	0,15	0,1778	0,0059	0,0715	<b>0,1491</b>	<b>0,0039</b>	<b>0,0623</b>	17,9307	1,5186	1,1489
41	0,05	0,0503	0,0002	0,0136	<b>0,0498</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0132</b>	0,1409	1,0653	1,0321
42	0,05	0,0647	0,0005	0,0176	<b>0,0522</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0145</b>	24,9366	2,4566	1,2170
43	0,15	0,1454	0,0004	<b>0,0200</b>	<b>0,1488</b>	<b>0,0004</b>	0,0203	2,2272	1,0260	0,9894
44	0,15	0,1567	0,0005	0,0214	<b>0,1503</b>	<b>0,0004</b>	<b>0,0204</b>	4,2675	1,2078	1,0486
45	0,05	0,0505	0,0005	0,0221	<b>0,0498</b>	<b>0,0005</b>	<b>0,0214</b>	0,6735	1,0658	1,0321
46	0,05	0,0907	0,0030	0,0369	<b>0,0558</b>	<b>0,0007</b>	<b>0,0263</b>	69,7408	4,1523	1,4022
47	0,15	0,1450	0,0012	0,0342	<b>0,1475</b>	<b>0,0011</b>	<b>0,0326</b>	1,6889	1,1211	1,0507
48	0,15	0,1772	0,0022	0,0382	<b>0,1526</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0339</b>	16,4335	1,9039	1,1269

Casos favoráveis ao método de maioria simples sequencial (%): 85,4167 85,4167 56,2500

**Tabela 2.5.** Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de  $\pi_1^0$  estimados pelos métodos de MS e MSS.

id	$\pi_1^0$	MS			MSS			DVAR	Razões	
		Média	EQM	DP	Média	EQM	DP		EQM	DP
1	0,05	0,0462	<b>0,0004</b>	<b>0,0349</b>	<b>0,0486</b>	0,0004	0,0195	4,8424	0,9774	0,9719
2	0,15	0,1162	0,0019	<b>0,0395</b>	<b>0,1307</b>	<b>0,0011</b>	0,0270	9,6483	1,6900	0,9932
3	0,05	<b>0,0510</b>	<b>0,0004</b>	<b>0,0479</b>	0,0519	0,0004	0,0202	-1,7113	0,9355	0,9701
4	0,15	0,1196	0,0016	<b>0,0459</b>	<b>0,1330</b>	<b>0,0010</b>	0,0271	8,8908	1,6065	0,9916
5	0,05	0,0457	<b>0,0003</b>	<b>0,0639</b>	<b>0,0486</b>	0,0003	0,0177	5,9303	0,9919	0,9686
6	0,15	0,1153	0,0018	<b>0,0635</b>	<b>0,1310</b>	<b>0,0010</b>	0,0247	10,4039	1,8520	0,9914
7	0,05	0,0473	<b>0,0003</b>	<b>0,0815</b>	<b>0,0500</b>	0,0003	0,0180	5,2525	0,9658	0,9715
8	0,15	0,1168	0,0017	0,0244	<b>0,1315</b>	<b>0,0009</b>	<b>0,0244</b>	9,7847	1,8127	1,0023
9	0,05	0,0462	0,0001	<b>0,0196</b>	<b>0,0489</b>	<b>0,0001</b>	0,0113	5,4903	1,0510	0,9723
10	0,15	0,1160	0,0014	<b>0,0225</b>	<b>0,1313</b>	<b>0,0006</b>	0,0156	10,2153	2,3477	0,9834
11	0,05	<b>0,0508</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0271</b>	0,0521	0,0001	0,0116	-2,6462	0,9221	0,9738
12	0,15	0,1195	0,0012	<b>0,0258</b>	<b>0,1333</b>	<b>0,0005</b>	0,0157	9,2158	2,2277	0,9802
13	0,05	0,0457	0,0001	<b>0,0337</b>	<b>0,0489</b>	<b>0,0001</b>	0,0102	6,3237	1,1080	0,9712
14	0,15	0,1154	0,0014	<b>0,0348</b>	<b>0,1313</b>	<b>0,0005</b>	0,0142	10,6286	2,5398	0,9908
15	0,05	0,0472	0,0001	<b>0,0433</b>	<b>0,0501</b>	<b>0,0001</b>	0,0104	5,3385	1,0054	0,9667
16	0,15	0,1168	0,0013	<b>0,0358</b>	<b>0,1321</b>	<b>0,0005</b>	0,0141	10,1887	2,5010	0,9998
17	0,05	0,0477	0,0003	<b>0,0346</b>	<b>0,0497</b>	<b>0,0003</b>	0,0172	4,0515	1,0061	0,9941
18	0,15	0,1373	0,0007	<b>0,0357</b>	<b>0,1412</b>	<b>0,0007</b>	0,0248	2,6252	1,0315	0,9474
19	0,05	0,0547	0,0004	0,0190	<b>0,0514</b>	<b>0,0003</b>	<b>0,0178</b>	6,5715	1,1995	1,0663
20	0,15	0,1393	<b>0,0007</b>	<b>0,0432</b>	<b>0,1425</b>	0,0007	0,0249	2,1454	0,9891	0,9454
21	0,05	0,0470	<b>0,0002</b>	<b>0,0702</b>	<b>0,0497</b>	0,0002	0,0157	5,3535	0,9841	0,9739
22	0,15	0,1369	0,0006	<b>0,0710</b>	<b>0,1412</b>	<b>0,0006</b>	0,0226	2,8852	1,0617	0,9410
23	0,05	0,0493	0,0003	0,0160	<b>0,0502</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0158</b>	0,9339	1,0216	1,0099
24	0,15	0,1379	0,0006	<b>0,0730</b>	<b>0,1418</b>	<b>0,0006</b>	0,0227	2,5662	1,0542	0,9540
25	0,05	0,0477	0,0001	<b>0,0196</b>	<b>0,0498</b>	<b>0,0001</b>	0,0100	4,2010	1,0106	0,9787
26	0,15	0,1372	0,0003	<b>0,0204</b>	<b>0,1418</b>	<b>0,0003</b>	0,0143	3,0475	1,2676	0,9427
27	0,05	0,0547	0,0001	0,0109	<b>0,0515</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0103</b>	6,2477	1,3152	1,0665
28	0,15	0,1394	0,0003	<b>0,0242</b>	<b>0,1431</b>	<b>0,0003</b>	0,0144	2,4276	1,1687	0,9486
29	0,05	0,0470	0,0001	<b>0,0373</b>	<b>0,0497</b>	<b>0,0001</b>	0,0090	5,4640	1,0722	0,9807
30	0,15	0,1372	0,0003	<b>0,0378</b>	<b>0,1417</b>	<b>0,0002</b>	0,0130	3,0409	1,3321	0,9465
31	0,05	0,0493	<b>0,0001</b>	<b>0,0451</b>	<b>0,0503</b>	0,0001	0,0092	0,6583	0,9860	0,9910
32	0,15	0,1379	0,0003	<b>0,0391</b>	<b>0,1422</b>	<b>0,0002</b>	0,0132	2,8289	1,2652	0,9339
33	0,05	0,0498	0,0002	0,0134	<b>0,0499</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0132</b>	0,1478	1,0348	1,0172
34	0,15	0,1454	0,0004	<b>0,0311</b>	<b>0,1489</b>	<b>0,0004</b>	0,0201	2,2779	1,0162	0,9839
35	0,05	0,0517	0,0002	0,0134	<b>0,0501</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0132</b>	3,0946	1,0400	1,0118
36	0,15	0,1465	0,0004	<b>0,0386</b>	<b>0,1490</b>	<b>0,0004</b>	0,0200	1,6543	1,0124	0,9924
37	0,05	<b>0,0499</b>	0,0001	0,0122	0,0499	<b>0,0001</b>	<b>0,0120</b>	-0,0337	1,0472	1,0234
38	0,15	0,1456	0,0003	<b>0,0694</b>	<b>0,1490</b>	<b>0,0003</b>	0,0184	2,2767	1,0047	0,9750
39	0,05	0,0504	0,0002	0,0125	<b>0,0499</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0120</b>	0,4657	1,0780	1,0379
40	0,15	0,1458	0,0003	<b>0,0715</b>	<b>0,1488</b>	<b>0,0003</b>	0,0183	1,9839	1,0309	0,9913
41	0,05	0,0499	0,0001	0,0078	<b>0,0499</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0076</b>	0,0678	1,0510	1,0251
42	0,15	0,1454	0,0002	<b>0,0176</b>	<b>0,1490</b>	<b>0,0001</b>	0,0115	2,3921	1,1212	0,9849
43	0,05	0,0516	0,0001	<b>0,0200</b>	<b>0,0502</b>	<b>0,0001</b>	0,0077	2,7701	1,0281	0,9930
44	0,15	0,1465	0,0001	<b>0,0214</b>	<b>0,1492</b>	<b>0,0001</b>	0,0116	1,8276	1,0592	0,9860
45	0,05	0,0499	0,0000	0,0070	<b>0,0499</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0069</b>	0,0391	1,0366	1,0181
46	0,15	0,1452	0,0001	<b>0,0369</b>	<b>0,1491</b>	<b>0,0001</b>	0,0106	2,5525	1,1725	0,9886
47	0,05	0,0505	0,0001	0,0071	<b>0,0500</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0069</b>	0,9371	1,0532	1,0240
48	0,15	0,1457	0,0001	<b>0,0382</b>	<b>0,1491</b>	<b>0,0001</b>	0,0105	2,2084	1,1301	0,9882

Casos favoráveis ao método de maioria simples sequencial (%): 93,7500 83,3333 22,9167

**Tabela 2.6.** Valores médios dos EQMs, viéses absolutos (VAs) e DPs, bem como porcentagens de casos favoráveis ao método de MSS (entre parênteses) em relação aos cenários descritos na Tabela 2.2.

Param	MS			MSS		
	VA	EQM	DP	VA	EQM	DP
$\theta$	0,0139	0,0024	0,0421	<b>0,0055</b> (89,5833)	<b>0,0020</b> (83,3333)	<b>0,0413</b> (81,2500)
$\pi_0^1$	0,0214	0,0030	0,0411	<b>0,0110</b> (85,4167)	<b>0,0022</b> (85,4167)	<b>0,0397</b> (56,2500)
$\pi_1^0$	0,0093	0,0005	<b>0,0151</b>	<b>0,0049</b> (93,7500)	<b>0,0003</b> (83,3333)	0,0154 (22,9167)

examinados, os valores selecionados para  $\rho$  e  $\Psi = (\theta, \pi_0^1, \pi_1^0)$  foram os mesmos usados no experimento de simulação descrito na subseção anterior. O estudo de simulação baseou-se na geração de amostras da distribuição (2.3), seguidas dos cálculos das estimativas dos parâmetros pelos métodos de maioria simples sequencial e de máxima verossimilhança. As estimativas de máxima verossimilhança foram obtidas via algoritmo EM, descrito na Seção 2.3.

Para cada escolha específica de  $\rho$  e  $\Psi$ , foram geradas 25.000 amostras e calculados a média, o desvio padrão (DP) e o erro quadrático médio (EQM) das estimativas produzidas. Uma amostra representativa dos resultados do experimento é apresentada nas Tabelas 2.7 - 2.11, que são as versões das Tabelas 2.2 - 2.6, da subseção acima, no contexto da avaliação de desempenho em consideração.

Em termos gerais, para os três parâmetros, os valores médios dos EQMs e DPs foram menores para o procedimento de maioria simples sequencial. Ademais, os EQMs das estimativas de MSS, para  $\theta$ ,  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$ , tiveram menor valor em cerca de 75%, 81% e 81% dos 48 cenários, respectivamente; e os DPs das estimativas de MSS, para  $\theta$ ,  $\pi_0^1$  e  $\pi_1^0$ , apresentaram menor valor em aproximadamente 85%, 87% e 91% dos cenários, respectivamente. Os valores de VAs das estimativas de MSS, para os três parâmetros, foram muito próximos dos correspondentes valores obtidos pelo procedimento de MV. Esses resultados sugerem que o método de maioria simples sequencial é também uma alternativa competitiva quando comparado ao método de máxima verossimilhança, posto que é computacionalmente mais simples (expressões fechadas) e exibiu melhor desempenho em termos de EQM e DP, nos casos analisados.

Vale observar que os EsMSS e os EsMS se comportam de modo semelhante em relação aos seus correspondentes estimadores de máxima verossimilhança.

Tabela 2.7. Cenários e realizações

id	$n$	Cenários				Realizações	
		$\rho$	$\theta$	$\pi_0^1$	$\pi_1^0$	MV	MSS
1	50	3	0,75	0,05	0,05	25000	24999
2	50	3	0,75	0,05	0,15	25000	25000
3	50	3	0,75	0,15	0,05	24999	25000
4	50	3	0,75	0,15	0,15	25000	25000
5	50	3	0,90	0,05	0,05	24998	24889
6	50	3	0,90	0,05	0,15	24995	24975
7	50	3	0,90	0,15	0,05	24998	24852
8	50	3	0,90	0,15	0,15	24990	24963
9	150	3	0,75	0,05	0,05	25000	25000
10	150	3	0,75	0,05	0,15	25000	25000
11	150	3	0,75	0,15	0,05	25000	25000
12	150	3	0,75	0,15	0,15	25000	25000
13	150	3	0,90	0,05	0,05	25000	25000
14	150	3	0,90	0,05	0,15	24997	25000
15	150	3	0,90	0,15	0,05	25000	25000
16	150	3	0,90	0,15	0,15	25000	25000
17	50	4	0,75	0,05	0,05	25000	24999
18	50	4	0,75	0,05	0,15	25000	25000
19	50	4	0,75	0,15	0,05	25000	25000
20	50	4	0,75	0,15	0,15	25000	25000
21	50	4	0,90	0,05	0,05	25000	24894
22	50	4	0,90	0,05	0,15	24999	24935
23	50	4	0,90	0,15	0,05	25000	24848
24	50	4	0,90	0,15	0,15	24999	24931
25	150	4	0,75	0,05	0,05	25000	25000
26	150	4	0,75	0,05	0,15	25000	25000
27	150	4	0,75	0,15	0,05	25000	25000
28	150	4	0,75	0,15	0,15	25000	25000
29	150	4	0,90	0,05	0,05	25000	25000
30	150	4	0,90	0,05	0,15	25000	25000
31	150	4	0,90	0,15	0,05	25000	25000
32	150	4	0,90	0,15	0,15	25000	25000
33	50	7	0,75	0,05	0,05	25000	25000
34	50	7	0,75	0,05	0,15	25000	25000
35	50	7	0,75	0,15	0,05	25000	25000
36	50	7	0,75	0,15	0,15	25000	25000
37	50	7	0,90	0,05	0,05	24994	24873
38	50	7	0,90	0,05	0,15	24996	24859
39	50	7	0,90	0,15	0,05	24991	24869
40	50	7	0,90	0,15	0,15	24993	24858
41	150	7	0,75	0,05	0,05	25000	25000
42	150	7	0,75	0,05	0,15	25000	25000
43	150	7	0,75	0,15	0,05	25000	25000
44	150	7	0,75	0,15	0,15	25000	25000
45	150	7	0,90	0,05	0,05	25000	25000
46	150	7	0,90	0,05	0,15	25000	25000
47	150	7	0,90	0,15	0,05	25000	25000
48	150	7	0,90	0,15	0,15	25000	25000

**Tabela 2.8.** Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de  $\theta$  estimados pelos métodos de MV e MSS.

id	$\theta$	MV			MSS			DVAR	Razões	
		Média	EQM	DP	Média	EQM	DP		EQM	DP
1	0,75	<b>0,7492</b>	0,0038	0,0617	0,7490	<b>0,0038</b>	<b>0,0616</b>	-0,0176	1,0036	1,0018
2	0,75	<b>0,7477</b>	<b>0,0041</b>	0,0638	0,7305	0,0043	<b>0,0624</b>	-2,2920	0,9511	1,0211
3	0,75	<b>0,7469</b>	0,0040	0,0635	0,7555	<b>0,0037</b>	<b>0,0609</b>	-0,3198	1,0814	1,0429
4	0,75	<b>0,7442</b>	0,0060	0,0771	0,7369	<b>0,0041</b>	<b>0,0624</b>	-0,9645	1,4743	1,2370
5	0,90	0,8973	0,0022	0,0465	<b>0,8985</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0423</b>	0,1313	1,2113	1,0995
6	0,90	<b>0,8871</b>	0,0045	0,0660	0,8760	<b>0,0027</b>	<b>0,0463</b>	-1,2240	1,6626	1,4246
7	0,90	0,8929	0,0027	0,0511	<b>0,9010</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0413</b>	0,6804	1,5590	1,2370
8	0,90	0,8699	0,0124	0,1070	<b>0,8785</b>	<b>0,0026</b>	<b>0,0459</b>	0,9604	4,8051	2,3296
9	0,75	<b>0,7499</b>	0,0013	0,0355	0,7494	<b>0,0013</b>	<b>0,0354</b>	-0,0694	1,0053	1,0028
10	0,75	<b>0,7496</b>	<b>0,0014</b>	0,0371	0,7304	0,0017	<b>0,0362</b>	-2,5704	0,8148	1,0273
11	0,75	<b>0,7485</b>	0,0013	0,0365	0,7552	<b>0,0013</b>	<b>0,0351</b>	-0,4934	1,0561	1,0379
12	0,75	<b>0,7493</b>	0,0017	0,0415	0,7371	<b>0,0015</b>	<b>0,0360</b>	-1,6245	1,1770	1,1524
13	0,90	<b>0,8997</b>	0,0006	0,0245	0,8990	<b>0,0006</b>	<b>0,0245</b>	-0,0757	1,0006	1,0010
14	0,90	<b>0,8981</b>	<b>0,0008</b>	0,0274	0,8763	0,0013	<b>0,0270</b>	-2,4266	0,5845	1,0161
15	0,90	<b>0,8986</b>	0,0007	0,0256	0,9017	<b>0,0006</b>	<b>0,0242</b>	-0,0324	1,1185	1,0586
16	0,90	<b>0,8951</b>	0,0016	0,0393	0,8786	<b>0,0011</b>	<b>0,0263</b>	-1,8246	1,3628	1,4913
17	0,75	0,7495	0,0037	0,0611	<b>0,7496</b>	<b>0,0037</b>	<b>0,0611</b>	0,0035	1,0005	1,0002
18	0,75	<b>0,7493</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0618</b>	0,7411	0,0039	0,0620	-1,0922	0,9754	0,9976
19	0,75	<b>0,7493</b>	0,0038	0,0617	0,7532	<b>0,0037</b>	<b>0,0610</b>	-0,3231	1,0216	1,0120
20	0,75	<b>0,7488</b>	0,0041	0,0644	0,7445	<b>0,0038</b>	<b>0,0615</b>	-0,5620	1,0899	1,0479
21	0,90	0,8986	0,0022	0,0464	<b>0,8994</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0419</b>	0,0863	1,2278	1,1077
22	0,90	<b>0,8952</b>	0,0025	0,0500	0,8887	<b>0,0021</b>	<b>0,0441</b>	-0,7289	1,2134	1,1321
23	0,90	0,8968	0,0022	0,0471	<b>0,9002</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0416</b>	0,3394	1,2876	1,1321
24	0,90	0,8899	0,0042	0,0636	<b>0,8902</b>	<b>0,0020</b>	<b>0,0435</b>	0,0284	2,0916	1,4644
25	0,75	<b>0,7498</b>	0,0013	0,0357	0,7497	<b>0,0013</b>	<b>0,0356</b>	-0,0099	1,0005	1,0002
26	0,75	<b>0,7497</b>	<b>0,0013</b>	0,0358	0,7409	0,0014	<b>0,0358</b>	-1,1793	0,9413	1,0013
27	0,75	<b>0,7497</b>	0,0012	0,0352	0,7528	<b>0,0012</b>	<b>0,0348</b>	-0,3271	1,0170	1,0117
28	0,75	<b>0,7501</b>	0,0014	0,0370	0,7444	<b>0,0013</b>	<b>0,0356</b>	-0,7456	1,0543	1,0396
29	0,90	<b>0,8999</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0246</b>	0,8998	0,0006	0,0246	-0,0091	0,9991	0,9996
30	0,90	<b>0,8993</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0251</b>	0,8892	0,0008	0,0257	-1,1193	0,8104	0,9763
31	0,90	<b>0,8994</b>	0,0006	0,0247	0,9009	<b>0,0006</b>	<b>0,0244</b>	-0,0329	1,0277	1,0141
32	0,90	<b>0,8986</b>	<b>0,0007</b>	0,0271	0,8904	0,0008	<b>0,0258</b>	-0,9174	0,9767	1,0537
33	0,75	0,7492	0,0037	0,0612	<b>0,7493</b>	<b>0,0037</b>	<b>0,0612</b>	0,0003	1,0000	1,0000
34	0,75	<b>0,7496</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0617</b>	0,7488	0,0038	0,0618	-0,1050	0,9961	0,9982
35	0,75	<b>0,7500</b>	0,0038	0,0613	0,7504	<b>0,0038</b>	<b>0,0613</b>	-0,0517	1,0017	1,0009
36	0,75	<b>0,7497</b>	0,0037	0,0612	0,7494	<b>0,0037</b>	<b>0,0611</b>	-0,0438	1,0035	1,0018
37	0,90	0,8991	0,0023	0,0482	<b>0,8998</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0418</b>	0,0829	1,3317	1,1538
38	0,90	<b>0,8986</b>	0,0023	0,0482	0,8983	<b>0,0018</b>	<b>0,0419</b>	-0,0311	1,3214	1,1500
39	0,90	0,8996	0,0020	0,0448	<b>0,9000</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0419</b>	0,0401	1,1477	1,0713
40	0,90	0,8981	0,0024	0,0491	<b>0,8988</b>	<b>0,0018</b>	<b>0,0422</b>	0,0763	1,3518	1,1623
41	0,75	<b>0,7499</b>	0,0013	0,0357	0,7499	<b>0,0013</b>	<b>0,0357</b>	0,0000	1,0000	1,0000
42	0,75	<b>0,7503</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0352</b>	0,7494	0,0012	0,0352	-0,0481	0,9971	0,9987
43	0,75	<b>0,7499</b>	0,0013	0,0355	0,7502	<b>0,0013</b>	<b>0,0354</b>	-0,0125	1,0015	1,0008
44	0,75	<b>0,7498</b>	0,0013	0,0356	0,7492	<b>0,0013</b>	<b>0,0355</b>	-0,0736	1,0034	1,0019
45	0,90	0,8996	<b>0,0006</b>	<b>0,0246</b>	<b>0,8996</b>	0,0006	0,0246	0,0002	1,0000	1,0000
46	0,90	<b>0,8999</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0245</b>	0,8988	0,0006	0,0246	-0,1152	0,9907	0,9964
47	0,90	0,8998	0,0006	0,0246	<b>0,8999</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0246</b>	0,0187	1,0014	1,0007
48	0,90	<b>0,8999</b>	0,0006	0,0246	0,8991	<b>0,0006</b>	<b>0,0246</b>	-0,0887	1,0006	1,0009
Casos favoráveis ao método de maioria simples sequencial (%):								27,0833	75,0000	85,4167

**Tabela 2.9.** Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de  $\pi_0^1$  estimados pelos métodos de MV e MSS.

id	$\pi_0^1$	MV			MSS			DVAR	Razões	
		Média	EQM	DP	Média	EQM	DP		EQM	DP
1	0,05	<b>0,0504</b>	0,0016	0,0395	0,0492	<b>0,0012</b>	<b>0,0347</b>	-0,6751	1,2970	1,1391
2	0,05	<b>0,0536</b>	<b>0,0023</b>	0,0483	0,0749	0,0024	<b>0,0425</b>	-42,5522	0,9680	1,1374
3	0,15	<b>0,1514</b>	0,0050	0,0705	0,1297	<b>0,0027</b>	<b>0,0480</b>	-12,5878	1,8290	1,4681
4	0,15	<b>0,1519</b>	0,0080	0,0895	0,1475	<b>0,0023</b>	<b>0,0475</b>	-0,4581	3,5440	1,8849
5	0,05	0,0591	0,0094	0,0967	<b>0,0491</b>	<b>0,0033</b>	<b>0,0574</b>	16,3866	2,8609	1,6843
6	0,05	<b>0,0799</b>	0,0154	0,1203	0,1112	<b>0,0094</b>	<b>0,0755</b>	-62,4794	1,6289	1,5942
7	0,15	<b>0,1641</b>	0,0202	0,1413	0,1265	<b>0,0069</b>	<b>0,0799</b>	-6,2665	2,9110	1,7696
8	0,15	0,1807	0,0324	0,1774	<b>0,1697</b>	<b>0,0063</b>	<b>0,0769</b>	7,3403	5,1449	2,3070
9	0,05	0,0499	0,0005	0,0216	<b>0,0500</b>	<b>0,0004</b>	<b>0,0199</b>	0,1557	1,1794	1,0860
10	0,05	<b>0,0505</b>	<b>0,0007</b>	0,0268	0,0759	0,0013	<b>0,0241</b>	-50,8416	0,5738	1,1109
11	0,15	<b>0,1502</b>	0,0015	0,0388	0,1313	<b>0,0011</b>	<b>0,0271</b>	-12,3254	1,3913	1,4332
12	0,15	<b>0,1495</b>	0,0023	0,0478	0,1485	<b>0,0007</b>	<b>0,0271</b>	-0,7214	3,0935	1,7615
13	0,05	<b>0,0505</b>	0,0013	0,0365	0,0519	<b>0,0011</b>	<b>0,0328</b>	-2,9374	1,2379	1,1145
14	0,05	<b>0,0551</b>	<b>0,0027</b>	0,0517	0,1155	0,0061	<b>0,0424</b>	-120,8015	0,4443	1,2210
15	0,15	<b>0,1531</b>	0,0047	0,0682	0,1320	<b>0,0023</b>	<b>0,0442</b>	-9,9871	2,0445	1,5429
16	0,15	<b>0,1538</b>	0,0088	0,0935	0,1750	<b>0,0023</b>	<b>0,0412</b>	-14,1992	3,7717	2,2717
17	0,05	<b>0,0495</b>	0,0010	0,0321	0,0492	<b>0,0009</b>	<b>0,0306</b>	-0,7175	1,1046	1,0513
18	0,05	<b>0,0507</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0358</b>	0,0645	0,0016	0,0377	-27,7352	0,7872	0,9507
19	0,15	<b>0,1495</b>	0,0029	0,0535	0,1401	<b>0,0021</b>	<b>0,0443</b>	-6,2374	1,3884	1,2073
20	0,15	0,1493	0,0039	0,0624	<b>0,1498</b>	<b>0,0021</b>	<b>0,0453</b>	0,3515	1,8964	1,3770
21	0,05	0,0537	0,0064	0,0798	<b>0,0481</b>	<b>0,0025</b>	<b>0,0500</b>	3,6092	2,5451	1,5948
22	0,05	<b>0,0624</b>	0,0081	0,0891	0,0869	<b>0,0066</b>	<b>0,0724</b>	-48,9804	1,2251	1,2304
23	0,15	<b>0,1554</b>	0,0127	0,1125	0,1364	<b>0,0056</b>	<b>0,0739</b>	-5,4642	2,2483	1,5230
24	0,15	<b>0,1620</b>	0,0167	0,1286	0,1625	<b>0,0060</b>	<b>0,0766</b>	-0,3480	2,7690	1,6788
25	0,05	0,0497	0,0003	0,0178	<b>0,0498</b>	<b>0,0003</b>	<b>0,0175</b>	0,0547	1,0354	1,0175
26	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0004</b>	<b>0,0201</b>	0,0654	0,0007	0,0219	-30,6402	0,5657	0,9191
27	0,15	<b>0,1497</b>	0,0009	0,0297	0,1414	<b>0,0007</b>	<b>0,0251</b>	-5,4942	1,2512	1,1821
28	0,15	<b>0,1493</b>	0,0011	0,0336	0,1514	<b>0,0007</b>	<b>0,0256</b>	-0,4812	1,7250	1,3151
29	0,05	0,0495	0,0008	0,0289	<b>0,0497</b>	<b>0,0008</b>	<b>0,0281</b>	0,3297	1,0538	1,0265
30	0,05	<b>0,0515</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0353</b>	0,0913	0,0034	0,0411	-79,4916	0,3687	0,8600
31	0,15	<b>0,1499</b>	0,0025	0,0499	0,1403	<b>0,0017</b>	<b>0,0407</b>	-6,3542	1,4238	1,2265
32	0,15	<b>0,1511</b>	0,0039	0,0623	0,1686	<b>0,0021</b>	<b>0,0419</b>	-11,6714	1,8434	1,4856
33	0,05	<b>0,0493</b>	0,0005	0,0232	0,0493	<b>0,0005</b>	<b>0,0232</b>	-0,0124	1,0014	1,0007
34	0,05	<b>0,0497</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0235</b>	0,0515	0,0006	0,0250	-2,2411	0,8805	0,9399
35	0,15	<b>0,1486</b>	0,0013	0,0366	0,1477	<b>0,0013</b>	<b>0,0357</b>	-0,6025	1,0483	1,0252
36	0,15	0,1491	0,0015	0,0382	<b>0,1493</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0362</b>	0,1196	1,1128	1,0548
37	0,05	0,0526	0,0053	0,0725	<b>0,0483</b>	<b>0,0015</b>	<b>0,0390</b>	1,9231	3,4439	1,8562
38	0,05	0,0544	0,0052	0,0719	<b>0,0541</b>	<b>0,0022</b>	<b>0,0471</b>	0,6332	2,3257	1,5280
39	0,15	<b>0,1505</b>	0,0069	0,0828	0,1451	<b>0,0036</b>	<b>0,0599</b>	-2,9490	1,8965	1,3817
40	0,15	0,1534	0,0073	0,0854	<b>0,1491</b>	<b>0,0039</b>	<b>0,0623</b>	1,6540	1,8829	1,3713
41	0,05	0,0498	0,0002	0,0132	<b>0,0498</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0132</b>	0,0000	1,0006	1,0003
42	0,05	<b>0,0501</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0134</b>	0,0522	0,0002	0,0145	-4,3664	0,8396	0,9271
43	0,15	<b>0,1496</b>	0,0004	0,0207	0,1488	<b>0,0004</b>	<b>0,0203</b>	-0,5386	1,0416	1,0223
44	0,15	<b>0,1498</b>	0,0004	0,0212	0,1503	<b>0,0004</b>	<b>0,0204</b>	-0,0584	1,0771	1,0379
45	0,05	<b>0,0498</b>	0,0005	0,0214	0,0498	<b>0,0005</b>	<b>0,0214</b>	-0,0223	1,0028	1,0014
46	0,05	<b>0,0498</b>	<b>0,0005</b>	<b>0,0219</b>	0,0558	0,0007	0,0263	-11,1544	0,6601	0,8320
47	0,15	<b>0,1485</b>	0,0011	0,0335	0,1475	<b>0,0011</b>	<b>0,0326</b>	-0,6692	1,0533	1,0283
48	0,15	<b>0,1498</b>	0,0013	0,0354	0,1526	<b>0,0012</b>	<b>0,0339</b>	-1,5632	1,0860	1,0451
Casos favoráveis ao método de maioria simples sequencial (%):								25,0000	81,2500	87,5000



