

**ESTIMAÇÃO DE MODELOS ARFIMA  
EM PRESENÇA DE  
QUEBRA ESTRUTURAL**

**Mario E. Piscoya Díaz**

*mpiscoya@est.mest.ufmg.br*

*mpiscoya@cedeplar.ufmg.br*

Dissertação submetida ao Departamento de Estatística da

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

em 14 de março de 2006

em cumprimento às exigências para a obtenção do grau de

**MESTRE EM ESTATÍSTICA**

Área de Concentração: **Estatística**

Orientadora: **Profa. Ela Mercedes Medrano de Toscano**

Co-orientador: **Prof. Valdério Anselmo Reisen**

*A mis padres, Mirtha y Francisco por todo el apoyo y dedicación*

*A mis hermanos César y Mirtha.*

*A la memoria de mi abuelo César Díaz.*

**Muchas Gracias por estar siempre a mi lado!**

# Agradecimientos

Para comenzar me gustaría agradecer a mis padres Mirtha e Francisco por el constante apoyo en esta etapa de mi vida. También no puedo dejar de agradecer a mis hermanos César y Mirtha quienes supieron expresar siempre su apoyo incluso en las horas más difíciles de mi vida fuera de Perú, una experiencia que con seguridad marco mi vida para siempre.

El resultado de este trabajo de investigación, mi tesis de maestría, fuera del empeño personal que pueda haberle dedicado, tiene mucho que ver con el apoyo que recibí de muchas personas tanto en Perú como en Brasil. Es por ello que quiero agradecer a la Profa. Mercedes Medrano y al Prof. Valderio A. Reisen por su constante apoyo en el desarrollo de mi tesis. A las profesoras Sueli A. Mingoti, Glauro Franco e Clélia Maria de Castro Toloí por las invaluables sugerencias hechas a mi trabajo.

Tengo que agradecer a muchas personas que directa o indirectamente contribuyeron de alguna manera el éxito del mismo. Para comenzar tengo que agradecer a la familia Toscano - Medrano, quienes en todo momento me hicieron sentir en familia en aquellos instantes en que la soledad se hace presente cuando uno está lejos de casa. También, quiero agradecer a Rosalynn Miluska y toda su familia (Yessica, Yanoska, Karina, en fin todos ellos) por todo el apoyo que me brindaron desde Lima en todo el tiempo que estuve aquí en Brasil, tanto en Río de Janeiro como en Belo

Horizonte. También quiero agradecer a mis grandes amigos Geraldo Marcelo como a la familia de él por hospedarme el primer mes que llegue a Belo Horizonte. A Luis A. T. Medrano, por todo el apoyo que me brindo desde que llegue a Brasil, a Ricardo Tavares, el "grande Caico", a Jose Carlos e Rogeria aqui en la UFMG, Pedro L. e Frederico A. mis colegas de "republica", con quienes pase momentos muy divertidos, a mis amigos de la UFRJ: Marcelo, Marcus, Carla, Valmaria. Especialmente quiero agradecer a Esther Salazar y Juan Carlos Vivar, con quienes viví en Río de Janeiro por todas las sugerencias, apoyo que siempre me brindaron, a Gladys Maquera y Carlos Abanto, por su valiosa amistad.

Tengo que agradecer también a mis profesores tanto de la UFRJ como de la UNMSM. En la UFRJ me gustaría agradecer a Cesar A. Gadelha, Helio Migon, Marco Ferreira, Fernando Moura y Flavia Landim por las valiosas enseñanzas en Estadística Bayesiana que sin ninguna duda, ampliaron mi conocimiento en esa área de la Estadística. En la UNMSM, quiero agradecer a Emma Cambillo, Rosa Inga, Doris Gómez, Antonio Bravo, Julio Ramos, Nelly Pillhuaman y especialmente a Ysela Agüero Palacios. Profesora Ysela, muchas gracias por su dedicación y apoyo, sin duda la mayor parte del conocimiento en Estadística que tengo se lo debo a usted.

