

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Estatística

Modelo Exponencial por Partes  
via Modelo Partição Produto

Aluno: **Fábio Nogueira Demarqui**

Orientadora: **Profa. Rosângela Helena Loschi**

Co-orientador: **Prof. Enrico Antônio Colosimo**

Belo Horizonte, Março de 2006

# Agradecimentos

A minha família por todo apoio e incentivo. Sei que estive muitas vezes ausente, mas acho que foi por uma boa causa... Sem vocês nada disso seria possível!

Aos amigos de toda a vida que fiz nos tempos de graduação, Davi, Hamilton, Marcos, Pedro e Thiago, pela amizade, incentivo, por sempre terem acreditado em mim e, principalmente, por todos os bons momentos que passamos juntos. Vocês são a minha segunda família!

Ao professor Sérgio Minoru Oikawa, meu orientador na graduação, pela grande contribuição a minha formação como estatístico.

A Rosângela e ao Enrico, pela oportunidade, confiança e orientação que tornaram possível a realização deste trabalho.

A todos os professores e funcionários do departamento, em especial à Rogéria e aos professores Gregorio e Luiz Duczmal.

A todos os colegas do mestrado que participaram junto comigo desta caminhada, compartilhando os bons e maus momentos, em especial ao André, Alexandre Polezzi, Fernando, Juliana, Pollyanna e Taynãna.

Aos amigos que fiz em Minas (nem todos eles mineiros!) e que vou levar comigo para o resto da vida, Alexandre Loureiros, Alexandre Meirelles, Anderson, Carlito, Erik, Geraldo, Luciano e Ricardo. Vocês fizeram a saudade e a distância de casa diminuírem consideravelmente!

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

# Resumo

Uma das maiores dificuldades relacionadas com o uso do modelo exponencial por partes é encontrar a partição do eixo do tempo necessária para sua definição. Em geral, o número de intervalos associado a tal partição, bem como a posição de cada intervalo, são determinados de maneira arbitrária. Neste trabalho é introduzida uma abordagem bayesiana para o modelo exponencial por partes em que a partição que divide o eixo do tempo, assim como o número de intervalos, são considerados aleatórios. A função taxa de falha é estimada utilizando-se o procedimento proposto e os resultados são comparados com as estimativas fornecidas pelo modelo proposto por Kim e Proschan (1991). Uma análise de sensibilidade do modelo proposto considerando-se diferentes escolhas de coesões *a priori* e diferentes distribuições *a priori* para a taxa de falha é realizada. A metodologia proposta é utilizada para se analisar dois conjuntos de dados reais.

# Abstract

One of the greatest difficulty related to the use of the piecewise exponential model is to find the grid of time-points needed in its definition. In general, the number of intervals in such grid and the position of their endpoints are ad-hoc choices. We introduce a full Bayesian approach for the piecewise exponential distribution in which the endpoints and the number of intervals are random variables. We estimate the failure rate using the proposed procedure and compare the results with the piecewise exponential estimates. A sensitivity analysis for the proposed model is provided considering different prior cohesions and different prior distributions for the failure rate. We apply the methodology to analyse two real data set.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelo Partição Produto</b>	<b>3</b>
2.1 Introdução . . . . .	3
2.2 Construção do Modelo Partição Produto . . . . .	3
<b>3 Modelo Exponencial por Partes via Modelo Partição Produto</b>	<b>9</b>
3.1 Introdução . . . . .	9
3.2 Modelo Exponencial por Partes (MEP) . . . . .	10
3.3 Modelo Proposto por Kim e Proschan . . . . .	12
3.4 Construção do Modelo Exponencial por Partes via Modelo Partição Produto . . . . .	13
3.5 Métodos Inferenciais . . . . .	16
3.6 Métodos Computacionais . . . . .	16
3.6.1 Algoritmo de Barry & Hartigan . . . . .	18
3.6.2 Algoritmo proposto por Pontel . . . . .	19
<b>4 Resultados e Discussão</b>	<b>20</b>
4.1 Introdução . . . . .	20
4.2 Função Taxa de Falha Crescente . . . . .	22
4.3 Função Taxa de Falha Decrescente . . . . .	29
4.4 Conclusões . . . . .	36

<b>5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>38</b>
5.1	Introdução . . . . .	38
5.2	Aplicação 1 . . . . .	39
5.3	Aplicação 2 . . . . .	42
5.4	Conclusões . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>47</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>

# Lista de Figuras

4.1	Estimativas produto para a função taxa de falha para diferentes coesões <i>a priori</i> - caso crescente. . . . .	23
4.2	Estimativas produto para a função taxa de falha para diferentes distribuições <i>a priori</i> para a taxa de falha - caso crescente. . . . .	24
4.3	Estimativas produto e de Kim-Proschan para a função taxa de falha crescente - casos 2 e 4. . . . .	26
4.4	Estimativas produto para a função taxa de falha para diferentes coesões <i>a priori</i> - caso decrescente. . . . .	30
4.5	Estimativas produto para a função taxa de falha para diferentes distribuições <i>a priori</i> para a taxa de falha - caso decrescente. . . . .	31
4.6	Estimativas produto e de Kim-Proschan para a função taxa de falha decrescente - casos 2 e 4. . . . .	33
5.1	Estimativas para a função taxa de falha segundo diferentes escolhas de coesões <i>a priori</i> - aplicação 1. . . . .	40
5.2	Estimativas para a função taxa de falha segundo diferentes escolhas de coesões <i>a priori</i> - aplicação 2. . . . .	44
6.1	Estimativas produto e de Kim-Proschan para a função taxa de falha crescente - casos 1 e 3. . . . .	49
6.2	Distribuição <i>a posteriori</i> do número de blocos para diferentes escolhas de coesões <i>a priori</i> , caso 1 - função taxa de falha crescente. . . . .	50
6.3	Distribuição <i>a posteriori</i> do número de blocos para diferentes escolhas de coesões <i>a priori</i> , caso 2 - função taxa de falha crescente. . . . .	50

6.4	Distribuição <i>a posteriori</i> do número de blocos para diferentes escolhas de coesões <i>a priori</i> , caso 3 - função taxa de falha crescente. . . . .	51
6.5	Distribuição <i>a posteriori</i> do número de blocos para diferentes escolhas de coesões <i>a priori</i> , caso 4 - função taxa de falha crescente. . . . .	51
6.6	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 1 - função taxa de falha crescente. . . . .	52
6.7	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 2 - função taxa de falha crescente. . . . .	52
6.8	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 3 - função taxa de falha crescente. . . . .	53
6.9	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 4 - função taxa de falha crescente. . . . .	53
6.10	Estimativas produto e de Kim-Proschan para a função taxa de falha decrescente - casos 1 e 3. . . . .	55
6.11	Distribuição <i>a posteriori</i> do número de blocos para diferentes escolhas de coesões <i>a priori</i> , caso 2 - função taxa de falha decrescente. . . . .	55
6.12	Distribuição <i>a posteriori</i> do número de blocos para diferentes escolhas de coesões <i>a priori</i> , caso 3 - função taxa de falha decrescente. . . . .	56
6.13	Distribuição <i>a posteriori</i> do número de blocos para diferentes escolhas de coesões <i>a priori</i> , caso 4 - função taxa de falha decrescente. . . . .	56
6.14	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 1 - função taxa de falha decrescente. . . . .	57
6.15	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 2 - função taxa de falha decrescente. . . . .	57
6.16	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 3 - função taxa de falha decrescente. . . . .	58
6.17	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 4 - função taxa de falha decrescente. . . . .	58
6.18	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis referentes à aplicação 1 - caso 1. . . . .	61
6.19	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis referentes à aplicação 1 - caso 2. . . . .	61

6.20	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis referentes à aplicação 2 - caso 1. . . . .	62
6.21	Pontos de mudança associados às partições mais prováveis referentes à aplicação 2 - caso 2. . . . .	62

# Lista de Tabelas

2.1	<i>Relação entre as possíveis partições <math>\rho</math> e o número observado de blocos.</i>	4
4.1	<i>Coesões a priori utilizadas.</i>	20
4.2	<i>Estatísticas descritivas associadas à função taxa de falha real - caso crescente.</i>	22
4.3	<i>Distribuição a priori para as taxas de falha - caso crescente.</i>	23
4.4	<i>Erro quadrático associado às estimativas da função taxa de falha - caso crescente</i>	25
4.5	<i>Modas a posteriori associadas ao número de blocos - caso crescente.</i>	27
4.6	<i>Partições mais prováveis a posteriori - função taxa de falha crescente.</i>	28
4.7	<i>Estatísticas descritivas associadas à função taxa de falha real - caso decrescente.</i>	29
4.8	<i>Distribuição a priori para as taxas de falha - caso decrescente.</i>	29
4.9	<i>Erro quadrático associado às estimativas para função taxa de falha - caso decrescente</i>	32
4.10	<i>Modas a posteriori associadas ao número de blocos - caso decrescente.</i>	34
4.11	<i>Partições mais prováveis a posteriori - função taxa de falha decrescente.</i>	36
5.1	<i>Estatísticas descritivas associadas à função taxa de falha estimada via MMV - aplicação 1.</i>	39
5.2	<i>Distribuição a priori para a função taxa de falha - aplicação 1.</i>	40
5.3	<i>Partições mais prováveis a posteriori - aplicação 1.</i>	41
5.4	<i>Número de ciclos até a falha de mecanismos de acionamento manual de vidro de automóveis.</i>	43
5.5	<i>Estatísticas descritivas associadas à função taxa de falha estimada via MMV - aplicação 2.</i>	43
5.6	<i>Distribuição a priori para a função taxa de falha - aplicação 2.</i>	43

5.7	<i>Partições mais prováveis a posteriori - aplicação 2.</i>	45
6.1	<i>Estatísticas descritivas referentes à distribuição a posteriori do número de blocos - função taxa de falha crescente.</i>	54
6.2	<i>Estatísticas descritivas referentes à distribuição a posteriori do número de blocos - função taxa de falha decrescente.</i>	59
6.3	<i>Tempos de vida dos sistemas de telecomunicação observados no período de 20 de maio à 31 de outubro de 1985 - Aplicação 1.</i>	60

# Capítulo 1

## Introdução

O Modelo Exponencial por Partes (MEP) é um dos modelos mais populares utilizados em análise de sobrevivência. Segundo Ibrahim (2001), grande parte desta popularidade se deve ao fato deste modelo ser capaz de acomodar funções taxa de falha com diversas formas, tornando o modelo bastante flexível. Outra vantagem do MEP é a possibilidade de se trabalhar com este modelo tanto na versão paramétrica quanto na versão não-paramétrica. O MEP é caracterizado pela aproximação da função taxa de falha por segmentos de retas cujos comprimentos são determinados por uma partição do eixo do tempo em intervalos, dentro dos quais a função taxa de falha é considerada constante.

A versão não-paramétrica do MEP pode ser obtida tomando-se uma partição do eixo do tempo com tantos intervalos quanto for o número de falhas. Em contrapartida, a versão paramétrica do MEP é obtida considerando-se um número de intervalos inferior ao número de falhas, permitindo desta forma que haja mais de uma falha por intervalo. Segundo Kim e Proschan (1991), o MEP em sua versão não-paramétrica, possui algumas vantagens em relação ao estimador padrão da função de sobrevivência (EKM), proposto por Kaplan-Meyer (1958). Por exemplo, este modelo apresenta uma função de sobrevivência contínua, que pode ser de grande interesse prático, ao contrário do EKM, cuja função de sobrevivência é uma função escada com saltos determinados pelos tempos de falha. Além disso, o MEP considera a posição exata em que os dados censurados são observados, o que não ocorre com o EKM, que só considera o número de observações censuradas entre sucessivos tempos de falhas. É

importante salientar também que, embora o MEP não-paramétrico, por apresentar um número maior de intervalos, forneça uma melhor aproximação para a função taxa de falha, existe a inconveniência de se perder a eficiência dos estimadores (clássicos) dos parâmetros associados a cada intervalo, uma vez que as estimativas são baseadas em um único tempo de falha, independentemente do tamanho da amostra. Desta forma, surge a necessidade de se buscar uma partição do eixo do tempo que possibilite uma boa aproximação para a função taxa de falha, sem que se perca a eficiência dos estimadores. Este é o tradicional impasse entre vício e eficiência de estimadores em estatística clássica. Aumentando-se o número de intervalos, reduz-se o vício dos estimadores. Por outro lado, reduzindo-se o número de intervalos, ganha-se em eficiência.

Uma dificuldade em se utilizar o MEP é justamente se determinar uma partição adequada para o eixo do tempo. Existe uma vasta literatura relacionada com o MEP. Ver, por exemplo, Kim e Proschan (1991), Gamerman (1994), Barbosa *et. al.* (1996), e Ibrahim *et. al.* (2001). Independentemente da abordagem utilizada, seja ela clássica ou bayesiana, em todos estes trabalhos, a partição do eixo do tempo é determinada de maneira arbitrária.

Neste trabalho é apresentada uma nova abordagem para o MEP, em que a partição que divide o eixo do tempo é considerada aleatória, tornando-se desta maneira um parâmetro a ser estimado. A estrutura do modelo partição produto (MPP), proposto por Hartigan (1990), é utilizada para se estimar a função taxa de falha, bem como para se obter a distribuição *a posteriori* da partição que divide o eixo do tempo.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2 é realizada uma breve revisão sobre o MPP. No Capítulo 3 o modelo proposto é apresentado detalhadamente. Estudos envolvendo dois conjuntos de dados simulados são apresentados no Capítulo 4. O Capítulo 5 apresenta a análise de dois conjuntos de dados reais utilizando-se a metodologia proposta. Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho.

# Capítulo 2

## Modelo Partição Produto

### 2.1 Introdução

Nesta seção é apresentada uma breve revisão sobre o Modelo Partição Produto (MPP), proposto por Hartigan (1990), para identificar pontos de mudança em uma sequência de observações com pontos consecutivos no tempo. Uma discussão mais detalhada do MPP e algumas de suas extensões pode ser encontrada em Barry e Hartigan (1992), e Loschi e Cruz (2005), e Quintana e Iglesias (2003).

### 2.2 Construção do Modelo Partição Produto

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma seqüência de observações e considere o conjunto de índices  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Considere a partição aleatória  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$  do conjunto  $I$ , tal que  $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_b = n$ , e a variável aleatória  $B$ , que denota o número de blocos em  $\rho$ . Considere que cada partição divide o conjunto de dados em  $B = b$  subsequências contíguas, denotadas por  $\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j} = (X_{i_{j-1}+1}, \dots, X_{i_j})^t$ , para  $j = 1, \dots, b$ .

Com a finalidade facilitar o entendimento e ilustrar a notação que será utilizada neste texto, considere uma amostra constituída de três observações obtidas seqüencialmente, denota por  $X_1, X_2, X_3$ . Observe que, neste caso, existem  $2^{3-1}$  possíveis maneiras de se dividir a seqüência de observações em blocos contíguos, isto é, há quatro partições possíveis. Na tabela abaixo é apresentada a relação entre as possíveis partições e o número observado de blocos associado a cada partição.

Tabela 2.1: Relação entre as possíveis partições  $\rho$  e o número observado de blocos.

Blocos	Nº de blocos	$\rho$
$[X_1][X_2][X_3]$	3	$\{0, 1, 2, 3\}$
$[X_1, X_2][X_3]$	2	$\{0, 2, 3\}$
$[X_1][X_2, X_3]$	2	$\{0, 1, 3\}$
$[X_1, X_2, X_3]$	1	$\{0, 3\}$

Defina por  $c_{i_{j-1}i_j}$ , a coesão *a priori* associada ao bloco  $[i_{j-1}i_j] = \{i_{j-1} + 1, \dots, i_j\}$ , para  $i_{j-1}, i_j \in I \cup \{0\}$ , e  $i_j > i_{j-1}$ . Segundo Barry e Hartigan (1992),  $c_{i_{j-1}i_j}$  representa o grau de similaridade entre as observações em  $\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}$ , e pode ser interpretada como uma probabilidade de transição da cadeia de Markov definida pelos pontos de mudança quando os dados são sequencialmente observados.

Seja  $p_{i_j i_{j-1}}$  a probabilidade de transição do estado  $i_{j-1}$  para  $i_j$  da cadeia de Markov associada aos pontos de mudança determinados pela partição aleatória  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$ , isto é,  $p_{i_j i_{j-1}}$  denota a probabilidade de haver uma mudança no instante  $i_j$ , dado que ocorreu uma mudança no instante  $i_{j-1}$ . Então, o conjunto de probabilidades de transição é um conjunto de coesões e a distribuição de  $\rho$  assume a seguinte forma produto:

$$P(\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}) = \prod_{i=1}^b p_{i_{j-1}i_j}.$$

Segundo Barry e Hartigan (1992), qualquer distribuição conjunta das observações e das partições que satisfaça a condição produto para as partições e a condição de independência entre blocos de observações, condicional em  $\rho$ , é chamada de modelo partição produto. Em outras palavras, diz-se que a quantidade aleatória  $(X_1, \dots, X_n; \rho)$ , segue o modelo partição produto (MPP), denotado por  $(X_1, \dots, X_n; \rho) \sim \text{MPP}$ , se

1. A probabilidade *a priori* de  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$  assume a forma produto, isto é:

$$P(\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}) = K \prod_{i=1}^b c_{i_{j-1}i_j}, \quad (2.1)$$

em que  $c_{i_{j-1}i_j}$  denota a coesão associada ao bloco  $i_{j-1}i_j$ , e a constante  $K$  é escolhida tal que a soma sobre todas as partições seja um. Aqui, as coesões assumem valor zero para todos os conjuntos que não são formados por pontos contíguos no tempo.

2. Condicional em  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$ , a sequência  $X_1, \dots, X_n$  tem densidade conjunta dada por

$$f(X_1, \dots, X_n | \rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}) = \prod_{j=1}^b f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}). \quad (2.2)$$

Dadas as observações, a partição  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$  também tem distribuição partição produto, com coesões *a posteriori* dadas por  $c_{i_{j-1}i_j}^* = f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j})c_{i_{j-1}i_j}$ .

No caso paramétrico, considere que a sequência de parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , definidos sobre um espaço paramétrico  $\Theta$ , assume-se que, condicional em  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , as observações  $X_1, \dots, X_n$  são independentes, com densidade conjunta dada por  $\prod f(X_i | \theta_i)$ .

A distribuição *a priori* para  $\theta_1, \dots, \theta_n$  é construída como segue:

1. Dado  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$ , assume-se que a sequência de parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , é particionada em  $b$  blocos contíguos, nos quais os valores de  $\theta_i$  são comuns, ou seja,

$$\theta_i = \theta_{i_{j-1}i_j}, \forall i_{j-1} < i \leq i_j;$$

2. Condicional  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$ , assume-se que os parâmetros comuns  $\theta_{i_0i_1}, \dots, \theta_{i_{b-1}i_b}$  são independentes, e que  $\theta_{i_{j-1}i_j}$  tem densidade *a priori* dada por  $\pi_{i_{j-1}i_j}(\theta_{i_{j-1}i_j})$ .

Conseqüentemente, a distribuição conjunta das partições e dos parâmetros é um modelo partição produto. Neste caso, a densidade conjunta das observações e dos parâmetros, dado  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$ , é dada pelo produto de densidades sobre os diferentes blocos em  $\rho$ , isto é,

$$f(X_1, \dots, X_n; \theta_1, \dots, \theta_n | \rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}) = \prod_{j=1}^b f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}; \theta_{i_{j-1}i_j}),$$

em que  $f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}; \theta_{i_{j-1}i_j})$  é a densidade associada ao bloco  $[i_{j-1}i_j]$ , e é dada por

$$f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}; \theta_{i_{j-1}i_j}) = \prod_{k=i_{j-1}+1}^{i_j} f(X_k | \theta_{i_{j-1}i_j}) \pi_{i_{j-1}i_j}(\theta_{i_{j-1}i_j}).$$

Desta forma, a distribuição conjunta da partição, dos parâmetros e das observações forma um modelo partição produto, e a distribuição conjunta das observações, dado  $\rho$ , tem a forma produto dada na expressão (2.2), cujo fator dados é dado por

$$f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) = \int_{\Theta} \left[ \prod_{k=i_{j-1}+1}^{i_j} f(X_k | \theta_{i_{j-1}i_j}) \right] \pi_{i_{j-1}i_j}(\theta_{i_{j-1}i_j}) d\theta_{i_{j-1}i_j}, \quad (2.3)$$

com  $k = 1, \dots, n$ , e  $i_{j-1}, i_j \in I$ ,  $i_{j-1} < i_j$ , e que, como pode ser observado, corresponde à distribuição preditiva associada ao bloco  $[i_{j-1}i_j]$ .