**Tabela 2.10.** Média, erro quadrático médio (EQM) e desvio padrão(DP) dos valores de  $\pi_1^0$  estimados pelos métodos de MV e MSS.

id	$\pi_1^0$	MV			MSS			DVAR	Razões	
		Média	EQM	DP	Média	EQM	DP		EQM	DP
1	0,05	<b>0,0493</b>	0,0004	0,0209	0,0486	<b>0,0004</b>	<b>0,0195</b>	-1,2688	1,1410	1,0701
2	0,15	<b>0,1468</b>	0,0013	0,0358	0,1307	<b>0,0011</b>	<b>0,0270</b>	-10,7554	1,1729	1,3270
3	0,05	<b>0,0485</b>	0,0005	0,0226	0,0519	<b>0,0004</b>	<b>0,0202</b>	-0,7126	1,2429	1,1172
4	0,15	<b>0,1468</b>	0,0018	0,0428	0,1330	<b>0,0010</b>	<b>0,0271</b>	-9,1920	1,8014	1,5814
5	0,05	0,0486	0,0004	0,0188	<b>0,0486</b>	<b>0,0003</b>	<b>0,0177</b>	0,0484	1,1237	1,0603
6	0,15	<b>0,1431</b>	0,0012	0,0345	0,1310	<b>0,0010</b>	<b>0,0247</b>	-8,0681	1,2717	1,3967
7	0,05	0,0477	0,0004	0,0203	<b>0,0500</b>	<b>0,0003</b>	<b>0,0180</b>	4,4398	1,2920	1,1297
8	0,15	<b>0,1396</b>	0,0019	0,0422	0,1315	<b>0,0009</b>	<b>0,0244</b>	-5,4380	2,0142	1,7313
9	0,05	<b>0,0498</b>	0,0001	0,0120	0,0489	<b>0,0001</b>	<b>0,0113</b>	-1,7430	1,1268	1,0662
10	0,15	<b>0,1493</b>	<b>0,0004</b>	0,0209	0,1313	0,0006	<b>0,0156</b>	-11,9711	0,7362	1,3377
11	0,05	<b>0,0494</b>	0,0002	0,0129	0,0521	<b>0,0001</b>	<b>0,0116</b>	-3,1466	1,1808	1,1037
12	0,15	<b>0,1492</b>	0,0006	0,0235	0,1333	<b>0,0005</b>	<b>0,0157</b>	-10,5840	1,0584	1,5017
13	0,05	<b>0,0497</b>	0,0001	0,0107	0,0489	<b>0,0001</b>	<b>0,0102</b>	-1,6419	1,1004	1,0551
14	0,15	<b>0,1484</b>	<b>0,0003</b>	0,0186	0,1313	0,0005	<b>0,0142</b>	-11,3978	0,6315	1,3107
15	0,05	0,0495	0,0001	0,0114	<b>0,0501</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0104</b>	0,8812	1,2071	1,0975
16	0,15	<b>0,1482</b>	<b>0,0005</b>	0,0216	0,1321	0,0005	<b>0,0141</b>	-10,7484	0,9014	1,5304
17	0,05	<b>0,0497</b>	0,0003	0,0175	0,0497	<b>0,0003</b>	<b>0,0172</b>	-0,0850	1,0291	1,0145
18	0,15	<b>0,1484</b>	0,0008	0,0282	0,1412	<b>0,0007</b>	<b>0,0248</b>	-4,7884	1,1576	1,1397
19	0,05	<b>0,0493</b>	0,0003	0,0182	0,0514	<b>0,0003</b>	<b>0,0178</b>	-1,4879	1,0329	1,0189
20	0,15	<b>0,1485</b>	0,0010	0,0310	0,1425	<b>0,0007</b>	<b>0,0249</b>	-3,9875	1,4233	1,2443
21	0,05	0,0495	0,0003	0,0160	<b>0,0497</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0157</b>	0,3490	1,0338	1,0165
22	0,15	<b>0,1468</b>	0,0007	0,0262	0,1412	<b>0,0006</b>	<b>0,0226</b>	-3,7402	1,1855	1,1597
23	0,05	0,0489	0,0003	0,0163	<b>0,0502</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0158</b>	1,8160	1,0658	1,0300
24	0,15	<b>0,1458</b>	0,0009	0,0297	0,1418	<b>0,0006</b>	<b>0,0227</b>	-2,6867	1,5331	1,3038
25	0,05	<b>0,0499</b>	0,0001	0,0102	0,0498	<b>0,0001</b>	<b>0,0100</b>	-0,2504	1,0276	1,0139
26	0,15	<b>0,1496</b>	<b>0,0003</b>	0,0164	0,1418	0,0003	<b>0,0143</b>	-5,2021	0,9904	1,1461
27	0,05	<b>0,0497</b>	0,0001	0,0104	0,0515	<b>0,0001</b>	<b>0,0103</b>	-2,5522	1,0060	1,0140
28	0,15	<b>0,1497</b>	0,0003	0,0176	0,1431	<b>0,0003</b>	<b>0,0144</b>	-4,4409	1,2160	1,2239
29	0,05	<b>0,0498</b>	0,0001	0,0091	0,0497	<b>0,0001</b>	<b>0,0090</b>	-0,2091	1,0206	1,0106
30	0,15	<b>0,1492</b>	<b>0,0002</b>	0,0147	0,1417	0,0002	<b>0,0130</b>	-4,9553	0,9152	1,1322
31	0,05	0,0497	0,0001	0,0094	<b>0,0503</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0092</b>	0,0099	1,0424	1,0210
32	0,15	<b>0,1492</b>	0,0003	0,0159	0,1422	<b>0,0002</b>	<b>0,0132</b>	-4,6701	1,0831	1,2093
33	0,05	0,0499	<b>0,0002</b>	<b>0,0232</b>	<b>0,0499</b>	0,0002	0,0132	0,0032	0,9998	0,9999
34	0,15	<b>0,1495</b>	0,0004	0,0204	0,1489	<b>0,0004</b>	<b>0,0201</b>	-0,4346	1,0313	1,0169
35	0,05	<b>0,0499</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0366</b>	0,0501	0,0002	0,0132	-0,0065	0,9853	0,9926
36	0,15	<b>0,1495</b>	0,0004	0,0207	0,1490	<b>0,0004</b>	<b>0,0200</b>	-0,2934	1,0650	1,0329
37	0,05	0,0498	0,0001	0,0121	<b>0,0499</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0120</b>	0,1950	1,0274	1,0135
38	0,15	<b>0,1494</b>	0,0004	0,0192	0,1490	<b>0,0003</b>	<b>0,0184</b>	-0,2504	1,0836	1,0419
39	0,05	0,0497	0,0001	0,0121	<b>0,0499</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0120</b>	0,4125	1,0105	1,0049
40	0,15	<b>0,1488</b>	0,0004	0,0193	0,1488	<b>0,0003</b>	<b>0,0183</b>	-0,0290	1,1163	1,0569
41	0,05	<b>0,0499</b>	0,0001	0,0076	0,0499	<b>0,0001</b>	<b>0,0076</b>	-0,0008	1,0001	1,0000
42	0,15	<b>0,1497</b>	0,0001	0,0117	0,1490	<b>0,0001</b>	<b>0,0115</b>	-0,5131	1,0252	1,0163
43	0,05	<b>0,0499</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0207</b>	0,0502	0,0001	0,0077	-0,2750	0,9853	0,9929
44	0,15	<b>0,1498</b>	0,0001	0,0120	0,1492	<b>0,0001</b>	<b>0,0116</b>	-0,3863	1,0538	1,0287
45	0,05	0,0499	0,0000	0,0069	<b>0,0499</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0069</b>	0,0020	1,0000	1,0000
46	0,15	<b>0,1498</b>	0,0001	0,0107	0,1491	<b>0,0001</b>	<b>0,0106</b>	-0,4815	1,0285	1,0180
47	0,05	0,0499	<b>0,0000</b>	<b>0,0335</b>	<b>0,0500</b>	0,0000	0,0069	0,2136	0,9961	0,9979
48	0,15	<b>0,1497</b>	0,0001	0,0108	0,1491	<b>0,0001</b>	<b>0,0105</b>	-0,4114	1,0450	1,0259
Casos favoráveis ao método de maioria simples sequencial (%):								22,9167	81,2500	91,6667

**Tabela 2.11.** Valores médios dos EQMs, viéses absolutos (VAs) e DPs, bem como porcentagens de casos favoráveis ao procedimento de MSS (entre parênteses) em relação aos cenários descritos na Tabela 2.7.

Param	MV			MSS		
	VA	EQM	DP	VA	EQM	DP
$\theta$	<b>0,0023</b>	0,0024	0,0454	0,0055 (27,0833)	<b>0,0020</b> (75,0000)	<b>0,0413</b> (85,4167)
$\pi_0^1$	<b>0,0034</b>	0,0045	0,0553	0,0110 (25,0000)	<b>0,0022</b> (81,2500)	<b>0,0397</b> (87,5000)
$\pi_1^0$	<b>0,0012</b>	0,0004	0,0179	0,0049 (22,9167)	<b>0,0003</b> (81,2500)	<b>0,0154</b> (91,6667)

**Tabela 2.12.** Valores médios dos EQMs, viéses absolutos (VAs) e DPs relativos aos cenários descritos na Tabela 2.2.

	MV <sub>I</sub>			MS			MV <sub>II</sub>			MSS		
	VA	EQM	DP	VA	EQM	DP	VA	EQM	DP	VA	EQM	DP
$\theta$	0,0049	0,0032	0,0509	0,0139	0,0024	0,0421	<b>0,0023</b>	0,0024	0,0454	0,0055	<b>0,0020</b>	<b>0,0413</b>
$\pi_0^1$	0,0070	0,0066	0,0655	0,0214	0,0030	0,0411	<b>0,0034</b>	0,0045	0,0553	0,0110	<b>0,0022</b>	<b>0,0397</b>
$\pi_1^0$	0,0017	0,0005	0,0198	0,0093	0,0005	<b>0,0151</b>	<b>0,0012</b>	0,0004	0,0179	0,0049	<b>0,0003</b>	0,0154

## 2.5 Conclusões

Neste capítulo desenvolvemos a proposta de estimadores de maioria simples sequencial para a estimação das probabilidades dos erros de classificação de SsMD. Diferentemente da abordagem de maioria simples, apresentada no Capítulo 1, o procedimento que propusemos não requer um número fixo de medições repetidas para a definição da classificação final de cada unidade experimental. Demonstramos que os EsMMS são assintoticamente consistentes e não-enviesados. Detalhamos também implementação do algoritmo EM para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros de interesse.

Comparamos o desempenho dos EsMSS relativamente aos EsMS e ao tradicional método de máxima verossimilhança. Para melhor situar o método de maioria simples sequencial (MSS) em relação aos demais procedimentos considerados até aqui, denotamos o estimador de máxima verossimilhança referente à função de probabilidade (1.1) por MV<sub>I</sub>, e o estimador de máxima verossimilhança concernente à função de probabilidade (2.3) por MV<sub>II</sub>. Adicionalmente, usamos as amostras utilizadas no experimento de simulação descrito na Subseção 2.4.1 para gerar estimativas de MV<sub>I</sub>. Os resultados, juntamente com os resultados já sumarizados nas Tabelas 2.6 e 2.11, são apresentados na Tabela 2.12.

Em termos de valores médios, o método de MSS é o procedimento que oferece

menor EQM, para todos os parâmetros. Além disso, esse método gerou DP (médio) menor ou muito similar às demais abordagens. Esse resultado, aliado à simplicidade computacional do procedimento, corrobora a indicação do método de MSS para análise de sistemas de medição com respostas dicotômicos, se o critério de precisão é EQM e DP. Por outro lado, se a medida de interesse é viés absoluto, o método de  $MV_{II}$  é uma escolha mais adequada.

O experimento de simulação sugere que as indeterminações descritas no início da Seção 2.4 podem ser evitadas, nos quatro métodos, tomando-se amostras cujo conjunto de resultados de classificações finais contém pelo menos um valor de cada categoria.



## Capítulo 3

# Estimadores de maioria simples para análise de sistemas de medição com respostas tricotômicas

Neste capítulo, desenvolvemos uma extensão dos resultados discutidos no Capítulo 1. Isto é, adaptamos o método de maioria simples, proposto por Quinino et al. [2013], para a estimação das probabilidades associadas aos diversos tipos de erros de classificação a que estão sujeitos sistemas de medição com respostas nominais tricotômicas (SsMT).

### 3.1 Estimadores de maioria simples

Nesta seção, descrevemos os estimadores de maioria simples (EsMS), no contexto tricotômico.

Consideremos uma amostra aleatória de  $n$  objetos na qual cada elemento é julgado repetidamente,  $r$  vezes, por um mesmo avaliador, que classifica itens atribuindo-lhes um de três valores nominais distintos. Os dados observados são denotados por  $X_{ij}$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, r$  indexando os objetos e julgamentos repetidos, respectivamente. Cada variável  $X_{ij}$  assume o valor 0, 1 ou 2.

Admitimos que o verdadeiro estado de qualidade dos objetos, denotado por  $Y_i$ , que é também 0, 1 ou 2, não pode ser observado. Quando um “padrão ouro” não está disponível, modelos estatísticos com variáveis latentes são geralmente empregados. De acordo com Boyles [2001], Hui & Zhou [1998], Van Wieringen & De Mast [2008] e

outros, esta abordagem de modelagem é amplamente utilizada em medicina, psicologia e indústria. Para análise de classe latente, supomos que classificações de itens diferentes são independentes e que medições repetidas não afetam o estado verdadeiro dos objetos, isto é, o sistema de medição é não-destrutivo. Além disso, assumimos que, condicionadas a  $Y_i$ , as variáveis  $X_{ij}$ 's são independentes, isto é,

$$P(X_{i1} = x_1, \dots, X_{ir} = x_r \mid Y_i = y) = \prod_{j=1}^r P(X_{ij} = x_j \mid Y_i = y).$$

Seguindo o raciocínio aplicado por Van Wieringen & De Mast [2008], a variável latente  $Y_i$  é usada para explicar a estrutura de correlação das variáveis manifestas  $X_{ij}$ 's (i.e. os vários resultados de classificação do mesmo objeto estão correlacionados) e, como  $Y_i$  é tricotômica, a hipótese de independência condicional presume que a população de objetos pode ser dividida em três subpopulações (“0”, “1” e “2”) homogêneas, no sentido de que a distribuição de  $X_{ij}$  depende somente de  $Y_i$  e de nenhuma outra característica do  $i$ -ésimo objeto.

Como mencionado anteriormente, as variáveis  $X_{ij}$ 's dependem de  $Y_i$ . Assim, definimos

$$\pi_y^x = P(X_{ij} = x \mid Y_i = y), \text{ com } x, y = 0, 1, 2.$$

Portanto,  $\pi_0^1, \pi_0^2, \pi_1^0, \pi_1^2, \pi_2^0$  e  $\pi_2^1$  são as probabilidades associadas aos tipos possíveis de erros de classificação. Para completar o conjunto de parâmetros, seja  $\theta_k$  a proporção de unidades da população pertencentes à categoria “ $k$ ”, isto é,

$$\theta_k = P(Y_i = k), \quad k = 0, 1, 2.$$

Em síntese,

$$\Psi = (\theta_1, \theta_2, \pi_0^1, \pi_0^2, \pi_1^0, \pi_1^2, \pi_2^0, \pi_2^1) \quad (3.1)$$

é o vetor de parâmetros do modelo ( $\theta_0 = 1 - \theta_1 - \theta_2$ ,  $\pi_0^0 = 1 - \pi_0^1 - \pi_0^2$ ,  $\pi_1^1 = 1 - \pi_1^0 - \pi_1^2$  e  $\pi_2^2 = 1 - \pi_2^0 - \pi_2^1$ ).

Para assegurar a identificabilidade do modelo, condições adicionais devem ser impostas. Assim, para completar as hipóteses do modelo, incluímos as seguintes restrições:

$$0 < \theta_0, \theta_1, \theta_2 < 1, \quad 0 < \pi_2^0 < \pi_1^0, \quad 0 < \pi_2^1 < \pi_0^1, \quad 0 < \pi_0^2 < \pi_1^2, \quad (3.2)$$

$$\pi_0^1 + \pi_0^2 < 1/2, \pi_1^0 + \pi_1^2 < 1/2, \pi_2^0 + \pi_2^1 < 1/2 \quad (3.3)$$

e

$$r \geq 5. \quad (3.4)$$

A prova de que essas condições garantem identificabilidade é dada posteriormente. A condição (3.2) (juntamente com (3.3)) define o espaço paramétrico. Esclarecemos que a ordem especificada em (3.2) pode ser diferentemente convencionalizada. O requerimento essencial é a possibilidade de um ordenamento fixo, definido por desigualdades estritas, para cada um dos pares  $(\pi_2^0, \pi_1^0)$ ,  $(\pi_2^1, \pi_0^1)$  e  $(\pi_0^2, \pi_1^2)$ .

A restrição (3.2) pode ser interpretada em termos práticos. Por exemplo, consideremos a situação em que peças manufaturadas são classificadas como *não-conforme irreparável* (“0”), *não-conforme reparável* (“1”) ou *conforme* (“2”). A condição (3.2) estabelece, em particular, que é menos provável que um item conforme seja incorretamente classificado como não-conforme irreparável do que uma unidade não-conforme reparável seja erroneamente classificada como não-conforme irreparável, o que está de acordo com as expectativas para tal circunstância. Significados similares podem ser conferidos às outras desigualdades em (3.2). Portanto, de uma perspectiva prática, esta abordagem é adequada para a análise de SsMT para os quais é plausível assumir que  $\pi_2^0 \neq \pi_1^0$ ,  $\pi_2^1 \neq \pi_0^1$  e  $\pi_0^2 \neq \pi_1^2$ .

Notemos também que, para um SMT útil, é razoável supor que  $\pi_0^0$ ,  $\pi_1^1$  e  $\pi_2^2$  são maiores que 1/2, o que é equivalente a admitir (3.3).

Se  $\mathbf{W}_i = (W_0^i, W_1^i, W_2^i)$ , com  $W_k^i$  denotando o número de ocorrências do resultado “ $k$ ”, então o vetor aleatório  $\mathbf{W}_i | Y_i = y$ , com  $y = 0, 1$  ou  $2$ , tem distribuição multinomial com número de ensaios  $r$  e vetor de probabilidades dado pela  $(y+1)$ -ésima linha da matriz

$$\Pi = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc} 1 - \pi_0^1 - \pi_0^2 & \pi_0^1 & \pi_0^2 \\ \pi_1^0 & 1 - \pi_1^0 - \pi_1^2 & \pi_1^2 \\ \pi_2^0 & \pi_2^1 & 1 - \pi_2^0 - \pi_2^1 \end{array} \right]. \end{matrix}$$

Assim, como

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}) &= \sum_{y=0}^2 P(\mathbf{W}_i = \mathbf{w} \mid Y_i = y) \cdot P(Y_i = y) \\
 &= \sum_{y=0}^2 \theta_y \cdot P(\mathbf{W}_i = \mathbf{w} \mid Y_i = y),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

a função de probabilidade de  $\mathbf{W}_i$  é uma mistura de três distribuições multinomiais com parâmetros (3.1).

Afirmamos que as condições (3.2), (3.3) e (3.4) garantem a identificabilidade do modelo (3.5). Com efeito, a variável aleatória  $W_k^i \mid Y_i = y$  tem distribuição binomial com número de ensaios  $r$  e probabilidade de “sucesso” dada pelo elemento situado na  $(y + 1)$ -ésima linha e  $(k + 1)$ -ésima coluna da matriz  $\Pi$ . Conseqüentemente, as distribuições marginais podem ser expressas como

$$\begin{aligned}
 P(W_k^i = w) &= \sum_{y=0}^2 P(W_k^i = w \mid Y_i = y) \cdot P(Y_i = y) \\
 &= \sum_{y=0}^2 \theta_y \cdot \text{Bin}(w \mid r, \Pi_{y+1, k+1}), \quad k = 0, 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

As funções de probabilidade (3.6), com as restrições (3.2) e (3.3) (os elementos pertencentes a uma mesma coluna da matriz  $\Pi$  são, dois a dois, distintos), são misturas de três distribuições binomiais. Segundo Blischke [1964], as distribuições (3.6) são identificáveis se a condição (3.4) vale.

Sejam  $\Psi$  e  $\Psi'$  vetores do espaço paramétrico. Pode-se verificar facilmente que, se  $P_\Psi(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}) = P_{\Psi'}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w})$ , para todo  $\mathbf{w}$ , então vale

$$P_\Psi(W_k^i = w_k) = P_{\Psi'}(W_k^i = w_k) \text{ para todo } w_k \in \{0, \dots, r\} \text{ (} k = 0, 1, 2\text{)}.$$

Portanto, se  $\Psi \neq \Psi'$  e  $P_\Psi(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}) = P_{\Psi'}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w})$  para todo  $\mathbf{w}$ , então pelo menos uma das distribuições marginais **não** seria identificável, o que seria uma contradição. Por isso, concluímos que  $P_\Psi(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}) = P_{\Psi'}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w})$  para todo  $\mathbf{w}$  se e somente se  $\Psi = \Psi'$ , ou seja, o modelo é identificável.



Para inferência dos parâmetros do modelo, propomos estimadores fundamentados no princípio de maioria simples, isto é, formulados em termos da variável categórica  $F_i$ , definida por

$$F_i = \begin{cases} 0 & \text{se } W_0^i > W_1^i \text{ e } W_0^i > W_2^i, \\ 1 & \text{se } W_1^i > W_0^i \text{ e } W_1^i > W_2^i, \\ 2 & \text{se } W_2^i > W_0^i \text{ e } W_2^i > W_1^i, \\ U_1 & \text{se } W_0^i = W_2^i > W_1^i, \\ U_2 & \text{se } W_0^i = W_1^i > W_2^i, \\ U_3 & \text{se } W_1^i = W_2^i > W_0^i, \\ U_4 & \text{se } W_0^i = W_1^i = W_2^i, \end{cases}$$

em que  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  e  $U_4$  são variáveis aleatórias discretas *uniformes*, com suportes  $\{0, 2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$  e  $\{0, 1, 2\}$ , respectivamente.

$F_i$  é interpretado como o resultado de classificação final do  $i$ -ésimo item, após  $r$  medições. Assim, as expressões

$$I_{[F_i=0]} = \frac{(F_i - 1)(F_i - 2)}{2}, \quad I_{[F_i=1]} = -F_i(F_i - 2) \quad \text{e} \quad I_{[F_i=2]} = \frac{F_i(F_i - 1)}{2}$$

indicam, com 0 ou 1, a classificação final do objeto  $i$ , de modo que

$$\sum_{i=1}^n I_{[F_i=k]} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n W_p^i \cdot I_{[F_i=k]} \quad (3.7)$$

representam, respectivamente, o número de peças classificadas como pertencentes à categoria “ $k$ ” e a quantidade total de medições – em objetos com classificação final “ $k$ ” – que resultaram no valor “ $p$ ” ( $p, k = 0, 1, 2$ ).

Finalmente, como estimadores dos parâmetros do modelo, propomos as proporções a seguir, que denominamos *estimadores de maioria simples* (EsMS):

$$\hat{\theta}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[F_i=k]} \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_k^p = \frac{\sum_{i=1}^n W_p^i \cdot I_{[F_i=k]}}{r \sum_{i=1}^n I_{[F_i=k]}}, \quad (3.8)$$

para  $k, p = 0, 1, 2$  e  $k \neq p$ . Ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [F_i(F_i - 2)], & \hat{\theta}_2 &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [F_i(F_i - 1)], \\ \hat{\pi}_0^1 &= \frac{\sum_{i=1}^n [W_1^i \cdot (F_i - 1)(F_i - 2)]}{r \sum_{i=1}^n [(F_i - 1)(F_i - 2)]}, & \hat{\pi}_0^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n [W_2^i \cdot (F_i - 1)(F_i - 2)]}{r \sum_{i=1}^n [(F_i - 1)(F_i - 2)]}, \\ \hat{\pi}_1^0 &= \frac{\sum_{i=1}^n [W_0^i \cdot F_i(F_i - 2)]}{r \sum_{i=1}^n [F_i(F_i - 2)]}, & \hat{\pi}_1^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n [W_2^i \cdot F_i(F_i - 2)]}{r \sum_{i=1}^n [F_i(F_i - 2)]}, \\ \hat{\pi}_2^0 &= \frac{\sum_{i=1}^n [W_0^i \cdot F_i(F_i - 1)]}{r \sum_{i=1}^n [F_i(F_i - 1)]} & \text{e } \hat{\pi}_2^1 &= \frac{\sum_{i=1}^n [W_1^i \cdot F_i(F_i - 1)]}{r \sum_{i=1}^n [F_i(F_i - 1)]}\end{aligned}$$

$$\left( \hat{\theta}_0 = 1 - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[F_i=0]} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [(F_i - 1)(F_i - 2)] \right).$$

Alternativamente, para os casos de empates, o pesquisador pode, sob o risco de aumento dos custos operacionais, continuar executando medições repetidas até que não haja mais empates nas últimas  $r$  classificações.

Para concluir esta seção, ressaltamos que a condição  $r = 5$ , além de ser um dos requisitos mínimos que asseguram a identificabilidade do modelo, é também o número mínimo de repetições que permite a ocorrência de resultados do tipo  $(W_0^i, W_1^i, W_2^i)$ , com  $W_k^i \neq 0$  para todo  $k$  e uma das seguintes desigualdades satisfeita:  $W_0^i > W_1^i + W_2^i$ ,  $W_1^i > W_0^i + W_2^i$  ou  $W_2^i > W_0^i + W_1^i$ . Intuitivamente, tais resultados conduzem a classificações finais mais credíveis, e portanto produzem melhores estimativas para todos os parâmetros de interesse.

## 3.2 Propriedades assintóticas dos estimadores de maioria simples

Esta seção apresenta algumas propriedades assintóticas dos EsMS. Para esse propósito, começamos apresentando um lema que formaliza a intuição de que, à medida que o número de repetições cresce, a classificação final de uma peça tende a coincidir com seu estado real.

**Lema 3.1.** *São válidas as seguintes igualdades:*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = k \mid Y_i = k) = 1, \quad (3.9)$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = k' \mid Y_i = k) = 0 \text{ se } k' \neq k, \quad (3.10)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = k) = \theta_k, \quad (3.11)$$

para  $k', k = 0, 1, 2$ .

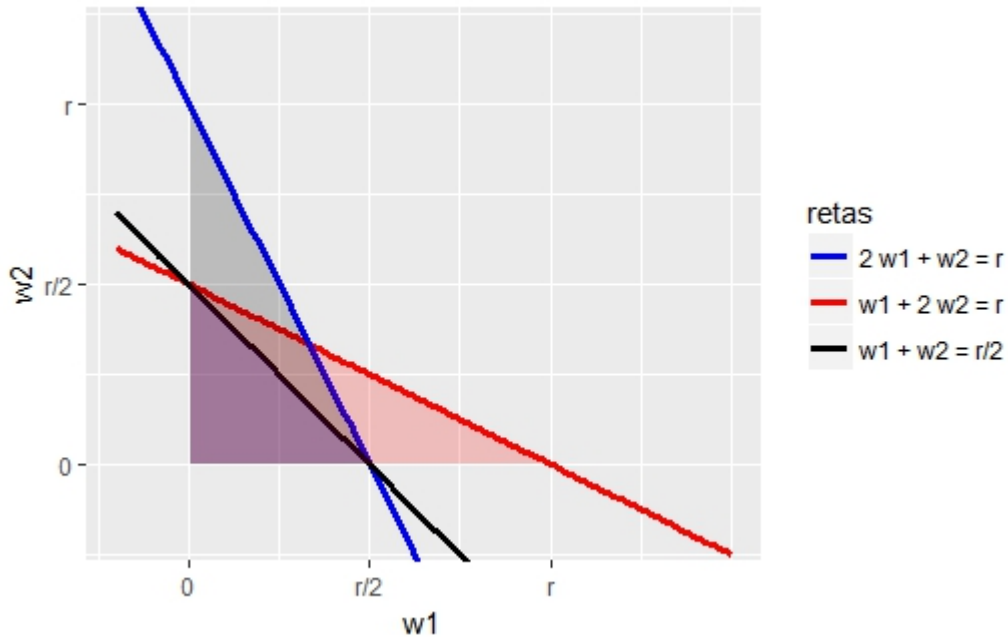
*Demonstração.* A condição “ $W_0^i > W_1^i$  e  $W_0^i > W_2^i$ ”, na definição de  $F_i$ , é equivalente ao evento “ $2W_1^i + W_2^i < r$  e  $W_1^i + 2W_2^i < r$ ”, uma vez que  $W_0^i + W_1^i + W_2^i = r$ . Portanto,

$$\begin{aligned} [F_i = 0] &= [2W_1^i + W_2^i < r, W_1^i + 2W_2^i < r] \cup [U_1 = 0, W_0^i = W_2^i > W_1^i] \\ &\cup [U_2 = 0, W_0^i = W_1^i > W_2^i] \cup [U_4 = 0, W_0^i = W_1^i = W_2^i] \end{aligned}$$

e, de acordo com a Figura 3.1,  $[W_1^i + W_2^i < \frac{r}{2}] \subset [F_i = 0]$ . Logo,

$$P\left(W_1^i + W_2^i < \frac{r}{2} \mid Y_i = 0\right) \leq P(F_i = 0 \mid Y_i = 0).$$

Mas,  $P\left(W_1^i + W_2^i < \frac{r}{2} \mid Y_i = 0\right) = P\left(W_0^i > \frac{r}{2} \mid Y_i = 0\right)$  e  $W_0^i \mid Y_i = 0$  tem distribuição binomial com número de ensaios  $r$  e probabilidade de “sucesso”  $1 - \pi_0^1 - \pi_0^2$ . Então,



**Figura 3.1.** Regiões de “integração”.

para  $r$  suficientemente grande, vale a seguinte aproximação

$$\begin{aligned}
 P\left(W_0^i > \frac{r}{2} \mid Y_i = 0\right) &\approx P\left(Z \geq \frac{\lfloor r/2 \rfloor + 1 - r \cdot [1 - \pi_0^1 - \pi_0^2]}{\sqrt{r \cdot [\pi_0^1 + \pi_0^2] \cdot [1 - \pi_0^1 - \pi_0^2]}}\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{\lfloor r/2 \rfloor + 1 - r \cdot [1 - \pi_0^1 - \pi_0^2]}{\sqrt{r \cdot [\pi_0^1 + \pi_0^2] \cdot [1 - \pi_0^1 - \pi_0^2]}}\right),
 \end{aligned}$$

em que  $Z \sim N(0, 1)$  e  $\Phi$  é sua função de distribuição acumulada. As restrições (3.3) implicam que

$$\frac{\lfloor r/2 \rfloor + 1 - r \cdot [1 - \pi_0^1 - \pi_0^2]}{\sqrt{r \cdot [\pi_0^1 + \pi_0^2] \cdot [1 - \pi_0^1 - \pi_0^2]}} \rightarrow -\infty \text{ quando } r \rightarrow \infty.$$

Por isso,  $\lim_{r \rightarrow \infty} P\left(W_1^i + W_2^i < \frac{r}{2} \mid Y_i = 0\right) = 1$ , e assim

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = k \mid Y_i = k) = 1 \text{ para } k = 0.$$

As demonstrações são inteiramente análogas para  $k = 1$  e  $k = 2$ . Isso completa a prova do limite (3.9). A igualdade (3.10) é uma consequência imediata de (3.9). Segue então de

$$\begin{aligned} P(F_i = 0) &= \sum_{y=0}^2 P(F_i = 0 \mid Y_i = y) \cdot P(Y_i = y) \\ &= \theta_0 \cdot P(F_i = 0 \mid Y_i = 0) + \sum_{y=1}^2 \theta_y \cdot P(F_i = 0 \mid Y_i = y), \end{aligned}$$

que  $\lim_{r \rightarrow \infty} P(F_i = k) = \theta_k$  para  $k = 0$ . Similarmente, pode-se demonstrar que esse fato é válido para  $k = 1$  e  $k = 2$ . ■

**Observação 3.1.** *De acordo com o Teorema de Bayes,*

$$P(Y_i = k \mid F_i = k) = \frac{P(F_i = k \mid Y_i = k) \cdot P(Y_i = k)}{P(F_i = k)}.$$

*Decorre portanto dos limites (3.9) e (3.11) que*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(Y_i = k \mid F_i = k) = 1,$$

*para  $k = 0, 1, 2$ .*

Estabelecido o Lema 3.1, podemos agora provar os teoremas abaixo.