Quiero agradecer también a mis abuelos, Luis, Aurora y Aída, así como a mi abuelo César que tengo la seguridad se sentiría orgulloso de mí. Mis tias Bruna, Mila, Sara, Edith y Cameche. A mis primos Javier Montero y su esposa Charo, mi queridísima tia Gloria Salinas así como a Gustavo, Lucho (Pichón!!!) Sabina y Carla!!!. A mis primos Mónica Calderón, Karl y Adolfo Osorio (Gomer Pyle y Private Joker!!!!) quienes siempre estuvieron en contacto conmigo. A mis tíos, todos ellos. A mis amigos de toda la vida Edison Espinoza, Dante Neyra, Humberto Nuñez (El gato!!!!), José Mamani, Víctor Murga, César Aguilar (Goldo chupetín he

he), Carlos Agapito Peña, Jimmy Moreno, mi estimado Bicho hehehe, Javier de la Cruz (a la Promoción 1993 del Guadalupe en general), Jenny Luz Espinoza, mi grande amigo Edward Soto Rivera, Arnaldo Freyre, Edgar Vera y Jean!!!, a la familia Guerra Huamán:David, Moises, Susana y Miguel. A Jossie Barreto, Zoila Ortiz, Karina Troncos, Ulises Osorio Angeles, Camilla Parsons, Jenny Cordova, Ludimila Martins, Jose Herrera F., César Chavez Z., a los LIONS en general!! L. A., Harry Haller (call me 24 hours!!!), Magali Lopez Sandoval, y mi perro TOM (farewell big brother!!!), y el perro de Miluska Puppy!.

Finalmente quiero agradecer a una persona muy especial para mi, Alice Lemos de Morais (aunque existe la posibilidad de que ella nunca lea esta pagina he he), quien me dio el mayor apoyo en la etapa final de mi trabajo en uno de los momentos más tristes de mi vida. Alice, realmente eres una persona maravillosa muchas gracias por todo.

A todos los que contribuyeron y que por omisión no los mencione aqui, MUCHAS GRACIAS!!! .

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>9</b>
<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 O Modelo ARFIMA (p,d,q)</b>	<b>14</b>
1.1 Introdução . . . . .	14
1.2 Processos Integrados . . . . .	15
1.3 O Modelo ARFIMA (0,d,0) . . . . .	16
1.3.1 Função de Densidade Espectral . . . . .	17
1.3.2 Funções de Autocovariância e Autocorrelação . . . . .	18
1.4 O Modelo ARFIMA (p,d,q) . . . . .	19
1.4.1 Função de Densidade Espectral . . . . .	20
1.4.2 Funções de Autocovariância e Autocorrelação . . . . .	21
1.5 Métodos de Estimação. . . . .	22
1.5.1 Métodos Paramétricos . . . . .	22
1.5.2 Métodos de Estimação Semi-paramétricos . . . . .	25
1.5.3 O Método GPH . . . . .	25
<b>2 Modelo ARFIMA (0,d,0) na presença de quebras estruturais</b>	<b>28</b>
2.1 Quebras Estruturais . . . . .	28

2.2	Estimação de Modelos ARFIMA (0,d,0) com quebra estrutural . . . .	33
2.2.1	Modelos ARFIMA(0,d,0) com quebra estrutural no nível e ten- dência . . . . .	33
2.2.2	Modelos com quebra estrutural na variância . . . . .	36
2.2.3	Estimação de Modelos ARFIMA (0,d,0) com quebra estrutu- ral no nível e tendência. . . . .	38
2.2.4	Estimação de Modelos ARFIMA (0,d,0) com quebra estrutu- ral na variância. . . . .	40
<b>3</b>	<b>Simulações</b>	<b>41</b>
3.1	Introdução . . . . .	41
3.2	Resultados das Simulações do Modelo 1 . . . . .	43
3.3	Resultados das Simulações do Modelo 2 . . . . .	50
3.4	Resultados das Simulações do Modelo 3. . . . .	54
3.5	Resultados das simulações do Modelo 4 . . . . .	58
3.6	Resultados das Simulações do Modelo 5. . . . .	61
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>65</b>
4.1	Série 1 :Empréstimos - Sistema Financeiro ao Setor Privado - Habitação”	65
4.2	Série 2: Contribuição - Finsocial/Cofins - Total - Receita Líquida . .	68
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>70</b>
5.1	Conclusões . . . . .	70
5.2	Extensões . . . . .	71
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>72</b>
A.1	Algoritmo para a simulação de processos ARFIMA (0,d,0) . . . . .	72
A.2	Modelo 1 AO-0 : Gráficos . . . . .	74