Para se fazer inferência sobre a partição desconhecida  $\rho$ , sobre o número de blocos  $B$ , bem como sobre os parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , é necessário definir-se o tipo de coesão a ser adotada. Neste trabalho serão consideradas quatro escolhas distintas de coesões *a priori*.

Para a coesão 1 será assumido que  $c_{i_{j-1}i_j} = 1$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, b$ . Note que, definindo-se a coesão 1 desta maneira, conseqüentemente, assume-se uma distribuição *a priori* uniforme para  $\rho$ .

A coesão 2 será definida como sendo  $c_{i_{j-1}i_j} = \frac{1}{n_j}$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, b$ , em que  $n_j$  denota o número de observações associado ao  $j$ -ésimo bloco. A coesão 2, assim definida, estimula a formação de partições com um número maior de blocos, visto que são atribuídas probabilidades maiores àquelas partições cujos blocos contém poucas observações.

A coesão 3 será definida tomando-se  $c_{i_{j-1}i_j} = n_j$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, b$ . Observe que, ao se definir a coesão 3 desta forma, está sendo estimulada a formação de partições com um número menor de blocos, uma vez que é dado peso maior àquelas partições cujos blocos são constituídos por um número maior de observações.

É interessante observar que, as coesões 1, 2 e 3, como definidas acima, são coesões não-paramétricas. Nestes casos, as distribuições *a priori* de  $\rho$  e  $B$  são, respectivamente, dadas por:

$$P(\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}) = \frac{\prod_{i=1}^b c_{i_{j-1}i_j}}{\sum_{\mathcal{C}} \prod_{i=1}^b c_{i_{j-1}i_j}}, \quad (2.4)$$

e

$$P(B = b) = \frac{\sum_{\mathcal{C}^*} \prod_{i=1}^b c_{i_{j-1}i_j}}{\sum_{\mathcal{C}} \prod_{i=1}^b c_{i_{j-1}i_j}}, \quad (2.5)$$

em que  $\mathcal{C}$  denota o conjunto de todas as possíveis partições do conjunto  $I$  em  $b$  blocos contíguos, com pontos finais  $\{i_0, i_1, \dots, i_b\}$  satisfazendo  $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_b = n$ ,  $\forall b \in I$ , e  $\mathcal{C}^*$ , representa o conjunto de todas as partições do conjunto  $I$  em exatamente  $b$  blocos. Conseqüentemente, as distribuições *a posteriori* de  $\rho$  e  $B$  são, respectivamente, dadas por:

$$P(\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\} | X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{\prod_{i=1}^b f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) c_{i_{j-1}i_j}}{\sum_{\mathcal{C}} \prod_{i=1}^b f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) c_{i_{j-1}i_j}}, \quad (2.6)$$

e,

$$P(B = b | X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{\sum_{\mathcal{C}^*} \prod_{i=1}^b f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) c_{i_{j-1}i_j}}{\sum_{\mathcal{C}} \prod_{i=1}^b f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) c_{i_{j-1}i_j}}. \quad (2.7)$$

Finalmente, será chamada de coesão 4 a coesão proposta por Yao (1984), definida a seguir. Seja  $p$  a probabilidade de que ocorra uma mudança em qualquer instante da sequência de observações. Então a coesão *a priori* associada ao bloco  $[i_{j-1}i_j]$  é dada por:

$$c_{[i_{j-1}i_j]} = \begin{cases} p(1-p)^{i_j-i_{j-1}-1}, & \text{se } i_j < n \\ (1-p)^{i_j-i_{j-1}-1}, & \text{se } i_j = n \end{cases} \quad (2.8)$$

para  $j = 1, \dots, b$ ,  $i_{j-1}, i_j \in I$ , com  $i_{j-1} < i_j$ , e que corresponde a probabilidade de que uma nova mudança ocorra após  $i_j - i_{j-1}$  instantes, dado que ocorreu uma mudança no instante  $i_{j-1}$ . Então, condicional em  $p$ , as distribuições *a priori* de  $\rho$  e  $B$  são, respectivamente, dadas por:

$$P(\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\} | p) = p^{b-1}(1-p)^{n-b}, \quad b \in I, \quad (2.9)$$

para toda partição  $\{i_0, i_1, \dots, i_b\}$  satisfazendo  $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_b = n$ , e

$$P(B = b | p) = C_{b-1}^{n-1} p^{b-1} (1-p)^{n-b}, \quad b \in I, \quad (2.10)$$

em que  $C_{b-1}^{n-1}$  denota o número de partições distintas do conjunto  $I$  em  $b$  blocos contíguos. Consequentemente, se uma distribuição *a priori*  $\pi(p)$  é assumida para  $p$ , então as distribuições *a posteriori* de  $\rho$  e  $B$  são, respectivamente, dadas por:

$$P(\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\} | X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^b f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) \int_0^1 p^{b-1} (1-p)^{n-b} \pi(p) dp, \quad (2.11)$$

e,

$$P(B = b | X_1, X_2, \dots, X_n) = C_{b-1}^{n-1} \prod_{j=1}^b f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) \int_0^1 p^{b-1} (1-p)^{n-b} \pi(p) dp. \quad (2.12)$$

Para se fazer inferência sobre os parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_n$  obtém-se, inicialmente, a distribuição *a posteriori* por bloco dos parâmetros, com base nas observações em cada bloco, isto é,

$$\pi(\theta_{i_{j-1}i_j} | \mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) \propto f_{i_{j-1}i_j}(\theta_{i_{j-1}i_j} | \mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) \pi(\theta_{i_{j-1}i_j}). \quad (2.13)$$

Finalmente, tem-se que, condicional em  $\mathbf{X}$ , a distribuição *a posteriori* de  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , é uma mistura de densidades *a posteriori* associadas aos diferentes blocos que incluem  $\theta_k$ , ponderadas pelas relevâncias *a posteriori*, ou seja,

$$\pi(\theta_k | \mathbf{X}) = \sum_{i_{j-1} < k \leq i_j} \pi(\theta_k | \mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) r([i_{j-1}i_j] | \mathbf{X}), \quad (2.14)$$

em que  $r([i_{j-1}i_j] | \mathbf{X})$  denota a probabilidade *a posteriori* do bloco  $[i_{j-1}i_j]$  aparecer na partição  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$ , e é obtida da seguinte forma:

$$r([i_{j-1}i_j] | \mathbf{X}) = \frac{\lambda_{i_0i_{j-1}} c_{i_{j-1}i_j}^* \lambda_{i_ji_b}}{\lambda_{i_0i_b}}, \quad (2.15)$$

com  $\lambda_{i_{j-1}i_j} = \sum \prod_{k=1}^b c_{i_{k-1}i_k}^*$ , em que a soma é feita sobre todas as partições de  $\{i_{j-1} + 1, \dots, i_j\}$  em  $b$  blocos, com pontos finais  $i_1, \dots, i_b$  satisfazendo a condição  $i_{j-1} = i_0 < i_1 < \dots < i_b = i_j$ .

A estimativa produto de  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , é, então, definida como o valor esperado da distribuição *a posteriori* de  $\theta_k$ , e é dada por:

$$\hat{\theta}_k = E(\theta_k | X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_{j-1} < k \leq i_j} r([i_{j-1}i_j] | \mathbf{X}) E(\theta_k | X_{i_{j-1}i_j}). \quad (2.16)$$

**Observação:** O cálculo direto de  $r([i_{j-1}i_j] | \mathbf{X})$  requer grande esforço computacional. Yao (1984) propõe um algoritmo recursivo para o cálculo exato das relevâncias *a posteriori*. Na Seção 3.6 serão apresentados dois algoritmos para a obtenção das estimativas produto que dispensam o cálculo direto da relevância e que serão adotados neste trabalho.

# Capítulo 3

## Modelo Exponencial por Partes via Modelo Partição Produto

### 3.1 Introdução

Neste capítulo será introduzido o Modelo Exponencial por Partes (MEP) via Modelo Partição Produto.

Existe uma extensa lista de trabalhos envolvendo o MEP na literatura. Por exemplo, Kim e Proschan (1991) apresentam o MEP em sua versão não-paramétrica, e utilizam o método da máxima verossimilhança para estimar a função taxa de falha em cada intervalo definido pelos tempos de falha observados. Gamerman (1994) apresenta uma abordagem bayesiana do MEP não-paramétrico em que é assumida uma relação estocástica entre sucessivos intervalos. Barbosa, Colosimo e Louzada-Neto (1996) consideram, através da abordagem de modelos lineares generalizados (frequentista), um modelo de regressão para analisar dados de testes de vida acelerados considerando o MEP paramétrico. Em Ibrahim *et. al.* (2001) é apresentada, em uma abordagem bayesiana, o MEP (parâmetro), com a presença de covariáveis no modelo.

No entanto, em todos estes trabalhos, independentemente da abordagem utilizada, seja ela frequentista ou bayesiana, a partição que divide o eixo do tempo é definida arbitrariamente, lembrando-se que o MEP não-paramétrico pode ser obtido como o caso particular do MEP paramétrico em que se tem um único tempo de falha associado

a cada intervalo. Com o objetivo de se resolver este problema, neste capítulo será apresentada, em uma abordagem bayesiana, uma nova versão do MEP, em que se considera a partição que divide o eixo do tempo como um parâmetro a ser estimado.

Na Seção 3.2 será apresentado o MEP na versão paramétrica. Na Seção 3.3 será realizada uma revisão sobre Modelo proposto por Kim e Proschan (1991), que será utilizado nos Capítulos 4 e 5 na comparação dos resultados fornecidos pelo modelo proposto. Na Seção 3.4 será mostrado como o MEP pode ser naturalmente escrito na forma produto a partir da metodologia apresentada na Seção 2.2. Métodos inferenciais serão discutidos na Seção 3.5. Finalmente, na Seção 3.6 serão apresentados métodos computacionais para a obtenção das estimativas produto associadas aos parâmetros de interesse.

## 3.2 Modelo Exponencial por Partes (MEP)

Seja  $T$  uma variável aleatória não-negativa representando o tempo até a ocorrência de um evento de interesse, aqui denominado tempo de falha. Considere uma partição finita e arbitrária  $\{s_1, \dots, s_k\}$  de  $\mathfrak{R}^+$ , tal que  $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k < \infty$ , com  $s_k > t$ , para algum  $t$  observado, com  $t > 0$ , e admita que tal partição divida o eixo do tempo  $\mathfrak{R}^+$  em  $k$  intervalos disjuntos, denotados por  $I_1 = (s_0, s_1]$ ,  $I_2 = (s_1, s_2]$ , ...,  $I_k = (s_{k-1}, s_k]$ .

O MEP é caracterizado pela aproximação da função taxa de falha,  $h(t)$ , através de segmentos de retas definidos pelos intervalos determinados pela partição  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , isto é, assume-se que, em cada intervalo  $I_j = (s_{j-1}, s_j]$ ,  $j = 1, \dots, k$ , a função taxa de falha é constante, e denotada por  $h(t) = \theta_j$ ,  $\theta_j > 0$ ,  $\forall t \in I_j$ . Consequentemente, a função taxa de falha acumulada,  $H(t)$ , associada ao  $j$ -ésimo intervalo,  $I_j = (s_{j-1}, s_j]$ , é dada pela soma das áreas dos retângulos, cujas bases são determinadas pelos intervalos definidos pela partição  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , e com alturas dadas pela função taxa de falha,  $h(t)$ , ou seja,  $H(t) = \sum_{r=1}^{j-1} \theta_r (s_r - s_{r-1}) + \theta_j (t - s_{j-1})$ , para  $t \in I_j$ . Logo, a função de

sobrevivência é dada por:

$$S(t|\theta_1, \dots, \theta_k) = \begin{cases} \exp\{-\theta_1 t\}, & \text{se } t \in I_1; \\ \exp\left\{-\left[\sum_{r=1}^{j-1} \theta_r(s_r - s_{r-1}) + \theta_j(t - s_{j-1})\right]\right\}, & \text{se } t \in I_j, j > 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

com  $\theta_j > 0, \forall j = 1, \dots, k$ .

Consequentemente, a função densidade de probabilidade da distribuição exponencial por partes é dada por:

$$f(t|\theta_1, \dots, \theta_k) = \begin{cases} \theta_1 \exp\{-\theta_1(t)\}, & \text{se } t \in I_1; \\ \theta_j \exp\left\{-\left[\sum_{r=1}^{j-1} \theta_r(s_r - s_{r-1}) + \theta_j(t - s_{j-1})\right]\right\}, & \text{se } t \in I_j, j > 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

com  $\theta_j > 0, \forall j = 1, \dots, k$ .

Considere agora o vetor de observações com a presença de censura,  $\mathbf{T} = [\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]^t$ , em que  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^t$  denota o vetor associado aos tempos de falha, aqui assumidos todos distintos, e  $\mathbf{X}^* = [X_1^*, \dots, X_m^*]^t$  representa o vetor de tempos de censura, provenientes de um mecanismo de censura à direita. Assuma que os tempos de falha não dependam do mecanismo de censura e que as observações são independentes. Considere uma partição arbitrária do tempo,  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , que divida o tempo em  $k$  intervalos, de tal forma que haja pelo menos um tempo de falha em cada intervalo. Denote por  $n_j$  o número de observações (falhas e censuras) associadas ao  $j$ -ésimo intervalo e assumamos que a distribuição dos tempos de falha pode ser aproximada pela distribuição exponencial por partes definida pela partição  $\{s_1, \dots, s_k\}$ . Então, a função de verossimilhança associada ao  $j$ -ésimo intervalo,  $I_j$ , é dada por:

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \dots, \theta_k, I_j; \mathbf{T}) &= \prod_{l=1}^{n_j} h(t|\theta_j)^{\delta_l} S(t|\theta_1, \dots, \theta_k) \\ &= \prod_{l=1}^{n_j} \theta_j^{\delta_l} \exp\left\{-\left[\sum_{r=1}^{j-1} \theta_r(s_r - s_{r-1}) + \theta_j(t_l - s_{j-1})\right]\right\}. \end{aligned}$$

Logo, a função de verossimilhança associada ao vetor de observações  $\mathbf{T}$ , é dada pelo produto de verossimilhanças sobre os diferentes intervalos determinados pela partição  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , isto é,

$$L(\theta_1, \dots, \theta_k; \mathbf{T}) = \prod_{j=1}^k \prod_{l=1}^{n_j} \theta_j^{\delta_l} \exp\left\{-\sum_{r=1}^{j-1} \theta_r(s_r - s_{r-1}) - \theta_j(t_l - s_{j-1})\right\}. \quad (3.3)$$

Note que, definida a partição  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , uma estrutura produto surge naturalmente na função de verossimilhança associada ao vetor de observações  $\mathbf{T}$ . Na Seção 3.4, essa característica do MEP será explorada, a fim de que a metodologia apresentada na Seção 2.2 possa ser utilizada na construção do MEP.

### 3.3 Modelo Proposto por Kim e Proschan

Kim e Proschan (1991) propuseram uma abordagem (freqüentista) para se estimar a função de sobrevivência utilizando-se o MEP não-paramétrico. Nesta seção será realizada uma brevemente revisão sobre o modelo proposto por Kim e Proschan (MKP). O MKP será utilizado nos Capítulos 4 e 5 para se estimar a função taxa de falha e comparar as estimativas obtidas com as estimativas fornecidas pelo modelo proposto. Maiores detalhes sobre esta abordagem podem ser encontrados em Kim e Proschan (1991).

Considere novamente o vetor de observações (ordenadas)  $\mathbf{T} = [\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]^t$ , em que  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^t$  denota o vetor associado aos tempos de falha e  $\mathbf{X}^* = [X_1^*, \dots, X_m^*]^t$  representa o vetor de tempos de censura, como definido na Seção 3.2. Considere também que a partição formada pelo conjunto de intervalos disjuntos do eixo do tempo seja tal que cada intervalo contenha exatamente um único tempo de falha, isto é:

$$I_1 = (0, X_1], I_2 = (X_1, X_2], \dots, I_n = (X_{n-1}, X_{max}],$$

em que  $X_{max} = \max\{X_n, X_m^*\}$ , com  $X_n$  e  $X_m^*$  denotando o maior tempo de falha e de censura, respectivamente.

Então, a função taxa de falha é obtida estimando-se separadamente a taxa de falha em cada intervalo determinado pelos sucessivos tempos de falhas. A taxa de falha associada ao  $k$ -ésimo intervalo,  $k = 1, \dots, n$ , é estimada tomando-se a razão entre o número de falhas observadas no  $k$ -ésimo intervalo e o tempo total sobre teste observado durante  $k$ -ésimo intervalo, e corresponde à estimativa de máxima verossimilhança para  $\theta_k$ .

Para se ilustrar o método, considere o vetor de observações ordenadas  $\mathbf{T} = [X_1, X_2^*, X_3^*, X_4, X_5^*, X_6, X_7]^t$ , em que  $*$  denota observação censurada. Neste caso,

tem-se que a partição do eixo do tempo é determinada pelos seguintes intervalos:

$$I_1 = (0, X_1], I_2 = (X_1, X_4], I_3 = (X_4, X_6], I_4 = (X_6, X_7],$$

e as respectivas estimativas para a taxa de falha associadas a cada intervalo são dadas por:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1 &= \frac{1}{7(X_1 - 0)}, \\ \tilde{\theta}_2 &= \frac{1}{6(X_2^* - X_1) + 5(X_3^* - X_2^*) + 4(X_4 - X_3^*)}, \\ \tilde{\theta}_3 &= \frac{1}{3(X_5^* - X_4) + 2(X_6 - X_5^*)}, \\ \tilde{\theta}_4 &= \frac{1}{1(X_7 - X_6)}.\end{aligned}$$

### 3.4 Construção do Modelo Exponencial por Partes via Modelo Partição Produto

Uma das dificuldades em se utilizar o MEP está em se definir a partição  $\{s_1, \dots, s_k\}$  a ser utilizada. Em geral, a partição é escolhida de maneira arbitrária. Nesta seção será considerado que a partição que divide o eixo do tempo é aleatória e, portanto, um parâmetro a ser estimado. Como foi visto na Seção 3.2, uma vez definida a partição do eixo do tempo, a função das verossimilhanças é naturalmente fatorada como o produto de verossimilhanças sobre os diferentes intervalos associados à partição  $\{s_1, \dots, s_k\}$ .

Para se garantir que haja pelo menos um tempo de falha em cada intervalo, considere apenas os tempos de falha ordenados,  $X_1, \dots, X_n$ , aqui assumidos todos distintos, e o conjunto de intervalos disjuntos do eixo do tempo, determinados pelos tempos de falha, tal que cada tempo de falha origine um intervalo, como definido a seguir:

$$I_1 = (0, X_1], I_2 = (X_1, X_2], \dots, I_n = (X_{n-1}, X_{max}],$$

em que  $X_{max} = \max\{X_n, X_m^*\}$ , com  $X_n$  e  $X_m^*$  denotando o maior tempo de falha e de censura, respectivamente.

Assuma que, em cada intervalo  $I_j = (X_{j-1}, X_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , a função taxa de falha é constante, e denotada por  $h(t) = \theta_j$ ,  $\theta_j > 0$ ,  $\forall t \in I_j$ . Assuma também que a

distribuição dos tempos de falha pode ser aproximada pela distribuição exponencial por partes, cuja densidade é dada por (3.2).

Para se introduzir a estrutura de agrupamento, considere a partição aleatória  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$  do conjunto de índices  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  que indexa os intervalos determinados pelos tempos de falha,  $I_1, \dots, I_n$ , tal que  $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_b = n$ , e a variável aleatória  $B$ , que denota o número de blocos em  $\rho$ . Então, dado  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$ , os intervalos  $I_1, \dots, I_n$  são agrupados em  $b$  blocos contíguos, isto é,

$$I_{i_0 i_1} = (X_{i_0}, X_{i_1}], \dots, I_{i_{j-1} i_j} = (X_{i_{j-1}}, X_{i_j}], \dots, I_{i_{b-1} i_b} = (X_{i_{b-1}}, X_{i_b}],$$

em que  $X_{i_j}, j = 1, \dots, b$ , denota o último tempo de falha observado em cada intervalo, com  $X_{i_0} = 0$  e  $X_{i_b} = X_{max}$ .

Observe que, definindo-se a estrutura de agrupamento desta maneira, os blocos passam a representar intervalos disjuntos do tempo, possibilitando, desta forma, a inclusão de observações censuradas.