**Teorema 3.1.** *Em relação ao número de repetições  $r$ , os estimadores  $\hat{\theta}_k$ 's são assintoticamente não-enviesados.*

*Demonstração.* Notemos que

$$E[F_i(F_i - 2)] = \sum_{f=0}^2 (f(f - 2)) \cdot P(F_i = f) = -P(F_i = 1).$$

Daí,  $E[\hat{\theta}_1] = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[F_i(F_i - 2)] = P(F_i = 1)$  e, aplicando o limite (3.11), concluimos que  $\lim_{r \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_k] = \theta_k$  para  $k = 1$ . Essa igualdade pode também ser estabelecida para  $k = 0$  and  $k = 2$  de maneira similar. ■

**Teorema 3.2.** *Em relação ao aumento, simultâneo, do número de objetos  $n$  e da quantidade de repetições  $r$ , os estimadores  $\hat{\theta}_k$ 's são consistentes.*

*Demonstração.* A variância de  $\widehat{\theta}_1$  pode ser escrita como

$$\text{Var}[\widehat{\theta}_1] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[F_i(F_i - 2)].$$

Ademais,

$$\text{E}[(F_i(F_i - 2))^2] = \sum_{f=0}^2 (f(f - 2))^2 \cdot P(F_i = f) = P(F_i = 1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}[F_i(F_i - 2)] &= \text{E}[(F_i(F_i - 2))^2] - \left(\text{E}[F_i(F_i - 2)]\right)^2 \\ &= P(F_i = 1)[1 - P(F_i = 1)], \end{aligned}$$

e assim<sup>1</sup>,  $\text{Var}[\widehat{\theta}_1] = \frac{1}{n} \cdot P(F_i = 1)[1 - P(F_i = 1)] \leq \frac{1}{n}$ . Pela desigualdade de Chebyshev, para todo número real  $\epsilon > 0$ , temos

$$P(|\widehat{\theta}_1 - \theta_1| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{E}[(\widehat{\theta}_1 - \theta_1)^2]}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}[\widehat{\theta}_1] + (\text{E}[\widehat{\theta}_1] - \theta_1)^2}{\epsilon^2}.$$

Mas,  $\text{Var}[\widehat{\theta}_1] \rightarrow 0$  uniformemente quando  $n \rightarrow \infty$ , e  $\text{E}[\widehat{\theta}_1] = P(F_i = 1) \rightarrow \theta_1$  uniformemente quando  $r \rightarrow \infty$ . Por conseguinte,  $\widehat{\theta}_1$  converge em *probabilidade* para  $\theta_1$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow \infty$ . Logo,  $\widehat{\theta}_1$  é consistente. Os mesmos raciocínio e conclusão são válidos para as estatísticas  $\widehat{\theta}_0$  e  $\widehat{\theta}_2$ . ■

**Teorema 3.3.** *Em relação ao aumento, simultâneo, do número de objetos  $n$  e da quantidade de repetições  $r$ , os estimadores  $\widehat{\pi}_k^{k'}$  são consistentes e assintoticamente não-enviesados.*

*Demonstração.* Para provar que  $\widehat{\pi}_0^1$  satisfaz as condições do enunciado, iniciamos com as seguintes afirmações

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{E} \left[ \left| \frac{(F_i - 1)(F_i - 2)}{2} - \frac{(Y_i - 1)(Y_i - 2)}{2} \right| \right] = 0 \quad (3.12)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{E} \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} \cdot \frac{(F_i - 1)(F_i - 2)}{2} - \pi_0^1 \cdot \frac{(Y_i - 1)(Y_i - 2)}{2} \right| \right] = 0. \quad (3.13)$$

---

<sup>1</sup>Segue do limite (3.11) que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Var}[\widehat{\theta}_1] = \frac{\theta_1(1 - \theta_1)}{n}$ .

Com efeito, definindo  $I_{[F_i=0]} = \frac{(F_i - 1)(F_i - 2)}{2}$  e  $I_{[Y_i=0]} = \frac{(Y_i - 1)(Y_i - 2)}{2}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left| \frac{(F_i - 1)(F_i - 2)}{2} - \frac{(Y_i - 1)(Y_i - 2)}{2} \right| \right] \\ &= \sum_{y=0}^2 \sum_{f=0}^2 \left\{ \mathbb{E} \left[ \left| I_{[F_i=0]} - I_{[Y_i=0]} \right| \mid Y_i = y, F_i = f \right] \cdot P(F_i = f \mid Y_i = y) \cdot P(Y_i = y) \right\} \\ &= \sum_{(y,f) \in \mathcal{A}} P(F_i = f \mid Y_i = y) \cdot P(Y_i = y), \end{aligned}$$

em que  $\mathcal{A} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)\}$ . Aplicando então os limites (3.10), obtemos a igualdade (3.12).

Em relação à igualdade (3.13), definindo

$$\mathbb{E}_{y,f} = \mathbb{E} \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]} - \pi_0^1 \cdot I_{[Y_i=0]} \right| \mid Y_i = y, F_i = f \right],$$

podemos expressar

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]} - \pi_0^1 \cdot I_{[Y_i=0]} \right| \right] \\ &= \sum_{y=0}^2 \sum_{f=0}^2 \mathbb{E}_{y,f} \cdot P(Y_i = y, F_i = f) = \mathbb{E}_{0,0} \cdot P(F_i = 0 \mid Y_i = 0) \cdot P(Y_i = 0) + \mathfrak{R}, \end{aligned}$$

em que  $\mathfrak{R} = \sum_{(y,f) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{y,f} \cdot P(F_i = f \mid Y_i = y) \cdot P(Y_i = y)$  e  $\mathcal{A}$  é o conjunto definido acima. Como os valores esperados que aparecem em  $\mathfrak{R}$  são limitados, os limites (3.10) implicam que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{R} = 0$ . Por essa razão, concentramos agora nossa atenção no comportamento assintótico de  $\mathbb{E}_{0,0}$ .

Notemos que

$$P(W_1^i = w_1 \mid Y_i = 0, F_i = 0) = \frac{P(W_1^i = w_1, Y_i = 0, F_i = 0)}{P(Y_i = 0, F_i = 0)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{P(W_1^i = w_1, Y_i = 0)}{P(Y_i = 0, F_i = 0)} = \frac{P(W_1^i = w_1, Y_i = 0)}{P(Y_i = 0)} \cdot \frac{P(Y_i = 0)}{P(Y_i = 0, F_i = 0)} \\
&= P(W_1^i = w_1 | Y_i = 0) \cdot \frac{1}{P(F_i = 0 | Y_i = 0)}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
E_{0,0} &= E \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} - \pi_0^1 \right| \middle| Y_i = 0, F_i = 0 \right] \\
&\leq E \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} - \pi_0^1 \right| \middle| Y_i = 0 \right] \cdot \frac{1}{P(F_i = 0 | Y_i = 0)}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ademais, como  $W_1^i | Y_i = 0$  tem distribuição binomial com número de ensaios  $r$  e probabilidade de “sucesso”  $\pi_0^1$ , decorre da Lei dos Grandes Números de Bernoulli que a sequência  $\left\{ \frac{W_1^i}{r} \middle| Y_i = 0 \right\}_{r \geq 1}$  converge em *probabilidade* para  $\pi_0^1$ . Portanto, como

$\left\{ \frac{W_1^i}{r} - \pi_0^1 \middle| Y_i = 0 \right\}_{r \geq 1}$  é uma sequência limitada, que converge em *probabilidade* para

zero, e  $f(x) = |x|$  é contínua, temos  $\lim_{r \rightarrow \infty} E \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} - \pi_0^1 \right| \middle| Y_i = 0 \right] = 0$ . Por conseguinte, a desigualdade (3.14) e o resultado (3.11) garantem que  $\lim_{r \rightarrow \infty} E_{0,0} = 0$ . Isso prova o limite (3.13).

Sejam  $T_{n,r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]}$ ,  $U_{n,r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[F_i=0]}$  e  $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[Y_i=0]}$ .

Afirmamos que  $E \left[ |T_{n,r} - \pi_0^1 \cdot V_n| \right] \leq E \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]} - \pi_0^1 \cdot I_{[Y_i=0]} \right| \right]$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
E \left[ |T_{n,r} - \pi_0^1 \cdot V_n| \right] &= E \left[ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]} - \pi_0^1 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[Y_i=0]} \right| \right] \\
&= \frac{1}{n} E \left[ \left| \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]} - \pi_0^1 \cdot I_{[Y_i=0]} \right\} \right| \right] \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]} - \pi_0^1 \cdot I_{[Y_i=0]} \right| \right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \cdot E \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]} - \pi_0^1 \cdot I_{[Y_i=0]} \right| \right] = E \left[ \left| \frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]} - \pi_0^1 \cdot I_{[Y_i=0]} \right| \right].
\end{aligned}$$



Pelo mesmo raciocínio, vale  $E\left[|U_{n,r} - V_n|\right] \leq E\left[|I_{[F_i=0]} - I_{[Y_i=0]}\right]$ .

Pela desigualdade de Markov e desigualdades acima, dado  $\epsilon > 0$ , valem

$$P\left(|T_{n,r} - \pi_0^1 \cdot V_n| \geq \epsilon\right) \leq \frac{E\left[\left|\frac{W_1^i}{r} \cdot I_{[F_i=0]} - \pi_0^1 \cdot I_{[Y_i=0]}\right|\right]}{\epsilon} \quad (3.15)$$

e

$$P\left(|U_{n,r} - V_n| \geq \epsilon\right) \leq \frac{E\left[|I_{[F_i=0]} - I_{[Y_i=0]}\right]}{\epsilon}. \quad (3.16)$$

Decorrem portanto das desigualdades (3.15) e (3.16) e dos limites (3.12) e (3.13) que

$$U_{n,r} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{P} V_n \quad (3.17)$$

e

$$T_{n,r} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{P} \pi_0^1 \cdot V_n.$$

Ressaltamos que, em consequência das desigualdades (3.15) e (3.16), as convergências acima são uniformes.

No que diz respeito à sequência  $\{V_n\}_{n \geq 1}$ , a Lei Fraca de Khintchin garante que  $V_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta_0$ , pois  $E\left[I_{[Y_i=0]}\right] = \theta_0$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , podemos escrever

$$P\left(|U_{n,r} - \theta_0| \geq \epsilon\right) \leq P\left(|U_{n,r} - V_n| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(|V_n - \theta_0| \geq \frac{\epsilon}{2}\right)$$

e

$$P\left(|T_{n,r} - \pi_0^1 \cdot \theta_0| \geq \epsilon\right) \leq P\left(|T_{n,r} - \pi_0^1 \cdot V_n| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(|V_n - \theta_0| \geq \frac{\epsilon}{2\pi_0^1}\right).$$

Resulta das convergências em *probabilidade* estabelecidas que, para as duas desigualdades imediatamente acima, o primeiro termo do lado direito tende uniformemente a zero quando  $r \rightarrow \infty$ , e o segundo termo tende uniformemente a zero quando  $n \rightarrow \infty$ .

Por conseguinte,

$$T_{n,r} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} \pi_0^1 \cdot \theta_0 \quad \text{e} \quad U_{n,r} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} \theta_0.$$

Então, pelo Lema 1.2, do Capítulo 1,

$$\widehat{\pi}_0^1 = \frac{T_{n,r}}{U_{n,r}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ e } r \rightarrow \infty]{P} \frac{\pi_0^1 \cdot \theta_0}{\theta_0} = \pi_0^1.$$

Logo,  $\widehat{\pi}_0^1$  é um estimador consistente. Além disso, uma vez que essa estatística é limitada,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} \text{E} \left[ \widehat{\pi}_0^1 \right] = \pi_0^1,$$

ou seja,  $\widehat{\pi}_0^1$  é um estimador assintoticamente não-enviesado. Pelo mesmo raciocínio, pode-se mostrar que as demais estatísticas  $\widehat{\pi}_k^{k'}$  são consistentes e assintoticamente não-enviesadas. ■

### 3.3 Estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção, descrevemos como os parâmetros do modelo podem ser estimados via método de máxima verossimilhança.

Para esse fim, utilizamos o algoritmo EM. Assim, se  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & w_{n3} \end{bmatrix}$  é

a matriz dos dados, com  $w_{ij} \in \{0, 1, \dots, r\}$  representando o número de vezes que o avaliador classifica o objeto  $i$  como pertencente à categoria “ $j - 1$ ” (nas  $r$  medições

repetidas), então a função de verossimilhança completa é

$$\begin{aligned}
L_c &= L_c \left[ \Psi \mid (\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{w}, \mathbf{y}) \right] \\
&= \prod_{i=1}^n P_{\Psi}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i, Y_i = y_i) = \prod_{i=1}^n P_{\Psi}(Y_i = y_i) \cdot P_{\Psi}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = y_i) \\
&= \prod_{i=1}^n \left\{ \left[ \theta_0 \cdot P_{\Psi}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = 0) \right]^{I_{[y_i=0]}} \times \left[ \theta_1 \cdot P_{\Psi}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = 1) \right]^{I_{[y_i=1]}} \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \theta_2 \cdot P_{\Psi}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = 2) \right]^{I_{[y_i=2]}} \right\},
\end{aligned}$$

em que  $\Psi = (\theta_1, \theta_2, \pi_0^1, \pi_0^2, \pi_1^0, \pi_1^1, \pi_2^0, \pi_2^1)$ ,  $I_{[y_i=0]} = \frac{1}{2}(y_i - 1)(y_i - 2)$ ,  
 $I_{[y_i=1]} = -y_i(y_i - 2)$  e  $I_{[y_i=2]} = \frac{1}{2}(y_i - 1)y_i$ .

O algoritmo EM baseia-se na maximização, com respeito a  $\Psi$ , da log-verossimilhança completa, isto é,

$$\mathfrak{L} = \log L_c = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=0}^2 I_{[y_i=k]} \cdot \left[ \log \theta_k + \log P_{\Psi}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = k) \right] \right\}.$$

A fim de maximizar  $\mathfrak{L}$ , calculamos as derivadas primeiras, igualamo-las a zero e resolvemos as equações resultantes com respeito aos parâmetros.

Como  $\sum_{k=0}^2 \theta_k = 1$ ,  $\sum_{k=0}^2 I_{[y_i=k]} = 1$  e  $P_{\Psi}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = y)$  não depende de  $\theta_k$ , encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta_1} &= \sum_{i=1}^n \left\{ I_{[y_i=0]} \cdot \frac{-1}{1 - \theta_1 - \theta_2} + I_{[y_i=1]} \cdot \frac{1}{\theta_1} \right\} \\
&= \frac{1}{\theta_1 \cdot (1 - \theta_1 - \theta_2)} \sum_{i=1}^n \left\{ - (1 - I_{[y_i=2]}) \cdot \theta_1 - I_{[y_i=1]} \cdot \theta_2 + I_{[y_i=1]} \right\} e \\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta_2} &= \frac{1}{\theta_2 \cdot (1 - \theta_1 - \theta_2)} \sum_{i=1}^n \left\{ - I_{[y_i=2]} \cdot \theta_1 - (1 - I_{[y_i=1]}) \cdot \theta_2 + I_{[y_i=2]} \right\}.
\end{aligned}$$

Assim, o par de equações  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0$  e  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0$  é equivalente ao sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{i=1}^n (1 - I_{[y_i=2]})}_{a_{11}} \cdot \theta_1 + \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=1]}}_{a_{12}} \cdot \theta_2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=1]}}_{= a_{12}}, \\ \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=2]}}_{a_{21}} \cdot \theta_1 + \underbrace{\sum_{i=1}^n (1 - I_{[y_i=1]})}_{a_{22}} \cdot \theta_2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=2]}}_{= a_{21}}, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

cujo conjunto solução é

$$\theta_1 = \frac{a_{12}(a_{22} - a_{21})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{a_{21}(a_{11} - a_{12})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3.19)$$

Pode-se verificar facilmente que  $a_{22} - a_{21} = a_{11} - a_{12}$  e  $a_{11} + a_{21} = a_{12} + a_{22} = n$ , donde  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = n(a_{11} - a_{12})$ . Portanto,

$$\theta_1 = \frac{a_{12}(a_{11} - a_{12})}{n(a_{11} - a_{12})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[y_i=1]} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{a_{21}(a_{11} - a_{12})}{n(a_{11} - a_{12})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[y_i=2]};$$

consequentemente,  $\theta_0 = 1 - \theta_1 - \theta_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}$ .

No que se refere às derivadas de  $\mathcal{L}$  com respeito às probabilidades dos erros de classificação, notemos que

$$P_{\Psi}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = 0) = \frac{r!}{w_{i1}!w_{i2}!w_{i3}!} \left[ 1 - \pi_0^1 - \pi_0^2 \right]^{w_{i1}} \left[ \pi_0^1 \right]^{w_{i2}} \left[ \pi_0^2 \right]^{w_{i3}};$$

assim, valem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_0^1} = \sum_{i=1}^n \left\{ I_{[y_i=0]} \cdot \left( w_{i1} \cdot \frac{-1}{1 - \pi_0^1 - \pi_0^2} + w_{i2} \cdot \frac{1}{\pi_0^1} \right) \right\} = \frac{1}{\pi_0^1 \cdot (1 - \pi_0^1 - \pi_0^2)} \times$$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ - I_{[y_i=0]} \cdot (w_{i1} + w_{i2}) \cdot \pi_0^1 - I_{[y_i=0]} \cdot w_{i2} \cdot \pi_0^2 + I_{[y_i=0]} \cdot w_{i2} \right\} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_0^2} = \sum_{i=1}^n \left\{ I_{[y_i=0]} \cdot \left( w_{i1} \cdot \frac{-1}{1 - \pi_0^1 - \pi_0^2} + w_{i3} \cdot \frac{1}{\pi_0^2} \right) \right\} = \frac{1}{\pi_0^2 \cdot (1 - \pi_0^1 - \pi_0^2)} \times$$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ -I_{[y_i=0]} \cdot w_{i3} \cdot \pi_0^1 - I_{[y_i=0]} \cdot (w_{i1} + w_{i3}) \cdot \pi_0^2 + I_{[y_i=0]} \cdot w_{i3} \right\}.$$

Então,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_0^1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_0^2} = 0$  é equivalente ao seguinte sistema linear nas incógnitas  $\pi_0^1$  e  $\pi_0^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}(w_{i1} + w_{i2})}_{a_{11}} \cdot \pi_0^1 + \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}w_{i2}}_{a_{12}} \cdot \pi_0^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}w_{i2}}_{= a_{12}}, \\ \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}w_{i3}}_{a_{21}} \cdot \pi_0^1 + \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}(w_{i1} + w_{i3})}_{a_{22}} \cdot \pi_0^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}w_{i3}}_{= a_{21}}, \end{array} \right.$$

que tem a mesma forma do sistema (3.18). Como  $a_{11} + a_{21} = a_{12} + a_{22} = r \sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}$  e  $a_{22} - a_{21} = a_{11} - a_{12}$ , resulta que  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (a_{11} - a_{12}) \cdot r \sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}$ . Por isso, de acordo com (3.19), temos

$$\pi_0^1 = \frac{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]} \cdot w_{i2}}{r \sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}} \quad \text{e} \quad \pi_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]} \cdot w_{i3}}{r \sum_{i=1}^n I_{[y_i=0]}}.$$

As outras equações de máxima verossimilhança de informação completa podem ser obtidas e resolvidas de modo semelhante. Em resumo, notando que  $(w_0^i, w_1^i, w_2^i) = (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3})$ , podemos expressar as soluções das equações de máxima verossimilhança de informação completa como

$$\theta_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[y_i=k]} \quad \text{e} \quad \pi_k^p = \frac{\sum_{i=1}^n w_p^i \cdot I_{[y_i=k]}}{r \sum_{i=1}^n I_{[y_i=k]}}, \quad (3.20)$$

para  $k, p = 0, 1, 2$  e  $k \neq p$ .

A aplicação do algoritmo EM para estimar  $\Psi$  pode ser descrita como segue:

**PASSO 1:** Escolha um valor inicial para a estimativa de  $\Psi$ , digamos  $\widehat{\Psi}_0$ , e especifique um critério de parada (por exemplo,  $\|\widehat{\Psi}_{t+1} - \widehat{\Psi}_t\| < \epsilon$ ).

**PASSO 2** (passo E): Usando a estimativa corrente  $\widehat{\Psi}_t$ , calcule o valor esperado de  $\mathcal{L}$ , condicionado a  $\mathbf{W} = \mathbf{w}$ , isto é,

$$E_{\widehat{\Psi}_t}[\mathcal{L} \mid \mathbf{W} = \mathbf{w}] = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=0}^2 E_{\widehat{\Psi}_t}^{k,i} \cdot \left[ \log \theta_k + \log P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = k) \right] \right\},$$

em que  $E_{\widehat{\Psi}_t}^{0,i} = E_{\widehat{\Psi}_t}[I_{[y_i=0]} \mid \mathbf{W} = \mathbf{w}]$ ,  $E_{\widehat{\Psi}_t}^{1,i} = E_{\widehat{\Psi}_t}[I_{[y_i=1]} \mid \mathbf{W} = \mathbf{w}]$  e  $E_{\widehat{\Psi}_t}^{2,i} = E_{\widehat{\Psi}_t}[I_{[y_i=2]} \mid \mathbf{W} = \mathbf{w}]$ .

Aplicando o Teorema de Bayes, obtemos

$$\begin{aligned} E_{\widehat{\Psi}_t}^{0,i} &= E_{\widehat{\Psi}_t} \left[ \frac{1}{2} (Y_i - 1)(Y_i - 2) \mid \mathbf{W} = \mathbf{w} \right] \\ &= \sum_{y=0}^2 \left[ \frac{1}{2} (y - 1)(y - 2) \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(Y_i = y \mid \mathbf{W} = \mathbf{w}) \right] \\ &= P_{\widehat{\Psi}_t}(Y_i = 0 \mid \mathbf{W} = \mathbf{w}) = \frac{P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W} = \mathbf{w} \mid Y_i = 0) \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(Y_i = 0)}{P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W} = \mathbf{w})} \\ &= \frac{\left[ \prod_{j \neq i} P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_j = \mathbf{w}_j) \right] \left[ \widehat{\theta}_0^{(t)} \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = 0) \right]}{\left[ \prod_{j \neq i} P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_j = \mathbf{w}_j) \right] P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i)} \\ &= \frac{\widehat{\theta}_0^{(t)} \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = 0)}{P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i)}, \end{aligned}$$

em que  $P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i) = \sum_{k=0}^2 [\widehat{\theta}_k^{(t)} \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i | Y_i = k)]$ . Analogamente,

$$E_{\widehat{\Psi}_t}^{k,i} = \frac{\widehat{\theta}_k^{(t)} \cdot P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i | Y_i = k)}{P_{\widehat{\Psi}_t}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i)}, \quad k = 1, 2.$$

**PASSO 3** (passo M): Esta etapa consiste em determinar  $\widehat{\Psi}_{t+1}$  no qual o valor esperado  $E_{\widehat{\Psi}_t}[\mathcal{L} | \mathbf{W} = \mathbf{w}]$  atinge seu máximo, isto é, calcular

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_1^{(t+1)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{1,i}, & \widehat{\theta}_2^{(t+1)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{2,i}, \\ \widehat{\pi}_0^{1(t+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{0,i} \cdot w_{i2}}{r \sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{0,i}}, & \widehat{\pi}_0^{2(t+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{0,i} \cdot w_{i3}}{r \sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{0,i}}, & \widehat{\pi}_1^{0(t+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{1,i} \cdot w_{i1}}{r \sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{1,i}}, \\ \widehat{\pi}_1^{2(t+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{1,i} \cdot w_{i3}}{r \sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{1,i}}, & \widehat{\pi}_2^{0(t+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{2,i} \cdot w_{i1}}{r \sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{2,i}} \quad \text{e} & \widehat{\pi}_2^{1(t+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{2,i} \cdot w_{i2}}{r \sum_{i=1}^n E_{\widehat{\Psi}_t}^{2,i}}. \end{aligned}$$

Desse modo, a próxima estimativa  $\widehat{\Psi}_{t+1}$  do vetor de parâmetros  $\Psi$  é obtida.

**PASSO 4:** Retorne ao PASSO 2 até que o critério de parada seja satisfeito.

Destacamos a seguir um fato relacionado aos EsMV que os aproxima dos EsMS.

**Observação 3.2.** *A semelhança entre as expressões (3.8) e (3.20), juntamente com o fato de que  $\lim_{r \rightarrow \infty} E[|I_{[F_i=k]} - I_{[Y_i=k]}|] = 0$  (resultado (3.12)), sugere que os EsMS e EsMV tendem a produzir estimativas similares à medida que o número de repetições  $r$  aumenta.*

Finalizamos esta seção ressaltando uma característica dos estimadores  $\widehat{\theta}_k$ . Sejam  $r$  o número de repetições e  $F_1, F_2, \dots, F_n$  uma amostra aleatória de classificações finais. Então, considerando a descrição dada em (3.7), o vetor aleatório

$\left( \sum_{i=1}^n I_{[F_i=0]}, \sum_{i=1}^n I_{[F_i=1]}, \sum_{i=1}^n I_{[F_i=2]} \right)$  tem distribuição multinomial com parâmetros  $n$ ,  $\theta_{0,r}$ ,  $\theta_{1,r}$  e  $\theta_{2,r}$ . Além disso,  $\hat{\theta}_0$ ,  $\hat{\theta}_1$  and  $\hat{\theta}_2$  são os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros  $(\theta_{0,r}, \theta_{1,r}, \theta_{2,r})$ , em que  $\theta_{f,r} = P(F_i = f)$ ,  $f = 0, 1, 2$ . Da mesma maneira, se a amostra aleatória  $Y_1, \dots, Y_n$  fosse observável,  $\tilde{\theta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[Y_i=0]}$ ,  $\tilde{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[Y_i=1]}$  e  $\tilde{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[Y_i=2]}$  seriam os estimadores de máxima verossimilhança para  $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ . Usando o mesmo raciocínio empregado para estabelecer a convergência (3.17), pode-se provar o seguinte:

**Observação 3.3.**  $(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \xrightarrow{P} (\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$  quando  $r \rightarrow \infty$ .

### 3.4 Comparação entre EsMS e EsMV via simulação de Monte Carlo

Conduzimos um estudo de simulação para comparar os desempenhos dos EsMS e EsMV, em amostras finitas (parte do código R utilizado pode ser encontrada no Anexo B). Variamos o número de objetos  $n$  de 85 a 180, o número de repetições  $r$  de 10 a 25, os valores dos parâmetros  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , de 0,02 a 0,95, e os valores das probabilidades de erros de classificação  $\pi_k^{k'}$  de 0,03 a 0,25 (observando as restrições do modelo). O experimento de simulação consistiu em gerar amostras da distribuição (3.5) e então estimar os parâmetros usando os métodos de máxima verossimilhança e de maioria simples. Para cada combinação de  $n$ ,  $r$  e  $\Psi$ , 20.000 amostras foram geradas. Das estimativas obtidas, calculamos a média, o desvio padrão (DP) e o erro quadrático médio (EQM) para cada parâmetro.

Em razão do grande número de componentes do vetor  $\Psi$  e do alto custo computacional para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança, para a determinação dos cenários a serem examinados, fixamos dois valores de cada um dos domínios especificados acima e os combinamos aleatoriamente (experimentos fracionados). As Tabelas 3.1 e 3.2 ilustram os resultados desse procedimento, que foi executado diversas vezes para outras seleções de valores.