# Lista de Figuras

1	Série 1: Empréstimos - Sistema Financeiro ao Setor Privado - Habitação	12
2	Série 2: Contribuição - Finsocial/Cofins - total - receita líquida . . . .	13
3.1	Modelo 1: $Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t$ , $T=300$ , $\lambda = 0.5$ , $\mu_1 = 0$ . . . .	44
3.2	Vício na estimação do parâmetro $d$ , no modelo 1 considerando a presença de quebra estrutural quando o ponto de quebra é conhecido. $\lambda = 0,5$ ; $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ . . . . .	47
3.3	Vício na estimação do parâmetro $(\mu_2 - \mu_1)$ no modelo 1 considerando a presença de quebra estrutural quando o ponto de mudança é conhecido, $\lambda = 0,5$ ; $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ . . . . .	47
3.4	Estimativas do parâmetro $d = 0,10$ pelo método $GPH_1$ no modelo 1 quando o processo possui uma quebra estrutural e o ponto mudança é conhecido, $\lambda = 0,5$ ; $T = 300$ : (A) $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (B) $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (C) $(\mu_2 - \mu_1) = 3$ . . . . .	48
3.5	Estimativas do parâmetro $d = 0,10$ pelo método $GPH_2$ no modelo 1 quando o processo possui uma quebra estrutural e o ponto de mudança é conhecido, $\lambda = 0,5$ ; $T = 300$ : (D) $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (E) $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (F) $(\mu_2 - \mu_1) = 3$ . . . . .	48
3.6	Modelo 2 . . . . .	50



3.7	Vício na estimação do parâmetro $\mathbf{d}$ obtidas pelo método GPH, no Modelo 2, quando $\lambda = 0,5$ , $\beta = 1$ , $\mu_2 - \mu_1 = 100$ , $\mu_2 - \mu_1 = 300$ e o ponto de mudança é conhecido. . . . .	53
3.8	Distribuição do estimador do parâmetro $\mathbf{d}$ obtido pelo método GPH, no Modelo 2, quando o ponto de mudança é conhecido. $\lambda = 0,5$ , $T=300$ : (C) $d=0,10$ (D) $d = 0,40$ , $(\mu_2 - \mu_1 = 100)$ . . . . .	53
3.9	Modelo 3. . . . .	54
3.10	Modelo 4, com $d=0,10$ ; $W_v = 10$ e $\mu_1 = 0$ . . . . .	58
3.11	Vício na estimação de $W_v$ no modelo 4, para diferentes valores de $\mathbf{d}$ e ponto de mudança conhecido. $W_v = 10$ . . . . .	60
3.12	Vício na estimação do parâmetro $\mathbf{d}$ no modelo 4, pelo método GPH e ponto de mudança conhecido. $W_v = 10$ . . . . .	60
3.13	Vício na estimação do parâmetro $\mathbf{d}$ no modelo 4, pelo método MV e ponto de mudança conhecido. $W_v = 10$ . . . . .	60
3.14	Modelo 5, com $d=0,40$ ; $W_v = 2$ e $\mu_1 = 0$ $\mu_2 = 3$ , $t_0 = 125$ ; $\tau_0=250$ . . . . .	61
3.15	Vício na estimação do parâmetro $\mathbf{W}_v$ no modelo 5, com $W_v = 2$ , $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ . . . . .	64
3.16	Vício na estimação do parâmetro $\mathbf{d}$ no modelo 5, pelo método MV com $W_v = 2$ , $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ . . . . .	64
3.17	Vício na estimação do parâmetro $(\mu_2 - \mu_1)$ no modelo 5, pelo método OLS com $W_v = 2$ , $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ . . . . .	64
4.1	Função de autocorrelação da série 1: Empréstimos - Sistema Financeiro ao Setor Privado - Habitação . . . . .	66

4.2	Gráficos correspondentes a análise da série 1: (A) Gráfico da função de autocorrelação dos resíduos obtidos após o ajuste do modelo 2; (B) Gráfico da função de autocorrelação dos resíduos do modelo 2 após a modelagem de um AR(1). . . . .	67
4.3	Gráficos correspondentes a análise da série 2: (A) Gráfico da função de autocorrelação simples da série resíduos integrados obtida após o ajuste do Modelo 1; (B) Gráfico de autocorrelação parcial da série de resíduos integrados obtida após o ajuste do Modelo 1. . . . .	69
A.1	Vício na estimação do parâmetro $d$ , considerando a presença de quebra estrutural quando $\lambda = 0,5$ ; $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ . . . . .	74
A.2	Vício na estimação do parâmetro $d$ , considerando a presença de quebra estrutural quando $\lambda = 0,5$ ; $(\mu_2 - \mu_1) = 3$ . . . . .	74
A.3	Vício na estimação do parâmetro $(\mu_2 - \mu_1)$ considerando a presença de quebra estrutural quando $\lambda = 0,5$ ; $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ . . . . .	75
A.4	Vício na estimação do parâmetro $(\mu_2 - \mu_1)$ considerando a presença de quebra estrutural quando $\lambda = 0,5$ ; $(\mu_2 - \mu_1) = 3$ . . . . .	75
A.5	Estimativas do parâmetro $d = 0,20$ pelo método $GPH_1$ quando o processo possui uma quebra estrutural em $\lambda = 0,5$ , $T = 300$ : (A) $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (B) $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (C) $(\mu_2 - \mu_1) = 3$ . . . . .	76
A.6	Estimativas do parâmetro $d = 0,20$ pelo método $GPH_2$ quando o processo possui uma quebra estrutural em $\lambda = 0,5$ , $T = 300$ : (D) $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ;(E) $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ;(F) $(\mu_2 - \mu_1) = 3$ . . . . .	76
A.7	Estimativas do parâmetro $d = 0,30$ pelo método $GPH_1$ quando o processo possui uma quebra estrutural em $\lambda = 0,5$ , $T = 300$ : (A) $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ;(B) $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ;(C) $(\mu_2 - \mu_1) = 3$ . . . . .	77