Seja  $\mathbf{T}_{i_{j-1} i_j}$  o vetor de observações (falhas e censuras) pertencentes ao  $j$ -ésimo intervalo,  $I_{i_{j-1} i_j} = (X_{i_{j-1}}, X_{i_j}]$ , e  $n_j$  o número de observações em  $I_{i_{j-1} i_j}$ . Assuma que observações pertencentes a diferentes intervalos sejam independentes, e que, em cada intervalo, as observações sejam independentes e identicamente distribuídas, com função taxa de falha associada ao  $j$ -ésimo intervalo dada por  $h(t) = \theta_{i_{j-1} i_j}, \forall i_{j-1} < i < i_j, i = 1, \dots, n$ , e  $h(t)$  mudando após os pontos  $i_j, j = 1, \dots, b - 1$ . Desta forma, a função de verossimilhança associada às observações (falhas e censuras), dado  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$ , é dada pelo produto de verossimilhanças sobre os diferentes intervalos associados a  $\rho$ , ou seja,

$$L(\theta_1, \dots, \theta_n, \rho; \mathbf{T}) = \prod_{j=1}^b L(\boldsymbol{\theta}^{i_{j-1} i_j}; \mathbf{T}_{i_{j-1} i_j}), \quad (3.4)$$

em que  $\boldsymbol{\theta}^{i_{j-1} i_j} = (\theta_{i_0 i_1}, \theta_{i_1 i_2}, \dots, \theta_{i_{j-1} i_j})^t$  denota o vetor de parâmetros associado ao  $j$ -ésimo intervalo, cuja função de verossimilhança dada por:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}^{i_{j-1} i_j}; \mathbf{T}_{i_{j-1} i_j}) &= \prod_{k=1}^{n_j} h(t_k | \theta_{i_{j-1} i_j}) S(t_k | \boldsymbol{\theta}^{i_{j-1} i_j}) \\ &= \prod_{k=1}^{n_j} \theta_{i_{j-1} i_j}^{\delta_k} \exp \left\{ - \sum_{r=1}^{j-1} \theta_{i_{r-1} i_r} (X_{i_r} - X_{i_{r-1}}) - \theta_{i_{j-1} i_j} (t_k - X_{i_{j-1}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Definida a função de verossimilhança do modelo desta maneira, para que a estrutura de MPP possa ser utilizada, basta assumir-se uma distribuição produto para a partição aleatória  $\rho$ , e definir-se a distribuição dos parâmetros comuns  $\theta_{i_{j-1}i_j}$ ,  $j = 1, \dots, b$ . Assim, com este objetivo, assume-se que:

1. A probabilidade *a priori* de  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$  é dada por

$$\pi(\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}) = K \prod_{j=1}^b c_{i_{j-1}i_j},$$

em que  $c_{i_{j-1}i_j}$  denota coesão *a priori* associada ao  $j$ -ésimo intervalo, como definido na Seção (2.2);

2. Dado  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$  os parâmetros  $\theta_{i_0i_1}, \theta_{i_1i_2}, \dots, \theta_{i_{b-1}i_b}$ , são independentes, e será assumido que a distribuição *a priori* de  $\theta_{i_{j-1}i_j}$ ,  $j = 1, \dots, b$ , é a distribuição Gama com parâmetros  $\alpha_{i_{j-1}i_j}$  e  $\beta_{i_{j-1}i_j}$ , cuja densidade é dada por:

$$\pi_{i_{j-1}i_j}(\theta_{i_{j-1}i_j}) = \frac{\beta_{i_{j-1}i_j}^{\alpha_{i_{j-1}i_j}}}{\Gamma(\alpha_{i_{j-1}i_j})} \theta_{i_{j-1}i_j}^{\alpha_{i_{j-1}i_j}-1} \exp\{-\beta_{i_{j-1}i_j} \theta_{i_{j-1}i_j}\}, \quad (3.6)$$

com  $\alpha_{i_{j-1}i_j} > 0$ ,  $\beta_{i_{j-1}i_j} > 0$  e  $\theta_{i_{j-1}i_j} > 0$ .

Segundo Ibrahim et. al. (2001), a distribuição Gama é uma escolha comum para a distribuição *a priori* da função taxa de falha  $h(t) = \theta_{i_{j-1}i_j}$ , para  $t \in I_{i_{j-1}i_j}$ ,  $j = 1, \dots, b$ . Tal escolha se justifica pelo fato desta distribuição ser a distribuição conjugada natural da distribuição exponencial, que corresponde a distribuição em cada intervalo  $I_{i_{j-1}i_j}$ , simplificando sobremaneira os cálculos.

Desta forma, o fator dados associado ao bloco  $[i_{j-1}i_j]$ , utilizado nos cálculos da distribuição *a posteriori* de  $\rho$ , é dado por:

$$\begin{aligned} f_{i_{j-1}i_j}(\mathbf{X}_{i_{j-1}i_j}) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[ \prod_{k=1}^{n_j} L(t_k | \theta^{i_{j-1}i_j}) \right] \pi_{i_{j-1}i_j}(\theta^{i_{j-1}i_j}) d\theta^{i_{j-1}i_j} \\ &= \frac{\beta_{i_{j-1}i_j}^{\alpha_{i_{j-1}i_j}}}{\Gamma(\alpha_{i_{j-1}i_j})} \frac{\Gamma(\sum_{k=1}^{n_j} \delta_k + \alpha_{i_{j-1}i_j})}{[\beta_{i_{j-1}i_j} + \sum_{k=1}^{n_j} (t_k - X_{i_{j-1}})]^{\sum_{k=1}^{n_j} \delta_k + \alpha_{i_{j-1}i_j}}} \times \\ &\quad \times \prod_{r=1}^{j-1} \frac{\beta_{i_{r-1}i_r}^{\alpha_{i_{r-1}i_r}}}{[n_j(X_{i_r} - X_{i_{r-1}}) + \beta_{i_{r-1}i_r}]^{\alpha_{i_{r-1}i_r}}}. \end{aligned}$$

### 3.5 Métodos Inferenciais

Para se fazer inferência sobre as taxas de falha  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , deve-se obter, inicialmente, a distribuição *a posteriori* associada a cada intervalo  $I_{i_{j-1}i_j}$ ,  $j = 1, \dots, b$ . Das expressões (3.5) e (3.6), segue que a distribuição *a posteriori* associada ao  $j$ -ésimo intervalo,  $I_{i_{j-1}i_j}$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \pi_{i_{j-1}i_j}(\theta_{i_{j-1}i_j} | \mathbf{T}_{i_{j-1}i_j}) &\propto L(\mathbf{T}_{i_{j-1}i_j} | \boldsymbol{\theta}^{i_{j-1}i_j}) \pi_{i_{j-1}i_j}(\boldsymbol{\theta}^{i_{j-1}i_j}) \\ &\propto \theta_{i_{j-1}i_j}^{\sum_{k=1}^{n_j} \delta_k + \alpha_{i_{j-1}i_j} - 1} \exp \left\{ - \left[ \beta_{i_{j-1}i_j} + \sum_{k=1}^{n_j} (t_k - X_{i_{j-1}}) \right] \theta_{i_{j-1}i_j} \right\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

que corresponde ao núcleo da distribuição Gama com parâmetros  $\sum_{k=1}^{n_j} \delta_k + \alpha_{i_{j-1}i_j}$  e  $\beta_{i_{j-1}i_j} + \sum_{k=1}^{n_j} (t_k - X_{i_{j-1}})$ .

Então, a distribuição *a posteriori* de  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , é obtida substituindo-se a expressão (3.7) em (2.14). Conseqüentemente, as estimativas produto de  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , são obtidas de (2.16) e (3.7) da seguinte forma:

$$\hat{\theta}_k = E(\theta_k | \mathbf{T}_{i_{j-1}i_j}) = \sum_{i_{j-1} < k \leq i_j} r([i_{j-1}i_j] | \mathbf{X}) \frac{\sum_{k=1}^{n_j} \delta_k + \alpha_{i_{j-1}i_j}}{\beta_{i_{j-1}i_j} + \sum_{k=1}^{n_j} (t_k - X_{i_{j-1}})}. \quad (3.8)$$

### 3.6 Métodos Computacionais

Nesta Seção serão apresentados os algoritmos baseados no amostrador de Gibbs propostos por Barry e Hartigan (1993) e Pontel (2005), para a obtenção das distribuições *a posteriori* de  $\rho$  e  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , bem como das estimativas produto, utilizando-se Gibbs Sampling.

Barry e Hartigan (1993) propuseram um método alternativo ao método proposto por Yao (1984) para a obtenção das estimativas produto em que não é necessário o cálculo direto das relevâncias *a posteriori*, como definido em (2.15). Embora o método proposto por Barry e Hartigan simplifique o conto das relevâncias *a posteriori* e, conseqüentemente, a obtenção das estimativas produto, a única informação *a posteriori* disponível utilizando-se este método é a estimativa produto, ou seja, uma estimativa pontual. É importante observar ainda que, em situações em que a distribuição *a posteriori* é assimétrica, ou bimodal, por exemplo, a média *a posteriori* pode não fornecer estimativas adequadas. Visando contornar este problema, Pontel (2005)

propôs um método com o qual é possível se obter amostras das distribuições *a posteriori*  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , tornando possível a obtenção de outras medidas de interesse da distribuição *a posteriori*, como por exemplo, mediana, moda, variância e intervalos de credibilidade.

Dada a dificuldade em se amostrar diretamente da distribuição condicional completa de  $\rho$ , para se contornar este problema é considerada a variável aleatória auxiliar  $U_i$  sugerida por Barry e Hartigan (1993), que reflete se a  $i$ -ésima observação é um ponto de mudança, ou seja,

$$U_i = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta_i = \theta_{i+1} \\ 0, & \text{se } \theta_i \neq \theta_{i+1} \end{cases},$$

para  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Note que a partição aleatória  $\rho = \{i_0, i_1, \dots, i_b\}$  pode ser representada pelo vetor aleatório  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_{n-1})^t$ . A geração do vetor  $\mathbf{U}^s = (U_1^s, \dots, U_{n-1}^s)^t$ ,  $s \geq 1$ , pode ser feita utilizando-se Gibbs Sampling, como será apresentado a seguir.

Inicie atribuindo valores iniciais para  $\mathbf{U}^0 = (U_1^0, \dots, U_{n-1}^0)^t$ . O  $r$ -ésimo elemento de  $\mathbf{U}^s$ , denotado por  $U_r^s$ , é gerado a partir da distribuição condicional

$$U_r^s | U_1^s, \dots, U_{r-1}^s, U_{r+1}^s, \dots, U_{n-1}^s; X_1, \dots, X_n,$$

para  $r = 1, \dots, n - 1$ .

Para se gerar amostras de  $\mathbf{U}$ , utiliza-se a razão

$$R_r^s = \frac{P(U_r^s = 1 | A_s; X_1, \dots, X_n)}{P(U_r^s = 0 | A_s; X_1, \dots, X_n)},$$

em que  $r = 1, \dots, n - 1$ , e  $A_s = \{U_1^s = u_1, \dots, U_{r-1}^s = u_{r-1}, U_{r+1}^{s-1} = u_{r+1}, \dots, U_{n-1}^{s-1} = u_{n-1}\}$ . Consequentemente, um critério para se escolher o valor de  $U_r^s$ ,  $r = 1, \dots, n - 1$ , é dado por:

$$U_r^s = \begin{cases} 1, & \text{se } R_r^s \geq \frac{w}{1-w} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para  $r = 1, \dots, n - 1$ , e  $w$  é um valor gerado da distribuição  $U(0, 1)$ .

Quando as coesões não-paramétricas são utilizadas, cada valor de  $R_r^s$  pode ser gerado utilizando-se:

$$R_r^s = \frac{f_{xy}(\mathbf{X}_{xy})c_{xy}}{f_{xr}(\mathbf{X}_{xr})f_{ry}(\mathbf{X}_{ry})c_{xr}c_{ry}} = \frac{c_{xy}^*}{c_{xr}^*c_{ry}^*},$$

em que

$$x = \begin{cases} \max\{i : 0 < i < r\}, \text{ se } U_i^s = 0, \text{ para algum } i \in \{i, \dots, r-1\} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases},$$

e,

$$y = \begin{cases} \min\{i : r < i < n\}, \text{ se } U_i^{s-1} = 0, \text{ para algum } i \in \{r+1, \dots, n-1\} \\ n, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

**Observação:** Segundo Loschi e Cruz (2005), se a coesão paramétrica proposta por Yao (1984) é adotada (coesão 4), e se uma distribuição *a priori*  $Beta(\lambda, \gamma)$ ,  $\lambda > 0$  e  $\gamma > 0$ , é adotada para se descrever a incerteza inicial sobre  $p$ , então o valor de  $R_r^s$  torna-se:

$$R_r^s = \frac{f_{xy}(\mathbf{X}_{xy})\Gamma(n + \gamma + b + 1)\Gamma(b + \lambda - 2)}{f_{xr}(\mathbf{X}_{xr})f_{ry}(\mathbf{X}_{ry})\Gamma(b + \lambda - 1)\Gamma(n + \gamma - b)}.$$

Neste caso, cada valor da distribuição *a posteriori* de  $p$  pode ser obtido via *Gibbs Sampling* da seguinte distribuição Beta:

$$p^s | \rho, \theta, \mathbf{X}_{[0n]} \sim Beta(\lambda + b^s - 1, n + \gamma - b^s), \quad (3.9)$$

para  $s \geq 1$ , com  $b^s$  denotando o número de blocos associado ao  $s$ -ésimo vetor  $\mathbf{U}$ .

### 3.6.1 Algoritmo de Barry & Hartigan

As estimativas produto podem ser obtidas utilizando-se o algoritmo de Barry e Hartigan (1993) da seguinte forma. Para cada elemento gerado  $\rho^s$ , com  $s = 1, \dots, T$ , em que  $T$  denota o número de iterações da cadeia, o  $s$ -ésimo valor de  $\theta_k$ , é estimado pela média *a posteriori* associada ao  $j$ -ésimo intervalo,  $I_{i_{j-1}i_j}$ , isto é:

$$\hat{\theta}_k^s = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} \delta_k + \alpha_{i_{j-1}i_j}}{\beta_{i_{j-1}i_j} + \sum_{k=1}^{n_j} (t_k - X_{i_{j-1}})}, \quad (3.10)$$

para  $k = i = 1, \dots, j$ ,  $i < j = 2, \dots, n$ .

Então, a estimativa produto de  $\theta_k$  pode ser aproximada calculando-se a média aritmética das médias *a posteriori* de  $\theta_k$ , obtidas em (3.10), ou seja, a estimativa produto de  $\theta_k$  é estimada por:

$$\hat{\theta}_k = \frac{\sum_{s=1}^T \hat{\theta}_k^s}{T}, \quad (3.11)$$

para  $k = 1, \dots, n$ .

### 3.6.2 Algoritmo proposto por Pontel

O algoritmo proposto por Pontel (2005) é uma adaptação do algoritmo proposto por Barry e Hartigan (1993). Considere uma amostra de tamanho  $T$  da partição aleatória  $\rho$ . Para cada elemento gerado  $\rho^s$ , com  $s = 1, \dots, T$ , gera-se um valor da distribuição condicional completa de  $\theta_k$  definida em (3.7), isto é,

$$\hat{\theta}_k^s \sim \pi_{i_{j-1}i_j}(\theta_{i_{j-1}i_j} | \mathbf{T}_{i_{j-1}i_j}). \quad (3.12)$$

Desta forma, ao final de  $T$  iterações da cadeia, tem-se uma amostra aleatória da distribuição *a posteriori* de  $\theta_k$ , com  $k = 1, \dots, n$ . Consequentemente, ao passo que o algoritmo proposto por Barry & Hartigan fornece apenas uma estimativa pontual para os parâmetros de interesse, este algoritmo permite a obtenção de outras medidas de interesse além da média *a posteriori*, como por exemplo, a moda, a variância e a mediana e intervalos de credibilidade. Além disso, é possível fazer-se uma análise gráfica da distribuição *a posteriori* associada a cada parâmetro  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , enriquecendo desta forma a análise.

# Capítulo 4

## Resultados e Discussão

### 4.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados e discutidos os resultados obtidos utilizando-se a metodologia proposta para dois conjunto de dados gerados segundo a distribuição Weibull. Para o primeiro conjunto de dados analisado considerou-se uma função taxa de falha crescente, e para o segundo foi considerada uma função taxa de falha decrescente. Em ambos os casos, será realizada uma análise de sensibilidade do modelo considerando-se diferentes escolhas de distribuições *a priori* para a taxa de falha e as quatro coesões *a priori* mencionadas na Seção 2.2, apresentadas na Tabela 4.1 a seguir. Uma comparação entre os resultados obtidos utilizando-se o modelo proposto com os resultados associados ao modelo proposto por Kim e Proschan (MKP), também será realizada.

Tabela 4.1: *Coesões a priori utilizadas.*

	$c_{i_{j-1}i_j}$
Coesão 1	1
Coesão 2	$1/n_j$
Coesão 3	$n_j$
Coesão 4	coesão de Yao (1984)

Ambos os conjuntos de dados considerados contém 60 observações e foram gerados assumindo-se um percentual de censura em torno de 15%. Para a implementação do

algoritmo *Gibbs Sampling* foram geradas cadeias com 15 mil iterações, com um período de *burn-in* de 5 mil iterações, dentro do qual foi possível verificar-se convergência. Para se evitar a correlação entre as observações foi utilizado *lag* 10, resultando em amostras finais de mil observações.

Como mencionado na Seção 3.4, assumiu-se que a distribuição *a priori* para a taxa de falha  $\theta_{i_{j-1}i_j}$   $j = 1, \dots, b$ , associada a cada intervalo de tempo determinado pela partição aleatória  $\rho$ , segue uma distribuição *Gama*( $\alpha_{i_{j-1}i_j}, \beta_{i_{j-1}i_j}$ ),  $j = 1, \dots, b$ . Para se determinar os hiperparâmetros  $\alpha_{i_{j-1}i_j}$  e  $\beta_{i_{j-1}i_j}$ , optou-se por se assumir a mesma distribuição *a priori* em cada intervalo, ou seja,  $\theta_{i_{j-1}i_j} \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ , para  $j = 1, \dots, b$ . Os hiperparâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram eliciados tomando-se a média da distribuição *a priori* das taxas de falha como sendo aproximadamente a média da função taxa de falha teórica, calculada com base nas observações geradas, e considerando-se diferentes escolhas de variâncias *a priori* para a taxa de falha.

Para a geração das amostras, bem como a implementação do *Gibbs Sampling*, optou-se por se utilizar a linguagem Ox (Doornik, 1999). A análise dos resultados obtidos através das simulações foi realizada utilizando-se o *software* R 2.1.1 (R Development Core Team, 2005).

No compto das estimativas produtos optou-se por se utilizar o método proposto por Pontel (2005), pois este método possibilita a obtenção de várias medidas de interesse associadas à distribuição *a posteriori* da função taxa de falha, como discutido na Seção 3.6, e apresenta, em geral, resultados bastante similares aos resultados fornecidos pelo método proposto por Barry e Hartigan (1993) para as estimativas produto.

Para se avaliar a qualidade das estimativas da função taxa de falha fornecidas pelo modelo proposto será utilizado o erro quadrático, obtido calculando-se a soma do quadrado das distâncias entre cada estimativa produto e o valor real da taxa de falha. O erro quadrático também será utilizado na comparação das estimativas para a função taxa de falha fornecidas pelo modelo proposto e pelo MKP.

Para os casos em que a coesão 4 (coesão paramétrica) é utilizada, assumiu-se que a probabilidade  $p$  de mudança em qualquer instante tem distribuição *Beta*(50, 50) *a priori*. Tal distribuição concentra sua massa em torno de  $p = 0.5$ . Isto significa que *a priori* espera-se que ocorram  $(n-1)\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + 1$  pontos de mudança. Para maiores detalhes sobre a escolha da distribuição *a priori* para  $p$  e seus efeitos sobre as estimativas

produto, ver Loschi, Bastos e Iglesias (2004).

A fim de não sobrecarregar o texto com tabelas e figuras e tornar a leitura mais agradável, neste capítulo serão apresentadas a comparação entre os resultados fornecidos pelo modelo proposto e o MKP para dois casos: no primeiro (caso 2) será considerado o caso em que se tem uma distribuição *a priori* razoavelmente informativa para a taxa de falha; e no segundo (caso 4), será tratado o caso em que se tem uma distribuição *a priori* pouco informativa (com variância grande) para a taxa de falha. Outras tabelas e figuras referentes a estes e aos demais casos considerados podem ser encontradas no apêndice A.

## 4.2 Função Taxa de Falha Crescente

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados obtidos para um conjunto de 60 observações geradas de uma distribuição Weibull com função taxa de falha crescente, com parâmetro de escala 5 e de forma 8.

Para a amostra gerada foram observados 52 tempos de falha e 8 tempos censurados, resultando num percentual de 13,33% de censura. Na Tabela 4.2 são apresentadas algumas estatísticas descritivas referentes a função taxa de falha real, obtidas com base na amostra gerada.