De modo geral, os dois métodos produziram resultados similares. Essa similaridade, talvez possa ser explicada pelas observações (3.2) e (3.3), no final da seção anterior, que apontam que os EsMS e os EsMV tendem a gerar valores muito próximos



à medida que  $r$  cresce. Contudo, é possível identificar situações nas quais um método apresenta ligeiro melhor desempenho que o outro, de acordo com algum critério de performance particular. A seguir, detalhamos as conclusões extraídas do experimento:

1. Em geral, para cada um dos parâmetros, em pelo menos 50% dos cenários estudados, os EsMS apresentaram menor desvio padrão que os EsMV.
2. Quando a população era “equilibrada”, isto é,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  eram relativamente próximos (por exemplo,  $\theta_0 = 0,29$ ,  $\theta_1 = 0,34$  e  $\theta_2 = 0,37$ ), os EsMV apresentaram melhor performance em termos de viés e EQM (80% e 60% dos casos examinados, respectivamente).
3. Quando a proporção de itens de uma categoria particular era significativamente maior que as outras, os EsMS produziram estimativas com menor EQM para a maioria dos parâmetros. Por exemplo, quando  $\theta_2 > 0,8$ , os estimadores  $\hat{\pi}_2^0$  e  $\hat{\pi}_2^1$  exibiram valores de EQM muito próximos aos dos seus correspondentes de máxima verossimilhança, e as estatísticas  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$ ,  $\hat{\pi}_0^1$ ,  $\hat{\pi}_0^2$ ,  $\hat{\pi}_1^0$  e  $\hat{\pi}_1^2$  tiveram menor EQM em pelo menos 50% dos cenários investigados.
4. Ainda no caso em que  $\theta_2 > 0,8$ , quando os erros de classificação eram todos menores que 0,15, os estimadores  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$ ,  $\hat{\pi}_0^1$ ,  $\hat{\pi}_0^2$ ,  $\hat{\pi}_1^0$  e  $\hat{\pi}_1^2$  tiveram menor EQM em pelo menos 80% dos cenários.
5. Ocasionalmente, as expressões de maioria simples conduzem a divisão por zero, ou os cálculos das estimativas de máxima verossimilhança requerem tempo excessivo para atingir a convergência. Esses problemas geralmente estão associados a amostras que contém muito poucos ou nenhum elemento de uma categoria particular.

Os resultados de simulação indicam que as indeterminações mencionadas no item (5) podem ser evitadas, nas duas abordagens, tomando-se uma amostra cujo conjunto de resultados de classificações finais contém todos os valores categóricos, isto é, conforme a descrição (3.7),

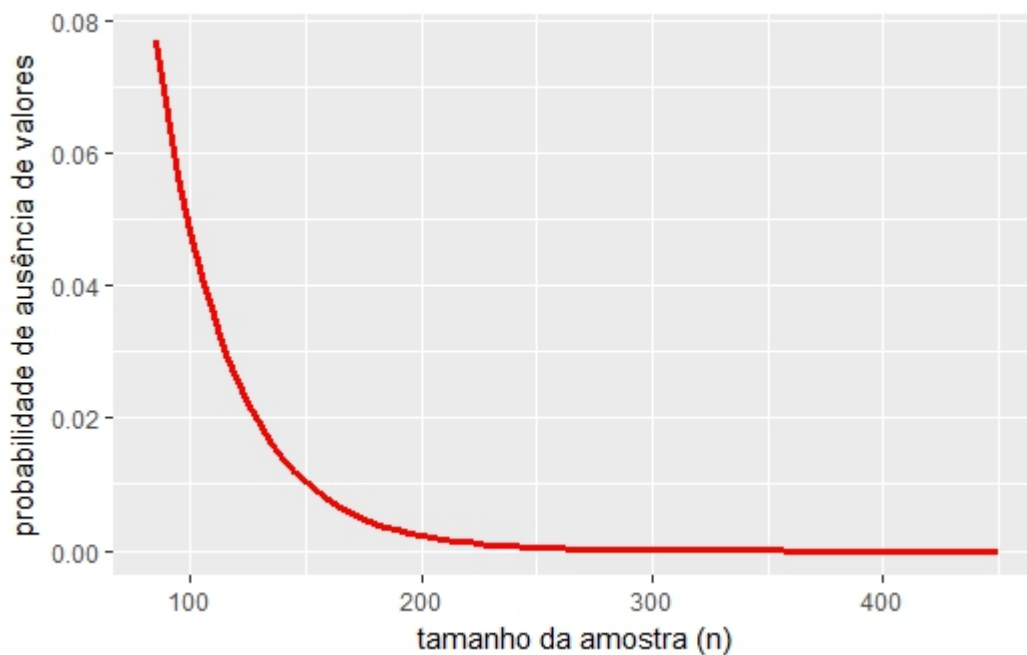
$$\sum_{i=1}^n I_{[f_i=k]} \neq 0 \text{ para } k = 0, k = 1 \text{ e } k = 2. \quad (3.21)$$

A partir da definição de  $F_i$  e do modelo (3.5), para  $r$  e  $\Psi$  conhecidos, é possível calcular numericamente a distribuição de probabilidade da variável  $F_i$ .

Como já observado no final da Seção 3.2, para amostras de tamanho  $n$ , o vetor  $\left( \sum_{i=1}^n I_{[F_i=0]}, \sum_{i=1}^n I_{[F_i=1]}, \sum_{i=1}^n I_{[F_i=2]} \right)$  tem distribuição multinomial com parâmetros  $n$ ,  $\theta_{0,r} = P_{\Psi}(F_i = 0)$ ,  $\theta_{1,r} = P_{\Psi}(F_i = 1)$  e  $\theta_{2,r} = P_{\Psi}(F_i = 2)$ . Amostras que não satisfazem a condição (3.21) são caracterizadas pela ocorrência de um dos seguintes resultados de classificações finais, na forma do vetor acima:  $(n, 0, 0)$ ,  $(0, n, 0)$ ,  $(0, 0, n)$ ,  $(0, i, j)$ ,  $(i, 0, j)$  e  $(i, j, 0)$ , com  $i = 1, \dots, n - 1$  e  $j = n - i$ . A probabilidade de ocorrência desses resultados, que pode ser calculada numericamente, diminui a medida que  $n$  aumenta. Por exemplo, a Figura 3.2 mostra que para o cenário 3 ( $r$  e  $\Psi$  somente) na Tabela 3.2, quando  $n = 340$ , a ocorrência de amostras que não atendem a restrição (3.21) é muito improvável, com probabilidade inferior a 0,00003. Para os outros cenários na Tabela 3.2, quando  $n = 340$ , as frequências de ocorrência de tais amostras são menores ainda.

Os itens (1) e (4) correspondem (aproximadamente) às conclusões apresentadas em Quinino et al. [2013], no contexto tricotômico. Ressaltamos que a conclusão (4) é particularmente relevante para propósitos práticos (se EQM é o critério de interesse), uma vez que se espera que um sistema de medição minimamente eficiente tenha probabilidades de erros de classificação menores que 0,15. Ademais, sistemas de medição são comumente aplicados em populações possuindo uma fração de objetos pertencentes a uma categoria particular significativamente maior que as demais.

Amostras representativas dos resultados de simulação relacionados a esse contexto são apresentadas nas Tabelas 3.2 - 3.11. Nas Tabelas 3.3 - 3.11, diferenças de viéses absolutos relativos (DVAR) das estimativas de MV e de MS, bem como razões de EQM das estimativas de MV por EQM das estimativas de MS, são apresentadas para cada um dos parâmetros. Do mesmo modo, razões de DP são obtidas para cada um dos parâmetros. Diferenças positivas e razões maiores que um indicam melhor desempenho para o método de maioria simples. A Tabela 3.12 resume a informação contida nas Tabelas 3.3 - 3.11, exibindo as médias dos viéses absolutos (VAs), dos DPs e dos EQMs, para cada um dos parâmetros e métodos. Exibe também o percentual de cenários favoráveis ao método de maioria simples, em termos dos critérios VA, EQM e DP. Vale notar que os resultados registrados nas tabelas mencionadas estão inteiramente em conformidade com as conclusões (1), (3) e (4) acima e a conclusão geral de que os dois métodos produzem resultados muito similares. Nas tabelas, os valores em **negrito** representam o melhor valor para a métrica correspondente.



**Figura 3.2.** Probabilidade de ausência de um ou mais valores categóricos no conjunto de resultados de classificações finais.

**Tabela 3.1.** Valores selecionados.

$n$	$r$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\pi_0^1$	$\pi_0^2$	$\pi_1^0$	$\pi_1^2$	$\pi_2^0$	$\pi_2^1$
85	12	0,05	0,82	0,11	0,04	0,08	0,09	0,03	0,05
150	25	0,07	0,90	0,13	0,08	0,12	0,13	0,06	0,09

Enfatizamos que, na hipótese de população equilibrada e expectativa por maior garantia de correção, a abordagem de máxima verossimilhança oferece melhores resultados. Nesse caso, com o propósito de diminuir o número de iterações do algoritmo EM, pode-se usar as estimativas de MS como valor inicial. Entretanto, como as vantagens de uma técnica em relação à outra não são muito significativas, o esforço computacional necessário pode não justificar o emprego desse método. Nesse sentido, uma vez que EsMS possuem expressões fechadas, o método de maioria simples representa uma alternativa bastante competitiva.

**Tabela 3.2.** Cenários e número de realizações.

id	$r$	$n$	Cenários									Realizações	
			$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\pi_0^1$	$\pi_0^2$	$\pi_1^0$	$\pi_1^2$	$\pi_2^0$	$\pi_2^1$	MV	MS
1	25	85	0,03	0,07	0,90	0,13	0,04	0,08	0,09	0,03	0,05	19972	18503
2	12	150	0,13	0,05	0,82	0,13	0,08	0,08	0,09	0,03	0,05	19999	19985
3	25	85	0,03	0,07	0,90	0,13	0,08	0,08	0,09	0,03	0,05	19970	18435
4	25	85	0,13	0,05	0,82	0,11	0,04	0,12	0,09	0,03	0,05	19995	19763
5	25	150	0,05	0,05	0,90	0,11	0,08	0,12	0,09	0,03	0,05	19999	19975
6	12	150	0,05	0,05	0,90	0,13	0,08	0,12	0,09	0,03	0,05	20000	19976
7	12	150	0,03	0,07	0,90	0,11	0,04	0,08	0,13	0,03	0,05	19990	19804
8	25	150	0,13	0,05	0,82	0,13	0,04	0,08	0,13	0,03	0,05	20000	19987
9	25	150	0,11	0,07	0,82	0,11	0,04	0,12	0,13	0,03	0,05	20000	19999
10	25	150	0,05	0,05	0,90	0,11	0,04	0,12	0,13	0,03	0,05	20000	19981
11	12	85	0,11	0,07	0,82	0,13	0,04	0,12	0,13	0,03	0,05	20000	19959
12	25	85	0,13	0,05	0,82	0,13	0,08	0,12	0,13	0,03	0,05	20000	19747
13	12	85	0,13	0,05	0,82	0,11	0,04	0,08	0,09	0,06	0,05	19996	19705
14	12	85	0,05	0,05	0,90	0,11	0,04	0,08	0,09	0,06	0,05	19962	19482
15	25	85	0,03	0,07	0,90	0,13	0,04	0,08	0,09	0,06	0,05	19983	18458
16	12	85	0,11	0,07	0,82	0,11	0,08	0,08	0,09	0,06	0,05	20000	19961
17	25	85	0,11	0,07	0,82	0,11	0,08	0,08	0,09	0,06	0,05	20000	19950
18	12	150	0,03	0,07	0,90	0,11	0,04	0,12	0,09	0,06	0,05	19994	19816
19	12	150	0,05	0,05	0,90	0,11	0,08	0,08	0,13	0,06	0,05	20000	19982
20	12	150	0,11	0,07	0,82	0,13	0,08	0,08	0,13	0,06	0,05	20000	20000
21	25	150	0,05	0,05	0,90	0,13	0,08	0,08	0,13	0,06	0,05	20000	19984
22	12	85	0,11	0,07	0,82	0,13	0,04	0,12	0,13	0,06	0,05	20000	19955
23	25	85	0,03	0,07	0,90	0,11	0,08	0,12	0,13	0,06	0,05	19994	18507
24	12	150	0,13	0,05	0,82	0,13	0,08	0,12	0,13	0,06	0,05	20000	19992
25	12	150	0,03	0,07	0,90	0,11	0,04	0,08	0,09	0,03	0,09	19991	19799
26	12	150	0,13	0,05	0,82	0,11	0,08	0,08	0,09	0,03	0,09	20000	19987
27	25	150	0,11	0,07	0,82	0,11	0,08	0,08	0,09	0,03	0,09	20000	19998
28	25	150	0,11	0,07	0,82	0,13	0,08	0,08	0,09	0,03	0,09	20000	19999
29	25	85	0,13	0,05	0,82	0,11	0,04	0,12	0,09	0,03	0,09	19997	19725
30	12	85	0,13	0,05	0,82	0,13	0,08	0,12	0,09	0,03	0,09	19993	19747
31	25	85	0,03	0,07	0,90	0,13	0,08	0,12	0,09	0,03	0,09	19992	18474
32	12	85	0,11	0,07	0,82	0,11	0,04	0,08	0,13	0,03	0,09	20000	19965
33	12	150	0,11	0,07	0,82	0,13	0,04	0,08	0,13	0,03	0,09	20000	20000
34	12	85	0,05	0,05	0,90	0,13	0,04	0,08	0,13	0,03	0,09	19973	19507
35	12	85	0,05	0,05	0,90	0,11	0,08	0,08	0,13	0,03	0,09	19975	19496
36	12	85	0,03	0,07	0,90	0,11	0,08	0,12	0,13	0,03	0,09	19961	18498
37	25	150	0,05	0,05	0,90	0,13	0,04	0,08	0,09	0,06	0,09	20000	19979
38	25	150	0,11	0,07	0,82	0,11	0,04	0,12	0,09	0,06	0,09	20000	20000
39	12	85	0,05	0,05	0,90	0,13	0,04	0,12	0,09	0,06	0,09	19988	19521
40	12	150	0,05	0,05	0,90	0,13	0,04	0,12	0,09	0,06	0,09	20000	19976
41	12	150	0,11	0,07	0,82	0,13	0,08	0,12	0,09	0,06	0,09	20000	20000
42	25	85	0,13	0,05	0,82	0,13	0,04	0,08	0,13	0,06	0,09	19999	19755
43	25	150	0,03	0,07	0,90	0,13	0,04	0,08	0,13	0,06	0,09	19997	19766
44	25	85	0,13	0,05	0,82	0,11	0,08	0,08	0,13	0,06	0,09	19998	19716
45	25	85	0,05	0,05	0,90	0,11	0,08	0,08	0,13	0,06	0,09	19993	19522
46	25	150	0,13	0,05	0,82	0,11	0,04	0,12	0,13	0,06	0,09	20000	19990
47	12	85	0,03	0,07	0,90	0,11	0,08	0,12	0,13	0,06	0,09	19939	18486
48	25	150	0,03	0,07	0,90	0,13	0,08	0,12	0,13	0,06	0,09	19998	19797

**Tabela 3.3.** Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de  $\theta_0$  pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples.

id	$\theta_0$	MV			MS			DVAR ( $\times 100$ )	Razões	
		Média	DP	EQM	Média	DP	EQM		DP	EQM
1	0,03	<b>0,0312</b>	0,0181	0,0003	0,0326	<b>0,0172</b>	<b>0,0003</b>	-4,7213	1,05	1,09
2	0,13	<b>0,1297</b>	0,0273	0,0007	0,1294	<b>0,0272</b>	<b>0,0007</b>	-0,2170	1,00	1,01
3	0,03	<b>0,0313</b>	0,0182	0,0003	0,0327	<b>0,0171</b>	<b>0,0003</b>	-4,5295	1,06	1,11
4	0,13	0,1297	0,0367	0,0013	<b>0,1299</b>	<b>0,0364</b>	<b>0,0013</b>	0,1915	1,01	1,01
5	0,05	<b>0,0502</b>	0,0179	0,0003	0,0503	<b>0,0179</b>	<b>0,0003</b>	-0,0603	1,00	1,00
6	0,05	0,0501	0,0178	0,0003	<b>0,0501</b>	<b>0,0178</b>	<b>0,0003</b>	0,0662	1,00	1,01
7	0,03	<b>0,0303</b>	0,0139	0,0002	0,0304	<b>0,0138</b>	<b>0,0002</b>	-0,1866	1,01	1,02
8	0,13	<b>0,1301</b>	0,0274	0,0008	0,1302	<b>0,0274</b>	<b>0,0007</b>	-0,0086	1,00	1,00
9	0,11	<b>0,1101</b>	0,0256	0,0007	0,1101	<b>0,0256</b>	<b>0,0007</b>	-0,0036	1,00	1,00
10	0,05	<b>0,0502</b>	0,0178	0,0003	0,0502	<b>0,0177</b>	<b>0,0003</b>	-0,0615	1,00	1,00
11	0,11	0,1097	0,0338	0,0011	<b>0,1098</b>	<b>0,0338</b>	<b>0,0011</b>	0,1641	1,00	1,00
12	0,13	0,1288	0,0364	0,0013	<b>0,1290</b>	<b>0,0361</b>	<b>0,0013</b>	0,1807	1,01	1,02
13	0,13	0,1292	0,0369	0,0014	<b>0,1297</b>	<b>0,0364</b>	<b>0,0013</b>	0,3931	1,01	1,03
14	0,05	<b>0,0504</b>	0,0248	0,0006	0,0507	<b>0,0230</b>	<b>0,0005</b>	-0,6383	1,07	1,15
15	0,03	<b>0,0308</b>	0,0179	0,0003	0,0322	<b>0,0169</b>	<b>0,0003</b>	-4,6972	1,06	1,11
16	0,11	<b>0,1095</b>	0,0342	0,0012	0,1095	<b>0,0341</b>	<b>0,0012</b>	-0,0522	1,00	1,00
17	0,11	0,1099	0,0339	0,0012	<b>0,1100</b>	<b>0,0339</b>	<b>0,0011</b>	0,0523	1,00	1,00
18	0,03	<b>0,0304</b>	0,0140	0,0002	0,0305	<b>0,0138</b>	<b>0,0002</b>	-0,4404	1,01	1,02
19	0,05	<b>0,0499</b>	0,0178	0,0003	0,0499	<b>0,0178</b>	<b>0,0003</b>	-0,0553	1,00	1,00
20	0,11	<b>0,1099</b>	0,0253	0,0006	0,1096	<b>0,0253</b>	<b>0,0006</b>	-0,2221	1,00	1,00
21	0,05	<b>0,0502</b>	0,0177	0,0003	0,0502	<b>0,0177</b>	<b>0,0003</b>	-0,0326	1,00	1,00
22	0,11	0,1098	0,0338	0,0011	<b>0,1100</b>	<b>0,0337</b>	<b>0,0011</b>	0,1127	1,00	1,00
23	0,03	<b>0,0314</b>	0,0181	0,0003	0,0325	<b>0,0170</b>	<b>0,0003</b>	-3,3669	1,06	1,12
24	0,13	<b>0,1298</b>	0,0276	0,0008	0,1297	<b>0,0276</b>	<b>0,0008</b>	-0,0791	1,00	1,01
25	0,03	<b>0,0305</b>	0,0143	0,0002	0,0305	<b>0,0137</b>	<b>0,0002</b>	-0,0970	1,04	1,08
26	0,13	<b>0,1297</b>	0,0274	0,0007	0,1296	<b>0,0273</b>	<b>0,0007</b>	-0,0806	1,00	1,00
27	0,11	0,1099	0,0253	0,0006	<b>0,1099</b>	<b>0,0253</b>	<b>0,0006</b>	0,0070	1,00	1,00
28	0,11	0,1099	0,0257	0,0007	<b>0,1099</b>	<b>0,0257</b>	<b>0,0007</b>	0,0029	1,00	1,00
29	0,13	0,1295	0,0366	0,0013	<b>0,1299</b>	<b>0,0363</b>	<b>0,0013</b>	0,2862	1,01	1,02
30	0,13	0,1293	0,0369	0,0014	<b>0,1297</b>	<b>0,0364</b>	<b>0,0013</b>	0,2973	1,01	1,03
31	0,03	<b>0,0314</b>	0,0181	0,0003	0,0325	<b>0,0171</b>	<b>0,0003</b>	-3,9720	1,06	1,11
32	0,11	<b>0,1102</b>	0,0342	0,0012	0,1102	<b>0,0342</b>	<b>0,0012</b>	-0,0300	1,00	1,00
33	0,11	<b>0,1098</b>	0,0255	0,0007	0,1096	<b>0,0255</b>	<b>0,0007</b>	-0,1259	1,00	1,00
34	0,05	<b>0,0501</b>	0,0237	0,0006	0,0505	<b>0,0230</b>	<b>0,0005</b>	-0,8065	1,03	1,06
35	0,05	<b>0,0503</b>	0,0240	0,0006	0,0506	<b>0,0232</b>	<b>0,0005</b>	-0,6489	1,03	1,07
36	0,03	<b>0,0323</b>	0,0231	0,0005	0,0324	<b>0,0171</b>	<b>0,0003</b>	-0,5292	1,35	1,80
37	0,05	<b>0,0501</b>	0,0179	0,0003	0,0501	<b>0,0179</b>	<b>0,0003</b>	-0,0479	1,00	1,00
38	0,11	0,1100	0,0257	0,0007	<b>0,1100</b>	<b>0,0257</b>	<b>0,0007</b>	0,0009	1,00	1,00
39	0,05	<b>0,0502</b>	0,0242	0,0006	0,0506	<b>0,0230</b>	<b>0,0005</b>	-0,8816	1,05	1,10
40	0,05	<b>0,0502</b>	<b>0,0178</b>	<b>0,0003</b>	0,0503	0,0178	0,0003	-0,1193	1,00	1,00
41	0,11	<b>0,1098</b>	0,0255	0,0007	0,1096	<b>0,0255</b>	<b>0,0006</b>	-0,1191	1,00	1,00
42	0,13	0,1293	0,0365	0,0013	<b>0,1295</b>	<b>0,0363</b>	<b>0,0013</b>	0,1567	1,01	1,01
43	0,03	<b>0,0302</b>	0,0140	0,0002	0,0303	<b>0,0138</b>	<b>0,0002</b>	-0,5321	1,02	1,03
44	0,13	0,1294	0,0369	0,0014	<b>0,1297</b>	<b>0,0366</b>	<b>0,0013</b>	0,2234	1,01	1,02
45	0,05	<b>0,0502</b>	0,0236	0,0006	0,0507	<b>0,0232</b>	<b>0,0005</b>	-1,0962	1,02	1,03
46	0,13	0,1299	0,0274	0,0007	<b>0,1299</b>	<b>0,0273</b>	<b>0,0007</b>	0,0152	1,00	1,00
47	0,03	0,0330	0,0275	0,0008	<b>0,0326</b>	<b>0,0173</b>	<b>0,0003</b>	1,2374	1,59	2,51
48	0,03	<b>0,0303</b>	0,0139	0,0002	0,0304	<b>0,0137</b>	<b>0,0002</b>	-0,3868	1,02	1,03

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 33,33 97,92 97,92

**Tabela 3.4.** Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de  $\theta_1$  pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples.

id	$\theta_1$	MV			MS			DVAR ( $\times 100$ )	Razões	
		Média	DP	EQM	Média	DP	EQM		DP	EQM
1	0,07	0,0692	0,0281	0,0008	<b>0,0701</b>	<b>0,0277</b>	<b>0,0008</b>	1,0755	1,01	1,03
2	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0178</b>	<b>0,0003</b>	0,0502	0,0178	0,0003	-0,2954	1,00	1,00
3	0,07	0,0688	0,0277	0,0008	<b>0,0698</b>	<b>0,0273</b>	<b>0,0007</b>	1,4522	1,02	1,03
4	0,05	<b>0,0503</b>	0,0235	0,0006	0,0506	<b>0,0232</b>	<b>0,0005</b>	-0,5371	1,01	1,03
5	0,05	0,0499	0,0177	0,0003	<b>0,0500</b>	<b>0,0177</b>	<b>0,0003</b>	0,0549	1,00	1,00
6	0,05	<b>0,0500</b>	0,0178	0,0003	0,0501	<b>0,0177</b>	<b>0,0003</b>	-0,0278	1,00	1,00
7	0,07	<b>0,0696</b>	0,0208	0,0004	0,0696	<b>0,0206</b>	<b>0,0004</b>	-0,0517	1,01	1,02
8	0,05	0,0499	0,0176	0,0003	<b>0,0499</b>	<b>0,0176</b>	<b>0,0003</b>	0,0265	1,00	1,00
9	0,07	0,0702	0,0208	0,0004	<b>0,0702</b>	<b>0,0208</b>	<b>0,0004</b>	0,0109	1,00	1,00
10	0,05	0,0499	0,0178	0,0003	<b>0,0500</b>	<b>0,0177</b>	<b>0,0003</b>	0,0434	1,00	1,00
11	0,07	0,0703	0,0277	0,0008	<b>0,0699</b>	<b>0,0276</b>	<b>0,0008</b>	0,3994	1,00	1,01
12	0,05	<b>0,0503</b>	0,0235	0,0006	0,0505	<b>0,0231</b>	<b>0,0005</b>	-0,5369	1,02	1,04
13	0,05	0,0510	0,0243	0,0006	<b>0,0510</b>	<b>0,0233</b>	<b>0,0005</b>	0,0004	1,04	1,09
14	0,05	0,0509	0,0295	0,0009	<b>0,0508</b>	<b>0,0233</b>	<b>0,0005</b>	0,0366	1,27	1,61
15	0,07	0,0691	0,0279	0,0008	<b>0,0700</b>	<b>0,0274</b>	<b>0,0007</b>	1,3224	1,02	1,04
16	0,07	0,0699	0,0274	0,0008	<b>0,0700</b>	<b>0,0274</b>	<b>0,0007</b>	0,0811	1,00	1,00
17	0,07	<b>0,0701</b>	0,0278	0,0008	0,0702	<b>0,0277</b>	<b>0,0008</b>	-0,1481	1,00	1,01
18	0,07	<b>0,0700</b>	0,0211	0,0004	0,0700	<b>0,0210</b>	<b>0,0004</b>	-0,0282	1,01	1,02
19	0,05	<b>0,0500</b>	0,0178	0,0003	0,0499	<b>0,0177</b>	<b>0,0003</b>	-0,1464	1,00	1,01
20	0,07	<b>0,0702</b>	0,0209	<b>0,0004</b>	0,0702	<b>0,0209</b>	0,0004	-0,0022	1,00	1,00
21	0,05	<b>0,0501</b>	0,0178	0,0003	0,0501	<b>0,0178</b>	<b>0,0003</b>	-0,0382	1,00	1,00
22	0,07	0,0703	0,0276	0,0008	<b>0,0699</b>	<b>0,0275</b>	<b>0,0008</b>	0,1618	1,00	1,01
23	0,07	0,0686	0,0280	0,0008	<b>0,0698</b>	<b>0,0273</b>	<b>0,0007</b>	1,7342	1,02	1,05
24	0,05	0,0503	0,0177	0,0003	<b>0,0501</b>	<b>0,0177</b>	<b>0,0003</b>	0,3373	1,00	1,01
25	0,07	<b>0,0699</b>	0,0211	0,0004	0,0702	<b>0,0210</b>	<b>0,0004</b>	-0,1351	1,01	1,01
26	0,05	<b>0,0499</b>	0,0179	0,0003	0,0501	<b>0,0179</b>	<b>0,0003</b>	-0,1468	1,00	1,00
27	0,07	<b>0,0700</b>	0,0211	0,0004	0,0700	<b>0,0211</b>	<b>0,0004</b>	-0,0007	1,00	1,00
28	0,07	<b>0,0701</b>	<b>0,0209</b>	<b>0,0004</b>	0,0701	0,0209	0,0004	-0,0007	1,00	1,00
29	0,05	<b>0,0503</b>	0,0235	0,0006	0,0506	<b>0,0231</b>	<b>0,0005</b>	-0,5298	1,02	1,03
30	0,05	0,0510	0,0243	0,0006	<b>0,0509</b>	<b>0,0231</b>	<b>0,0005</b>	0,1266	1,05	1,11
31	0,07	0,0690	0,0281	0,0008	<b>0,0701</b>	<b>0,0273</b>	<b>0,0007</b>	1,2935	1,03	1,06
32	0,07	0,0705	0,0280	0,0008	<b>0,0702</b>	<b>0,0274</b>	<b>0,0008</b>	0,3070	1,02	1,04
33	0,07	<b>0,0702</b>	0,0209	0,0004	0,0702	<b>0,0209</b>	<b>0,0004</b>	-0,0309	1,00	1,00
34	0,05	0,0513	0,0305	0,0009	<b>0,0508</b>	<b>0,0232</b>	<b>0,0005</b>	0,9126	1,32	1,74
35	0,05	0,0510	0,0298	0,0009	<b>0,0507</b>	<b>0,0231</b>	<b>0,0005</b>	0,5582	1,29	1,67
36	0,07	0,0685	0,0295	0,0009	<b>0,0696</b>	<b>0,0275</b>	<b>0,0008</b>	1,5426	1,07	1,16
37	0,05	0,0499	0,0178	0,0003	<b>0,0500</b>	<b>0,0178</b>	<b>0,0003</b>	0,0500	1,00	1,00
38	0,07	0,0701	0,0208	0,0004	<b>0,0701</b>	<b>0,0208</b>	<b>0,0004</b>	0,0022	1,00	1,00
39	0,05	0,0516	0,0361	0,0013	<b>0,0510</b>	<b>0,0231</b>	<b>0,0005</b>	1,2981	1,57	2,45
40	0,05	<b>0,0503</b>	0,0197	0,0004	0,0503	<b>0,0178</b>	<b>0,0003</b>	-0,1513	1,11	1,23
41	0,07	<b>0,0702</b>	<b>0,0208</b>	<b>0,0004</b>	0,0704	0,0208	0,0004	-0,3620	1,00	1,00
42	0,05	<b>0,0505</b>	0,0235	0,0006	0,0508	<b>0,0232</b>	<b>0,0005</b>	-0,5884	1,02	1,03
43	0,07	0,0697	0,0209	0,0004	<b>0,0699</b>	<b>0,0208</b>	<b>0,0004</b>	0,2563	1,01	1,01
44	0,05	<b>0,0505</b>	0,0238	0,0006	0,0508	<b>0,0233</b>	<b>0,0005</b>	-0,5170	1,02	1,05
45	0,05	<b>0,0502</b>	0,0243	0,0006	0,0506	<b>0,0231</b>	<b>0,0005</b>	-0,8368	1,05	1,10
46	0,05	<b>0,0501</b>	0,0178	0,0003	0,0501	<b>0,0177</b>	<b>0,0003</b>	-0,0153	1,00	1,00
47	0,07	0,0688	0,0307	0,0009	<b>0,0696</b>	<b>0,0274</b>	<b>0,0007</b>	1,1445	1,12	1,26
48	0,07	0,0699	0,0209	0,0004	<b>0,0701</b>	<b>0,0207</b>	<b>0,0004</b>	0,0254	1,01	1,01

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 54,1667 93,75 91,67

**Tabela 3.5.** Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de  $\theta_2$  pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples.