- A.8 Estimativas do parâmetro  $d = 0,30$  pelo método  $GPH_2$  quando o processo possui uma quebra estrutural em  $\lambda = 0,5$ ,  $T = 300$  : (D)  
 $(\mu_2 - \mu_1) = 1$  ;(E)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$  ;(F)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$  . . . . . 77
- A.9 Estimativas do parâmetro  $d = 0,40$  pelo método  $GPH_1$  quando o processo possui uma quebra estrutural em  $\lambda = 0,5$ ,  $T = 300$  : (A)  
 $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (B)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (C)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$  . . . . . 78
- A.10 Estimativas do parâmetro  $d = 0,40$  pelo método  $GPH_2$  quando o processo possui uma quebra estrutural em  $\lambda = 0,5$ ;  $T = 300$  : (D)  
 $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (E)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$  ;(F)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$  . . . . . 78

# Lista de Tabelas

1.1	Comparação das funções de autocorrelação de um processo ARFIMA( $0, \frac{1}{3}, 0$ ) e um processo AR(1) . . . . .	15
3.1	<i>Resultados da estimação do Modelo 1: <math>Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t</math>; ARFIMA (<math>0, d, 0</math>) com uma quebra estrutural quando o ponto de mudança é conhecido. <math>T=300, \lambda = 0, 50, \mu_1 = 0</math> . . . . .</i>	45
3.2	<i>Resultados da estimação do Modelo 1: <math>Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t</math>; ARFIMA (<math>0, d, 0</math>) com uma quebra estrutural, quando o ponto de mudança é conhecido. <math>T=500, \lambda = 0, 50, \mu_1 = 0</math>. . . . .</i>	46
3.3	Resultados da estimação do ponto de mudança no Modelo 1: $Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t$ ARFIMA ( $0, d, 0$ ) quando $\lambda = 0, 5, T=300, \mu_1 = 0$ . . . . .	49
3.4	Resultados da estimação do Modelo 1: $Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t$ ARFIMA ( $0, d, 0$ ) quando o ponto de mudança é desconhecido. $T=300, \mu_1 = 0$ . . . . .	49
3.5	<i>Resultados da estimação do Modelo 2: <math>Y_t = \mu_1 + \beta t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t</math>; ARFIMA (<math>0, d, 0</math>) com uma quebra estrutural conhecida. <math>T=300, \lambda = 0, 50, \mu_1 = 0</math>. . . . .</i>	52

3.6	<i>Resultados da estimação do Modelo 3: <math>y_t = \mu_1 + \beta t + (\beta_2 - \beta_1)DT_t + X_t</math>; ARFIMA (0,d,0) com uma quebra estrutural conhecida. <math>T=300</math>, <math>\lambda = 0,50</math>, <math>\mu_1 = 0</math>.</i>	56
3.7	<i>Resultados da estimação do Ponto de mudança no Modelo 3 quando <math>\lambda = 0,5</math>; <math>T=300</math>.</i>	57
3.8	<i>Resultados da estimação do Modelo 3: <math>y_t = \mu_1 + \beta t + (\beta_2 - \beta_1)DT_t + X_t</math>; ARFIMA (0,d,0) com uma quebra estrutural, quando o ponto de mudança é desconhecido. <math>T=300</math>, <math>\lambda = 0,50</math>, <math>\mu_1 = 0</math>.</i>	57
3.9	<i>Resultados da estimação do Modelo 4, <math>T=300</math>, <math>\lambda = 0,50</math>, <math>X_t</math> ARFIMA (0,d,0) com uma quebra estrutural na variância.</i>	59
3.10	<i>Resultados da estimação do Modelo 5: <math>X_t</math> ARFIMA (0,d,0) com uma quebra estrutural conhecida na variância e no nível. <math>T=500</math>, <math>\lambda = 0,25</math>, <math>\tau_0=0,50T</math> e <math>\mu_1=0</math>.</i>	63
4.1	<i>Estimativas dos parâmetros do Modelo 2, obtidas na primeira etapa da análise na série 1</i>	66
4.2	<i>Estimativas do parâmetro d e <math>\phi</math> na série 1 após a análise de regressão</i>	67
4.3	<i>Estimativas dos parâmetros do Modelo 1 ajustado na série 2 na primeira etapa da modelagem</i>	69
4.4	<i>Estimativas do parâmetro d na série de resíduos obtidos após o ajuste do Modelo 1</i>	69