Tabela 4.2: *Estatísticas descritivas associadas à função taxa de falha real - caso crescente.*

Mínimo	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	Var
0,1493	2,0560	6,3260	7,6210	11,2000	26,390	39,45842

A Tabela 4.3 fornece as distribuições *a priori* para a função taxa de falha que serão utilizadas nesta seção. As coesões *a priori* assumidas aqui são apresentadas na Tabela 4.1.

As Figuras 4.1 e 4.2 fornecem as estimativas produto da função taxa de falha para as diferentes escolhas de coesões *a priori* apresentadas na Tabela 4.1, e para as diferentes distribuições *a priori* para a taxa de falha fornecidas pela Tabela 4.3.

Analisando-se as Figuras 4.1 e 4.2 verifica-se que o modelo proposto se mostra bastante sensível à escolha da distribuição *a priori* para a taxa de falha. Nota-se que,

Tabela 4.3: Distribuição *a priori* para as taxas de falha - caso crescente.

Caso	$\alpha$	$\beta$	$E[\theta]$	$Var[\theta]$
1	7,5	1	7,5	7,5
2	0,75	0,1	7,5	75
3	0,075	0,01	7,5	750
4	0,0075	0,001	7,5	7500

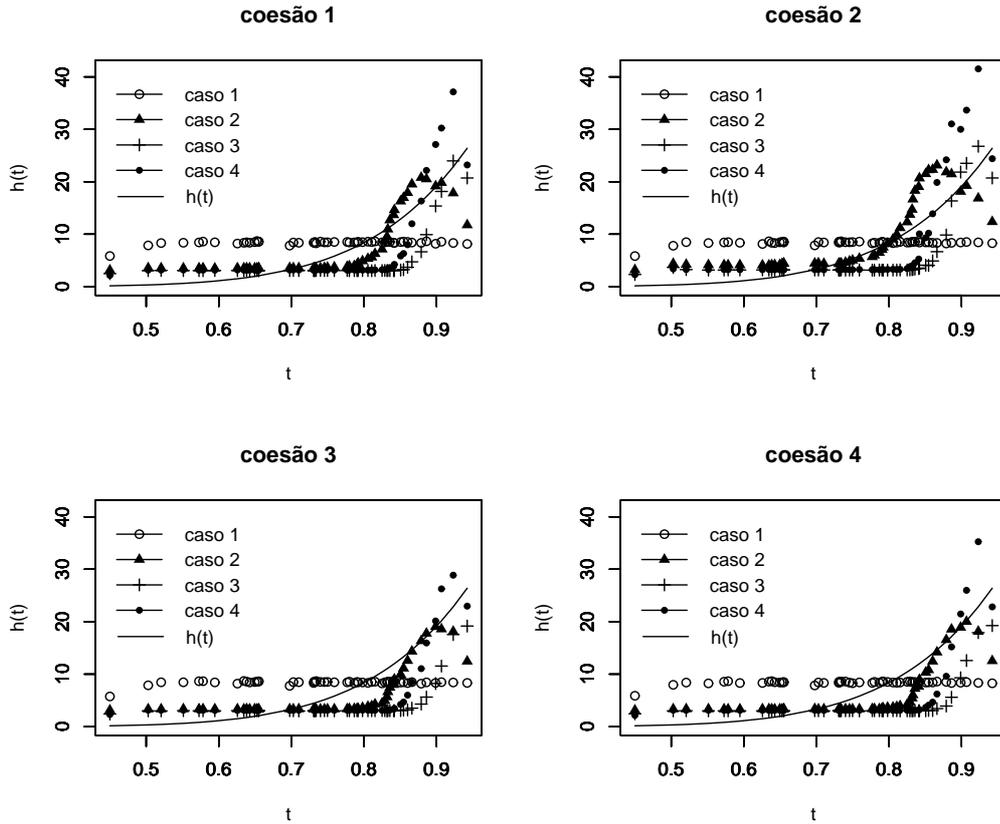


Figura 4.1: Estimativas produto para a função taxa de falha para diferentes coesões *a priori* - caso crescente.

para o caso 1, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é a mais informativa dentre todos os cenários considerados, isto é, apresenta a menor variância *a priori*, as estimativas produto para a função taxa de falha permaneceram praticamente constante ao longo do tempo. Para o caso 2, que apresenta uma distribuição *a priori* razoavelmente informativa (note que a variância *a priori* assumida neste caso é a que mais se aproxima da variância observada para a função taxa de falha real, fornecida

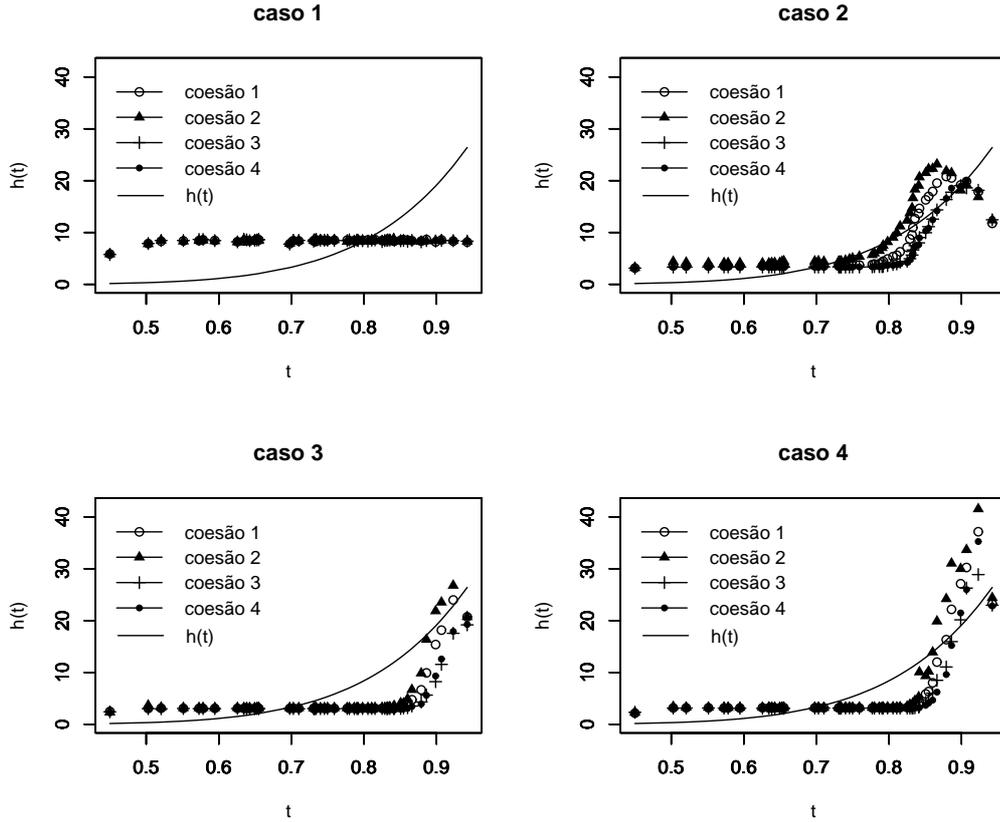


Figura 4.2: Estimativas produto para a função taxa de falha para diferentes distribuições *a priori* para a taxa de falha - caso crescente.

na Tabela 4.2), o modelo proposto forneceu estimativas para função taxa de falha muito próximas da função taxa de falha real. Para os casos 3 e 4, cujas distribuições *a priori* para a função taxa de falha são pouco informativas (no sentido de apresentarem variâncias grandes *a priori*), observa-se que as estimativas fornecidas pelo modelo proposto tendem a se distanciar da função taxa de falha real.

Note que, para todos os casos considerados acima, a estimativa *a priori* para a taxa de falha em cada intervalo é 7,5. No caso 1, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha apresenta a menor variância *a priori*, as estimativas produto para a taxa de falha, independentemente do tipo de coesão *a priori* adotado, apresentaram valores aproximadamente constantes e ligeiramente superiores (em torno de 8,5) à estimativa *a priori* de 7,5 para taxa de falha. Nos demais casos considerados, cujas distribuições *a priori* são mais flexíveis (no sentido de apresentarem maiores variâncias *a priori*), as estimativas produto apresentaram valores aproximadamente constantes e inferiores a

7,5 para os tempos iniciais (em torno de 3,5), seguidos de um crescimento praticamente contínuo na direção dos últimos tempos de falha observados, acompanhando a inclinação mais acentuada da função taxa de falha teórica observada para os tempos finais.

No tocante ao tipo de coesão *a priori* adotado (ver Figura 4.2), os quatro tipos de coesões considerados apresentaram resultados bastante similares para as estimativas produto da função taxa de falha, independentemente da distribuição *a priori* assumida para a função taxa de falha.

Na Tabela 4.4 são apresentados os erros quadráticos associados às estimativas fornecidas pelo modelo proposto para a função taxa de falha referentes a todas as situações estudadas aqui. A Figura 4.3 apresenta as estimativas produto para a função taxa de falha referentes aos casos 2 e 4, respectivamente, associadas às diferentes escolhas de coesões *a priori*, e as estimativas fornecidas pelo MKP.

Tabela 4.4: *Erro quadrático associado às estimativas da função taxa de falha - caso crescente*

Caso	Coesões			
	1	2	3	4
1	2008,019	2003,784	2023,373	2009,551
2	563,0546	952,2238	665,7358	685,9812
3	1376,851	1167,609	1775,802	1749,592
4	1266,601	1558,720	1127,525	1352,868

Note que (ver Tabela 4.4) as estimativas produto associadas ao caso 2, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é razoavelmente informativa, apresentaram o menor erro quadrático dentre os casos considerados na Tabela 4.3, independentemente do tipo de coesão *a priori* assumido. Tal resultado indica que um bom desempenho do modelo depende não só da qualidade da informação disponível *a priori* como também da quantidade de incerteza (isto é, o tamanho da variância) associada à distribuição *a priori* para taxa de falha.

O erro quadrático da estimativa da função taxa de falha associada ao MKP, neste caso, é  $EQ(MKP)=344823.1$ . Note que a estimativa da função taxa de falha associada ao MKP apresentou erro quadrático superior às estimativas fornecidas pelo modelo proposto em todos os cenários considerados na Tabela 4.3, independentemente da

escolha da coesão assumida *a priori*, indicando que o modelo proposto, em geral, forneceu, para o presente conjunto de dados, melhores resultados que o MKP, que apresentou uma variabilidade muito grande entre as estimativas da função taxa de falha, como pode ser observado na Figura 4.3.

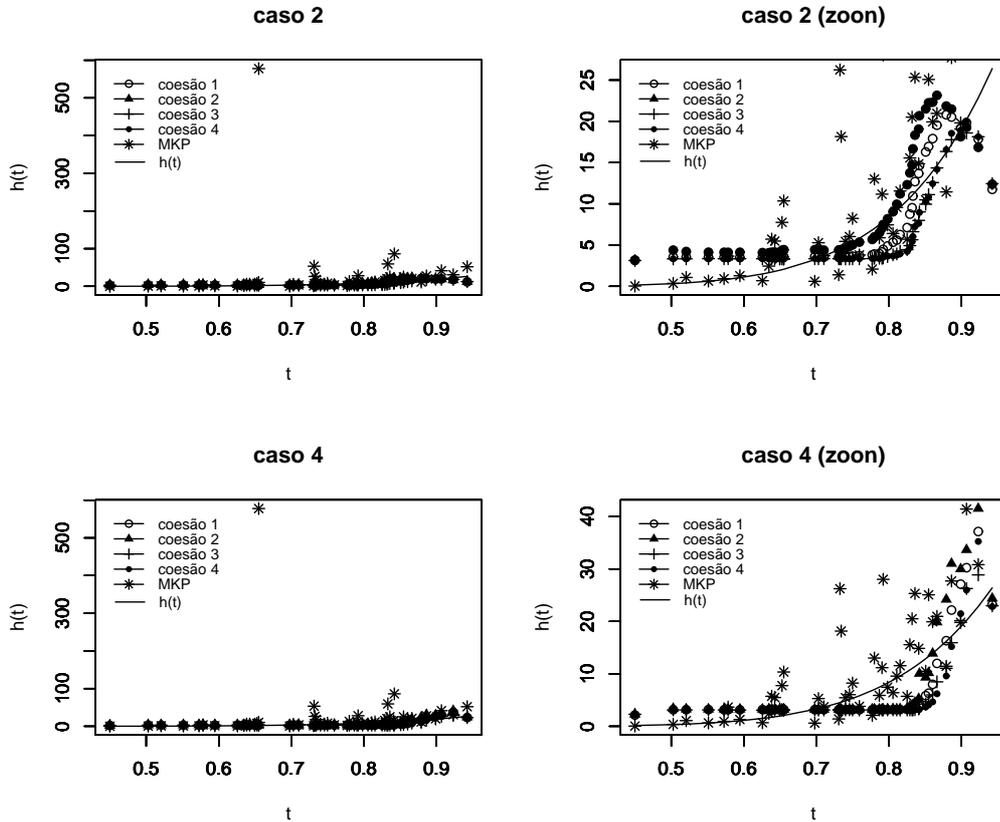


Figura 4.3: Estimativas produto e de Kim-Proschan para a função taxa de falha crescente - casos 2 e 4.

É importante ser ressaltado que o modelo que forneceu o melhor ajuste para a função taxa de falha foi obtido quando se considerou a coesão 1 para a partição aleatória  $\rho$ , e uma distribuição razoavelmente informativa (caso 2) para a função taxa de falha. Tal modelo apresentou o menor erro quadrático dentre todas as situações consideradas (ver Tabela 4.4), fornecendo as estimativas que mais se aproximaram da função taxa de falha real, como pode ser observado na Figura 4.2.

Nas Tabelas 4.5 e 4.6 são apresentadas, respectivamente, as modas *a posteriori* e suas respectivas probabilidades para o número de blocos (intervalos), e as partições mais prováveis *a posteriori* para todos os modelos tratados nesta seção.

Como pode ser observado na Tabela 4.5, o modelo proposto indica que um número pequeno ( $\leq 7$ ) de blocos *a posteriori* é mais provável para os casos 2, 3, e 4. Nota-se ainda que, para o caso 1, com exceção da coesão 3, cujo número de blocos mais provável *a posteriori* é 51, o número mais provável de blocos *a posteriori* é igual ao número de falhas observado, ou seja, é mais provável *a posteriori* que se tenha o MEP não-paramétrico. De fato, quando se observa a Tabela 4.6 verifica-se que, para todas as coesões consideradas no caso 1, a partição mais provável *a posteriori* é aquela que define o MEP não-paramétrico.

Tabela 4.5: *Modas a posteriori associadas ao número de blocos - caso crescente.*

Casos	Coesões			
	1	2	3	4
1	52 (0,427)	52 (0,623)	51 (0,317)	52 (0,639)
2	5 (0,363)	7 (0,225)	4 (0,472)	4 (0,477)
3	4 (0,47)	4 (0,612)	3 (0,764)	3 (0,656)
4	4 (0,611)	4 (0,423)	4 (0,608)	4 (0,613)

Como pode ser observado na Tabela 4.6, com exceção do caso 1, existe uma tendência do modelo em identificar pontos de mudança no final da seqüência de observações. Tal resultado, neste caso, é bastante razoável, uma vez que a função taxa de falha real apresenta uma inclinação mais acentuada para os maiores tempos observados.

Outro fato que deve ser salientado é que o modelo proposto indicou a presença de muitos pontos de mudança para o caso 1 com altas probabilidades (ver Tabela 4.5), mas as estimativas produto, neste caso, apresentaram valores praticamente constantes ao longo do tempo, como pode ser observado nas Figuras 4.1 e 4.2. Como a mesma distribuição *a priori* para a taxa de falha é assumida em cada intervalo associado à partição aleatória que divide o eixo do tempo, e cada intervalo muito provavelmente contém um número reduzido de observações (quanto maior o número de intervalos, menor o número de observações associado a cada intervalo), a informação trazida pelos

dados pode não ter sido capaz de corrigir a informação proveniente da distribuição *a priori*. Isto poderia explicar porque as estimativas produto associadas ao caso 1 apresentaram valores praticamente constantes ao longo do tempo, como se tinha *a priori*.

É interessante ressaltar-se ainda que o MKP considera uma única partição para o eixo do tempo (com tantos intervalos quanto são os tempos de falha observados), enquanto que o modelo proposto considera todas as possíveis partições do eixo do tempo. Além disso, se for assumida a moda *a posteriori* como estimativa para o número de blocos *a posteriori*, isto é, o número modal de blocos *a posteriori*, com exceção do caso 1, tem-se que as estimativas para o número de intervalos fornecidas pelo modelo proposto são significativamente inferiores ao número de intervalos (definido arbitrariamente) associado ao MKP.

Tabela 4.6: *Partições mais prováveis a posteriori - função taxa de falha crescente.*

Coesão	Partição	Prob.
Caso 1		
1	$\rho=\{0, 1, 2, \dots, 51, 52\}$	0,427
2	$\rho=\{0, 1, 2, \dots, 51, 52\}$	0,623
3	$\rho=\{0, 1, 2, \dots, 51, 52\}$	0,219
4	$\rho=\{0, 1, 2, \dots, 51, 52\}$	0,639
Caso 2		
1	$\rho=\{0, 1, 47, 51, 52\}$	0,028
2	$\rho=\{0, 1, 39, 48, 50, 51, 52\}$	0,009
3	$\rho=\{0, 1, 45, 51, 52\}$	0,062
4	$\rho=\{0, 1, 46, 51, 52\}$	0,073
Caso 3		
1	$\rho=\{0, 1, 51, 52\}$	0,172
2	$\rho=\{0, 1, 48, 51, 52\}$	0,14
3	$\rho=\{0, 1, 51, 52\}$	0,281
4	$\rho=\{0, 1, 51, 52\}$	0,292
Caso 4		
1	$\rho=\{0, 1, 48, 51, 52\}$	0,114
2	$\rho=\{0, 1, 46, 51, 52\}$	0,078
3	$\rho=\{0, 1, 50, 52\}$	0,114
4	$\rho=\{0, 1, 48, 51, 52\}$	0,146

### 4.3 Função Taxa de Falha Decrescente

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados obtidos para um conjunto de 60 observações geradas da distribuição Weibull com função taxa de falha decrescente, com parâmetro de escala 5 e parâmetro de forma 0,9.

Das 60 observações geradas, foram observados 53 tempos de falha e 7 tempos censurados, resultando num percentual de 11,66% de censura.

Na Tabela 4.7 são apresentadas algumas estatísticas descritivas referentes a função taxa de falha real, obtidas a partir a amostra gerada.

Tabela 4.7: *Estatísticas descritivas associadas à função taxa de falha real - caso decrescente.*

Mínimo	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	Var
4,832	5,300	5,813	6,010	6,555	9,152	0,8674294

A Tabela 4.8 fornece as distribuições *a priori* para a função taxa de falha. As coesões *a priori* que serão consideradas nesta seção são apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.8: *Distribuição a priori para as taxas de falha - caso decrescente.*

Caso	$\alpha$	$\beta$	$E[\theta]$	$Var[\theta]$
1	360	60	6	0,1
2	36	6	6	1
3	3,6	0,6	6	10
4	0,36	0,06	6	100

Nas Figuras 4.4 e 4.5 são apresentadas as estimativas produto para a função taxa de falha de acordo com as diferentes escolhas de distribuições *a priori* para a função taxa de falha fornecidas pela Tabela 4.8, e as diferentes escolhas de coesões *a priori* apresentadas na Tabela 4.1.