id	$\theta_2$	MV			MS			DVAR ( $\times 100$ )	Razões	
		Média	DP	EQM	Média	DP	EQM		DP	EQM
1	0,90	<b>0,8996</b>	0,0327	0,0011	0,8973	<b>0,0319</b>	<b>0,0010</b>	-0,2545	1,02	1,04
2	0,82	<b>0,8204</b>	0,0311	0,0010	0,8204	<b>0,0311</b>	<b>0,0010</b>	-0,0079	1,00	1,00
3	0,90	<b>0,8999</b>	0,0326	0,0011	0,8975	<b>0,0318</b>	<b>0,0010</b>	-0,2639	1,02	1,04
4	0,82	<b>0,8200</b>	0,0416	0,0017	0,8195	<b>0,0414</b>	<b>0,0017</b>	-0,0599	1,01	1,01
5	0,90	<b>0,8998</b>	0,0244	0,0006	0,8998	<b>0,0243</b>	<b>0,0006</b>	-0,0064	1,00	1,00
6	0,90	0,8998	0,0246	0,0006	<b>0,8998</b>	<b>0,0245</b>	<b>0,0006</b>	0,0021	1,00	1,00
7	0,90	0,9001	0,0243	0,0006	<b>0,9001</b>	<b>0,0242</b>	<b>0,0006</b>	0,0022	1,00	1,01
8	0,82	<b>0,8199</b>	0,0311	0,0010	0,8199	<b>0,0311</b>	<b>0,0010</b>	-0,0030	1,00	1,00
9	0,82	0,8197	0,0313	0,0010	<b>0,8197</b>	<b>0,0313</b>	<b>0,0010</b>	0,0004	1,00	1,00
10	0,90	<b>0,8999</b>	0,0244	0,0006	0,8999	<b>0,0244</b>	<b>0,0006</b>	-0,0058	1,00	1,00
11	0,82	<b>0,8200</b>	0,0416	0,0017	0,8202	<b>0,0416</b>	<b>0,0017</b>	-0,0256	1,00	1,00
12	0,82	0,8209	0,0415	0,0017	<b>0,8204</b>	<b>0,0413</b>	<b>0,0017</b>	0,0614	1,01	1,01
13	0,82	<b>0,8198</b>	0,0419	0,0018	0,8193	<b>0,0413</b>	<b>0,0017</b>	-0,0623	1,01	1,03
14	0,90	<b>0,8988</b>	0,0378	0,0014	0,8985	<b>0,0321</b>	<b>0,0010</b>	-0,0334	1,18	1,39
15	0,90	<b>0,9002</b>	0,0325	0,0011	0,8978	<b>0,0317</b>	<b>0,0010</b>	-0,2275	1,03	1,05
16	0,82	<b>0,8205</b>	0,0416	0,0017	0,8205	<b>0,0415</b>	<b>0,0017</b>	-0,0001	1,00	1,00
17	0,82	<b>0,8199</b>	0,0417	0,0017	0,8198	<b>0,0415</b>	<b>0,0017</b>	-0,0196	1,00	1,01
18	0,90	<b>0,8997</b>	0,0246	0,0006	0,8995	<b>0,0245</b>	<b>0,0006</b>	-0,0209	1,00	1,01
19	0,90	<b>0,9001</b>	0,0246	0,0006	0,9002	<b>0,0246</b>	<b>0,0006</b>	-0,0167	1,00	1,01
20	0,82	<b>0,8199</b>	0,0313	0,0010	0,8201	<b>0,0313</b>	<b>0,0010</b>	-0,0052	1,00	1,00
21	0,90	<b>0,8997</b>	0,0245	0,0006	0,8997	<b>0,0244</b>	<b>0,0006</b>	-0,0039	1,00	1,00
22	0,82	<b>0,8199</b>	0,0415	0,0017	0,8201	<b>0,0414</b>	<b>0,0017</b>	-0,0013	1,00	1,01
23	0,90	<b>0,8999</b>	0,0323	0,0010	0,8977	<b>0,0315</b>	<b>0,0010</b>	-0,2471	1,02	1,04
24	0,82	<b>0,8199</b>	0,0313	0,0010	0,8202	<b>0,0313</b>	<b>0,0010</b>	-0,0041	1,00	1,00
25	0,90	<b>0,8996</b>	0,0248	0,0006	0,8993	<b>0,0245</b>	<b>0,0006</b>	-0,0369	1,01	1,02
26	0,82	0,8203	0,0312	0,0010	<b>0,8203</b>	<b>0,0312</b>	<b>0,0010</b>	0,0094	1,00	1,00
27	0,82	0,8201	0,0312	0,0010	<b>0,8201</b>	<b>0,0312</b>	<b>0,0010</b>	0,0010	1,00	1,00
28	0,82	<b>0,8200</b>	0,0316	0,0010	0,8200	<b>0,0315</b>	<b>0,0010</b>	-0,0004	1,00	1,00
29	0,82	<b>0,8201</b>	0,0417	0,0017	0,8195	<b>0,0414</b>	<b>0,0017</b>	-0,0452	1,01	1,02
30	0,82	<b>0,8197</b>	0,0419	0,0018	0,8194	<b>0,0413</b>	<b>0,0017</b>	-0,0394	1,01	1,03
31	0,90	<b>0,8997</b>	0,0326	0,0011	0,8973	<b>0,0316</b>	<b>0,0010</b>	-0,2598	1,03	1,06
32	0,82	0,8194	0,0421	0,0018	<b>0,8196</b>	<b>0,0418</b>	<b>0,0017</b>	0,0222	1,01	1,02
33	0,82	<b>0,8200</b>	0,0315	0,0010	0,8201	<b>0,0315</b>	<b>0,0010</b>	-0,0143	1,00	1,00
34	0,90	0,8987	0,0380	0,0014	<b>0,8987</b>	<b>0,0320</b>	<b>0,0010</b>	0,0059	1,19	1,41
35	0,90	<b>0,8987</b>	0,0377	0,0014	0,8986	<b>0,0320</b>	<b>0,0010</b>	-0,0050	1,18	1,39
36	0,90	<b>0,8992</b>	0,0364	0,0013	0,8979	<b>0,0317</b>	<b>0,0010</b>	-0,1376	1,15	1,31
37	0,90	<b>0,9000</b>	0,0246	0,0006	0,8999	<b>0,0246</b>	<b>0,0006</b>	-0,0054	1,00	1,00
38	0,82	0,8199	0,0314	0,0010	<b>0,8199</b>	<b>0,0314</b>	<b>0,0010</b>	0,0001	1,00	1,00
39	0,90	0,8982	0,0427	0,0018	<b>0,8984</b>	<b>0,0318</b>	<b>0,0010</b>	0,0231	1,34	1,80
40	0,90	<b>0,8995</b>	0,0260	0,0007	0,8994	<b>0,0246</b>	<b>0,0006</b>	-0,0150	1,06	1,12
41	0,82	<b>0,8201</b>	<b>0,0313</b>	<b>0,0010</b>	0,8199	0,0313	0,0010	-0,0013	1,00	1,00
42	0,82	<b>0,8202</b>	0,0417	0,0017	0,8197	<b>0,0415</b>	<b>0,0017</b>	-0,0097	1,00	1,01
43	0,90	<b>0,9001</b>	0,0245	0,0006	0,8998	<b>0,0243</b>	<b>0,0006</b>	-0,0092	1,01	1,01
44	0,82	<b>0,8201</b>	0,0420	0,0018	0,8196	<b>0,0417</b>	<b>0,0017</b>	-0,0396	1,01	1,01
45	0,90	<b>0,8996</b>	0,0330	0,0011	0,8987	<b>0,0318</b>	<b>0,0010</b>	-0,1074	1,04	1,08
46	0,82	0,8201	0,0312	0,0010	<b>0,8200</b>	<b>0,0312</b>	<b>0,0010</b>	0,0033	1,00	1,00
47	0,90	<b>0,8982</b>	0,0399	0,0016	0,8978	<b>0,0316</b>	<b>0,0010</b>	-0,0478	1,26	1,59
48	0,90	<b>0,8998</b>	0,0244	0,0006	0,8995	<b>0,0243</b>	<b>0,0006</b>	-0,0301	1,01	1,01

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 22,9167 97,92 97,92

**Tabela 3.6.** Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de  $\pi_0^1$  pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples.

id	$\pi_0^1$	MV			MS			DVAR ( $\times 100$ )	Razões	
		Média	DP	EQM	Média	DP	EQM		DP	EQM
1	0,13	0,1785	0,1804	0,0349	<b>0,1301</b>	<b>0,0470</b>	<b>0,0022</b>	37,2063	3,84	15,80
2	0,13	<b>0,1298</b>	0,0226	0,0005	0,1291	<b>0,0221</b>	<b>0,0005</b>	-0,5305	1,02	1,05
3	0,13	0,1806	0,1826	0,0359	<b>0,1304</b>	<b>0,0466</b>	<b>0,0022</b>	38,5709	3,92	16,54
4	0,11	0,1097	0,0204	0,0004	<b>0,1099</b>	<b>0,0196</b>	<b>0,0004</b>	0,1337	1,04	1,07
5	0,11	0,1107	0,0299	0,0009	<b>0,1102</b>	<b>0,0247</b>	<b>0,0006</b>	0,3810	1,21	1,46
6	0,13	0,1306	0,0416	0,0017	<b>0,1301</b>	<b>0,0378</b>	<b>0,0014</b>	0,4396	1,10	1,21
7	0,11	0,1156	0,0785	0,0062	<b>0,1095</b>	<b>0,0485</b>	<b>0,0024</b>	4,6319	1,62	2,63
8	0,13	0,1298	0,0157	0,0002	<b>0,1299</b>	<b>0,0156</b>	<b>0,0002</b>	0,0075	1,00	1,00
9	0,11	<b>0,1101</b>	0,0160	0,0003	0,1101	<b>0,0159</b>	<b>0,0003</b>	-0,0050	1,00	1,00
10	0,11	0,1105	0,0288	0,0008	<b>0,1102</b>	<b>0,0248</b>	<b>0,0006</b>	0,3124	1,16	1,35
11	0,13	0,1294	0,0342	0,0012	<b>0,1296</b>	<b>0,0334</b>	<b>0,0011</b>	0,1677	1,03	1,05
12	0,13	0,1298	0,0215	0,0005	<b>0,1300</b>	<b>0,0212</b>	<b>0,0004</b>	0,1824	1,02	1,03
13	0,11	0,1092	0,0292	0,0009	<b>0,1096</b>	<b>0,0284</b>	<b>0,0008</b>	0,3819	1,03	1,05
14	0,11	0,1168	0,0824	0,0068	<b>0,1107</b>	<b>0,0494</b>	<b>0,0024</b>	5,5163	1,67	2,81
15	0,13	0,1798	0,1823	0,0357	<b>0,1301</b>	<b>0,0478</b>	<b>0,0023</b>	38,1955	3,82	15,64
16	0,11	<b>0,1095</b>	0,0328	0,0011	0,1092	<b>0,0312</b>	<b>0,0010</b>	-0,2573	1,05	1,11
17	0,11	0,1102	0,0234	0,0005	<b>0,1102</b>	<b>0,0216</b>	<b>0,0005</b>	0,0702	1,08	1,18
18	0,11	0,1164	0,0775	0,0060	<b>0,1111</b>	<b>0,0490</b>	<b>0,0024</b>	4,8054	1,58	2,51
19	0,11	<b>0,1098</b>	0,0379	0,0014	0,1095	<b>0,0359</b>	<b>0,0013</b>	-0,3442	1,05	1,11
20	0,13	<b>0,1297</b>	0,0249	0,0006	0,1290	<b>0,0243</b>	<b>0,0006</b>	-0,5422	1,02	1,05
21	0,13	0,1306	0,0290	0,0008	<b>0,1303</b>	<b>0,0266</b>	<b>0,0007</b>	0,1576	1,09	1,19
22	0,13	0,1298	0,0345	0,0012	<b>0,1299</b>	<b>0,0334</b>	<b>0,0011</b>	0,1012	1,03	1,06
23	0,11	0,1538	0,1639	0,0288	<b>0,1099</b>	<b>0,0436</b>	<b>0,0019</b>	39,7073	3,76	15,14
24	0,13	<b>0,1297</b>	0,0230	0,0005	0,1294	<b>0,0223</b>	<b>0,0005</b>	-0,2850	1,03	1,06
25	0,11	0,1167	0,0810	0,0066	<b>0,1102</b>	<b>0,0486</b>	<b>0,0024</b>	5,8789	1,66	2,79
26	0,11	<b>0,1096</b>	0,0210	0,0004	0,1094	<b>0,0207</b>	<b>0,0004</b>	-0,2352	1,02	1,03
27	0,11	0,1098	0,0158	0,0003	<b>0,1098</b>	<b>0,0158</b>	<b>0,0002</b>	0,0004	1,00	1,00
28	0,13	0,1299	0,0171	0,0003	<b>0,1299</b>	<b>0,0170</b>	<b>0,0003</b>	0,0013	1,00	1,00
29	0,11	0,1098	0,0200	0,0004	<b>0,1100</b>	<b>0,0196</b>	<b>0,0004</b>	0,1920	1,02	1,04
30	0,13	0,1291	0,0318	0,0010	<b>0,1293</b>	<b>0,0304</b>	<b>0,0009</b>	0,2067	1,05	1,09
31	0,13	0,1769	0,1722	0,0318	<b>0,1303</b>	<b>0,0472</b>	<b>0,0022</b>	35,8508	3,65	14,31
32	0,11	0,1095	0,0317	0,0010	<b>0,1095</b>	<b>0,0314</b>	<b>0,0010</b>	0,0014	1,01	1,02
33	0,13	0,1304	0,0249	0,0006	<b>0,1299</b>	<b>0,0245</b>	<b>0,0006</b>	0,2492	1,02	1,04
34	0,13	0,1365	0,0844	0,0072	<b>0,1296</b>	<b>0,0534</b>	<b>0,0029</b>	4,6791	1,58	2,51
35	0,11	0,1162	0,0817	0,0067	<b>0,1099</b>	<b>0,0503</b>	<b>0,0025</b>	5,5735	1,62	2,65
36	0,11	0,1529	0,1652	0,0291	<b>0,1117</b>	<b>0,0646</b>	<b>0,0042</b>	37,5289	2,56	6,97
37	0,13	0,1305	0,0317	0,0010	<b>0,1301</b>	<b>0,0268</b>	<b>0,0007</b>	0,3150	1,18	1,40
38	0,11	0,1099	0,0160	0,0003	<b>0,1099</b>	<b>0,0160</b>	<b>0,0003</b>	0,0028	1,00	1,00
39	0,13	0,1363	0,0849	0,0072	<b>0,1295</b>	<b>0,0533</b>	<b>0,0028</b>	4,4718	1,59	2,55
40	0,13	0,1305	0,0424	0,0018	<b>0,1300</b>	<b>0,0381</b>	<b>0,0015</b>	0,3864	1,11	1,24
41	0,13	<b>0,1299</b>	0,0250	0,0006	0,1294	<b>0,0242</b>	<b>0,0006</b>	-0,3558	1,03	1,07
42	0,13	0,1299	0,0215	0,0005	<b>0,1301</b>	<b>0,0212</b>	<b>0,0005</b>	0,0010	1,01	1,02
43	0,13	0,1374	0,0759	0,0058	<b>0,1303</b>	<b>0,0363</b>	<b>0,0013</b>	5,4830	2,09	4,41
44	0,11	0,1097	0,0208	0,0004	<b>0,1099</b>	<b>0,0199</b>	<b>0,0004</b>	0,1876	1,04	1,09
45	0,11	0,1173	0,0776	0,0061	<b>0,1102</b>	<b>0,0345</b>	<b>0,0012</b>	6,5215	2,25	5,09
46	0,11	0,1099	0,0145	0,0002	<b>0,1099</b>	<b>0,0145</b>	<b>0,0002</b>	0,0097	1,00	1,00
47	0,11	0,1508	0,1599	0,0272	<b>0,1123</b>	<b>0,0651</b>	<b>0,0042</b>	34,9368	2,46	6,42
48	0,13	0,1358	0,0682	0,0047	<b>0,1300</b>	<b>0,0363</b>	<b>0,0013</b>	4,4453	1,88	3,56

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 83,3333 100,00 100,00



**Tabela 3.7.** Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de  $\pi_0^2$  pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples.

id	$\pi_0^2$	MV			MS			DVAR ( $\times 100$ )	Razões	
		Média	DP	EQM	Média	DP	EQM		DP	EQM
1	0,04	0,0437	0,0326	0,0011	<b>0,0400</b>	<b>0,0275</b>	<b>0,0008</b>	9,2724	1,19	1,42
2	0,08	0,0801	0,0181	0,0003	<b>0,0799</b>	<b>0,0180</b>	<b>0,0003</b>	0,0382	1,01	1,02
3	0,08	0,0809	0,0391	0,0015	<b>0,0798</b>	<b>0,0370</b>	<b>0,0014</b>	0,8561	1,06	1,12
4	0,04	0,0399	0,0124	0,0002	<b>0,0399</b>	<b>0,0123</b>	<b>0,0002</b>	0,0613	1,01	1,02
5	0,08	0,0800	0,0214	0,0005	<b>0,0800</b>	<b>0,0214</b>	<b>0,0005</b>	0,0168	1,00	1,00
6	0,08	<b>0,0800</b>	0,0313	0,0010	0,0798	<b>0,0308</b>	<b>0,0009</b>	-0,2512	1,02	1,04
7	0,04	0,0411	0,0337	0,0011	<b>0,0402</b>	<b>0,0304</b>	<b>0,0009</b>	2,3073	1,11	1,23
8	0,04	0,0401	0,0090	0,0001	<b>0,0401</b>	<b>0,0090</b>	<b>0,0001</b>	0,0067	1,00	1,00
9	0,04	<b>0,0401</b>	0,0100	0,0001	0,0401	<b>0,0100</b>	<b>0,0001</b>	-0,0054	1,00	1,00
10	0,04	0,0402	0,0158	0,0002	<b>0,0401</b>	<b>0,0155</b>	<b>0,0002</b>	0,1123	1,02	1,03
11	0,04	0,0399	0,0197	0,0004	<b>0,0401</b>	<b>0,0195</b>	<b>0,0004</b>	0,0415	1,01	1,02
12	0,08	0,0799	0,0174	0,0003	<b>0,0800</b>	<b>0,0171</b>	<b>0,0003</b>	0,0797	1,02	1,03
13	0,04	0,0399	0,0181	0,0003	<b>0,0400</b>	<b>0,0178</b>	<b>0,0003</b>	0,2834	1,02	1,03
14	0,04	0,0418	0,0427	0,0018	<b>0,0404</b>	<b>0,0316</b>	<b>0,0010</b>	3,5408	1,35	1,83
15	0,04	0,0439	0,0345	0,0012	<b>0,0398</b>	<b>0,0276</b>	<b>0,0008</b>	9,3772	1,25	1,58
16	0,08	0,0801	0,0276	0,0008	<b>0,0800</b>	<b>0,0272</b>	<b>0,0007</b>	0,1627	1,02	1,03
17	0,08	0,0798	0,0189	0,0004	<b>0,0798</b>	<b>0,0189</b>	<b>0,0004</b>	0,0285	1,00	1,00
18	0,04	0,0409	0,0332	0,0011	<b>0,0408</b>	<b>0,0313</b>	<b>0,0010</b>	0,4380	1,06	1,13
19	0,08	0,0805	0,0320	0,0010	<b>0,0803</b>	<b>0,0312</b>	<b>0,0010</b>	0,2205	1,03	1,05
20	0,08	0,0801	0,0202	0,0004	<b>0,0799</b>	<b>0,0200</b>	<b>0,0004</b>	0,0248	1,01	1,02
21	0,08	0,0800	0,0216	0,0005	<b>0,0800</b>	<b>0,0216</b>	<b>0,0005</b>	0,0325	1,00	1,01
22	0,04	<b>0,0402</b>	0,0202	0,0004	0,0404	<b>0,0201</b>	<b>0,0004</b>	-0,7144	1,01	1,01
23	0,08	0,0843	0,0436	0,0019	<b>0,0803</b>	<b>0,0380</b>	<b>0,0014</b>	5,0141	1,15	1,33
24	0,08	0,0801	0,0185	0,0003	<b>0,0801</b>	<b>0,0183</b>	<b>0,0003</b>	0,0130	1,01	1,02
25	0,04	0,0409	0,0341	0,0012	<b>0,0401</b>	<b>0,0302</b>	<b>0,0009</b>	2,0095	1,13	1,28
26	0,08	0,0801	0,0183	0,0003	<b>0,0799</b>	<b>0,0182</b>	<b>0,0003</b>	0,0180	1,01	1,01
27	0,08	<b>0,0802</b>	0,0138	0,0002	0,0802	<b>0,0138</b>	<b>0,0002</b>	-0,0050	1,00	1,00
28	0,08	<b>0,0801</b>	0,0137	0,0002	0,0801	<b>0,0137</b>	<b>0,0002</b>	-0,0031	1,00	1,00
29	0,04	<b>0,0401</b>	0,0126	0,0002	0,0401	<b>0,0124</b>	<b>0,0002</b>	-0,0596	1,01	1,03
30	0,08	<b>0,0800</b>	0,0254	0,0006	0,0798	<b>0,0247</b>	<b>0,0006</b>	-0,1653	1,03	1,06
31	0,08	0,0806	0,0398	0,0016	<b>0,0797</b>	<b>0,0375</b>	<b>0,0014</b>	0,4736	1,06	1,13
32	0,04	0,0398	0,0195	0,0004	<b>0,0399</b>	<b>0,0194</b>	<b>0,0004</b>	0,0880	1,00	1,01
33	0,04	0,0400	0,0144	0,0002	<b>0,0400</b>	<b>0,0144</b>	<b>0,0002</b>	0,0529	1,00	1,00
34	0,04	0,0417	0,0396	0,0016	<b>0,0401</b>	<b>0,0316</b>	<b>0,0010</b>	3,8544	1,25	1,57
35	0,08	0,0812	0,0483	0,0023	<b>0,0800</b>	<b>0,0431</b>	<b>0,0019</b>	1,4981	1,12	1,26
36	0,08	0,0864	0,0701	0,0050	<b>0,0804</b>	<b>0,0549</b>	<b>0,0030</b>	7,4587	1,28	1,64
37	0,04	0,0401	0,0157	0,0002	<b>0,0401</b>	<b>0,0156</b>	<b>0,0002</b>	0,0723	1,00	1,01
38	0,04	<b>0,0400</b>	<b>0,0100</b>	<b>0,0001</b>	0,0400	0,0100	0,0001	-0,0017	1,00	1,00
39	0,04	0,0418	0,0393	0,0015	<b>0,0407</b>	<b>0,0319</b>	<b>0,0010</b>	2,5726	1,23	1,52
40	0,04	<b>0,0405</b>	0,0240	0,0006	0,0408	<b>0,0231</b>	<b>0,0005</b>	-0,7243	1,04	1,08
41	0,08	0,0801	0,0201	0,0004	<b>0,0801</b>	<b>0,0198</b>	<b>0,0004</b>	0,0975	1,01	1,03
42	0,04	<b>0,0400</b>	0,0125	0,0002	0,0400	<b>0,0123</b>	<b>0,0002</b>	-0,0402	1,01	1,02
43	0,04	0,0411	0,0254	0,0006	<b>0,0400</b>	<b>0,0212</b>	<b>0,0004</b>	2,7448	1,20	1,44
44	0,08	0,0799	0,0175	0,0003	<b>0,0799</b>	<b>0,0171</b>	<b>0,0003</b>	0,0639	1,02	1,04
45	0,08	0,0806	0,0315	0,0010	<b>0,0800</b>	<b>0,0299</b>	<b>0,0009</b>	0,7271	1,06	1,12
46	0,04	<b>0,0401</b>	0,0091	0,0001	0,0401	<b>0,0091</b>	<b>0,0001</b>	-0,0139	1,00	1,00
47	0,08	0,0898	0,0799	0,0065	<b>0,0813</b>	<b>0,0564</b>	<b>0,0032</b>	10,6155	1,42	2,03
48	0,08	0,0805	0,0307	0,0009	<b>0,0799</b>	<b>0,0293</b>	<b>0,0009</b>	0,5805	1,05	1,10

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 77,0833 97,92 97,92

**Tabela 3.8.** Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de  $\pi_1^0$  pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples.

id	$\pi_1^0$	MV			MS			DVAR ( $\times 100$ )	Razões	
		Média	DP	EQM	Média	DP	EQM		DP	EQM
1	0,08	<b>0,0801</b>	0,0391	0,0015	0,0798	<b>0,0244</b>	<b>0,0006</b>	-0,1931	1,60	2,57
2	0,08	<b>0,0812</b>	0,0372	0,0014	0,0823	<b>0,0329</b>	<b>0,0011</b>	-1,4315	1,13	1,27
3	0,08	<b>0,0801</b>	0,0392	0,0015	0,0799	<b>0,0249</b>	<b>0,0006</b>	-0,0571	1,57	2,48
4	0,12	0,1275	0,0822	0,0068	<b>0,1195</b>	<b>0,0357</b>	<b>0,0013</b>	5,8933	2,30	5,34
5	0,12	0,1202	0,0299	0,0009	<b>0,1199</b>	<b>0,0258</b>	<b>0,0007</b>	0,1469	1,16	1,33
6	0,12	0,1209	0,0422	0,0018	<b>0,1204</b>	<b>0,0372</b>	<b>0,0014</b>	0,3541	1,14	1,29
7	0,08	0,0796	0,0262	0,0007	<b>0,0798</b>	<b>0,0253</b>	<b>0,0006</b>	0,2476	1,04	1,07
8	0,08	0,0805	0,0280	0,0008	<b>0,0801</b>	<b>0,0218</b>	<b>0,0005</b>	0,5487	1,28	1,65
9	0,12	<b>0,1199</b>	0,0215	0,0005	0,1198	<b>0,0212</b>	<b>0,0004</b>	-0,0354	1,02	1,03
10	0,12	0,1202	0,0291	0,0008	<b>0,1200</b>	<b>0,0261</b>	<b>0,0007</b>	0,1870	1,11	1,24
11	0,12	0,1220	0,0537	0,0029	<b>0,1201</b>	<b>0,0427</b>	<b>0,0018</b>	1,6398	1,26	1,58
12	0,12	0,1279	0,0793	0,0064	<b>0,1199</b>	<b>0,0360</b>	<b>0,0013</b>	6,5475	2,21	4,91
13	0,08	0,0909	0,0958	0,0093	<b>0,0807</b>	<b>0,0436</b>	<b>0,0019</b>	12,7979	2,20	4,89
14	0,08	0,0882	0,0870	0,0076	<b>0,0804</b>	<b>0,0439</b>	<b>0,0019</b>	9,6436	1,98	3,97
15	0,08	0,0808	0,0416	0,0017	<b>0,0803</b>	<b>0,0246</b>	<b>0,0006</b>	0,6651	1,69	2,87
16	0,08	0,0821	0,0464	0,0022	<b>0,0811</b>	<b>0,0361</b>	<b>0,0013</b>	1,3313	1,28	1,65
17	0,08	0,0815	0,0417	0,0017	<b>0,0798</b>	<b>0,0246</b>	<b>0,0006</b>	1,6192	1,69	2,87
18	0,12	<b>0,1197</b>	0,0317	0,0010	0,1197	<b>0,0304</b>	<b>0,0009</b>	-0,0229	1,04	1,09
19	0,08	0,0802	0,0362	0,0013	<b>0,0798</b>	<b>0,0314</b>	<b>0,0010</b>	0,0223	1,15	1,33
20	0,08	<b>0,0804</b>	<b>0,0262</b>	<b>0,0007</b>	0,0813	0,0262	0,0007	-1,1026	1,00	0,99
21	0,08	0,0802	0,0257	0,0007	<b>0,0799</b>	<b>0,0214</b>	<b>0,0005</b>	0,0950	1,20	1,44
22	0,12	0,1221	0,0540	0,0029	<b>0,1200</b>	<b>0,0423</b>	<b>0,0018</b>	1,7297	1,28	1,63
23	0,12	0,1195	0,0416	0,0017	<b>0,1200</b>	<b>0,0293</b>	<b>0,0009</b>	0,3735	1,42	2,01
24	0,12	0,1211	0,0420	0,0018	<b>0,1210</b>	<b>0,0382</b>	<b>0,0015</b>	0,0454	1,10	1,21
25	0,08	0,0798	0,0266	0,0007	<b>0,0800</b>	<b>0,0257</b>	<b>0,0007</b>	0,1908	1,04	1,07
26	0,08	0,0811	0,0366	0,0013	<b>0,0811</b>	<b>0,0321</b>	<b>0,0010</b>	0,0117	1,14	1,30
27	0,08	0,0801	0,0190	0,0004	<b>0,0801</b>	<b>0,0178</b>	<b>0,0003</b>	0,0786	1,07	1,14
28	0,08	<b>0,0800</b>	0,0184	0,0003	0,0799	<b>0,0177</b>	<b>0,0003</b>	-0,0337	1,04	1,07
29	0,12	0,1294	0,0870	0,0077	<b>0,1202</b>	<b>0,0363</b>	<b>0,0013</b>	7,6756	2,40	5,81
30	0,12	0,1287	0,0870	0,0076	<b>0,1209</b>	<b>0,0529</b>	<b>0,0028</b>	6,4568	1,64	2,73
31	0,12	<b>0,1198</b>	0,0409	0,0017	0,1202	<b>0,0292</b>	<b>0,0009</b>	-0,0143	1,40	1,96
32	0,08	0,0815	0,0455	0,0021	<b>0,0804</b>	<b>0,0362</b>	<b>0,0013</b>	1,4135	1,26	1,58
33	0,08	<b>0,0800</b>	<b>0,0259</b>	<b>0,0007</b>	0,0806	0,0260	0,0007	-0,7431	1,00	1,00
34	0,08	0,0854	0,0746	0,0056	<b>0,0807</b>	<b>0,0434</b>	<b>0,0019</b>	5,9337	1,72	2,96
35	0,08	0,0856	0,0787	0,0062	<b>0,0794</b>	<b>0,0430</b>	<b>0,0018</b>	6,1606	1,83	3,36
36	0,12	0,1176	0,0508	0,0026	<b>0,1191</b>	<b>0,0424</b>	<b>0,0018</b>	1,2142	1,20	1,43
37	0,08	0,0803	0,0254	0,0006	<b>0,0801</b>	<b>0,0215</b>	<b>0,0005</b>	0,3071	1,18	1,40
38	0,12	0,1200	0,0211	0,0004	<b>0,1200</b>	<b>0,0211</b>	<b>0,0004</b>	0,0036	1,00	1,00
39	0,12	0,1239	0,0746	0,0056	<b>0,1200</b>	<b>0,0517</b>	<b>0,0027</b>	3,2894	1,44	2,09
40	0,12	<b>0,1201</b>	0,0394	0,0016	0,1197	<b>0,0368</b>	<b>0,0014</b>	-0,0925	1,07	1,15
41	0,12	<b>0,1199</b>	0,0317	0,0010	0,1202	<b>0,0306</b>	<b>0,0009</b>	-0,0733	1,04	1,08
42	0,08	0,0888	0,0831	0,0070	<b>0,0803</b>	<b>0,0301</b>	<b>0,0009</b>	10,6514	2,76	7,70
43	0,08	0,0798	0,0179	0,0003	<b>0,0800</b>	<b>0,0176</b>	<b>0,0003</b>	0,2189	1,01	1,03
44	0,08	0,0895	0,0858	0,0075	<b>0,0800</b>	<b>0,0299</b>	<b>0,0009</b>	11,8733	2,87	8,34
45	0,08	0,0878	0,0791	0,0063	<b>0,0801</b>	<b>0,0303</b>	<b>0,0009</b>	9,5935	2,61	6,87
46	0,12	0,1205	0,0300	0,0009	<b>0,1201</b>	<b>0,0258</b>	<b>0,0007</b>	0,2990	1,16	1,35
47	0,12	0,1175	0,0484	0,0023	<b>0,1192</b>	<b>0,0421</b>	<b>0,0018</b>	1,4123	1,15	1,32
48	0,12	0,1199	0,0216	0,0005	<b>0,1201</b>	<b>0,0212</b>	<b>0,0005</b>	0,0169	1,02	1,03

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 77,0833 95,83 95,83

**Tabela 3.9.** Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de  $\pi_1^2$  pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples.

id	$\pi_1^2$	MV			MS			DVAR ( $\times 100$ )	Razões	
		Média	DP	EQM	Média	DP	EQM		DP	EQM
1	0,09	0,0898	0,0272	0,0007	<b>0,0901</b>	<b>0,0261</b>	<b>0,0007</b>	0,0334	1,04	1,09
2	0,09	0,0904	0,0337	0,0011	<b>0,0901</b>	<b>0,0329</b>	<b>0,0011</b>	0,2695	1,02	1,05
3	0,09	0,0900	0,0288	0,0008	<b>0,0900</b>	<b>0,0265</b>	<b>0,0007</b>	0,0130	1,09	1,18
4	0,09	0,0895	0,0322	0,0010	<b>0,0901</b>	<b>0,0318</b>	<b>0,0010</b>	0,4600	1,01	1,03
5	0,09	<b>0,0900</b>	0,0227	0,0005	0,0900	<b>0,0227</b>	<b>0,0005</b>	-0,0076	1,00	1,00
6	0,09	<b>0,0902</b>	0,0337	0,0011	0,0898	<b>0,0326</b>	<b>0,0011</b>	-0,0104	1,03	1,07
7	0,13	<b>0,1305</b>	0,0327	0,0011	0,1294	<b>0,0311</b>	<b>0,0010</b>	-0,0976	1,05	1,10
8	0,13	0,1300	0,0267	0,0007	<b>0,1300</b>	<b>0,0266</b>	<b>0,0007</b>	0,0233	1,00	1,01
9	0,13	0,1301	0,0217	0,0005	<b>0,1301</b>	<b>0,0217</b>	<b>0,0005</b>	0,0274	1,00	1,00
10	0,13	0,1300	0,0267	0,0007	<b>0,1300</b>	<b>0,0267</b>	<b>0,0007</b>	0,0008	1,00	1,00
11	0,13	<b>0,1298</b>	0,0460	0,0021	0,1281	<b>0,0436</b>	<b>0,0019</b>	-1,2989	1,05	1,11
12	0,13	0,1293	0,0380	0,0014	<b>0,1298</b>	<b>0,0374</b>	<b>0,0014</b>	0,3899	1,02	1,03
13	0,09	0,0904	0,0493	0,0024	<b>0,0900</b>	<b>0,0454</b>	<b>0,0021</b>	0,3729	1,09	1,18
14	0,09	0,0922	0,0578	0,0033	<b>0,0905</b>	<b>0,0457</b>	<b>0,0021</b>	1,9008	1,26	1,60
15	0,09	0,0897	0,0279	0,0008	<b>0,0899</b>	<b>0,0258</b>	<b>0,0007</b>	0,2162	1,08	1,17
16	0,09	0,0908	0,0386	0,0015	<b>0,0903</b>	<b>0,0373</b>	<b>0,0014</b>	0,4912	1,03	1,07
17	0,09	0,0903	0,0261	0,0007	<b>0,0903</b>	<b>0,0261</b>	<b>0,0007</b>	0,0320	1,00	1,01
18	0,09	<b>0,0898</b>	0,0273	0,0007	0,0895	<b>0,0265</b>	<b>0,0007</b>	-0,3339	1,03	1,06
19	0,13	0,1309	0,0400	0,0016	<b>0,1297</b>	<b>0,0381</b>	<b>0,0015</b>	0,4536	1,05	1,10
20	0,13	<b>0,1303</b>	0,0321	0,0010	0,1291	<b>0,0310</b>	<b>0,0010</b>	-0,4755	1,04	1,07
21	0,13	<b>0,1301</b>	0,0266	0,0007	0,1301	<b>0,0265</b>	<b>0,0007</b>	-0,0132	1,00	1,01
22	0,13	<b>0,1302</b>	0,0458	0,0021	0,1284	<b>0,0434</b>	<b>0,0019</b>	-1,1120	1,06	1,11
23	0,13	<b>0,1303</b>	0,0345	0,0012	0,1304	<b>0,0308</b>	<b>0,0009</b>	-0,0313	1,12	1,26
24	0,13	<b>0,1305</b>	0,0400	0,0016	0,1286	<b>0,0379</b>	<b>0,0014</b>	-0,7040	1,06	1,12
25	0,09	<b>0,0902</b>	0,0279	0,0008	0,0909	<b>0,0272</b>	<b>0,0007</b>	-0,7164	1,02	1,05
26	0,09	<b>0,0903</b>	0,0339	0,0011	0,0910	<b>0,0334</b>	<b>0,0011</b>	-0,7698	1,02	1,03
27	0,09	<b>0,0900</b>	<b>0,0186</b>	<b>0,0003</b>	0,0900	0,0186	0,0003	-0,0013	1,00	1,00
28	0,09	<b>0,0899</b>	0,0186	0,0003	0,0899	<b>0,0186</b>	<b>0,0003</b>	-0,0020	1,00	1,00
29	0,09	0,0894	0,0334	0,0011	<b>0,0899</b>	<b>0,0321</b>	<b>0,0010</b>	0,5718	1,04	1,08
30	0,09	0,0918	0,0522	0,0027	<b>0,0910</b>	<b>0,0470</b>	<b>0,0022</b>	0,8282	1,11	1,24
31	0,09	0,0903	0,0301	0,0009	<b>0,0900</b>	<b>0,0260</b>	<b>0,0007</b>	0,2841	1,15	1,33
32	0,13	0,1311	0,0474	0,0022	<b>0,1298</b>	<b>0,0437</b>	<b>0,0019</b>	0,6578	1,08	1,17
33	0,13	0,1306	0,0330	0,0011	<b>0,1298</b>	<b>0,0317</b>	<b>0,0010</b>	0,2606	1,04	1,09
34	0,13	0,1339	0,0722	0,0052	<b>0,1303</b>	<b>0,0542</b>	<b>0,0029</b>	2,7859	1,33	1,78
35	0,13	0,1345	0,0711	0,0051	<b>0,1307</b>	<b>0,0543</b>	<b>0,0029</b>	2,9145	1,31	1,72
36	0,13	0,1314	0,0552	0,0031	<b>0,1294</b>	<b>0,0447</b>	<b>0,0020</b>	0,6075	1,24	1,53
37	0,09	0,0900	0,0234	0,0005	<b>0,0900</b>	<b>0,0227</b>	<b>0,0005</b>	0,0442	1,03	1,06
38	0,09	<b>0,0899</b>	0,0186	0,0003	0,0899	<b>0,0186</b>	<b>0,0003</b>	-0,0033	1,00	1,00
39	0,09	0,0943	0,0663	0,0044	<b>0,0917</b>	<b>0,0472</b>	<b>0,0022</b>	2,8813	1,41	1,98
40	0,09	<b>0,0909</b>	0,0366	0,0013	0,0916	<b>0,0339</b>	<b>0,0012</b>	-0,8244	1,08	1,17
41	0,09	<b>0,0905</b>	0,0280	0,0008	0,0912	<b>0,0275</b>	<b>0,0008</b>	-0,7743	1,02	1,04
42	0,13	0,1293	0,0390	0,0015	<b>0,1302</b>	<b>0,0371</b>	<b>0,0014</b>	0,3703	1,05	1,10
43	0,13	<b>0,1301</b>	0,0223	0,0005	0,1301	<b>0,0219</b>	<b>0,0005</b>	-0,0328	1,02	1,04
44	0,13	0,1295	0,0391	0,0015	<b>0,1300</b>	<b>0,0375</b>	<b>0,0014</b>	0,3455	1,04	1,09
45	0,13	0,1303	0,0428	0,0018	<b>0,1300</b>	<b>0,0369</b>	<b>0,0014</b>	0,2427	1,16	1,34
46	0,13	0,1297	0,0266	0,0007	<b>0,1297</b>	<b>0,0265</b>	<b>0,0007</b>	0,0039	1,00	1,01
47	0,13	0,1322	0,0560	0,0031	<b>0,1302</b>	<b>0,0439</b>	<b>0,0019</b>	1,4967	1,28	1,63
48	0,13	<b>0,1299</b>	0,0222	0,0005	0,1299	<b>0,0219</b>	<b>0,0005</b>	-0,0064	1,02	1,03

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 60,4167 97,92 97,92

**Tabela 3.10.** Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de  $\pi_2^0$  pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples.

id	$\pi_2^0$	MV			MS			DVAR ( $\times 100$ )	Razões	
		Média	DP	EQM	Média	DP	EQM		DP	EQM
1	0,03	0,0301	<b>0,0039</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0301</b>	0,0039	0,0000	0,0137	1,00	1,00
2	0,03	<b>0,0300</b>	<b>0,0044</b>	<b>0,0000</b>	0,0301	0,0045	0,0000	-0,1033	1,00	1,00
3	0,03	<b>0,0300</b>	<b>0,0039</b>	<b>0,0000</b>	0,0300	0,0039	0,0000	-0,0059	1,00	1,00
4	0,03	<b>0,0299</b>	0,0041	0,0000	0,0299	<b>0,0041</b>	<b>0,0000</b>	-0,0110	1,00	1,00
5	0,03	0,0300	<b>0,0029</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0300</b>	0,0029	0,0000	0,0004	1,00	1,00
6	0,03	0,0300	<b>0,0042</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0300</b>	0,0042	0,0000	0,0515	1,00	1,00
7	0,03	<b>0,0300</b>	<b>0,0043</b>	<b>0,0000</b>	0,0300	0,0043	0,0000	-0,0530	1,00	1,00
8	0,03	<b>0,0300</b>	<b>0,0031</b>	<b>0,0000</b>	0,0300	0,0031	0,0000	-0,0020	1,00	1,00
9	0,03	0,0300	<b>0,0031</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0300</b>	0,0031	0,0000	0,0051	1,00	1,00
10	0,03	0,0300	<b>0,0029</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0300</b>	0,0029	0,0000	0,0018	1,00	1,00
11	0,03	<b>0,0300</b>	<b>0,0059</b>	<b>0,0000</b>	0,0300	0,0059	0,0000	-0,1148	1,00	1,00
12	0,03	<b>0,0300</b>	0,0041	0,0000	0,0300	<b>0,0041</b>	<b>0,0000</b>	-0,0009	1,00	1,00
13	0,06	0,0600	0,0083	0,0001	<b>0,0600</b>	<b>0,0083</b>	<b>0,0001</b>	0,0087	1,00	1,00
14	0,06	0,0599	0,0080	0,0001	<b>0,0600</b>	<b>0,0078</b>	<b>0,0001</b>	0,0619	1,01	1,03
15	0,06	<b>0,0600</b>	<b>0,0055</b>	<b>0,0000</b>	0,0599	0,0055	0,0000	-0,0322	1,00	1,00
16	0,06	<b>0,0600</b>	0,0082	0,0001	0,0600	<b>0,0082</b>	<b>0,0001</b>	-0,0268	1,00	1,00
17	0,06	0,0601	0,0057	0,0000	<b>0,0601</b>	<b>0,0057</b>	<b>0,0000</b>	0,0033	1,00	1,00
18	0,06	0,0600	0,0059	0,0000	<b>0,0600</b>	<b>0,0059</b>	<b>0,0000</b>	0,0047	1,00	1,00
19	0,06	0,0599	0,0060	0,0000	<b>0,0599</b>	<b>0,0060</b>	<b>0,0000</b>	0,0267	1,00	1,00
20	0,06	0,0600	0,0062	0,0000	<b>0,0600</b>	<b>0,0062</b>	<b>0,0000</b>	0,0432	1,00	1,00
21	0,06	<b>0,0600</b>	<b>0,0041</b>	<b>0,0000</b>	0,0600	0,0041	0,0000	-0,0017	1,00	1,00
22	0,06	0,0599	0,0082	0,0001	<b>0,0600</b>	<b>0,0082</b>	<b>0,0001</b>	0,0534	1,00	1,00
23	0,06	0,0601	<b>0,0055</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0600</b>	0,0055	0,0000	0,0430	1,00	1,00
24	0,06	0,0600	0,0062	0,0000	<b>0,0600</b>	<b>0,0062</b>	<b>0,0000</b>	0,0703	1,00	1,00
25	0,03	<b>0,0300</b>	0,0042	0,0000	0,0300	<b>0,0042</b>	<b>0,0000</b>	-0,0320	1,00	1,00
26	0,03	<b>0,0300</b>	<b>0,0044</b>	<b>0,0000</b>	0,0301	0,0044	0,0000	-0,0719	1,00	1,00
27	0,03	<b>0,0300</b>	<b>0,0031</b>	<b>0,0000</b>	0,0300	0,0031	0,0000	-0,0002	1,00	1,00
28	0,03	0,0300	0,0031	0,0000	<b>0,0300</b>	<b>0,0031</b>	<b>0,0000</b>	0,0008	1,00	1,00
29	0,03	<b>0,0300</b>	<b>0,0041</b>	<b>0,0000</b>	0,0300	0,0041	0,0000	-0,0133	1,00	1,00
30	0,03	0,0299	<b>0,0059</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0300</b>	0,0059	0,0000	0,1495	1,00	1,00
31	0,03	0,0300	0,0040	0,0000	<b>0,0300</b>	<b>0,0039</b>	<b>0,0000</b>	0,0370	1,00	1,00
32	0,03	0,0300	0,0059	0,0000	<b>0,0300</b>	<b>0,0059</b>	<b>0,0000</b>	0,0356	1,00	1,00
33	0,03	<b>0,0300</b>	0,0044	0,0000	0,0300	<b>0,0044</b>	<b>0,0000</b>	-0,0715	1,00	1,00
34	0,03	<b>0,0300</b>	0,0057	0,0000	0,0300	<b>0,0057</b>	<b>0,0000</b>	-0,1029	1,01	1,02
35	0,03	0,0299	0,0057	0,0000	<b>0,0299</b>	<b>0,0057</b>	<b>0,0000</b>	0,1459	1,01	1,02
36	0,03	<b>0,0300</b>	0,0057	0,0000	0,0301	<b>0,0057</b>	<b>0,0000</b>	-0,0305	1,00	1,01
37	0,06	0,0600	<b>0,0041</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0600</b>	0,0041	0,0000	0,0005	1,00	1,00
38	0,06	<b>0,0600</b>	<b>0,0043</b>	<b>0,0000</b>	0,0600	0,0043	0,0000	-0,0001	1,00	1,00
39	0,06	<b>0,0600</b>	0,0081	0,0001	0,0601	<b>0,0078</b>	<b>0,0001</b>	-0,0910	1,03	1,06
40	0,06	<b>0,0600</b>	0,0059	0,0000	0,0600	<b>0,0059</b>	<b>0,0000</b>	-0,0150	1,00	1,01
41	0,06	<b>0,0600</b>	0,0062	0,0000	0,0600	<b>0,0062</b>	<b>0,0000</b>	-0,0069	1,00	1,00
42	0,06	0,0600	<b>0,0057</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0600</b>	0,0057	0,0000	0,0037	1,00	1,00
43	0,06	<b>0,0600</b>	0,0041	0,0000	0,0600	<b>0,0041</b>	<b>0,0000</b>	-0,0035	1,00	1,00
44	0,06	<b>0,0600</b>	<b>0,0057</b>	<b>0,0000</b>	0,0600	0,0057	0,0000	-0,0062	1,00	1,00
45	0,06	<b>0,0600</b>	0,0054	0,0000	0,0600	<b>0,0054</b>	<b>0,0000</b>	-0,0048	1,00	1,00
46	0,06	<b>0,0600</b>	<b>0,0043</b>	<b>0,0000</b>	0,0600	0,0043	0,0000	-0,0012	1,00	1,00
47	0,06	0,0599	0,0080	0,0001	<b>0,0600</b>	<b>0,0078</b>	<b>0,0001</b>	0,0649	1,02	1,05
48	0,06	<b>0,0600</b>	<b>0,0041</b>	<b>0,0000</b>	0,0600	0,0041	0,0000	-0,0009	1,00	1,00

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 45,8333 52,08 52,08

**Tabela 3.11.** Média, desvio padrão e erro quadrático médio das estimativas de  $\pi_2^1$  pelos métodos de máxima verossimilhança e maioria simples.

id	$\pi_2^1$	MV			MS			DVAR ( $\times 100$ )	Razões	
		Média	DP	EQM	Média	DP	EQM		DP	EQM
1	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0049</b>	<b>0,0000</b>	0,0500	0,0049	0,0000	-0,0081	1,00	1,00
2	0,05	0,0500	0,0056	0,0000	<b>0,0500</b>	<b>0,0056</b>	<b>0,0000</b>	0,0239	1,00	1,00
3	0,05	<b>0,0499</b>	<b>0,0050</b>	<b>0,0000</b>	0,0499	0,0050	0,0000	-0,0424	1,00	1,00
4	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0053</b>	<b>0,0000</b>	0,0500	0,0053	0,0000	-0,0128	1,00	1,00
5	0,05	0,0500	<b>0,0038</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0500</b>	0,0038	0,0000	0,0016	1,00	1,00
6	0,05	<b>0,0501</b>	0,0054	0,0000	0,0501	<b>0,0054</b>	<b>0,0000</b>	-0,0438	1,00	1,00
7	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0055</b>	<b>0,0000</b>	0,0501	0,0055	0,0000	-0,1728	1,00	1,00
8	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0040</b>	<b>0,0000</b>	0,0500	0,0040	0,0000	-0,0033	1,00	1,00
9	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0039</b>	<b>0,0000</b>	0,0500	0,0039	0,0000	-0,0071	1,00	1,00
10	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0037</b>	<b>0,0000</b>	0,0500	0,0037	0,0000	-0,0003	1,00	1,00
11	0,05	0,0499	<b>0,0076</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0500</b>	0,0076	0,0001	0,2684	1,00	0,99
12	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0052</b>	<b>0,0000</b>	0,0500	0,0052	0,0000	-0,0131	1,00	1,00
13	0,05	0,0499	0,0076	0,0001	<b>0,0500</b>	<b>0,0076</b>	<b>0,0001</b>	0,0694	1,00	1,00
14	0,05	0,0499	0,0073	0,0001	<b>0,0500</b>	<b>0,0072</b>	<b>0,0001</b>	0,0836	1,01	1,03
15	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0050</b>	<b>0,0000</b>	0,0500	0,0050	0,0000	-0,0267	1,00	0,99
16	0,05	<b>0,0500</b>	0,0075	0,0001	0,0501	<b>0,0075</b>	<b>0,0001</b>	-0,0754	1,00	1,00
17	0,05	<b>0,0501</b>	<b>0,0052</b>	<b>0,0000</b>	0,0501	0,0052	0,0000	-0,0040	1,00	1,00
18	0,05	0,0499	0,0054	0,0000	<b>0,0500</b>	<b>0,0054</b>	<b>0,0000</b>	0,0372	1,00	1,00
19	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0054</b>	<b>0,0000</b>	0,0500	0,0054	0,0000	-0,0377	1,00	1,00
20	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0057</b>	<b>0,0000</b>	0,0501	0,0057	0,0000	-0,1762	1,00	1,00
21	0,05	<b>0,0500</b>	0,0038	0,0000	0,0500	<b>0,0038</b>	<b>0,0000</b>	-0,0009	1,00	1,00
22	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0075</b>	<b>0,0001</b>	0,0501	0,0075	0,0001	-0,2497	1,00	0,99
23	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0051</b>	<b>0,0000</b>	0,0500	0,0051	0,0000	-0,0099	1,00	0,99
24	0,05	<b>0,0500</b>	<b>0,0057</b>	<b>0,0000</b>	0,0501	0,0057	0,0000	-0,2133	1,00	1,00
25	0,09	<b>0,0899</b>	0,0071	0,0001	0,0899	<b>0,0071</b>	<b>0,0001</b>	-0,0541	1,00	1,01
26	0,09	<b>0,0900</b>	0,0075	0,0001	0,0899	<b>0,0074</b>	<b>0,0001</b>	-0,0548	1,00	1,01
27	0,09	0,0899	0,0052	0,0000	<b>0,0899</b>	<b>0,0052</b>	<b>0,0000</b>	0,0005	1,00	1,00
28	0,09	<b>0,0900</b>	<b>0,0052</b>	<b>0,0000</b>	0,0900	0,0052	0,0000	-0,0003	1,00	1,00
29	0,09	<b>0,0900</b>	<b>0,0069</b>	<b>0,0000</b>	0,0900	0,0069	0,0000	-0,0038	1,00	1,00
30	0,09	0,0900	0,0099	0,0001	<b>0,0900</b>	<b>0,0099</b>	<b>0,0001</b>	0,0134	1,01	1,01
31	0,09	0,0899	<b>0,0066</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0899</b>	0,0066	0,0000	0,0082	1,00	1,00
32	0,09	0,0899	0,0100	0,0001	<b>0,0900</b>	<b>0,0099</b>	<b>0,0001</b>	0,0812	1,01	1,01
33	0,09	<b>0,0900</b>	0,0075	0,0001	0,0900	<b>0,0074</b>	<b>0,0001</b>	-0,0126	1,00	1,01
34	0,09	0,0898	0,0097	0,0001	<b>0,0900</b>	<b>0,0095</b>	<b>0,0001</b>	0,1500	1,02	1,04
35	0,09	0,0898	0,0096	0,0001	<b>0,0899</b>	<b>0,0094</b>	<b>0,0001</b>	0,1328	1,02	1,04
36	0,09	0,0898	0,0096	0,0001	<b>0,0899</b>	<b>0,0094</b>	<b>0,0001</b>	0,1628	1,02	1,04
37	0,09	<b>0,0900</b>	0,0049	0,0000	0,0900	<b>0,0049</b>	<b>0,0000</b>	0,0000	1,00	1,00
38	0,09	0,0900	<b>0,0052</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0900</b>	0,0052	0,0000	0,0002	1,00	1,00
39	0,09	0,0898	0,0098	0,0001	<b>0,0898</b>	<b>0,0094</b>	<b>0,0001</b>	0,0967	1,04	1,09
40	0,09	<b>0,0899</b>	0,0072	0,0001	0,0899	<b>0,0071</b>	<b>0,0001</b>	-0,0758	1,01	1,02
41	0,09	<b>0,0900</b>	0,0075	0,0001	0,0899	<b>0,0074</b>	<b>0,0001</b>	-0,0578	1,01	1,01
42	0,09	0,0901	0,0068	0,0000	<b>0,0900</b>	<b>0,0068</b>	<b>0,0000</b>	0,0086	1,00	1,00
43	0,09	0,0900	<b>0,0049</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0900</b>	0,0049	0,0000	0,0045	1,00	1,00
44	0,09	0,0900	0,0068	0,0000	<b>0,0900</b>	<b>0,0068</b>	<b>0,0000</b>	0,0047	1,00	1,00
45	0,09	0,0899	0,0066	0,0000	<b>0,0900</b>	<b>0,0065</b>	<b>0,0000</b>	0,0191	1,00	1,01
46	0,09	0,0900	<b>0,0051</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0900</b>	0,0051	0,0000	0,0004	1,00	1,00
47	0,09	0,0898	0,0097	0,0001	<b>0,0900</b>	<b>0,0094</b>	<b>0,0001</b>	0,1963	1,03	1,07
48	0,09	0,0899	0,0049	0,0000	<b>0,0899</b>	<b>0,0049</b>	<b>0,0000</b>	0,0040	1,00	1,00

Casos favoráveis ao método de maioria simples (%): 45,8333 52,08 52,08

**Tabela 3.12.** Valores médios dos EQMs, viéses absolutos (VAs) e DPs, bem como porcentagens de casos favoráveis ao procedimento de MS (entre parênteses) em relação aos cenários descritos na Tabela 3.2.

Param	MV			MS		
	VA x 10 <sup>3</sup>	DP x 10 <sup>3</sup>	EQM x 10 <sup>3</sup>	VA x 10 <sup>3</sup>	DP x 10 <sup>3</sup>	EQM x 10 <sup>3</sup>
$\theta_0$	<b>0,4804</b>	24,9747	0,6787	0,6330 (33,33)	<b>24,3386</b> (97,92)	<b>0,6509</b> (97,92)
$\theta_1$	0,4409	23,3591	0,5672	<b>0,3040</b> (54,17)	<b>22,3046</b> (93,75)	<b>0,5102</b> (91,67)
$\theta_2$	<b>0,3512</b>	33,3403	1,1537	0,7114 (22,92)	<b>32,2482</b> (97,92)	<b>1,0779</b> (97,92)
$\pi_0^1$	8,3134	58,2913	6,4430	<b>0,3810</b> (83,33)	<b>32,9334</b> (100,00)	<b>1,2669</b> (100,00)
$\pi_0^2$	0,9399	26,1890	0,8986	<b>0,1861</b> (77,08)	<b>23,7878</b> (97,92)	<b>0,6803</b> (97,92)
$\pi_1^0$	2,4602	46,3893	2,6979	<b>0,3700</b> (77,08)	<b>31,4138</b> (95,83)	<b>1,0652</b> (95,83)
$\pi_1^2$	0,7044	36,0493	1,4751	<b>0,4271</b> (60,42)	<b>32,9376</b> (97,92)	<b>1,1702</b> (97,92)
$\pi_2^0$	0,0328	5,1377	0,0286	<b>0,0314</b> (45,83)	<b>5,1240</b> (52,08)	<b>0,0284</b> (52,08)
$\pi_2^1$	0,0569	6,3564	0,0436	<b>0,0516</b> (45,83)	<b>6,3251</b> (52,08)	<b>0,0430</b> (52,08)

### 3.5 Uso dos métodos de maioria simples e de máxima verossimilhança para predições

O principal objetivo deste capítulo é apresentar estimadores, baseados em resultados de maioria simples, para os parâmetros de uma mistura de três distribuições multinomiais. Entretanto, chamamos a atenção para a possibilidade de adaptação dos métodos discutidos aqui para a identificação da categoria de origem mais provável de um objeto particular. Mais precisamente, para predizer o real estado do item  $i$ , podemos aplicar o Método de Maioria Simples para Predição (MMSP), no qual tomamos o valor de  $F_i$  como a categoria verdadeira dessa unidade. Para o mesmo propósito, podemos aplicar o Método de Máxima Verossimilhança para Predição (MMVP), que consiste em obter a estimativa de máxima verossimilhança  $\hat{\Psi}_{MV}^i$  e então usar o valor da variável  $F_{MV}^i$ , definida por

$$\begin{aligned}
 F_{MV}^i &= \operatorname{argmax}_{y \in \{0,1,2\}} P_{\hat{\Psi}_{MV}^i}(Y_i = y \mid \mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i) \\
 &= \operatorname{argmax}_{y \in \{0,1,2\}} P_{\hat{\Psi}_{MV}^i}(\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i \mid Y_i = y) \cdot P_{\hat{\Psi}_{MV}^i}(Y_i = y),
 \end{aligned}$$

como o real estado do item. Ressaltamos que, diferentemente de  $F_{MV}^i$ ,  $F_i$  não depende de  $n$ . Para avaliar o desempenho desses métodos, conduzimos um estudo de simulação para comparar as probabilidades de predição correta (geral) — isto é,  $\sum_{k=0}^2 P(F_i = k, Y_i = k)$  e  $\sum_{k=0}^2 P(F_{MV}^i = k, Y_i = k)$  — e as probabilidades de predição

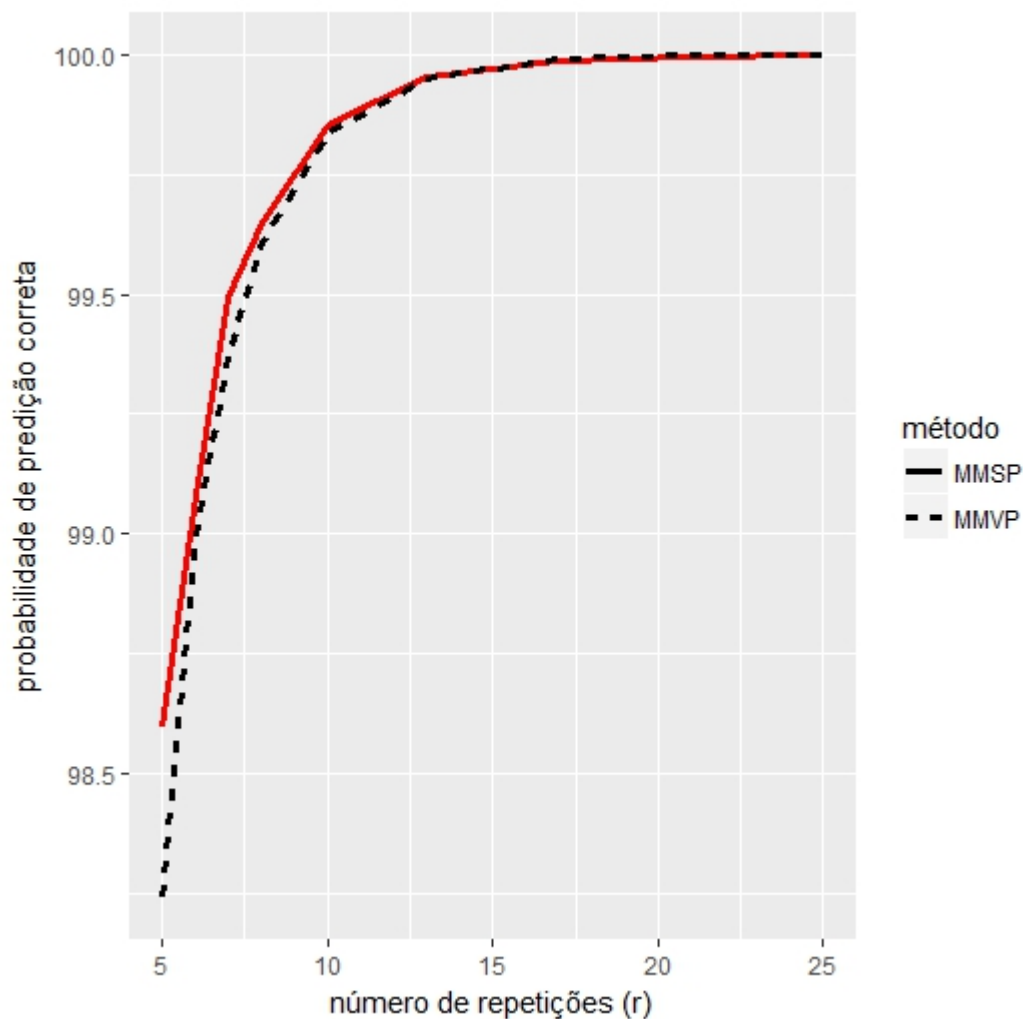
**Tabela 3.13.** Probabilidades de predição correta (geral e por categoria) relativas ao cenário 22 na Tabela 3.2, por MMSP e MMVP.