Como pode ser observado nas Figuras 4.4 e 4.5, verifica-se que o modelo proposto, assim como para o caso discutido na seção anterior em que foi considerada uma função taxa de falha crescente, é bastante sensível à escolha da distribuição *a priori* para a taxa de falha. As estimativas produto associadas ao o caso 1, por exemplo, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é a mais informativa (com menor variância *a*

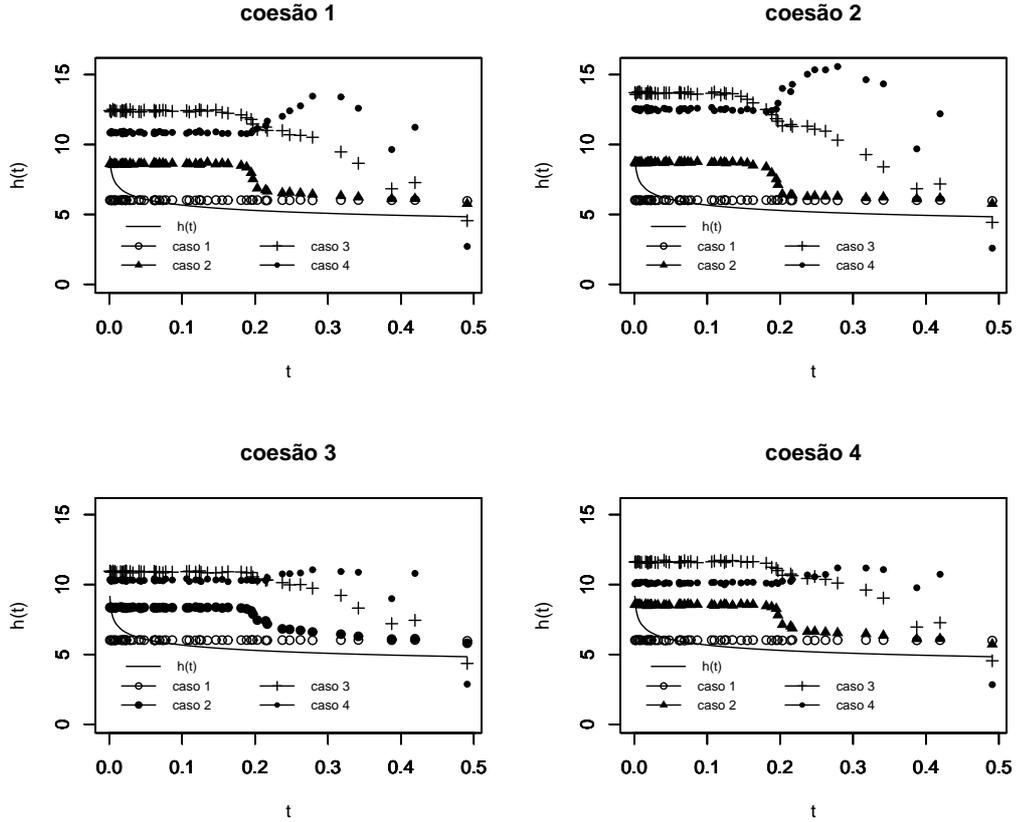


Figura 4.4: Estimativas produto para a função taxa de falha para diferentes coesões *a priori* - caso decrescente.

*priori*) dentre todas as distribuições *a priori* para a taxa de falha consideradas na Tabela 4.8, apresentaram valores aproximadamente constantes ao longo do tempo. Para o caso 2, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é razoavelmente informativa (a variância *a priori* associada ao caso 2 é a que mais se aproxima da variância observada para a função taxa de falha real, fornecida na Tabela 4.7) fornece as melhores estimativas para a função taxa de falha com relação aos demais casos considerados. Entretanto, como pode ser observado, independentemente do tipo de coesão adotado, o modelo não acompanha o decrescimento da função taxa de falha real de maneira muito satisfatória, como se verificou no caso crescente, discutido na seção anterior. Para os casos 3 e 4, que apresentam distribuições *a priori* pouco informativas, isto é, apresentam variâncias grandes *a priori*, percebe-se que as estimativas produto se distanciam consideravelmente da função taxa de falha real.

Note que em todos os casos considerados na Tabela 4.8 a estimativa *a priori* para

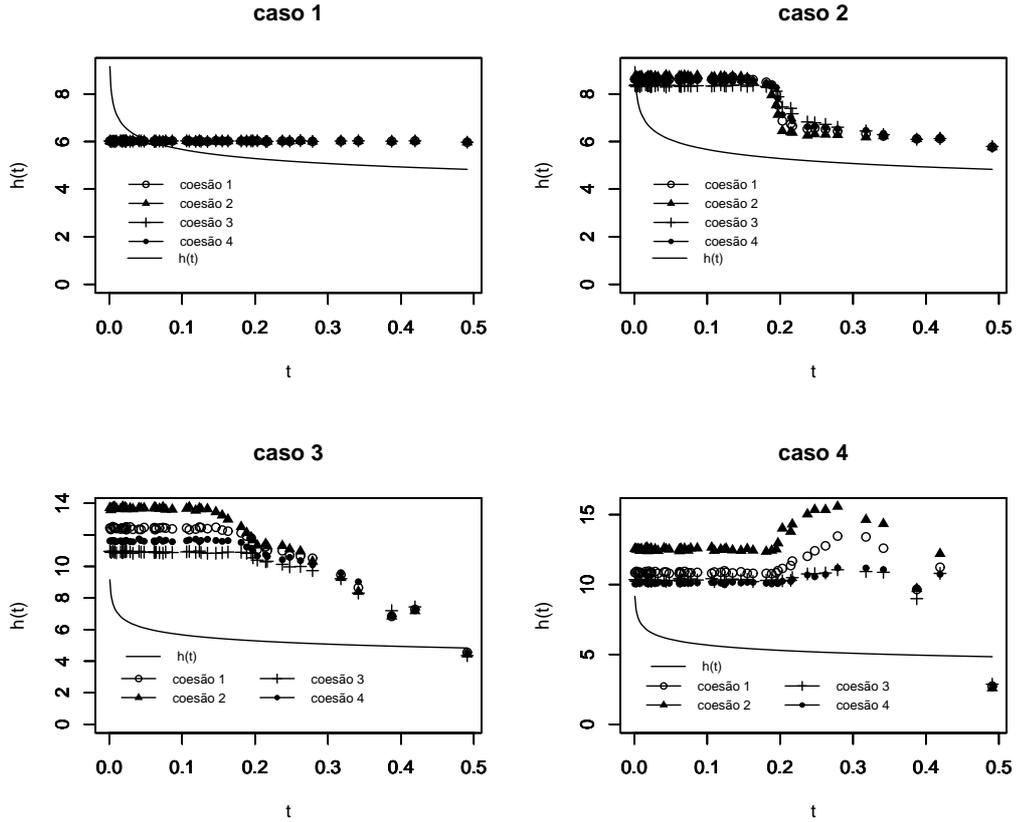


Figura 4.5: Estimativas produto para a função taxa de falha para diferentes distribuições *a priori* para a taxa de falha - caso decrescente.

a taxa de falha em cada intervalo é 6. Como pode ser observado nas Figuras 4.4 e 4.5, as estimativas produto associadas ao caso 1, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é bastante informativa, praticamente não se alteraram, continuando a estimar a função taxa de falha em torno de 6, como havia sido feito *a priori*, independentemente da coesão assumida *a priori*. Para o caso 2, que apresenta uma distribuição *a priori* razoavelmente informativa para a taxa de falha, verifica-se que as estimativas produto associadas aos tempos de falha iniciais apresentaram valores aproximadamente constantes e acima de 6 (em torno de 8), seguido de um declínio na direção dos últimos tempos de falha observados, com as estimativas aproximando-se do valor 6 estimado *a priori*. Para o caso 3 observa-se que as estimativas produto associadas aos tempos de falhas iniciais são muito superiores (em torno de 12) ao valor 6 estimado *a priori*, seguido de um suave declínio na direção dos últimos tempos de falha observados. Note ainda que as estimativas associadas aos últimos tempos de

falha, salvo a estimativa referente ao último tempo de falha observado, apresentaram valores ainda consideravelmente superiores ao valor 6 estimado *a priori* para a taxa de falha. Finalmente, para o caso 4, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é a menos informativa dentre todos os cenários considerados na Tabela 4.8, apresentaram estimativas produto, em geral, superiores ao valor 10. Além disso, como pode ser observado na Figura 4.5, as estimativas para a função taxa de falha associadas ao caso 4 apresentaram, principalmente para os casos em que as coesões 1 e 2 são consideradas, um comportamento crescente e posteriormente decrescente a partir dos tempos de falhas intermediários.

Quanto ao tipo de coesão adotado, observou-se que os quatro tipos de coesões *a priori* considerados forneceram resultados bastante similares para os casos 1 e 2. Entretanto, para os casos 3 e 4, cujas distribuições *a priori* para a taxa de falha são pouco informativas, isto é, apresentam variâncias grandes *a priori*, as coesões 3 e 4, aparentemente, forneceram melhores estimativas para a função taxa de falha, como pode ser visto na Figura 4.5.

A Tabela 4.9 fornece os erros quadráticos associados às estimativas produto fornecidas pelo modelo proposto para a função taxa de falha para todos os cenários considerados nesta seção. Na Figura 4.6 são apresentadas as estimativas produto para a função taxa de falha referentes aos casos 2 e 4, respectivamente, para as 4 escolhas de coesões *a priori* apresentadas na Tabela 4.1, e as estimativas da função taxa de falha fornecidas pelo MKP.

Tabela 4.9: *Erro quadrático associado às estimativas para função taxa de falha - caso decrescente*

Caso	Coesões			
	1	2	3	4
1	45,17252	45,17252	45,17252	44,94146
2	265,6006	270,0236	232,6728	259,8202
3	1808,931	2442,189	1113,569	1426,823
4	1424,547	2535,106	1027,983	969,6134

O erro quadrático correspondente à função taxa de falha associada ao MKP, neste caso, é  $EQ(MKP)=2885371$ . Como pode ser observado na Tabela 4.9, o erro qua-

drástico associado ao MKP é significativamente superior a qualquer erro quadrático associado ao modelo proposto, independentemente do tipo de coesão *a priori* adotado e da distribuição *a priori* assumida para a taxa de falha. Tal resultado pode ser explicado pelo fato de as estimativas para a taxa de falha associadas ao MKP terem apresentado uma variabilidade muito grande ao longo do tempo, como pode ser visto na Figura 4.6.

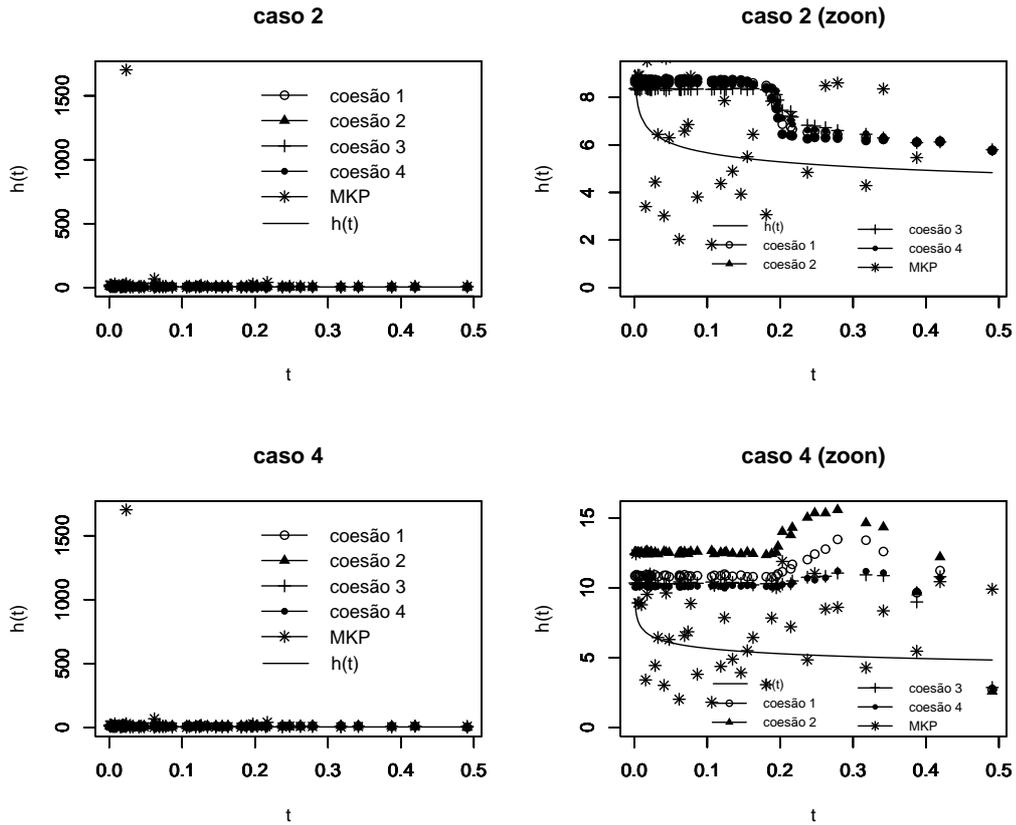


Figura 4.6: Estimativas produto e de Kim-Proschan para a função taxa de falha decrescente - casos 2 e 4.

Note que (ver Tabela 4.9) as estimativas produto associadas ao caso 2, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é razoavelmente informativa, assim como se verificou para a função taxa de falha crescente discutida na seção anterior, apresentaram menores erros quadráticos que as estimativas produto associadas aos casos 3 e 4, cujas distribuições *a priori* para a taxa de falha são pouco informativas, independentemente da coesão *a priori* assumida. Entretanto, mesmo estimando a função taxa de falha como sendo aproximadamente uma constante ao longo do tempo, neste caso, as

estimativas produto associadas ao caso 1 apresentaram os menores erros quadráticos dentre todos os casos considerados na tabela 4.8.

Nas Tabelas 4.10 e 4.11 são apresentadas, respectivamente, as modas *a posteriori* e suas respectivas probabilidades para o número de blocos (intervalos), e as partições mais prováveis para todos os modelos ajustados.

Tabela 4.10: *Modas a posteriori associadas ao número de blocos - caso decrescente.*

Casos	Coesões			
	1	2	3	4
1	53 (1,0)	53 (1,0)	53 (1,0)	53 (1,0)
2	7 (0,237)	11 (0,218)	6 (0,385)	6 (0,265)
3	5 (0,358)	6 (0,262)	4 (0,417)	5 (0,396)
4	4 (0,469)	3 (0,379)	5 (0,489)	3 (0,496)

Da Tabela 4.10 observa-se que o modelo proposto indica um número pequeno de blocos ( $\leq 11$ ) *a posteriori* é mais provável para os casos 2, 3 e 4. Entretanto, para o caso 1, independentemente da coesão *a priori* assumida, verifica-se que a partição aleatória com um intervalo associado a cada tempo de falha observado é estimada pelo modelo com probabilidade 1, ou seja, que a partição que define o MEP não-paramétrico é estimada como sendo a única partição provável para os dados em estudo.

É importante ser ressaltado que, se a moda *a posteriori* for assumida como estimativa para o número de blocos *a posteriori*, então as estimativas fornecidas pelo modelo proposto para o número de blocos *a posteriori*, exceto para o caso 1, são significativamente inferiores ao número de intervalos (definido arbitrariamente) associado ao MKP, que considera tantos intervalos quanto o número de falhas observadas.

Como pode ser observado na Tabela 4.11, com exceção do caso 1, apesar da função taxa de falha apresentar uma maior inclinação no início da seqüência de observações, o modelo apresentou uma tendência para captar pontos de mudança no final das observações. Tal fato, que não era esperado neste caso, poderia explicar porque o

modelo não acompanhou de maneira satisfatória o decaimento da função taxa de falha.

Outro fato que merece ser destacado é que o modelo proposto estimou com probabilidade 1 cada tempo de falha observado como sendo um ponto de mudança para o caso 1, mas as estimativas produto apresentaram valores praticamente constantes ao longo do tempo, como pode ser observado nas Figura 4.4 e 4.5. Como a mesma distribuição *a priori* para a taxa de falha é assumida em cada intervalo associado à partição aleatória que divide o eixo do tempo, e cada intervalo contém exatamente um único tempo de falha, a informação trazida pelos dados pode não ter sido capaz de corrigir a informação proveniente da distribuição *a priori* que, neste caso, apresenta uma variância consideravelmente pequena. Tal fato explicaria o motivo das estimativas produto associadas ao caso 1 terem apresentado valores praticamente constantes ao longo do tempo.

Tabela 4.11: *Partições mais prováveis a posteriori - função taxa de falha decrescente.*

Coesão	Partição	Prob.
Caso 1		
1	$\rho = \{0, 1, 2, \dots, 52, 53\}$	1,0
2	$\rho = \{0, 1, 2, \dots, 52, 53\}$	1,0
3	$\rho = \{0, 1, 2, \dots, 52, 53\}$	1,0
4	$\rho = \{0, 1, 2, \dots, 52, 53\}$	1,0
Caso 2		
1	$\rho = \{0, 41, 48, 49, 50, 51, 52, 53\}$	0,024
2	$\rho = \{0, 41, 44, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53\}$	0,013
3	$\rho = \{0, 41, 49, 50, 51, 52, 53\}$	0,032
4	$\rho = \{0, 41, 50, 51, 52, 53\}$	0,032
Caso 3		
1	$\rho = \{0, 44, 50, 51, 52, 53\}$	0,045
2	$\rho = \{0, 40, 50, 51, 52, 53\}$	0,043
3	$\rho = \{0, 48, 50, 52, 53\}$	0,037
4	$\rho = \{0, 44, 50, 52, 53\}$	0,074
Caso 4		
1	$\rho = \{0, 48, 52, 53\}$	0,045
2	$\rho = \{0, 44, 50, 52, 53\}$	0,043
3	$\rho = \{0, 48, 52, 53\}$	0,037
4	$\rho = \{0, 48, 52, 53\}$	0,074

## 4.4 Conclusões

Verificou-se que o modelo proposto é bastante sensível à escolha da distribuição *a priori* para a taxa de falha. Para ambas as taxas de falhas consideradas, observou-se que os melhores resultados são obtidos quando se utiliza uma distribuição *a priori* razoavelmente informativa para a função taxa de falha.

Distribuições *a priori* muito informativas (com variâncias *a priori* muito pequenas), independentemente do tipo de coesão *a priori* adotado, parecem estimular a formação de partições *a posteriori* com um número alto de intervalos. Consequentemente, cada intervalo é composto por um número reduzido de tempos de falha, fazendo com que a distribuição *a priori* tenha mais peso na distribuição *a posteriori* que os dados.

Para os casos em que distribuições *a priori* pouco informativas (com variâncias

grandes *a priori*) para a taxa de falha são utilizadas, verificou-se um aumento substancial na variabilidade entre as estimativas fornecidas pelo modelo proposto para a função taxa de falha.

Observou-se também que os quatro tipos de coesões *a priori* forneceram resultados bastante similares para os casos em que a função taxa de falha é crescente, independentemente da distribuição *a priori* assumida para a taxa de falha. Para o caso decrescente, no entanto, verificou-se que o modelo apresentou resultados similares para os quatro tipos de coesões *priori* considerados apenas para os casos em que as distribuições *a priori* para a taxa de falha são muito ou razoavelmente informativas (casos 1 e 2). Para os casos em que as distribuições *a priori* para a taxa de falha são pouco informativas (casos 3 e 4), observou-se que as coesões 3 e 4 aparentemente forneceram melhores resultados.

O modelo proposto, em geral, apresentou melhores estimativas para a função taxa de falha que o MKP, tanto para a função taxa de falha crescente quanto para a função taxa de falha decrescente. Além disso, com exceção do caso em que se tem uma distribuição *a priori* muito informativa para a taxa de falha (caso 1), as estimativas para o número de intervalos (blocos) *a posteriori* fornecidas pelo modelo proposto foram significativamente inferiores ao número de intervalos considerados pela partição do eixo do tempo associada ao MKP.

# Capítulo 5

## Aplicações

### 5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas, utilizando-se a metodologia proposta, a análise de dois conjuntos de dados reais já discutidos na literatura, em que o modelo Weibull foi ajustado (ver Gamerman (1993) e Freitas e Colosimo (1997)).

Em ambos os casos, será realizada uma análise de sensibilidade para o modelo considerando-se as diferentes escolhas de coesões *a priori* utilizadas no Capítulo 4. Com relação a distribuição *a priori* para a função taxa de falha, serão consideradas duas situações: na primeira situação, será assumida uma distribuição *a priori* não informativa para a função taxa de falha; na segunda, será considerada uma distribuição *a priori* informativa para a função taxa de falha.

Assim como no capítulo anterior, será assumida como distribuição *a priori* para a taxa de falha em cada intervalo determinado pela partição aleatória  $\rho$ , a distribuição Gama( $\alpha, \beta$ ). Segundo Gelman *et. al.* (2004), uma distribuição Gama( $\alpha, \beta$ ) não informativa é obtida no caso limite em que  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\beta \rightarrow 0$ . Para se determinar as distribuições *a priori* informativas a função taxa de falha, como em ambos os exemplos de aplicação considerados, não se tem informação *a priori* disponível acerca da função taxa de falha, serão utilizadas informações provenientes das funções taxa de falhas associadas aos modelos Weibull ajustados utilizando-se o método da máxima verossimilhança (MMV). Neste caso, a distribuição *a priori* para a função taxa de falha será centrada na média da função taxa de falha estimada pelo MMV, e a escolha

da variância *a priori* será baseada na variância observada para a função taxa de falha estimada.

Para finalizar, é realizada uma comparação dos resultados fornecidos pelo modelo proposto com os resultados fornecidos pelo MKP e pelo modelo Weibull ajustado utilizando-se o MMV.