MMSP :	$\sum_{k=0}^2 P(F_i = k, Y_i = k)$	$P(Y_i = 0   F_i = 0)$	$P(Y_i = 1   F_i = 1)$	$P(Y_i = 2   F_i = 2)$
	99,93135 %	99,79715 %	99,71334 %	99,96789 %
MMVP :	$\sum_{k=0}^2 P(F_{MV}^i = k, Y_i = k)$	$P(Y_i = 0   F_{MV}^i = 0)$	$P(Y_i = 1   F_{MV}^i = 1)$	$P(Y_i = 2   F_{MV}^i = 2)$
	99,92700 %	99,79684 %	99,33781%	99,99257 %

correta por categoria — ou seja,  $P(Y_i = k | F_i = k)$  e  $P(Y_i = k | F_{MV}^i = k)$  para  $k = 0, 1, 2$ . Para esse estudo, usamos os cenários relacionados na Tabela 3.2. Para cada cenário, as probabilidades relacionadas a MMSP foram (numericamente) calculadas diretamente a partir da definição de  $F_i$ , do modelo (3.5) e da aplicação do Teorema de Bayes, sem a necessidade de estimação prévia dos parâmetros. Por outro lado, as probabilidades relacionadas a MMVP foram baseadas em médias das frequências relativas (de  $Y_i = k$  na subamostra formada por elementos com  $F_{MV}^i = k$ , para  $k = 0, 1, 2$ ) que foram observadas em 20.000 amostras geradas para cada cenário. De modo geral, o estudo de simulação sugere que os resultados das duas abordagens são muito similares. Entretanto, o MMSP requer substancialmente menos esforço computacional. Ademais, em termos de probabilidade de predição correta, o MMSP mostrou melhor performance em 28 dos 48 cenários investigados (58, 33%). A Tabela 3.13 apresenta as probabilidades de predição correta (geral) e as probabilidades de predição correta por categoria, por MMSP e MMVP, para o cenário 22 na Tabela 3.2. A Tabela 3.14 exhibe as médias das probabilidades de predição correta (geral) e as médias das probabilidades de predição correta por categoria. Como esperado, a eficiência de ambos métodos depende do número de classificações repetidas  $r$ . Essa dependência está ilustrada na Figura 3.3, que apresenta a evolução das probabilidades de predição correta, relativamente ao aumento do número de repetições  $r$ , para o cenário 22 na Tabela 3.2. Vale observar que, para  $r = 7$ , a probabilidade de predição correta é maior que 99%. Obtivemos resultados semelhantes para os demais cenários.

## 3.6 Conclusões

Neste capítulo, propusemos uma metodologia para avaliar a precisão de sistemas de medição cujos valores aferidos pertencem a um domínio formado por três categorias nominais distintas, no contexto de ausência de um sistema de medição “padrão ouro”. A medida de precisão é expressa pelo conjunto das estimativas das probabilidades as-



**Figura 3.3.** Probabilidade de predição correta (geral) em função do número de repetições  $r$ , por MMSP e MMVP, para cenário 22 na Tabela 3.2.

**Tabela 3.14.** Médias das probabilidades de predição correta (geral e por categoria) relativas aos cenários na Tabela 3.2, por MMSP e MMVP.

MMSP :	$\sum_{k=0}^2 P(F_i = k, Y_i = k)$	$P(Y_i = 0   F_i = 0)$	$P(Y_i = 1   F_i = 1)$	$P(Y_i = 2   F_i = 2)$
	99,97622 %	99,91161 %	99,78551 %	99,99234 %
MMVP :	$\sum_{k=0}^2 P(F_{MV}^i = k, Y_i = k)$	$P(Y_i = 0   F_{MV}^i = 0)$	$P(Y_i = 1   F_{MV}^i = 1)$	$P(Y_i = 2   F_{MV}^i = 2)$
	99,97334 %	99,87399 %	99,73216 %	99,99567 %



sociadas ao diversos tipos de erro de classificação. Essa métrica multidimensional, diferentemente das métricas unidimensionais, permite uma intervenção mais objetiva na correção do sistema. O procedimento proposto baseia-se no princípio de maioria simples, isto é, consiste em classificar uma peça, de forma independente e repetidamente, um número fixo de vezes. O resultado mais frequentemente observado será designado como a categoria verdadeira do objeto. Nos casos de empate, executamos um sorteio para definir a categoria da unidade. Para a descrição dos dados do experimento, usamos um modelo de classe latente, que, em razão da existência dos erros de classificação, resultou em uma mistura de três distribuições multinomiais. Demonstramos que os estimadores propostos (EsMS) são consistentes e assintoticamente não-tendenciosos. Além disso, identificamos algumas características desses estimadores que serviram como uma base de comparação com os correspondentes EsMV. Detalhamos também a implementação do algoritmo EM para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança. Para avaliar o desempenho dos EsMS, conduzimos um estudo de simulação de Monte Carlo, que corroborou a conclusão de que EsMS possuem performance semelhante aos EsMV, havendo ligeiro melhor desempenho de um método em relação ao outro em algumas situações específicas. Por exemplo, para uma configuração populacional na qual uma categoria é substancialmente mais frequente que as demais e os erros de classificação não são muito altos, nossa constatação é que a abordagem de maioria simples é apropriada para análise de SsMT, uma vez que geralmente produz menor *erro quadrático médio* e menor *desvio padrão* relativamente ao tradicional método de máxima verossimilhança. Ademais, diferentemente da abordagem algorítmica necessária para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança, os EsMS possuem expressões fechadas. Esse fato, somado à similitude de desempenho entre os dois métodos, torna os EsMS uma alternativa bastante competitiva. A fim de evitar indeterminações (em ambas as abordagens), recomendamos que amostra seja aumentada até que condição (3.21) seja satisfeita. Os métodos de maioria simples e de máxima verossimilhança podem ser utilizados (com alguma adaptação) para o propósito de identificação da categoria de origem de uma unidade particular. Em termos de habilidade preditiva, os dois métodos apresentaram desempenho muito similar. Entretanto, o método de maioria simples para predição é computacionalmente mais simples. O uso dos EsMS pode ser estendido para sistemas que realizam classificações com respostas em uma escala nominal mais ampla. Em termos de modelo probabilístico, se o domínio possui  $m$  categorias nominais, então o desenho experimental corresponderá a uma mistura de  $m$  distribuições multinomiais de vetores aleatórios com  $m$  componentes. Nesse caso, o número de parâmetros e o número mínimo de repetições seriam  $m^2 - 1$  e  $2m - 1$ , respectivamente. Além disso, as propriedades e demonstrações apresentadas aqui podem

ser analiticamente adaptadas para tais sistemas sem grande esforço. Entretanto, não podemos garantir a validade das conclusões baseadas nas simulações, uma vez que um experimento de simulação para um contexto com mais do que três categorias requereria imenso esforço computacional em razão do grande número de parâmetros.

# Capítulo 4

## Considerações finais

### 4.1 Conclusões

Nesta tese, propusemos duas metodologias para a avaliação da precisão de sistemas de medição com respostas do tipo atributo (SsMA). Utilizamos como medida de precisão o conjunto das probabilidades associadas aos diferentes tipos de erros de classificação a que SsMA estão sujeitos. O acesso à informação acerca dos diversos erros de classificação oferece pistas vitais necessárias para a melhoria da confiabilidade das medições. Os procedimentos propostos foram todos desenvolvidos para o contexto de ausência de um sistema “padrão ouro” de medição e baseados em modelos de classe latente, que são comumente empregados em problemas que envolvem a análise de dados categóricos.

As principais contribuições e conclusões deste trabalho são apresentadas resumidamente a seguir.

No Capítulo 1, descrevemos a abordagem de maioria simples, proposta por Quinino et al. [2013]. Com o propósito conferir maior rigor matemático às demonstrações e também de facilitar a extensão desse método e suas propriedades, do caso de sistemas de medição com respostas dicotômicas (SsMD) para o contexto de sistemas de medição com respostas tricotômicas (SsMT), modificamos as notações e as provas de parte dos resultados referentes ao comportamento assintótico dos EsMS.

No Capítulo 2, desenvolvemos uma variante do método de maioria simples, que denominamos estimadores de maioria simples sequencial (EsMSS). Nesse novo procedimento, diferentemente da abordagem de maioria simples, o número de classificações repetidas necessárias para a obtenção da classificação final de cada objeto não é fixo.

Intuitivamente, o número de repetições necessárias para a classificação final de um determinado item dependeria do tamanho da probabilidade de erro de classificação a que a unidade experimental está sujeita. Demonstramos que os EsMSS são assintoticamente consistentes e não-enviesados. Além disso, descrevemos a implementação algoritmo EM para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança (EsMV) referentes ao desenho experimental de maioria simples sequencial. Por meio de experimentos de simulação de Monte Carlo, comparamos o desempenho dos EsMSS relativamente aos EsMS e EsMV. De modo geral, os EsMSS apresentaram melhor performance que os EsMS em termos de *viés* e *erro quadrático médio* (EQM), e exibiram melhor desempenho que os EsMV em termos de EQM e *desvio padrão* (DP). Esses resultados e a simplicidade computacional da abordagem de maioria simples sequencial tornam esse método uma alternativa interessante para análise de SsMD, se o critério de interesse é EQM.

No Capítulo 3, adaptamos o procedimento de maioria simples para o contexto tricotômico. Demonstramos que esses estimadores também são assintoticamente consistentes e não-enviesados. Além disso, identificamos algumas características dos EsMV que os aproximam dos EsMS, no sentido de que esses métodos tendem a produzir estimativas similares. Detalhamos também a implementação do algoritmo EM para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança (EsMV). Conduzimos um experimento de simulação de Monte Carlo para avaliar a performance dos EsMS em relação aos EsMV. Os resultados desse estudo corroboraram a conclusão de que EsMS possuem performance semelhante aos EsMV, havendo ligeiro melhor desempenho de um método em relação ao outro em algumas circunstâncias particulares. Por exemplo, para uma configuração populacional na qual uma categoria é substancialmente mais frequente que as demais e os erros de classificação não são muito altos, a abordagem de maioria simples demonstrou ser apropriada para análise de SsMT, uma vez que, além da evidente simplicidade computacional, geralmente produz menor EQM e menor DP comparativamente ao método de máxima verossimilhança. Esse fato é de interesse prático, pois SsMA minimamente eficientes possuem erros de classificação não muito altos e são frequentemente usados em populações possuindo a configuração do tipo mencionado. Por fim, ressaltamos a possibilidade de adaptação dos métodos de maioria simples e de máxima verossimilhança para a realização de predições. Em termos de habilidade preditiva, verificamos que os dois procedimentos produziram resultados muito similares, sendo que a abordagem de maioria simples é computacionalmente muito mais simples que o método de máxima verossimilhança.

## 4.2 Trabalhos futuros

O trabalho desenvolvido suscitou novos interesses de investigação. Serão foco de nossas pesquisas futuras mais imediatas:

1. Redução do viés dos EsMS (nas versões dicotômica e tricotômica) e dos EsMSS.
2. Extensão da abordagem de maioria simples sequencial para o contexto tricotômico.
3. Avaliação do método de mínimo qui-quadrado (Berkson [1980] e Harris & Kanji [1983]) para estimação dos erros de classificação de SsMA.



# Referências Bibliográficas

- Berkson, J. (1980). Minimum chi-square, not maximum likelihood! *The Annals of Statistics*, 8(3):457--487.
- Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York.
- Blischke, W. (1962). Moment estimators for the parameters of a mixture of two binomial distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33:444--454.
- Blischke, W. (1964). Estimating the parameters of mixtures of binomial distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 59:510--528.
- Boyles, R. (2001). Gage capability for pass-fail inspection. *Technometrics*, 43:223--229.
- Breiman, L. (1968). *Probability*. Addison-Wesley, Reading.
- Burke, R.; Davis, R.; Kaminsky, F. & Roberts, A. (1995). The effect of inspector errors on the true fraction non-conforming: an industrial experiment. *Quality Engineering*, 7(3):543--550.
- Chena, L.; Changb, F. & Chen, Y. (2011). The application of multinomial control charts for inspection error. *International Journal of Industrial Engineering*, 18(5):244--253.
- Chung, K. L. (1974). *A Course in Probability Theory*. Academic Press, New York.
- De Mast, J. & Van Wieringen, W. (2007). Measurement system analysis for categorical measurements: Agreement and kappa-type indices. *Journal of Quality Technology*, 39:191--202.
- Fujisawa, H. & Izume, S. (2000). Inference about misclassification probabilities from repeated binary responses. *Biometrics*, 56:706--711.
- Greenberg, B. & Stokes, S. (1995). Repetitive resting in the presence of inspection errors. *Technometrics*, 37(1):102--111.

- Gustafson, P. (2003). *Measurement error and misclassification in statistics and epidemiology: Impacts and Bayesian adjustments*. Chapman & Hall, New York.
- Harris, R. R. & Kanji, G. K. (1983). On the use of minimum chi-square estimation. *Journal of the Royal Statistical Society*, 32(4):379--394.
- Hui, S. & Zhou, X. (1998). Evaluation of diagnostics tests without gold standards. *Statistical Methods for Medical Research*, 7:354--370.
- James, B. (2002). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Johnson, N. & Kotz, S. (1985). Some tests for detection of faulty inspection. *Statistical Papers*, 26:19--29.
- Johnson, N. & Kotz, S. (1988). Estimation from binomial data with classifiers of known and unknown imperfections. *Naval Research Logistics*, 35:147--156.
- Johnson, N.; Kotz, S. & Wu, X. (1991). *Inspection errors for attributes in quality control*. Chapman & Hall, New York.
- Li, J.; Tsung, F. & Zou, C. (2014). Multivariate binomial/multinomial control chart. *IIE Transactions*, 46:526--542.
- McLachlan, G. & Krishnan, T. (1997). *The EM algorithm and extensions*. John Wiley, New York.
- Montgomery, D. (2001). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley, New York, 4 edição.
- Pham-Gia, T. & Turkhan, N. (2005). Bayesian decision criteria in the presence of noises under quadratic and absolute value loss functions. *Statistical Papers*, 46:247--266.
- Quinino, R. C.; Ho, L. L. & Suyama, E. (2013). Alternative estimator for the parameters of a mixture of two binomial distributions. *Statistical Papers*, 54:47--69.
- R Development Core Team (2016). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <http://www.R-project.org>.
- Teicher, H. (1961). Identifiability of mixtures. *The Annals of Mathematical Statistics*, 32:244--248.



- van der Vaart, A. (1998). *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press, New York.
- Van Wieringen, W. (2003). *Statistical models for the precision of categorical measurement systems*. Tese de doutorado, Universiteit van Amsterdam.
- Van Wieringen, W. & De Mast, J. (2008). Measurement system analysis for binary data. *Technometrics*, 50:468--478.
- Yakowitz, S. & Spargins, J. (1968). On the identifiability of finite mixtures. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(1):209--214.



# Anexo A

## Código R: respostas dicotômicas

```
#####  
##### FUNÇÕES PARA GERAR AMOSTRAS  
  
amostraMS <- function(n, r, psi) # Função para gerar amostras de acordo com o desenho experimental de  
{ # maioria simples: n é o número de objetos, r é número de repetições  
 # e psi = (teta, pi_0^1, pi_1^0) o vetor de parâmetros.  
 amostra <- matrix(nrow = n)  
  
 for (i in 1:n)  
 {  
 estadoReal <- rbinom(1, 1, psi[1])  
  
 if (estadoReal == 1){ amostra[i] <- rbinom(1, r, 1 - psi[3]) }  
  
 else{ amostra[i] <- rbinom(1, r, psi[2]) }  
 }  
  
 return(amostra)  
}  
  
amostraMSS <- function(n, rho, psi) # Função para gerar amostras de acordo com o desenho experimental de  
{ # maioria simples sequencial: n é o número de objetos, rho é número de  
 # classificações conformes ou não conformes, e psi = (teta, pi_0^1, pi_1^0)  
 # é o vetor de parâmetros.  
  
 amostra <- matrix(0, nrow = n, ncol = 2)  
  
 for (i in 1:n)  
 {  
 estadoReal <- rbinom(1, 1, psi[1])  
  
 if (estadoReal == 1){ x <- rbinom(1, rho , 1 - psi[3]) }  
  
 else{ x <- rbinom(1, rho , psi[2]) }  
  
 s <- rho  
}
```

```

while ( !(s - x == rho) & !(x == rho) )
{
  if (estadoReal == 1){ x <- x + rbinom(1, 1 , 1 - psi[3]) }

  else{ x <- x + rbinom(1, 1 , psi[2]) }

  s <- s + 1
}

amostra[i,1] <- s

if (x == rho){amostra[i,2] <- 1}

else{amostra[i,2] <- 0}
}

return(amostra)
}

# Exemplos:

# psi <- c(0.5, 0.3, 0.2)
# r <- 8
# n <- 20
# dados <- amostraMS(n,r,psi)
# dados

# psi <- c(0.3, 0.3, 0.2)
# rho <- 8
# n <- 20
# dados <- amostraMSS(n,r,psi)
# dados

##### FUNÇÃO PARA GERAR ESTIMATIVAS DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA, VIA ALGORITMO EM
##### DESENHO EXPERIMENTAL DE MAIORIA SIMPLES

EMV_MS <- function(x, nRep, psiInicial)
{

  nObj <- nrow(x) # Número de objetos

  tam <- 50 # Tamanho dos ciclos de tentativas

  epsilon <- 0.0000000001 ; distancia <- matrix(1+ epsilon, ncol = 3) # Criterio de paragem

  aproximacoes <- matrix(nrow = tam, ncol = 3) # Últimas aproximações geradas

  y <- matrix(nrow = nObj) # Valor esperado de Y|X=x

  aproximacoes[1, ] <- psiInicial

  maxTentativas <- 2000

```

```

tentativas <- 0

while( (max(distancia) > epsilon) & (tentativas <= maxTentativas) )
{
  for (t in 2:tam)
  {
    for(i in 1: nObj )
    {
      aux1 <- dbinom(x[i] , nRep, 1 - aproximacoes[t-1,3])

      aux2 <- dbinom(x[i] , nRep, aproximacoes[t-1,2])

      denominador <- aproximacoes[t-1,1]*aux1 +(1 - aproximacoes[t-1,1])*aux2

      if (denominador == 0){ return(NULL) }

      else{ y[i] <- (aproximacoes[t-1,1]*aux1)/denominador }
    }

    aproximacoes[t,1] <- mean(y)

    denominador <- nObj*aproximacoes[t,1]

    if( !( denominador > 0) & (denominador < nObj)){ return(NULL) }

    else{
      aproximacoes[t,2] <- sum(x*(1-y))/(nRep*(nObj - denominador))

      aproximacoes[t,3] <- sum((nRep-x)*y)/(nRep*denominador)
    }

    if ( !(all(aproximacoes[t, ] >= 0) & all( aproximacoes[t, ] <= 1))){return(NULL)}
  }

  for ( k in 1:3){ distancia[k] <- ( max(aproximacoes[ , k]) - min(aproximacoes[ , k]) ) }

  aproximacoes[1, ] <- aproximacoes[tam, ]

  tentativas <- tentativas + 1
}

if ( tentativas > maxTentativas ){ return(NULL) }

else { return(aproximacoes[tam, ]) }
}

# Exemplo:

# psi <- c(0.83,0.23, 0.18)
# r <- 35
# n <- 80
# dados <- amostraMS(n,r, psi)
# psiZero <- c(0.35,0.02,0.48)
# estimativas <- EMV_MS(dados, r, psiZero)

```

```

# estimativas

##### FUNÇÃO PARA GERAR ESTIMATIVAS VIA MÉTODO DA MAIORIA SIMPLES

EMS <- function(x, nRep)      # Função para gerar estimativas pelo método
{                             # de maioria simples.

    nObj <- nrow(x)          # Número de objetos

    front <- nRep/2          # Fronteira maioria simples

    parametrosEstimados <- matrix(ncol = 3)

    F <- matrix(nrow = nObj) # Classificação final

    for(i in 1:nObj)
    {
        if ( x[i] > front ){ F[i] <- 1 }

        else{ if (x[i] < front){ F[i] <- 0 }

                else{ F[i] <- sample(c(0,1), 1, replace = TRUE) }
            }
    }

    parametrosEstimados[1] <- mean(F)

    denominador <- nObj*parametrosEstimados[1]

    if( !(( denominador > 0) & (denominador < nObj))){ return(NULL)}

    else{ parametrosEstimados[2] <- sum(x*(1 - F))/(nRep*(nObj - denominador))

          parametrosEstimados[3] <- sum((nRep - x)*F)/(nRep*denominador)
        }

    if ( !(all(parametrosEstimados >= 0) & all( parametrosEstimados <= 1) )){return(NULL)}

    else{ return(parametrosEstimados)}

}

# Exemplo:

# psi <- c(0.9, 0.06, 0.08)
# r <- 35
# n <- 250
# dados <- amostraMS(n,r, psi)
# estimativas <- EMS(dados, r)
# estimativas

#####
##### FUNÇÃO PARA GERAR ESTIMATIVAS VIA MÉTODO DA MAIORIA SIMPLES SEQUENCIAL

```

```

EMSS <- function(w, rho)      # Função para gerar estimativas pelo método
{                               # de maioria simples sequencial

  nObj <- nrow(w)      # Número de objetos

  parametrosEstimados <- matrix(ncol = 3)

  parametrosEstimados[1] <- mean(w[, 2])

  denominador1 <- sum( w[,1]*(1 - w[, 2]) )

  denominador2 <- sum( w[,1]*w[, 2] )

  if( !( ( denominador1 > 0) & (denominador2 >0) ) ){ return(NULL)}

  else{  parametrosEstimados[2] <- sum( (w[,1]- rho)*(1 - w[, 2]) )/denominador1

        parametrosEstimados[3] <- sum( (w[,1]- rho)*w[, 2] )/denominador2
      }

  if ( !(all(parametrosEstimados >= 0) & all( parametrosEstimados <= 1)) ){return(NULL)}

  else{ return(parametrosEstimados)}
}

# Exemplo:

# psi <- c(0.9, 0.06, 0.08)
# rho <- 35
# n <- 250
# dados <- amostraMSS(n,rho , psi)
# estimativas <- EMSS(dados, rho)
# estimativas

##### FUNÇÃO PARA GERAR ESTIMATIVAS DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA, VIA ALGORITMO EM
##### DESENHO EXPERIMENTAL DE MAIORIA SIMPLES SEQUENCIAL

binomialNegativa <- function(s,r,p)
{
  probabilidade <- (choose(s-1, r-1))*(p^r)*((1-p)^(s-r))

  return(probabilidade)
}

EMV_MSS <- function(w, rho, psiInicial)
{
  nObj <- nrow(w)      # Número de objetos

  tam <- 50           # Tamanho dos ciclos de tentativas

  epsilon <- 0.000000001 ; distancia <- matrix(1+ epsilon, ncol = 3) # Criterio de paragem

```

```

aproximacoes <- matrix(0, nrow = tam, ncol = 3) # Últimas aproximações geradas

Y <- matrix(0, nrow = nObj) # Valor esperado de Y|W=x

aproximacoes[1, ] <- psiInicial

maxTentativas <- 2000

tentativas <- 0

while( (max(distancia) > epsilon) & (tentativas <= maxTentativas) )
{
  for (t in 2:tam)
  {
    for(i in 1: nObj)
    {
      if ( w[i,2] == 0)
      {
        aux1 <- binomialNegativa(w[i,1], rho, aproximacoes[t-1,3])

        aux2 <- binomialNegativa(w[i,1], rho, 1 - aproximacoes[t-1,2])

      } else{ aux1 <- binomialNegativa(w[i,1], rho, 1- aproximacoes[t-1,3])

              aux2 <- binomialNegativa(w[i,1], rho, aproximacoes[t-1,2])
            }

      denominador <- aproximacoes[t-1,1]*aux1 + (1- aproximacoes[t-1,1])*aux2

      if (denominador == 0){ return(NULL) }

      else{ Y[i] <- (aproximacoes[t-1,1]*aux1)/denominador }
    }

    aproximacoes[t,1] <- mean(Y)

    denominador1 <- sum( w[ , 1]*(1 - Y) )

    denominador2 <- sum( w[ , 1]*Y )

    if( !( (denominador1 > 0) & (denominador2 >0) ) ){ return(NULL) }

    else{ numerador1 <- 0 ; numerador2 <- 0

          for(i in 1:nObj)
          {
            numerador1 <- numerador1 + (1-Y[i])*( (1-w[i,2])*(w[i,1] - rho) + w[i,2]*rho)

            numerador2 <- numerador2 + Y[i]*( (1-w[i,2])*rho + w[i,2]*(w[i,1] - rho) )
          }

          aproximacoes[t,2] <- numerador1/denominador1

          aproximacoes[t,3] <- numerador2/denominador2
        }
  }
}

```



```

    if ( !(all(aproximacoes[t, ] >= 0) & all( aproximacoes[t, ] <= 1)) ){return(NULL)}
  }

  for ( k in 1:3){ distancia[k] <- ( max(aproximacoes[ , k]) - min(aproximacoes[ , k]) ) }

  aproximacoes[1, ] <- aproximacoes[tam, ]

  tentativas <- tentativas + 1
}

if ( tentativas > maxTentativas ){ return(NULL) }

else { return(aproximacoes[tam, ]) }

}

# Exemplo:

# psi <- c(0.83,0.09, 0.07)
# rho <- 11
# n <- 1000
# dados <- amostraMSS(n,rho, psi)
# psiZero <- c(0.35,0.02,0.48)
# estimativas <- EMV_MSS(dados, rho, psiZero)
# estimativas

#####
##### FUNÇÃO PARA CALCULAR NÚMERO MÉDIO DE REPETIÇÕES

repeticoesEsperadas <- function(rho, psi)
{
  valorEsperado <- 0

  for( s in rho:(2*rho-1))
  {
    valorEsperado <- valorEsperado + s*(psi[1]*binomialNegativa(s, rho, 1 - psi[3])
      + (1-psi[1])*binomialNegativa(s, rho, psi[2])
      + psi[1]*binomialNegativa(s, rho, psi[3])
      + (1-psi[1])*binomialNegativa(s, rho,1- psi[2]))
  }

  return(valorEsperado)
}

```



# Anexo B

## Código R: respostas tricotômicas

```
##### FUNÇÃO PARA GERAR PADRÕES DE RESPOSTAS

padrao.resposta <- function(n, r, psi) # Função para gerar uma amostra de padrões
{ # de repostas: n é o número de objetos,
  # r é no de repetições e psi, o vetor de parâmetros.

  amostra <- matrix(nrow =n, ncol= 3)

  prob <- matrix(nrow =3, ncol= 3)

  prob[1,1] <- (1 - psi[4] - psi[5])
  prob[1,2] <- psi[4]
  prob[1,3] <- psi[5]

  prob[2,1] <- psi[6]
  prob[2,2] <- (1 - psi[6] - psi[7])
  prob[2,3] <- psi[7]

  prob[3,1] <- psi[8]
  prob[3,2] <- psi[9]
  prob[3,3] <- (1- psi[8] - psi[9])

  for ( i in 1:n)
  {
    estadoReal <- sample(c(0,1,2), 1, replace = FALSE, psi[c(1:3)])

    amostra[i, ] <- rmultinom(1, r, prob[estadoReal + 1 , ])
  }

  return(amostra)
}

# Exemplo:

# psi <- c(0.4,0.3, 0.3, 0.25, 0.35, 0.25, 0.10, 0.15,0.23)
# r <- 35
# n <- 120
```

```

# amostra <- padrao.resposta(n,r, psi)
# amostra

##### FUNÇÃO PARA GERAR ESTIMATIVAS VIA MÉTODO DA MAIORIA SIMPLES

EMS <- function(w, r)      # Função para gerar estimativas pelo método
{                          # de maioria simples: w é a matriz de observações
                          # e r é no de repetições.

  nobj <- nrow(w) # Número de objetos

  parametros.estimados <- matrix(ncol = 9)

  F <- matrix(nrow = nobj) # Classificação final

  for(i in 1:nobj)
  {
    if ( (w[i,1] > w[i,2]) & (w[i,1] > w[i,3]))
    {
      F[i] <- 0

    } else if ((w[i,2] > w[i,1]) & (w[i,2] > w[i,3]))
    {
      F[i] <- 1

    } else if ((w[i,3] > w[i,1]) & (w[i,3] > w[i,2]))
    {
      F[i] <- 2

    } else if ((w[i,1] == w[i,3]) & (w[i,1] > w[i,2]))
    {
      F[i] <- sample(c(0,2), 1, replace = TRUE)

    } else if ((w[i,1] == w[i,2]) & (w[i,1] > w[i,3]))
    {
      F[i] <- sample(c(0,1), 1, replace = TRUE)

    } else if ((w[i,2] == w[i,3]) & (w[i,2] > w[i,1]))
    {
      F[i] <- sample(c(1,2), 1, replace = TRUE)

    } else{ F[i] <- sample(c(0,1,2), 1, replace = TRUE) }
  }

  parametros.estimados[1] <- 0.5*mean((F-1)*(F-2))

  if (parametros.estimados[1]==0){return(NULL)}

  parametros.estimados[2] <- - mean(F*(F-2))

  if (parametros.estimados[2]==0){return(NULL)}

  parametros.estimados[3] <- 0.5*mean(F*(F-1))