## 5.2 Aplicação 1

Para o primeiro exemplo de aplicação considerou-se o conjunto de dados analisado por Kim e Proschan (1991), que trata do tempo até a falha (medido em dias) de 125 sistemas de telecomunicações instalados pelo GTE, dos quais 17 vieram a falhar e 108 continuaram funcionando após o término do estudo, resultando num percentual de censura de 86,4%. A Tabela com os dados referente a este estudo é apresentada no Apêndice B.

O modelo Weibull foi ajustado para o conjunto de dados em questão, utilizando-se o MMV. As estimativas para os parâmetros de forma e de escala foram, respectivamente,  $\hat{\alpha} = 0,5922964$  e  $\hat{\beta} = 0,007733103$ . Tal modelo apresenta uma função taxa de falha decrescente ( $\alpha < 1$ ).

Na Tabela 5.1 são apresentadas algumas estatísticas descritivas referentes a função taxa de falha associada ao modelo Weibull ajustado.

Tabela 5.1: *Estatísticas descritivas associadas à função taxa de falha estimada via MMV - aplicação 1.*

Mínimo	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	Var
0,0006126	0,0008249	0,0009702	0,0015110	0,0017910	0,0045800	$1,296196 \times 10^{-06}$

Para a obtenção de uma distribuição informativa para a função taxa de falha, foram utilizadas as informações provenientes da Tabela 5.1. A Tabela 5.2 fornece as distribuições *a priori* para a função taxa de falha.

Na Figura 5.1 são apresentadas as estimativas produto para a função taxa de falha referentes aos casos 1 e 2, respectivamente, para as diferentes escolhas de coesões *a priori*, juntamente com as estimativas fornecidas pelo MKP e as estimativas de

Tabela 5.2: Distribuição *a priori* para a função taxa de falha - aplicação 1.

Caso	$\alpha$	$\beta$	$E[\theta]$	$Var[\theta]$
1	0,001	0,001	1	1000
2	1,5	1000	$1,5 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-6}$

máxima verossimilhança (EMV) da função taxa de falha associada ao modelo Weibull ajustado.

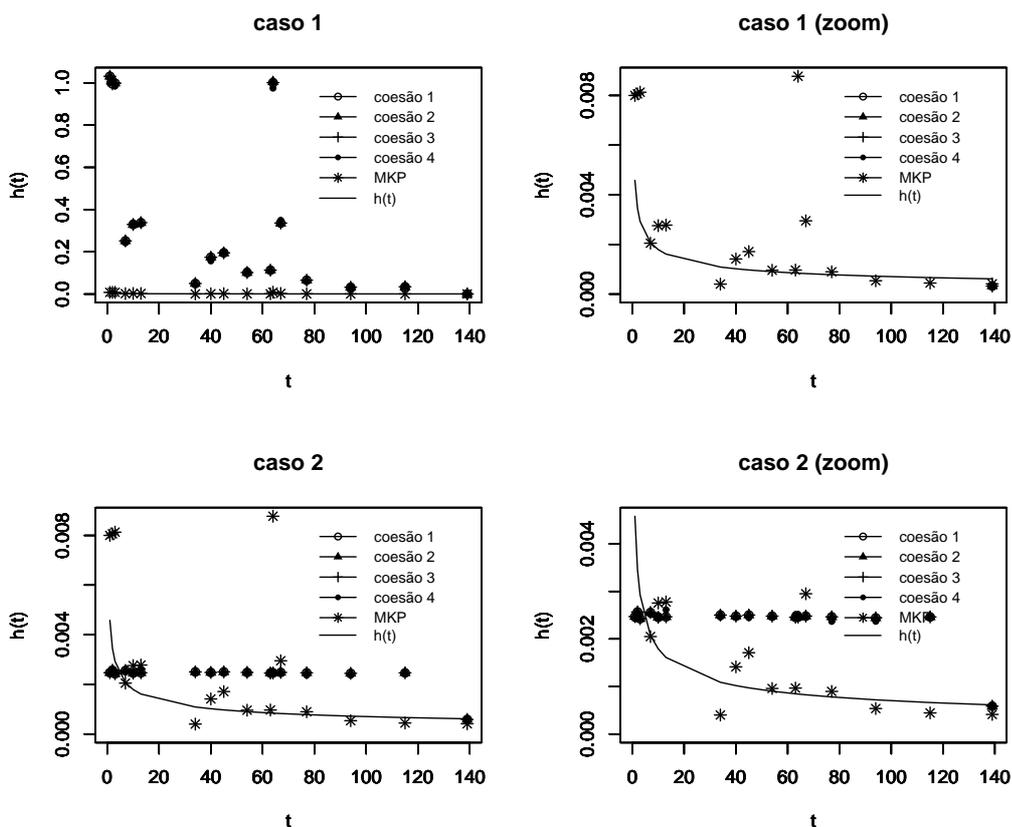


Figura 5.1: Estimativas para a função taxa de falha segundo diferentes escolhas de coesões *a priori* - aplicação 1.

Perceba da Tabela 5.2 que, *a priori*, no caso 1, estima-se que a função taxa de falha é constante ao longo do tempo e igual a 1. Na análise *a posteriori* (ver Figura 5.1), nota-se que as estimativas produto indicam uma função taxa de falha decrescente e, em geral, menor que 1. Neste caso, observa-se que as estimativas produto apresentaram valores, com exceção da estimativa associada ao último tempo de fa-

lha observado, muito superiores às estimativas fornecidas pelo MKP e pelo MMV, independentemente da escolha da coesão *a priori*. Cabe ressaltar-se ainda que as estimativas produto apresentaram maior variabilidade ao longo do tempo que as estimativas fornecidas pelos dois outros métodos, cujas estimativas são mais suaves.

Para o caso 2, nota-se da Figura 5.1 que as estimativas produto indicam que a função taxa de falha é praticamente constante ao longo do tempo, apresentando valores próximos de  $2,5 \times 10^{-3}$ . Perceba que, ao se utilizar uma distribuição *a priori* muito informativa para a taxa de falha, e centrada em  $1,5 \times 10^{-3}$ , *a posteriori*, estimou-se que a função taxa de falha é superior ao valor estimado *a priori*. Note ainda que, neste caso, as estimativas produto apresentaram uma variabilidade (entre as estimativas) muito pequena, e não indicaram a tendência de decrescimento da função taxa de falha observada para as estimativas da função taxa de falha fornecidas pelos dois outros métodos. Além disso, as estimativas produto, em geral, apresentaram valores superiores às estimativas fornecidas pelo MKP e pelo MMV.

A Tabela 4.6 fornece as partições mais prováveis *a posteriori* para os quatro tipos de coesões *a priori* considerados, e para as duas especificações de distribuições *a priori* para a função taxa de falha apresentadas na Tabela 5.2.

Tabela 5.3: *Partições mais prováveis a posteriori - aplicação 1.*

Coesão	Partição	Prob.
Caso 1		
1	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	0,999
2	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	1
3	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	0,999
4	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	0,999
Caso 2		
1	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	1
2	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	1
3	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	1
4	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	1

Da Tabela 5.3 observa-se que a partição mais provável *a posteriori* indica que há mudanças na função taxa de falha em todos os intervalos, ou seja, com probabilidades maiores ou iguais a 0,99 tem-se que, em todas as situações consideradas, o MEP não-paramétrico seria o modelo mais indicado para descrever o comportamento dos dados.

Note ainda que, se a moda *a posteriori* for assumida como estimativa para o número do blocos *a posteriori*, em todas as situações consideradas tem-se, com probabilidades maiores ou iguais a 0,99, que a estimativa para o número de blocos *a posteriori* é 17, que corresponde ao número de tempos de falha observados.

Como foi observado no estudo dos conjuntos de dados gerados, as estimativas produto mostraram-se muito sensíveis à escolha da distribuição *a priori* para a taxa de falha. Este fato também se verificou aqui.

No caso 2, por exemplo, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é informativa, observa-se da Tabela 5.3 que, com probabilidade *a posteriori* igual a 1, o MEP não-paramétrico seria o modelo indicado para descrever o comportamento dos dados. Neste caso, com probabilidade 1, cada intervalo contém exatamente um único tempo de falha e, conseqüentemente, há pouca informação proveniente dos dados em cada intervalo (quanto menor o número de tempos de falha em cada intervalo, menor é a quantidade de informação disponível). Note que, *a priori*, a estimativa para a função taxa de falha indicava uma função taxa de falha constante ao longo do tempo, e se tinha muita certeza sobre o valor da função taxa de falha. Isto poderia explicar o fato de, *a posteriori*, não ter havido mudança na forma da função taxa de falha.

Também no caso 1, notou-se que o MEP não-paramétrico, muito provavelmente, seria o modelo mais indicado para descrever o comportamento dos dados. Este fato, aliado a pouca informação disponível *a priori* sobre a função taxa de falha, poderia explicar a alta variabilidade observada para as estimativas produto.

### 5.3 Aplicação 2

Como segundo exemplo de aplicação, tomou-se o conjunto de dados proveniente de Freitas e Colosimo (1997), que trata de um teste de vida realizado com mecanismos manuais de acionamento de vidros de automóveis. Neste estudo, um lote de 30 mecanismos novos foi colocado sobre teste por um período de 50000 ciclos (um ciclo corresponde ao ato de descer e subir o vidro). Ao final do teste, constatou-se que 18 mecanismos haviam falhado e o restante continuava funcionando, resultando num percentual de censura de 40%. O número de ciclos até a falha dos mecanismos que falharam são apresentados na Tabela 5.4, em que \* denota observação censurada.

Tabela 5.4: *Número de ciclos até a falha de mecanismos de acionamento manual de vidro de automóveis.*

38590	16513	27847	13566	14922	40278
11223	36229	5626	39580	44540	31225
28613	12128	26791	41325	27144	22138
50000*	50000*	50000*	50000*	50000*	50000*
50000*	50000*	50000*	50000*	50000*	50000*

Analogamente ao exemplo de aplicação analisado na seção anterior, foi ajustado, através do MMV, o modelo Weibull com parâmetros de forma e de escala, respectivamente, dados por  $\hat{\alpha} = 1,658447$  e  $\hat{\beta} = 1,526378 \times 10^{-08}$ . Note que, neste caso, o modelo estimado apresenta uma função taxa de falha crescente ( $\alpha > 1$ ).

A Tabela 5.5 fornece algumas estatísticas descritivas referentes à função taxa de falha associada ao modelo Weibull ajustado.

Tabela 5.5: *Estatísticas descritivas associadas à função taxa de falha estimada via MMV - aplicação 2.*

Mínimo	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	Var
$7,459 \times 10^{06}$	$1,442 \times 10^{-05}$	$2,120 \times 10^{-05}$	$2,020 \times 10^{-05}$	$2,623 \times 10^{-05}$	$2,913 \times 10^{-05}$	$4,231501 \times 10^{-11}$

Na Tabela 5.6 são apresentadas as distribuições *a priori* para a função taxa de falha.

Tabela 5.6: *Distribuição a priori para a função taxa de falha - aplicação 2.*

Caso	$\alpha$	$\beta$	$E[\theta]$	$Var[\theta]$
1	0,001	0,001	1	1000
2	1,5	1000	$2 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^{-11}$

A Figura 5.2 fornece as estimativas produto para a função taxa de falha, considerando-se as diferentes escolhas de coesões *a priori* para os casos 1 e 2, respectivamente, bem como as estimativas fornecidas pelos MMV e MKP.

Como pode ser observado na Tabela 5.6, no caso 1, a função taxa de falha era estimada, *a priori*, como uma constante ao longo do tempo, com valor igual a 1. Na

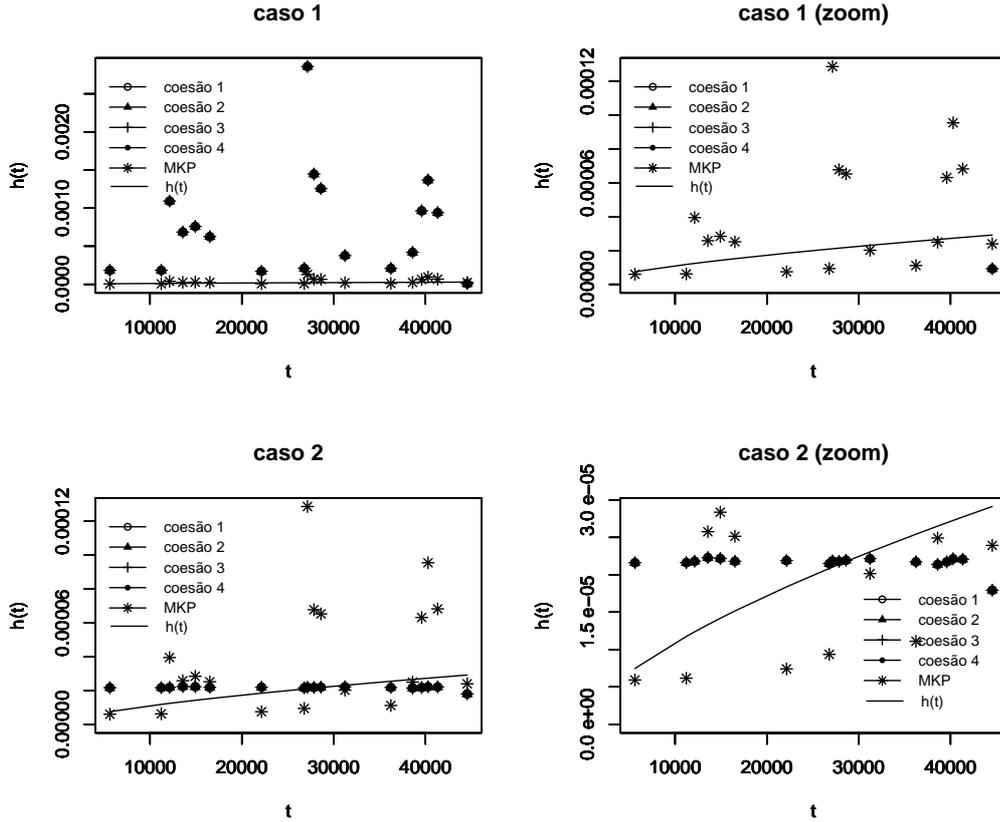


Figura 5.2: Estimativas para a função taxa de falha segundo diferentes escolhas de coesões *a priori* - aplicação 2.

análise *a posteriori* (ver Figura 5.2), verifica-se que as estimativas produto apresentaram valores consideravelmente inferiores à estimativa *a priori* para a função taxa de falha. Nota-se ainda que, independentemente do tipo de coesão *a priori* adotado, as estimativas produto para a taxa de falha são, com exceção da estimativa associada ao último tempo de falha observado, muito superiores as estimativas fornecidas pelos MKP e pelo MMV. Além disso, neste caso, as estimativas produto para a função taxa de falha apresentaram uma variabilidade maior que as estimativas fornecidas pelos outros dois métodos.

Para o caso 2, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é informativa, observa-se da figura 5.2 que as estimativas produto indicam uma função taxa de falha aproximadamente constante ao longo do tempo, com valores próximos de  $2 \times 10^{-5}$ , que corresponde ao valor estimado *a priori* para taxa de falha, enquanto as estimativas para a função taxa de falha fornecidas pelo MKP e pelo MMV indicam uma função

taxa de falha crescente. Note que as estimativas produto, neste caso, apresentaram valores mais próximos das estimativas para a função taxa de falha fornecidas pelo MMV que as estimativas fornecidas pelo MKP, mesmo estimando a função taxa de falha como sendo aproximadamente uma constante ao longo do tempo. Perceba que, até a décima segunda observação, cujo valor é 31225, as estimativas produto para a função taxa de falha apresentaram valores superiores às estimativas fornecidas pelo MMV e que, após esta observação, as estimativas produto apresentaram valores inferiores às EMV. Note ainda que, neste caso, as estimativas produto apresentaram a menor variabilidade entre os três métodos considerados.

Tabela 5.7: *Partições mais prováveis a posteriori - aplicação 2.*

Coesão	Partição	Prob.
Caso 1		
1	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$	1
2	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$	1
3	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$	1
4	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$	1
Caso 2		
1	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$	1
2	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$	1
3	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$	1
4	$\rho = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$	1

Como pode ser observado na Tabela 5.7, que fornece as partições mais prováveis *a posteriori* para todos os modelos ajustados, independentemente do tipo de coesão *a priori* adotado e da distribuição *a priori* assumida para a função taxa de falha, o modelo proposto estima com probabilidade 1 aquela partição que divide o eixo do tempo com tantos intervalos quanto o número de falhas observadas, ou seja, que o MEP não-paramétrico seria o modelo mais indicado para descrever os dados em estudo. Conseqüentemente, se a moda *a posteriori* for assumida como estimativa para o número de blocos *a posteriori*, então, para todos os cenários considerados, tem-se com probabilidade 1 que a estimativa para o número de blocos *a posteriori* é 18, que corresponde ao número de tempos de falha observados.

Analogamente ao que se observou no estudo realizado com os conjuntos de dados gerados e no exemplo de aplicação analisado anteriormente, as estimativas produto se

mostraram bastante sensíveis à escolha da distribuição *a priori* para a taxa de falha.

Em ambos os casos considerados, verificou-se da Tabela 5.7 que, com probabilidade 1, o MEP não-paramétrico seria o modelo mais adequado para descrever os dados em estudo. Desta forma, cada intervalo deve conter exatamente um único tempo de falha e, conseqüentemente, deve haver pouca informação proveniente dos dados em cada intervalo pois, quanto menor o número de tempos de falha em cada intervalo, menor é a quantidade de informação disponível. Este fato poderia ser utilizado para se explicar porque as estimativas produto apresentaram muita variabilidade no caso 1, cuja distribuição *a priori* para a taxa de falha é não informativa, e porque no caso 2, *a posteriori*, não houve mudança na forma da função taxa de falha, que era estimada *a priori* como uma constante ao longo do tempo, com muita certeza sobre isso.

## 5.4 Conclusões

Na análise dos dois exemplos de aplicação considerados verificou-se que as diferentes coesões *a priori* assumidas forneceram resultados bastante similares, independentemente da distribuição *a priori* adotada para a taxa de falha. Entretanto, observou-se que a escolha da distribuição *a priori* para a taxa de falha afetou de maneira significativa as estimativas da função taxa de falha fornecidas pelo modelo proposto.

É importante ressaltar-se também que, em ambos os exemplos de aplicação analisados, observou-se que o modelo estimou com probabilidades muito altas a partição cujo número de intervalos é igual ao número de falhas observado, ou seja, que a partição associada ao MKP é a partição do eixo do tempo mais provável para os dois conjuntos de dados em estudo, independentemente do tipo de coesão *a priori* adotado e da distribuição *a priori* assumida para a função taxa de falha.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma nova abordagem para o MEP em que a partição que divide o eixo do tempo é considerada aleatória e, conseqüentemente, um parâmetro a ser estimado. A estrutura do MPP, proposto por Hartigan (1990), é utilizada. Dois conjuntos de dados gerados de distribuições Weibull, um com função taxa de falha crescente e outro com função taxa de falha decrescente, foram utilizados para se avaliar o desempenho do modelo. Diferentes escolhas de distribuições *a priori* para a função taxa de falha e diferentes escolhas de coesões *a priori* foram considerados. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados fornecidos pelo MKP. Dois exemplos de aplicação envolvendo conjuntos de dados reais também foram analisados utilizando-se a metodologia proposta, o MMV e o MKP.

Para o estudo envolvendo os conjuntos de dados gerados foram considerados quatro tipos de coesões *a priori* para a partição aleatória, sendo três deles não paramétricos, e quatro distribuições *a priori* para a função taxa de falha, em que se considerou diferentes níveis de informação *a priori*. Em ambos os casos (crescente e decrescente), observou-se que as estimativas para a função taxa de falha associadas ao modelo proposto apresentaram, na maioria dos casos abordados, melhores resultados que o MKP. Além disso, o método proposto fornece outras informações úteis para a análise. Por exemplo, as estimativas para o número de intervalos *a posteriori* associados a partição aleatória que, exceto para os casos em que distribuições *a priori* muito informativas foram assumidas para a taxa de falha, foram consideravelmente menores que o número de intervalos associado ao MKP, cuja partição é definida de forma arbitrária e

considera um intervalo para cada tempo de falha observado.

Para a análise dos dois conjuntos de dados reais também foram considerados as mesmas quatro coesões *a priori* e duas distribuições *a priori* para a taxa de falha, sendo uma distribuição *a priori* não informativa, e outra informativa. Em ambos os exemplos de aplicação analisados verificou-se que os quatro tipos de coesões *a priori* forneceram resultados bastante similares, e as estimativas associadas às diferentes escolhas de distribuições *a priori* para a taxa de falha apresentaram diferenças tanto na forma da função taxa de falha estimada como também na variabilidade entre as estimativas ao longo do tempo. Além disso, para todos os modelos ajustados, a partição do eixo do tempo que define o MEP não-paramétrico foi indicada como a mais provável *a posteriori*, com probabilidade muito alta.

Em linhas gerais, o modelo proposto apresentou, na maioria dos casos abordados, melhores resultados que o MKP. Outra vantagem desse tipo de abordagem é a possibilidade de se fazer inferência sobre a partição a ser utilizada e que, até então, era determinada de maneira arbitrária. Além disso, verificou-se que o modelo é bastante sensível à escolha da distribuição *a priori* para a taxa de falha, e noto-se que o tipo de coesão *a priori* assumido, em geral, não afetou de maneira significativa as estimativas para a função taxa de falha.

Como propostas para trabalhos futuros, sugere-se avaliar o desempenho o modelo para outras distribuições, como por exemplo as distribuições Exponencial, Gama e Log-normal, verificar o comportamento do modelo para diferentes tamanhos de amostras e proporções de censura, obter a função de sobrevivência, e incluir covariáveis no modelo. Outra proposta interessante seria tentar incorporar a estrutura dinâmica utilizada por Gamerman (1994) ao modelo, tentando eliminar-se, desta forma, a dificuldade encontrada para se determinar a distribuição *a priori* para a taxa de falha.

# Apêndice A

A seguir são apresentados os demais gráficos e tabelas referentes ao estudo realizado com os dois conjuntos de dados gerados.

## Função Taxa de Falha Crescente

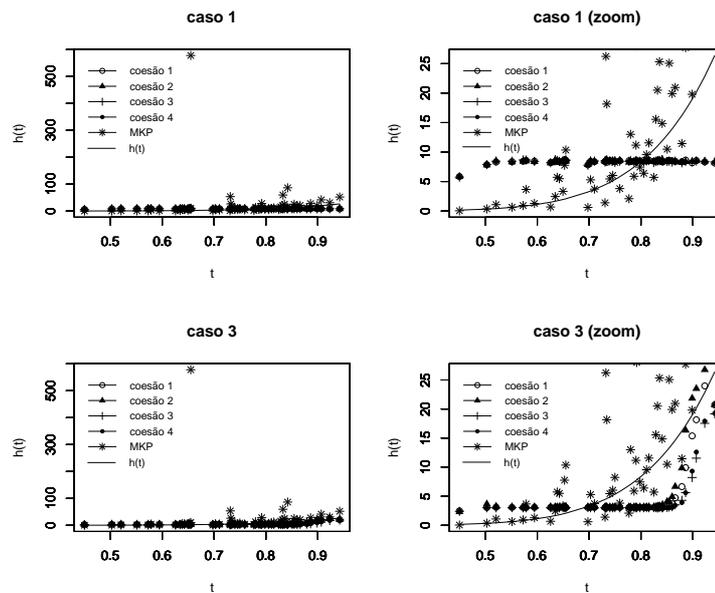


Figura 6.1: Estimativas produto e de Kim-Proschan para a função taxa de falha crescente - casos 1 e 3.

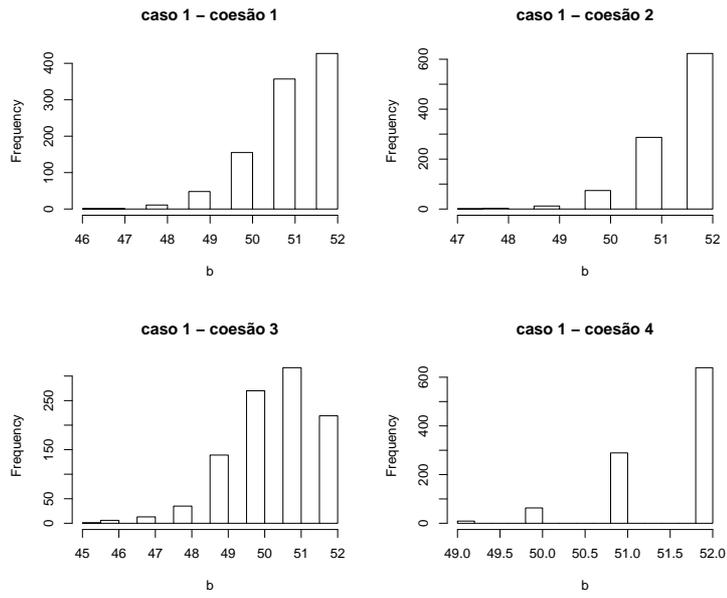


Figura 6.2: Distribuição *a posteriori* do número de blocos para diferentes escolhas de coesões *a priori*, caso 1 - função taxa de falha crescente.

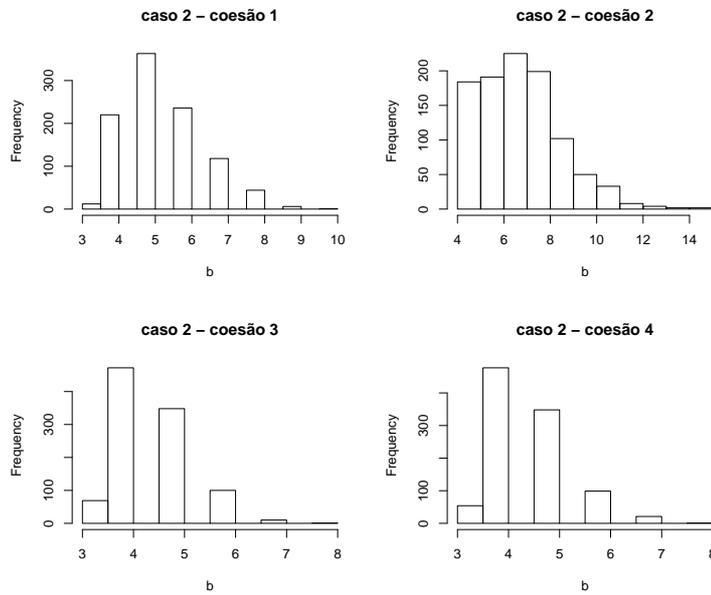


Figura 6.3: Distribuição *a posteriori* do número de blocos para diferentes escolhas de coesões *a priori*, caso 2 - função taxa de falha crescente.

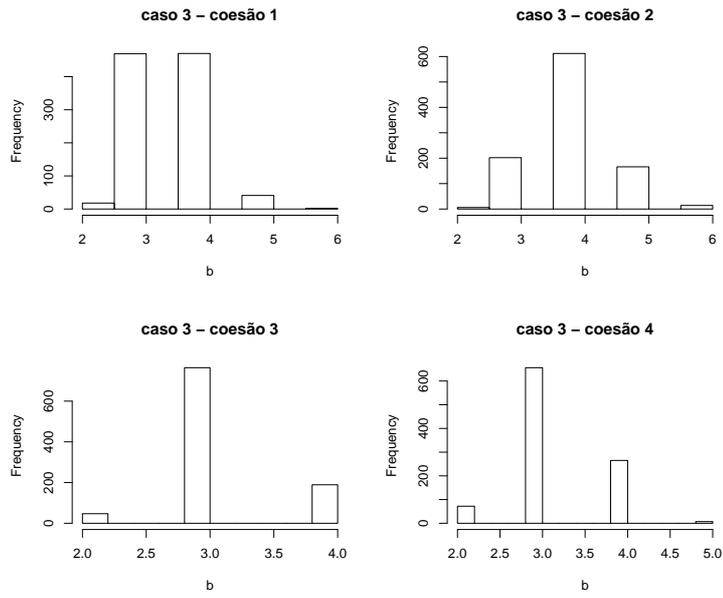


Figura 6.4: Distribuição *a posteriori* do número de blocos para diferentes escolhas de coesões *a priori*, caso 3 - função taxa de falha crescente.

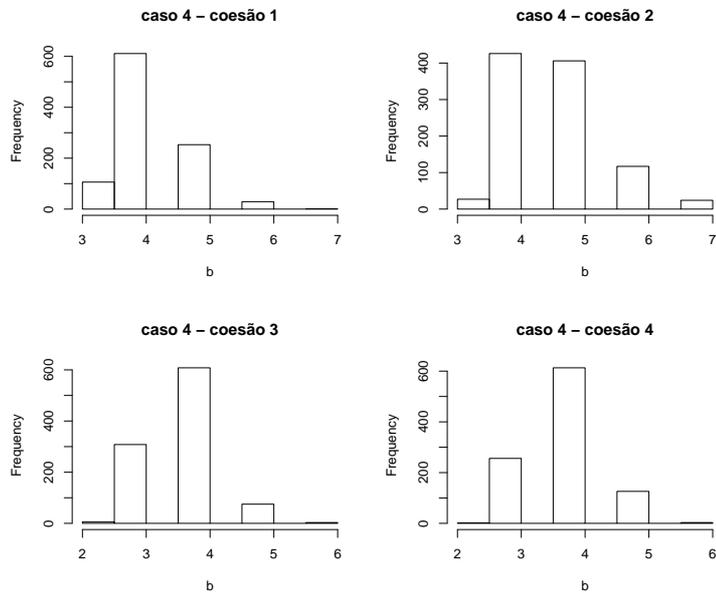


Figura 6.5: Distribuição *a posteriori* do número de blocos para diferentes escolhas de coesões *a priori*, caso 4 - função taxa de falha crescente.

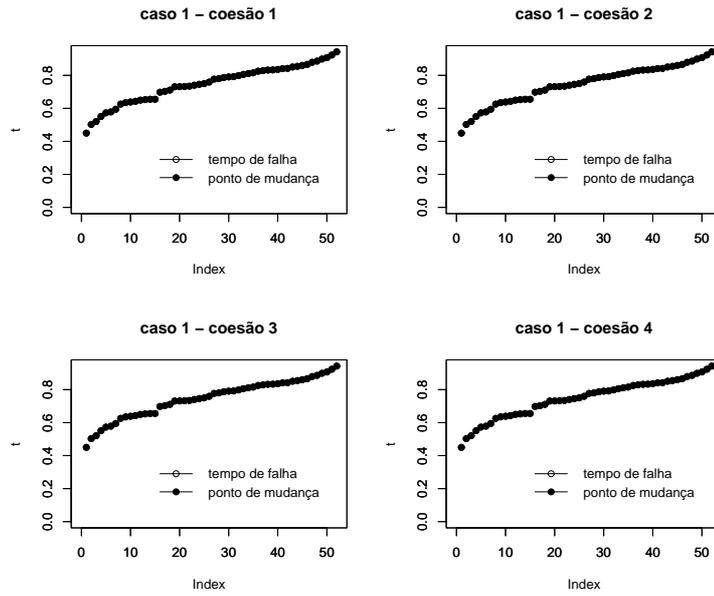


Figura 6.6: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 1 - função taxa de falha crescente.

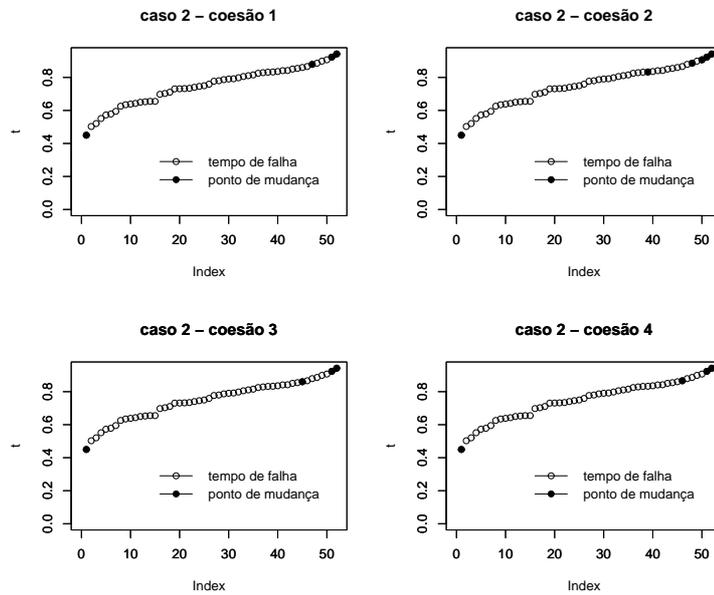


Figura 6.7: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 2 - função taxa de falha crescente.

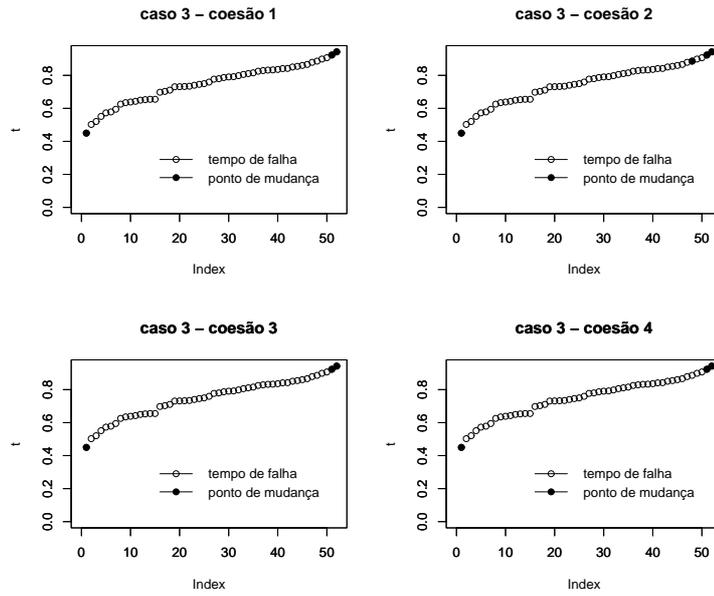


Figura 6.8: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 3 - função taxa de falha crescente.

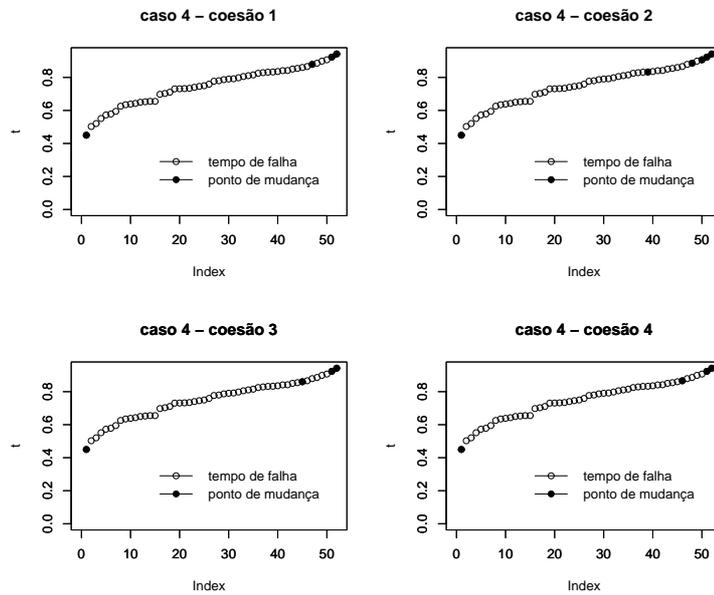


Figura 6.9: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 4 - função taxa de falha crescente.

Tabela 6.1: *Estatísticas descritivas referentes à distribuição a posteriori do número de blocos - função taxa de falha crescente.*

Caso 1								
Coesão	Mínimo	1º Quartil,	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	Moda	Var
1	46,00	51,00	51,00	51,13	52,00	52,00	52	0,896941
2	47,00	51,00	52,00	51,51	52,00	52,00	52	0,5263824
3	45,00	50,00	51,00	50,48	51,00	52,00	51	1,482,999
4	49,00	51,00	52,00	51,56	52,00	52,00	52	0,4270631
Caso 2								
Coesão	Mínimo	1º Quartil,	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	Moda	Var
1	3,000	5,000	5,000	5,389	6,000	10,000	5	1,343,022
2	4,00	6,00	7,00	7,19	8,00	15,00	7	3,199,099
3	3,000	4,000	4,000	4,513	5,000	8,000	4	0,6604915
4	3,000	4,000	4,000	4,559	5,000	8,000	4	0,6912102
Caso 3								
Coesão	Mínimo	1º Quartil,	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	Moda	Var
1	2,00	3,00	4,00	3,54	4,00	6,00	4	0,3787788
2	2,00	4,00	4,00	3,98	4,00	6,00	4	0,4480480
3	2,000	3,000	3,000	3,142	3,000	4,000	3	0,2160521
4	2,000	3,000	3,000	3,207	4,000	5,000	3	0,3224735
Caso 4								
Coesão	Mínimo	1º Quartil,	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	Moda	Var
1	3,000	4,000	4,000	4,208	5,000	7,000	4	0,4411772
2	3,000	4,000	5,000	4,685	5,000	7,000	4	0,6484234
3	2,000	3,000	4,000	3,761	4,000	6,000	4	0,3622412
4	2,000	3,000	4,000	3,872	4,000	6,000	4	0,386002

# Função Taxa de Falha Decrescente

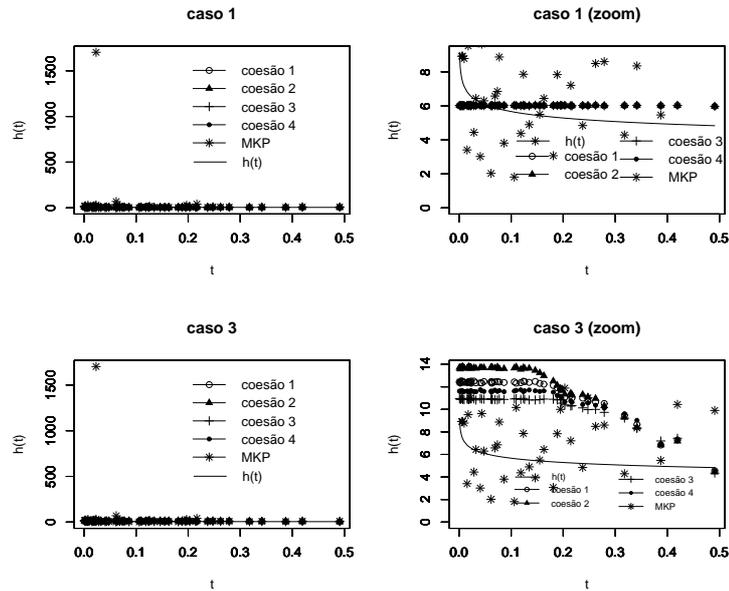


Figura 6.10: Estimativas produto e de Kim-Proschan para a função taxa de falha decrescente - casos 1 e 3.

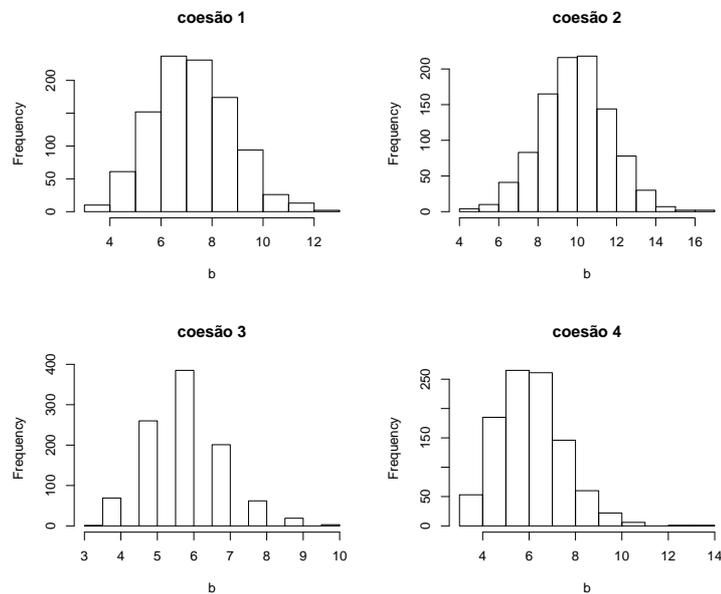


Figura 6.11: Distribuição *a posteriori* do número de blocos para diferentes escolhas de coesões *a priori*, caso 2 - função taxa de falha decrescente.