```

```

if (parametros.estimados[3]==0){return(NULL)}

parametros.estimados[4] <- sum(w[,2]*(F-1)*(F-2))/(r*2*nobj*parametros.estimados[1])

parametros.estimados[5] <- sum(w[,3]*(F-1)*(F-2))/(r*2*nobj*parametros.estimados[1])

parametros.estimados[6] <- sum(w[,1]*F*(F-2))/(r*(-1)*nobj*parametros.estimados[2])

parametros.estimados[7] <- sum(w[,3]*F*(F-2))/(r*(-1)*nobj*parametros.estimados[2])

parametros.estimados[8] <- sum(w[,1]*F*(F-1))/(r*2*nobj*parametros.estimados[3])

parametros.estimados[9] <- sum(w[,2]*F*(F-1))/(r*2*nobj*parametros.estimados[3])

return(parametros.estimados )
}

# Exemplo:

# psi <- c(0.2, 0.1, 0.7, 0.2, 0.13, 0.17, 0.10, 0.08, 0.06)
# r <- 18
# n <- 100
# w <- padrao.resposta(n,r, psi)
#
# estimativasMS <- EMS(w,r)
# estimativasMS

##### FUNÇÃO PARA GERAR ESTIMATIVAS DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA, VIA ALGORITMO EM

EMV <- function(w, nrep, psi.inicial) # Função para gerar estimativas de máxima de verossimilhança
{
  epsilon <- 0.000000001

  tam <- 50

  nMax <- 5000 # Número máximo de ciclos

  nobj <- nrow(w) # Número de objetos

  aprox <- matrix(nrow = tam , ncol = 9) # Últimas aproximações geradas

  distancia <- matrix(1+epsilon, ncol = 9)

  E <- matrix(nrow = nobj , ncol = 3) # Valor esperado de E0, E1 e E2

  prob <- matrix(nrow =3, ncol= 3) # Vetor de probabilidades da distribuição de W|Y=y

  aprox[1, ] <- psi.inicial

  prob[1,1] <- 1 - aprox[1,4] - aprox[1,5]
  prob[1,2] <- aprox[1, 4]
  prob[1,3] <- aprox[1, 5]

  prob[2,1] <- aprox[1, 6]

```

```

prob[2,2] <- 1 - aprox[1, 6] - aprox[1, 7]
prob[2,3] <- aprox[1, 7]

prob[3,1] <- aprox[1, 8]
prob[3,2] <- aprox[1, 9]
prob[3,3] <- 1- aprox[1, 8] - aprox[1, 9]

tentativas <- 0

while( (max(distancia) > epsilon) & (tentativas <= nMax) )
{
  for (t in 2:tam)
  {
    for(i in 1: nobj)
    {
      r <- w[i, ]

      aux1 <- dmultinom(r,nrep, prob[1, ])
      aux2 <- dmultinom(r,nrep, prob[2, ])
      aux3 <- dmultinom(r,nrep, prob[3, ])

      denom <- aprox[t-1,1]*aux1 + aprox[t-1,2]*aux2 + aprox[t-1,3]*aux3

      if (denom == 0){ return(NULL) }

      else{
        E[i,1] <- (aprox[t-1,1]*aux1)/denom
        E[i,2] <- (aprox[t-1,2]*aux2)/denom
        E[i,3] <- (aprox[t-1,3]*aux3)/denom
      }
    }
    aprox[t,1] <- mean(E[ , 1])

    aprox[t,2] <- mean(E[ , 2])

    aprox[t,3] <- mean(E[ , 3])

    d0 <- nrep*nobj*aprox[t,1]
    d1 <- nrep*nobj*aprox[t,2]
    d2 <- nrep*nobj*aprox[t,3]

    if ((d0 == 0) | (d1 == 0) | (d2 == 0)){ return(NULL) }

    else{
      aprox[t,4] <- sum(w[ ,2]*E[ , 1])/d0
      aprox[t,5] <- sum(w[ ,3]*E[ , 1])/d0

      aprox[t,6] <- sum(w[ ,1]*E[ , 2])/d1
      aprox[t,7] <- sum(w[ ,3]*E[ , 2])/d1

      aprox[t,8] <- sum(w[ ,1]*E[ , 3])/d2
      aprox[t,9] <- sum(w[ ,2]*E[ , 3])/d2
    }

    prob[1,1] <- 1 - aprox[t,4] - aprox[t,5]
  }
}

```

```

        prob[1,2] <- aprox[t,4]
        prob[1,3] <- aprox[t,5]

        prob[2,1] <- aprox[t,6]
        prob[2,2] <- 1 - aprox[t,6] - aprox[t,7]
        prob[2,3] <- aprox[t,7]

        prob[3,1] <- aprox[t,8]
        prob[3,2] <- aprox[t,9]
        prob[3,3] <- 1- aprox[t,8] - aprox[t,9]

        if ( !(all(prob >= 0) & all(prob <= 1)) ){return(NULL)}
    }

    for ( k in 1:9)
    {
        distancia[k] <- ( max(aprox[ , k]) - min(aprox[ , k]) )
    }

    aprox[1, ] <- aprox[tam, ]

    tentativas <- tentativas + 1
}

if( tentativas > nMax ){ return(NULL) }

else{ return(aprox[tam, ] ) }

}

# Exemplo:

# psi <- c(0.2, 0.1, 0.7, 0.2, 0.13, 0.17, 0.10, 0.08, 0.06)
# r <- 17
# n <- 100
# w <- padrao.resposta(n,r, psi)
# psiZero <- c(0.33, 0.33, 0.34, 0.24, 0.10, 0.15, 0.10, 0.05, 0.04)
# estimativasMV <- EMV(w, r, psiZero)
# estimativasMV

##### CENÁRIOS PARA SIMULAÇÃO

rm(list=ls())

library("AlgDesign")

valores <- matrix(c(85, 12, 0.05, 0.80, 0.11, 0.04, 0.09, 0.09, 0.03, 0.05,
                    150, 25, 0.07, 0.90, 0.13, 0.08, 0.12, 0.13, 0.07, 0.09),
nrow =10 , ncol = 2, byrow = FALSE)

nval <- ncol(valores) # número de valores para cada um dos parâmetros

ncen <- 48           # número de cenários para simulação

```

```

# totalidade de cenários:

cenarios <- gen.factorial(c(nval, nval, nval, nval, nval, nval, nval, nval, nval, nval), factors="all")

fração <- optFederov(~.,cenarios, ncen) # fração da totalidade de cenários

fração <- fração$design

cenario <- matrix(nrow = ncen, ncol = 10)

for( i in 1:ncen)
{
  for (j in 1:10)
  {
    cenario[i,j] <- valores[j, as.numeric(fração[i,j])]
  }
}

cenario <- cbind(cenario[ , 1:2], 1 - cenario[ ,3] - cenario[ , 4], cenario[ ,3:10])

save(cenario, file="cenario_frac(23mai2015).Rdata")

##### FUNÇÃO PARA GERAR PADRÕES DE RESPOSTAS

padroesRespostas <- function(n, r, psi) # Função para gerar uma amostra (não-degenerada) de padrões
{ # de repostas: n é o número de objetos,
  # r é no de repetições e psi, o vetor de parâmetros.

  W <- matrix(nrow =n, ncol= 3) # resultados das classificações repetidas

  real <- matrix(nrow =n) # estados reais

  F <- matrix(0, nrow =n) # classificações finais

  prob <- matrix(nrow =3, ncol= 3) # matriz pi, do texto.

  nTentativas <- 100 # número máximo de tentativas

  prob[1,1] <- (1 - psi[4] - psi[5])
  prob[1,2] <- psi[4]
  prob[1,3] <- psi[5]

  prob[2,1] <- psi[6]
  prob[2,2] <- (1 - psi[6] - psi[7])
  prob[2,3] <- psi[7]

  prob[3,1] <- psi[8]
  prob[3,2] <- psi[9]
  prob[3,3] <- (1- psi[8] - psi[9])

  tentativas <- 0 # controle das tentativas

```



```

while( (length(which(F==0))==0 | length(which(F==1))==0 | length(which(F==2))==0) & (tentativas <= nTentativas ))
{
  for ( i in 1:n)
  {
    real[i] <- sample(c(0,1,2), 1, replace = FALSE, psi[c(1:3)])

    W[i, ] <- rmultinom(1,r,prob[real[i] + 1 , ])
  }

  for(i in 1:n)
  {
    if ( (W[i,1] > W[i,2]) & (W[i,1] > W[i,3])){ F[i] <- 0 }

    else if ((W[i,2] > W[i,1]) & (W[i,2] > W[i,3])){ F[i] <- 1 }

    else if ((W[i,3] > W[i,1]) & (W[i,3] > W[i,2])){ F[i] <- 2 }

    else if ((W[i,1] == W[i,3]) & (W[i,1] > W[i,2])){F[i] <- sample(c(0,2), 1, replace = T)}

    else if ((W[i,1] == W[i,2]) & (W[i,1] > W[i,3])){F[i] <- sample(c(0,1), 1, replace = T)}

    else if ((W[i,2] == W[i,3]) & (W[i,2] > W[i,1])){F[i] <- sample(c(1,2), 1, replace = T)}

    else{ F[i] <- sample(c(0,1,2), 1, replace = TRUE) }

  }

  tentativas <- tentativas + 1
}

if(tentativas == nTentativas){ return(NULL) }

else { amostra <- list("observada" = W, "real" = real, "final" = F); return(amostra) }
}

# Exemplo:

# psi <- c(0.03,0.07, 0.90, 0.13, 0.08, 0.08, 0.09, 0.03,0.05)
# r <- 12
# n <- 85
# amostra <- padroesRespostas(n,r, psi)
# amostra$observada
# amostra$real
# amostra$final

##### FUNÇÃO PARA GERAR ESTIMATIVAS DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA, VIA ALGORITMO EM

EMV <- function(W, nRep, psiInicial) # Função para gerar estimativas de máxima de verossimilhança
{
  epsilon <- 0.0000001

  tam <- 50      # Tamanho de cada ciclo

  max <- 5000   # Número máximo de ciclos

```

```

nObj <- nrow(W) # Número de objetos

aprox <- matrix(nrow = tam , ncol = 9) # Últimas aproximações geradas

distancia <- matrix(1+epsilon, ncol = 9)

E <- matrix(nrow = nObj , ncol = 3) # Valor esperado de E0, E1 e E2

prob <- matrix(nrow = 3, ncol = 3) # Vetor de probabilidades da distribuição de W|Y=y

aprox[1, ] <- psiInicial

prob[1,1] <- 1 - aprox[1,4] - aprox[1,5]
prob[1,2] <- aprox[1, 4]
prob[1,3] <- aprox[1, 5]

prob[2,1] <- aprox[1, 6]
prob[2,2] <- 1 - aprox[1, 6] - aprox[1, 7]
prob[2,3] <- aprox[1, 7]

prob[3,1] <- aprox[1, 8]
prob[3,2] <- aprox[1, 9]
prob[3,3] <- 1 - aprox[1, 8] - aprox[1, 9]

tentativas <- 0

while( (max(distancia) > epsilon) & (tentativas <= max) )
{
  for (t in 2:tam)
  {
    for(i in 1: nObj)
    {
      r <- W[i, ]

      aux1 <- dmultinom(r,nRep, prob[1, ])
      aux2 <- dmultinom(r,nRep, prob[2, ])
      aux3 <- dmultinom(r,nRep, prob[3, ])

      denom <- aprox[t-1,1]*aux1 + aprox[t-1,2]*aux2 + aprox[t-1,3]*aux3

      if (denom == 0){ return(NULL) }

      else{
        E[i,1] <- (aprox[t-1,1]*aux1)/denom
        E[i,2] <- (aprox[t-1,2]*aux2)/denom
        E[i,3] <- (aprox[t-1,3]*aux3)/denom
      }
    }
    aprox[t,1] <- mean(E[ , 1])

    aprox[t,2] <- mean(E[ , 2])

    aprox[t,3] <- mean(E[ , 3])
  }
}

```

```

d0 <- nRep*nObj*aprox[t,1]
d1 <- nRep*nObj*aprox[t,2]
d2 <- nRep*nObj*aprox[t,3]

if ((d0 == 0) | (d1 == 0) | (d2 == 0) ){ return(NULL) }

else{

    aprox[t,4] <- sum(W[,2]*E[,1])/d0
    aprox[t,5] <- sum(W[,3]*E[,1])/d0

    aprox[t,6] <- sum(W[,1]*E[,2])/d1
    aprox[t,7] <- sum(W[,3]*E[,2])/d1

    aprox[t,8] <- sum(W[,1]*E[,3])/d2
    aprox[t,9] <- sum(W[,2]*E[,3])/d2
}

prob[1,1] <- 1 - aprox[t,4] - aprox[t,5]
prob[1,2] <- aprox[t,4]
prob[1,3] <- aprox[t,5]

prob[2,1] <- aprox[t,6]
prob[2,2] <- 1 - aprox[t,6] - aprox[t,7]
prob[2,3] <- aprox[t,7]

prob[3,1] <- aprox[t,8]
prob[3,2] <- aprox[t,9]
prob[3,3] <- 1 - aprox[t,8] - aprox[t,9]

if ( !(all(prob >= 0) & all(prob <= 1)) ){return(NULL)}
}

for (k in 1:9)
{
    distancia[k] <- ( max(aprox[,k]) - min(aprox[,k]) )
}

aprox[1, ] <- aprox[tam, ]

tentativas <- tentativas + 1

}

if( tentativas > max ){ return(NULL) }

else{ return(aprox[tam, ])}

}

# Ejemplo:

# psi <- c(0.03, 0.07, 0.90, 0.13, 0.08, 0.08, 0.09, 0.03, 0.05)
# r <- 12
# n <- 85

```

```

# amostra <- padroesRespostas(n,r, psi)
# psiInicial <- c(0.33, 0.33, 0.34, 0.24, 0.10, 0.15, 0.10, 0.05, 0.04)
# estimativasMV <- EMV(amostra$observada,r,psiInicial)
# estimativasMV

##### FUNÇÃO PARA CALCULAR PREDIÇÕES, VIA MÉTODO DE MAIORIA SIMPLES

probabilidadePredicoesMS <- function(r, psi) # Função para calcular P(F=0|Y=0), P(F=1|Y=1) e P(F=2|Y=2):
{ # r é o numero de repetições e psi, o vetor de parâmetros.

  predicoes <- matrix(0, ncol= 7)

  w <- matrix(0, ncol = 3) # dados

  matrizPi <- matrix(nrow =3, ncol= 3)

  matrizPi[1,1] <- (1 - psi[4] - psi[5])
  matrizPi[1,2] <- psi[4]
  matrizPi[1,3] <- psi[5]

  matrizPi[2,1] <- psi[6]
  matrizPi[2,2] <- (1 - psi[6] - psi[7])
  matrizPi[2,3] <- psi[7]

  matrizPi[3,1] <- psi[8]
  matrizPi[3,2] <- psi[9]
  matrizPi[3,3] <- (1- psi[8] - psi[9])

  P100_0 <- 0 ; P100_1 <- 0 ; P100_2 <- 0 # probabilidade de w0 > w1, w0 > w2
  P101_0 <- 0 ; P101_1 <- 0 ; P101_2 <- 0 # probabilidade de w0 = w2 > w1
  P110_0 <- 0 ; P110_1 <- 0 ; P110_2 <- 0 # probabilidade de w0 = w1 > w2
  P111_0 <- 0 ; P111_1 <- 0 ; P111_2 <- 0 # probabilidade de w0 = w1 = w2
  P010_0 <- 0 ; P010_1 <- 0 ; P010_2 <- 0 # probabilidade de w1 > w0, w1 > w2
  P011_0 <- 0 ; P011_1 <- 0 ; P011_2 <- 0 # probabilidade de w1 = w2 > w0
  P001_0 <- 0 ; P001_1 <- 0 ; P001_2 <- 0 # probabilidade de w2 > w0 e w2 > w1

  for (w0 in 0:r)
  {
    for(w1 in 0:(r-w0))
    {
      w2 <- r - w0 - w1

      w <- c(w0, w1, w2)

      P_W_w_Y_0 <- dmultinom(w,r, matrizPi[1, ], FALSE) # P(W=w|Y=0)

      P_W_w_Y_1 <- dmultinom(w,r, matrizPi[2, ], FALSE) # P(W=w|Y=1)

      P_W_w_Y_2 <- dmultinom(w,r, matrizPi[3, ], FALSE) # P(W=w|Y=2)

      if ( (w0 > w1) & (w0 > w2) ){
        P100_0 <- P100_0 + P_W_w_Y_0
        P100_1 <- P100_1 + P_W_w_Y_1
        P100_2 <- P100_2 + P_W_w_Y_2
      }
    }
  }
}

```

```

    }

    if ( (w0 == w2) & (w2 > w1)){ P101_0 <- P101_0 + P_W_w_Y_0
                                   P101_1 <- P101_1 + P_W_w_Y_1
                                   P101_2 <- P101_2 + P_W_w_Y_2
    }

    if ( (w0 == w1) & (w1 > w2) ){ P110_0 <- P110_0 + P_W_w_Y_0
                                   P110_1 <- P110_1 + P_W_w_Y_1
                                   P110_2 <- P110_2 + P_W_w_Y_2
    }

    if ( (w0 == w1) & (w1 == w2) ){ P111_0 <- P111_0 + P_W_w_Y_0
                                   P111_1 <- P111_1 + P_W_w_Y_1
                                   P111_2 <- P111_2 + P_W_w_Y_2
    }

    if ( (w1 > w0) & (w1 > w2) ){ P010_0 <- P010_0 + P_W_w_Y_0
                                   P010_1 <- P010_1 + P_W_w_Y_1
                                   P010_2 <- P010_2 + P_W_w_Y_2
    }

    if ( (w1 == w2) & (w2 > w0) ){ P011_0 <- P011_0 + P_W_w_Y_0
                                   P011_1 <- P011_1 + P_W_w_Y_1
                                   P011_2 <- P011_2 + P_W_w_Y_2
    }

    if ( (w2 > w0) & (w2 > w1) ){ P001_0 <- P001_0 + P_W_w_Y_0
                                   P001_1 <- P001_1 + P_W_w_Y_1
                                   P001_2 <- P001_2 + P_W_w_Y_2
    }
}

P_F_0_Y_0 <- P100_0 + (1/2)*P101_0 + (1/2)*P110_0 + (1/3)*P111_0 # P(F=0|Y=0)
P_F_0_Y_1 <- P100_1 + (1/2)*P101_1 + (1/2)*P110_1 + (1/3)*P111_1 # P(F=0|Y=1)
P_F_0_Y_2 <- P100_2 + (1/2)*P101_2 + (1/2)*P110_2 + (1/3)*P111_2 # P(F=0|Y=2)

P_F_1_Y_0 <- P010_0 + (1/2)*P110_0 + (1/2)*P011_0 + (1/3)*P111_0 # P(F=1|Y=0)
P_F_1_Y_1 <- P010_1 + (1/2)*P110_1 + (1/2)*P011_1 + (1/3)*P111_1 # P(F=1|Y=1)
P_F_1_Y_2 <- P010_2 + (1/2)*P110_2 + (1/2)*P011_2 + (1/3)*P111_2 # P(F=1|Y=2)

P_F_2_Y_0 <- P001_0 + (1/2)*P101_0 + (1/2)*P011_0 + (1/3)*P111_0 # P(F=2|Y=0)
P_F_2_Y_1 <- P001_1 + (1/2)*P101_1 + (1/2)*P011_1 + (1/3)*P111_1 # P(F=2|Y=1)
P_F_2_Y_2 <- P001_2 + (1/2)*P101_2 + (1/2)*P011_2 + (1/3)*P111_2 # P(F=2|Y=2)

```

```

P_F_0 <- psi[1]*P_F_0_Y_0 + psi[2]*P_F_0_Y_1 + psi[3]*P_F_0_Y_2      # P(F=0)

P_F_1 <- psi[1]*P_F_1_Y_0 + psi[2]*P_F_1_Y_1 + psi[3]*P_F_1_Y_2      # P(F=1)

P_F_2 <- psi[1]*P_F_2_Y_0 + psi[2]*P_F_2_Y_1 + psi[3]*P_F_2_Y_2      # P(F=2)

predicoes[2] <- (psi[1]* P_F_0_Y_0)/P_F_0      # P(Y=0|F =0) = (P(Y=0)*P(F=0|Y=0))/P(F=0)

predicoes[3] <- (psi[2]* P_F_1_Y_1)/P_F_1      # P(Y=1|F =1) = (P(Y=1)*P(F=1|Y=1))/P(F=1)

predicoes[4] <- (psi[3]* P_F_2_Y_2)/P_F_2      # P(Y=2|F =2) = (P(Y=2)*P(F=2|Y=2))/P(F=2)

# P(Y=0, F=0) + P(Y=1, F=1) + P(Y=2, F=2):

predicoes[1] <- P_F_0*predicoes[2] + P_F_1*predicoes[3] + P_F_2*predicoes[4]

predicoes[5] <- P_F_0_Y_0          # P(F=0|Y=0)

predicoes[6] <- P_F_1_Y_1          # P(F=1|Y=1)

predicoes[7] <- P_F_2_Y_2          # P(F=2|Y=2)

predicoes <- predicoes*100

return(predicoes)
}

# Exemplo:

# psi <- c(0.03, 0.07, 0.90, 0.13, 0.08, 0.08, 0.09, 0.03, 0.05)
# r <- 12
# predicoes <- probabilidadePredicoesMS(r, psi)
# predicoes

##### FUNÇÃO PARA CALCULAR PREDIÇÕES PELO MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

predicoesEMV <- function(W, nRep, psiInicial)
{
  estimativasMV <- EMV(W, nRep, psiInicial)

  if (identical(estimativasMV, NULL)){ return(NULL) }

  else{  nObj <- nrow(W)

        decisao <- matrix(nrow = nObj)

        matrizPi <- matrix(0, nrow =3, ncol= 3)

        matrizPi[1,1] <- (1 - estimativasMV[4] - estimativasMV[5])
        matrizPi[1,2] <- estimativasMV[4]
        matrizPi[1,3] <- estimativasMV[5]

        matrizPi[2,1] <- estimativasMV[6]

```

```

matrizPi[2,2] <- (1 - estimativasMV[6] - estimativasMV[7])
matrizPi[2,3] <- estimativasMV[7]

matrizPi[3,1] <- estimativasMV[8]
matrizPi[3,2] <- estimativasMV[9]
matrizPi[3,3] <- (1- estimativasMV[8] - estimativasMV[9])

for (i in 1:nObj)
{
  P_W_w_Y_0_P_W_w <- dmultinom(W[i, ],nRep, matrizPi[1, ], FALSE)*estimativasMV[1] # P(W=w|Y=0)*P(W=w)

  P_W_w_Y_1_P_W_w <- dmultinom(W[i, ],nRep, matrizPi[2, ], FALSE)*estimativasMV[2] # P(W=w|Y=1)*P(W=w)

  P_W_w_Y_2_P_W_w <- dmultinom(W[i, ],nRep, matrizPi[3, ], FALSE)*estimativasMV[3] # P(W=w|Y=2)*P(W=w)

  if ((P_W_w_Y_0_P_W_w > P_W_w_Y_1_P_W_w) & (P_W_w_Y_0_P_W_w > P_W_w_Y_2_P_W_w)){decisao[i] <- 0}

  else{ if ((P_W_w_Y_1_P_W_w > P_W_w_Y_0_P_W_w) & (P_W_w_Y_1_P_W_w > P_W_w_Y_2_P_W_w)){decisao[i] <- 1}

  else{ if ((P_W_w_Y_2_P_W_w > P_W_w_Y_0_P_W_w) & (P_W_w_Y_2_P_W_w > P_W_w_Y_1_P_W_w)){decisao[i] <- 2}

  else{ if ((P_W_w_Y_0_P_W_w = P_W_w_Y_2_P_W_w) & (P_W_w_Y_2_P_W_w > P_W_w_Y_1_P_W_w))
        {decisao[i] <- sample(c(0,2),1,TRUE)}

  else{ if ((P_W_w_Y_0_P_W_w = P_W_w_Y_1_P_W_w) & (P_W_w_Y_1_P_W_w > P_W_w_Y_2_P_W_w))
        {decisao[i] <- sample(c(0,1),1,TRUE)}

  else{ if ((P_W_w_Y_1_P_W_w = P_W_w_Y_2_P_W_w) & (P_W_w_Y_2_P_W_w > P_W_w_Y_0_P_W_w))
        {decisao[i] <- sample(c(1,2),1,TRUE)}

  else{ decisao[i] <- sample(c(0,1,2),1, TRUE)}

        }      }      }      }      }
}

contador <- matrix(0, ncol =4)

estimativaAcertos <- matrix(NA, ncol =7)

for(i in 1:nObj)
{
  if (decisao[i] == amostra$real[i])
  {
    contador[1] <- contador[1] +1

    if (decisao[i] == 0){contador[2] <- contador[2] +1}

    else { if (decisao[i] == 1){contador[3] <- contador[3] +1}

          else { contador[4] <- contador[4] +1 }

        }

  }

}

denominador2 <- length(which(decisao ==0))

```

```

denominador3 <- length(which(decisao ==1))

denominador4 <- length(which(decisao ==2))

denominador5 <- length(which(amostra$real ==0))

denominador6 <- length(which(amostra$real ==1))

denominador7 <- length(which(amostra$real ==2))

estimativaAcertos[1] <- (contador[1]/nObj)*100

if( !(denominador2 ==0) ){ estimativaAcertos[2] <- (contador[2]/denominador2)*100 }

if( !(denominador3 ==0) ){ estimativaAcertos[3] <- (contador[3]/denominador3)*100 }

if( !(denominador4 ==0) ){ estimativaAcertos[4] <- (contador[4]/denominador4)*100 }

if( !(denominador5 ==0) ){ estimativaAcertos[5] <- (contador[2]/denominador5)*100 }

if( !(denominador6 ==0) ){ estimativaAcertos[6] <- (contador[3]/denominador6)*100 }

if( !(denominador7 ==0) ){ estimativaAcertos[7] <- (contador[4]/denominador7)*100 }
}
return(estimativaAcertos)
}

# Exemplo:
# psiInicial <- c(0.33, 0.33, 0.34, 0.24, 0.10, 0.15, 0.10, 0.05, 0.04)
# r <- 12
# n <- 85
# psi <- c(0.03, 0.07, 0.90, 0.13, 0.08, 0.08, 0.09, 0.03, 0.05)
# amostra <- padroesRespostas(n,r,psi)
# predicoesMV <- predicoesEMV(amostra$observada, r, psiInicial)
# predicoesMV

#####
#####

rm(list=ls())

library(ggplot2)

##### FUNÇÃO PARA CALCULAR DISTRIBUIÇÃO DE F_i

distribuicaoFi <- function(r, psi) # Função para calcular a distribuição de F_i:
{ # r é o numero de repetições e psi, o vetor de parâmetros.

  distProb <- matrix(0, ncol= 3)

  w <- matrix(0, ncol = 3) # dados

  matrizPi <- matrix(nrow =3, ncol= 3)

```



```

matrizPi[1,1] <- (1 - psi[4] - psi[5])
matrizPi[1,2] <- psi[4]
matrizPi[1,3] <- psi[5]

matrizPi[2,1] <- psi[6]
matrizPi[2,2] <- (1 - psi[6] - psi[7])
matrizPi[2,3] <- psi[7]

matrizPi[3,1] <- psi[8]
matrizPi[3,2] <- psi[9]
matrizPi[3,3] <- (1- psi[8] - psi[9])

P100 <- 0 # probabilidade de w0 > w1, w0 > w2
P101 <- 0 # probabilidade de w0 = w2 > w1
P110 <- 0 # probabilidade de w0 = w1 > w2
P111 <- 0 # probabilidade de w0 = w1 = w2
P010 <- 0 # probabilidade de w1 > w0, w1 > w2
P011 <- 0 # probabilidade de w1 = w2 > w0
P001 <- 0 # probabilidade de w2 > w0 e w2 > w1

for (w0 in 0:r)
{
  for(w1 in 0:(r-w0))
  {
    w2 <- r - w0 - w1

    w <- c(w0, w1, w2)

    P_w <- psi[1]*dmultinom(w,r, matrizPi[1, ], FALSE)
      + psi[2]*dmultinom(w,r, matrizPi[2, ], FALSE)
      + psi[3]*dmultinom(w,r, matrizPi[3, ], FALSE)

    if ( (w0 > w1) & (w0 > w2) ){ P100 <- P100 + P_w }

    if ( (w0 == w2) & (w2 > w1) ){ P101 <- P101 + P_w }

    if ( (w0 == w1) & (w1 > w2) ){ P110 <- P110 + P_w }

    if ( (w0 == w1) & (w1 == w2) ){ P111 <- P111 + P_w }

    if ( (w1 > w0) & (w1 > w2) ){ P010 <- P010 + P_w }

    if ( (w1 == w2) & (w2 > w0) ){ P011 <- P011 + P_w }

    if ( (w2 > w0) & (w2 > w1) ){ P001 <- P001 + P_w }

  }
}

distProb[1] <- P100 + (1/2)*P101 + (1/2)*P110 + (1/3)*P111

distProb[2] <- P010 + (1/2)*P110 + (1/2)*P011 + (1/3)*P111

distProb[3] <- P001 + (1/2)*P101 + (1/2)*P011 + (1/3)*P111

```

```

    return(distProb)
}

##### FUNÇÃO PARA CALCULAR A PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DE AMOSTRAS DEGENERADAS

amostrasDegeneradas <- function(distFi, n) # Função para calcular a probabilidade de ocorrência
{ # de amostras degeneradas: distFi é a distribuição
    # de probabilidades de F_i e n é o tamanho da amostra

    prob <- 0

    prob <- dmultinom(c(n,0,0), n, distFi, FALSE)
      + dmultinom(c(0,n,0), n, distFi, FALSE)
      + dmultinom(c(0,0,n), n, distFi, FALSE)

    for(i in 1:(n-1))
    {
        j <- n-i

        prob <- prob + dmultinom(c(0,i,j), n, distFi, FALSE)

        prob <- prob + dmultinom(c(i,0,j), n, distFi, FALSE)

        prob <- prob + dmultinom(c(i,j,0), n, distFi, FALSE)
    }

    return(prob)
}

load("cenario_frac(24mai2015).Rdata")

cenarios <- cenario[ ,2:11]

cenarios

nMin <- 85

nMax <- 450

salto <- 5

nCen <- nrow(cenarios) # número de cenários

nValores <- seq(nMin, nMax, by = salto) # tamanhos examinados

tamExam <- length(nValores) # número total de tamanhos (de amostra) examinados

tabelaProbabilidades <- array(dim=c(nCen, tamExam , 2))

for(i in 1:nCen)
{
    distProb <- distribuicaoFi(cenarios[i,1], cenarios[i,2:10])

    for (j in 1:tamExam)
    {

```

```
tabelaProbabilidades[i, j , 1] <- nValores[j]

tabelaProbabilidades[i, j , 2] <- amostrasDegeneradas(distProb,nValores[j])
}
}

plot(tabelaProbabilidades[3, , ], xlab='sample size', ylab='probability')

df = data.frame(tabelaProbabilidades[3, , ])

ggplot(df, aes(X1,X2)) + geom_line(size=1.2) + labs(list(x = "sample size", y = "probability"))

tabelaProbabilidades[,52, ]

max(tabelaProbabilidades[ ,52,2])
```