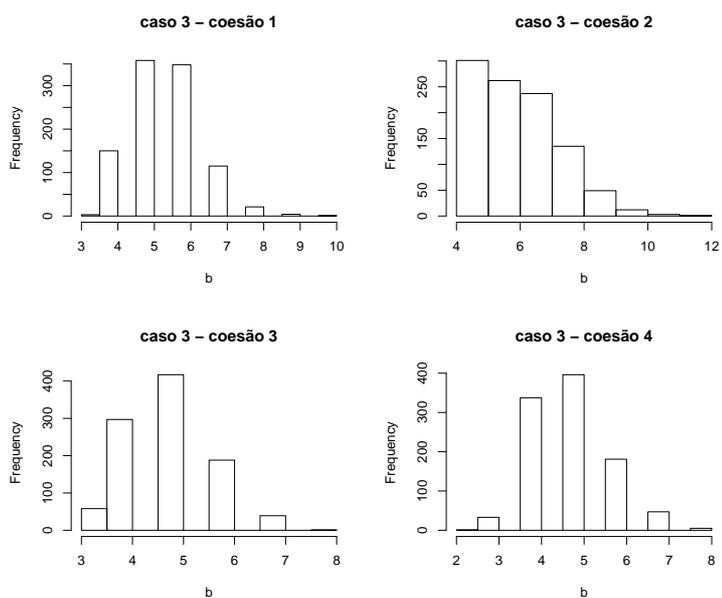


Figura 6.12: Distribuição *a posteriori* do número de blocos para diferentes escolhas de coesões *a priori*, caso 3 - função taxa de falha decrescente.

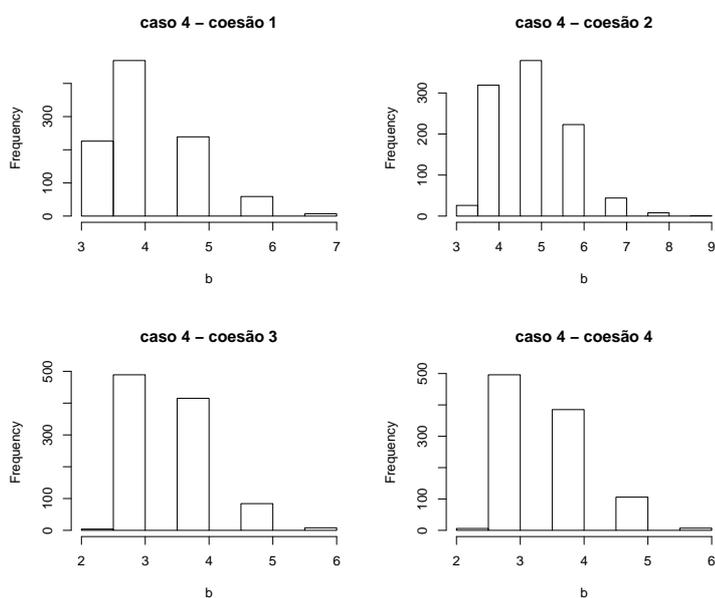


Figura 6.13: Distribuição *a posteriori* do número de blocos para diferentes escolhas de coesões *a priori*, caso 4 - função taxa de falha decrescente.

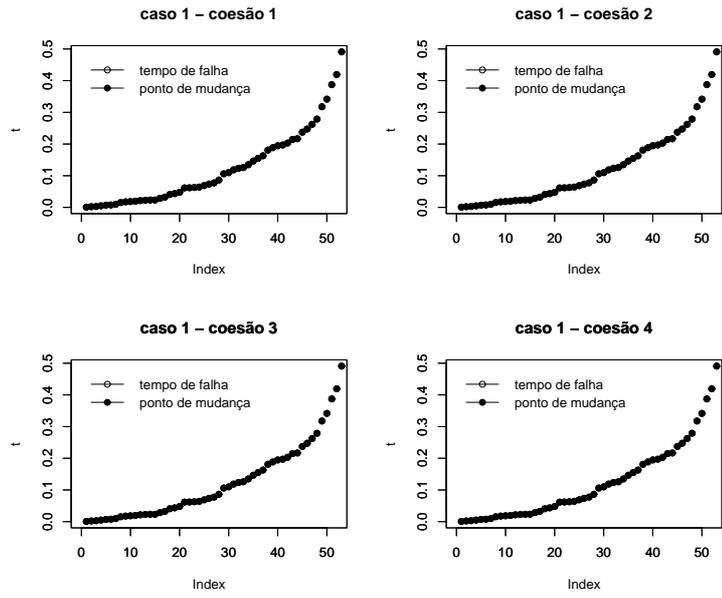


Figura 6.14: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 1 - função taxa de falha decrescente.

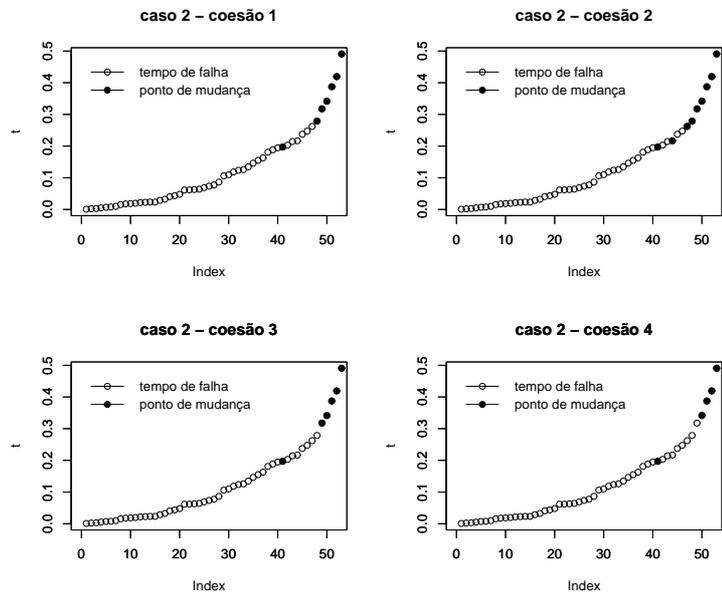


Figura 6.15: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 2 - função taxa de falha decrescente.

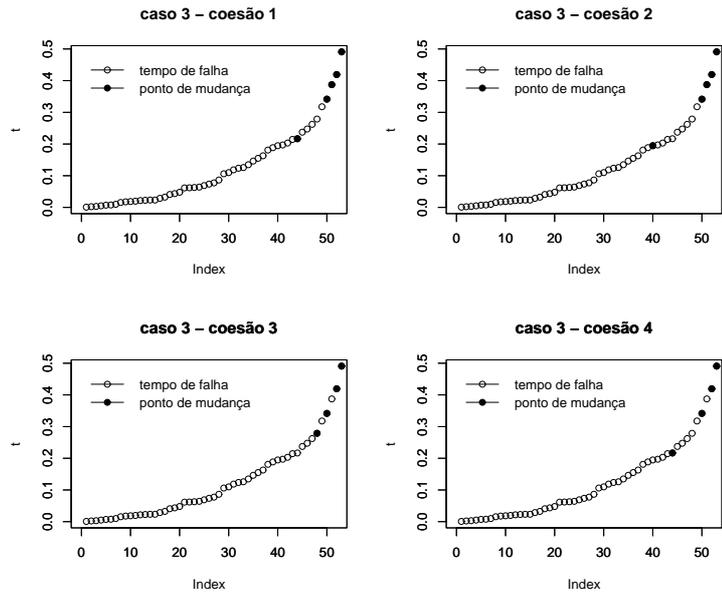


Figura 6.16: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 3 - função taxa de falha decrescente.

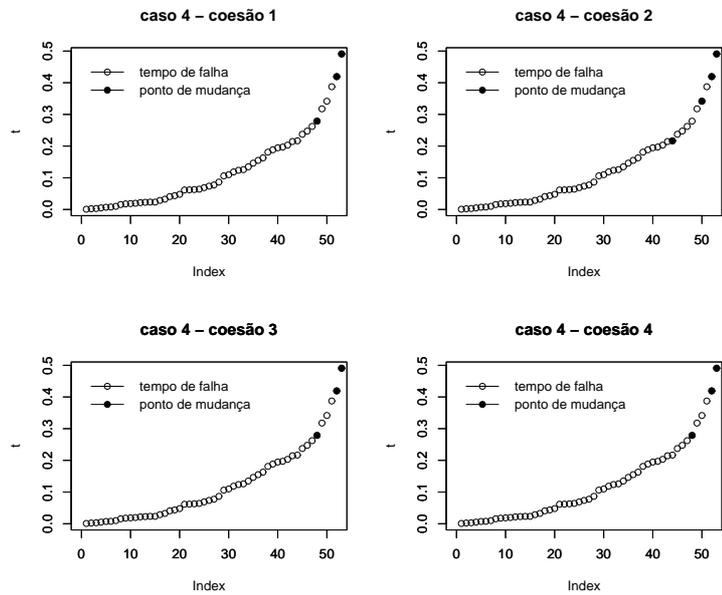


Figura 6.17: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis, referentes ao caso 4 - função taxa de falha decrescente.

Tabela 6.2: *Estatísticas descritivas referentes à distribuição a posteriori do número de blocos - função taxa de falha decrescente.*

Caso 1								
Coesão	Mínimo	1° Quartil,	Mediana	Média	3° Quartil	Máximo	Moda	Var
1	53	53	53	53	53	53	53	0
2	53	53	53	53	53	53	53	0
3	53	53	53	53	53	53	53	0
4	53	53	53	53	53	53	53	0
Caso 2								
Coesão	Mínimo	1° Quartil,	Mediana	Média	3° Quartil	Máximo	Moda	Var
1	3,000	7,000	8,000	7,737	9,000	13,000	5	1,343,022
2	4,00	9,00	10,00	10,41	12,00	17,00	7	3,199,099
3	3,000	5,000	6,000	5,993	7,000	10,000	4	0,6604915
4	3,000	6,000	6,000	6,574	7,000	14,000	4	0,6912102
Caso 3								
Coesão	Mínimo	1° Quartil,	Mediana	Média	3° Quartil	Máximo	Moda	Var
1	3,000	5,000	5,000	5,506	6,000	10,000	5	0,992957
2	4,000	5,000	6,000	6,348	7,000	12,000	6	1,924,821
3	3,000	4,000	5,000	4,856	5,000	8,000	5	0,8621261
4	2,000	4,000	5,000	4,884	5,000	8,000	5	0,8794234
Caso 4								
Coesão	Mínimo	1° Quartil,	Mediana	Média	3° Quartil	Máximo	Moda	Var
1	3,000	4,000	4,000	4,152	5,000	7,000	4	0,7416376
2	3,000	4,000	5,000	4,968	6,000	9,000	5	0,9098859
3	2,000	3,000	4,000	3,603	4,000	6,000	3	0,4638549
4	2,000	3,000	3,000	3,612	4,000	6,000	3	0,50396

# Apêndice B

A seguir são apresentados os gráficos e tabelas referentes aos dois exemplos de aplicação analisados.

## Aplicação 1

Tabela 6.3: *Tempos de vida dos sistemas de telecomunicação observados no período de 20 de maio à 31 de outubro de 1985 - Aplicação 1.*

tempo	evento								
1	1	133	0	138	0	147	0	151	0
2	1	133	0	138	0	147	0	151	0
3	1	133	0	139	1	147	0	151	0
7	1	133	0	139	0	147	0	152	0
10	1	134	0	139	0	148	0	152	0
13	1	134	0	139	0	148	0	152	0
34	1	134	0	139	0	149	0	152	0
40	1	134	0	140	0	149	0	155	0
45	1	135	0	140	0	149	0	155	0
54	1	135	0	140	0	149	0	155	0
63	1	135	0	140	0	149	0	156	0
64	1	137	0	140	0	149	0	160	0
67	1	137	0	140	0	149	0	160	0
73	0	137	0	140	0	149	0	161	0
77	1	137	0	141	0	149	0	162	0
90	0	137	0	141	0	150	0	162	0
94	1	137	0	141	0	150	0	163	0
101	0	137	0	141	0	150	0	163	0
115	1	138	0	142	0	151	0	163	0
133	0	138	0	143	0	151	0	163	0
133	0	138	0	143	0	151	0	163	0
133	0	138	0	143	0	151	0	163	0
133	0	138	0	146	0	151	0	164	0
133	0	138	0	147	0	151	0	164	0
133	0	138	0	147	0	151	0	164	0

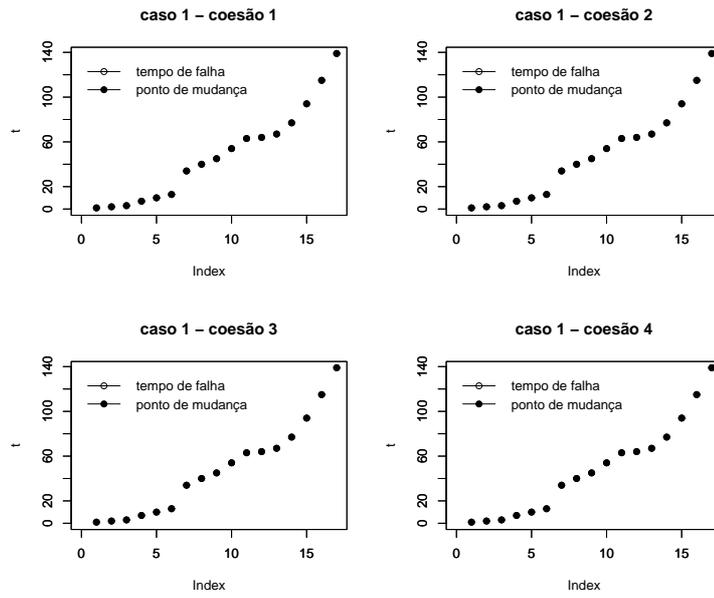


Figura 6.18: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis referentes à aplicação 1 - caso 1.

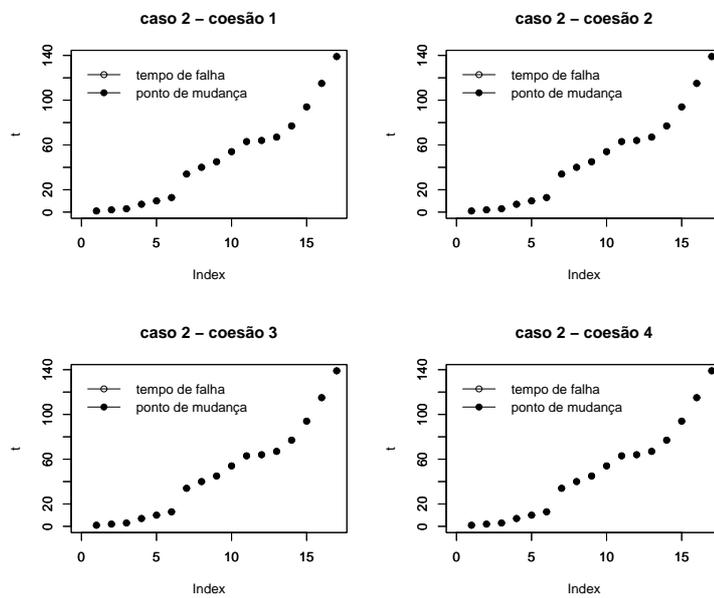


Figura 6.19: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis referentes à aplicação 1 - caso 2.

## Aplicação 2

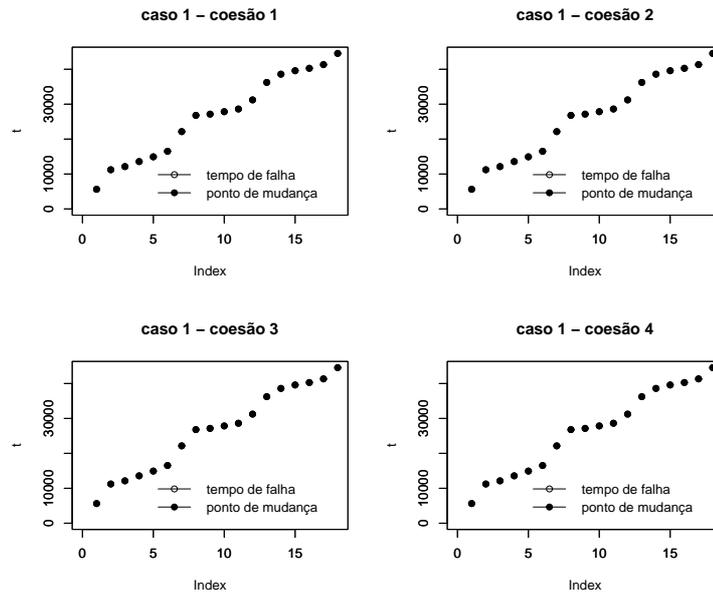


Figura 6.20: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis referentes à aplicação 2 - caso 1.

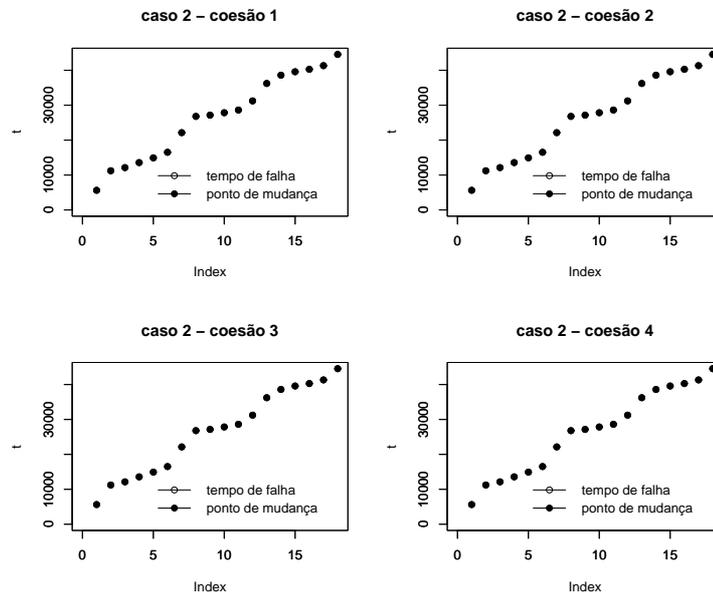


Figura 6.21: Pontos de mudança associados às partições mais prováveis referentes à aplicação 2 - caso 2.

# Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, E. P., Colosimo, E. A., Louzada-Neto, F. (1996). Accelerated Life Tests Analyzed by a Piecewise Exponential Distribution via Generalized Linear Models. *IEEE Transactions on Reliability*, 45, 4, 128-131.
- [2] Barry, D., Hartigan, J. A. (1992). Product Partition Models for Change Point Problems. *The Annals of Statistics*, 20, 260-279.
- [3] Barry, D., Hartigan, J. A. (1993). A Bayesian Analysis for Change Point Problems. *Journal of the American Statistical Association*, 88, 421, 309-319.
- [4] Doornik, J. A. (1999). Ox: An Object-Oriented Matrix Language. 3<sup>a</sup> ed. London: Timberlake Consultants Press.
- [5] Freitas, M. A., Colosimo, E. A. (1997). *Confiabilidade: Análise de Tempo de Falha e Testes de Vida Acelerados*. TQC - Gestão pela Qualidade Total.
- [6] Gamerman, D. (1994). Bayes Estimation of the Piecewise Exponential Distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 43, 128-131.
- [7] Gamerman, D. (1996). Simulação Estocástica via Cadeias de Markov. *São Paulo: Associação Brasileira de Estatística*
- [8] Gelfand, A. E., Smith, A. F. M. (1990). Sampling-Based Approach to Calculating Marginal Densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85, 398-409.
- [9] Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Rubin, D. B. (2004). Bayesian Data Analysis. *Chapman & Hall*.
- [10] Hartigan, J. A. (1990) Partition Models. *Communication in Statistics - Theory & Methods*, 19, 8, 2745-2756

- [11] Ibrahim, J. G., Chen, M.-H., Sinha, D. (2001). Bayesian Survival Analysis. *New York: Springer*
- [12] Kim, J. S., Proschan, F. (1991). Piecewise Exponential Estimation of the Survival Function. *IEEE Transactions on Reliability*, **40**, 134-139.
- [13] Loschi, R. H., Cruz, F. R. B. (2005). Extension to the Product Partition Model: Computing the Probability of a Change. *Comput. Statat. Data Analysis*, **39** **4**, 477-501.
- [14] Loschi, R. H., Bastos, L. S., Iglesias, P. L. (2004). Identifying Volatility Clusters Using the PPM: A Sensitivity Analysis. *Computational Economics*, **24**, 305-319.
- [15] Paulino, C. D., Turkman, M. A. A., Murteira, B. (2003). Estatística Bayesiana. *Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian*.
- [16] Pontel, J. G. (2005.) Algoritmo para Obtenção das Estimativas Produto com Aplicações em Modelos de Regressão Segmentada. *Dissertação de Mestrado - Departamento de Estatística - Instituto de Ciências Exatas - Universidade Federal de Minas Gerais*
- [17] Quintana, F. A., Iglesias, P. L. (2003) Nonparametric Bayesian Clustering and Product Partition Models. *Journal of the Royal Statistics Society B*, **2**, 557-574.
- [18] R Development Core Team (2005). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.