# Resumo

Existem evidências significativas que séries macroeconômicas e financeiras mostram uma persistência considerável. Mais será que esta persistência deve ser modelada por um processo estocástico com raiz unitária ou um processo estocástico estacionário de memória longa. Neste trabalho, consideramos a estimação do parâmetro  $d$  dos processos ARFIMA (0,d,0) que apresentam uma quebra estrutural no nível e/ou variância. O método de estimação utilizado foi o método semiparamétrico proposto por Geweke -Porter Hudak (1983) e de máxima verossimilhança. Um estudo simulado mostra as relações que existe entre a magnitude do pulo, o tamanho da série e as estimativas do parâmetro  $d$  quando é ignorada a presença da quebra estrutural nos processos. A metodologia desenvolvida foi aplicada a conjuntos de dados reais da economia brasileira.

**Palavras-chave:** Longa Dependência, Modelos ARFIMA, Ponto de Mudança, Quebra Estrutural.

# Introdução

A propriedade de memória longa está relacionada empiricamente com a persistência que apresentam as autocorrelações amostrais de certas séries temporais estacionárias. Tais autocorrelações decrescem a um ritmo muito lento, mas finalmente convergem para zero. Esse comportamento não é compatível com aquele apresentado pelos modelos estacionários auto-regressivos e de médias móveis (ARMA) que apresentam um decrescimento exponencial na função de autocorrelação.

As referências de trabalhos em séries temporais de memória longa são muito antigas, sendo o trabalho de Hurst (1951) no campo da hidrologia a primeira. No campo da economia, os interesses pelos modelos de longa dependência surgem com os trabalhos de Granger (1980) e Granger e Joyeux (1980). A presença da longa dependência nas séries econômicas pode ser justificada pela forma freqüente da função espectral destas séries, a qual não é limitada nas baixas freqüências como mostra Granger (1966). Além disso, Robinson (1978) e Granger (1980,1990) mostraram que a soma dos processos AR(1) independentes com coeficientes distribuídos segundo uma distribuição Beta é um processo fracionalmente integrado. Pelo fato de que muitas séries econômicas são agregadas de outras variáveis econômicas, é factível explicar a presença da longa dependência nestes tipos de séries temporais.

Formalmente, Robinson (1994b) e Baillie (1996) definem que uma série  $X_t$

com função de autocorrelação  $\rho(k)$  e densidade espectral  $f(\lambda)$  é um processo de memória longa se cumpre duas condições: (1) as autocorrelações não são absolutamente somáveis, isto é,  $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho(k)| = \infty$ , e (2) a função de densidade espectral  $f(\lambda)$  é não limitada nas baixas frequências e, por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(\lambda) = +\infty$ . As características mencionadas anteriormente não se ajustam à maioria de modelos para séries temporais estacionárias que apresentam a função de densidade espectral limitada na frequência zero e um decrescimento exponencial na função de autocorrelação. A dificuldade de tais modelos na representação da função de densidade espectral nas baixas frequências faz com que as previsões obtidas a partir deles sejam inferiores às obtidas por modelos que apresentam as características mencionadas por Robinson (1994b) e Baillie (1996).

Neste contexto, Granger(1980), Granger e Joyeux (1980) e Hosking(1981) propõem uma classe de modelos intermediários, em que a ordem de integração é fracionária, conhecida como: Modelos Autoregressivos e de Médias Móveis Fracionalmente Integrados ARFIMA(p,d,q). Estes modelos atuam como uma ponte entre os modelos estacionários (ARMA) e os modelos que apresentam raízes unitárias (ARIMA).

Quebras estruturais numa série temporal são caracterizadas pela mudança de pelo menos um dos parâmetros envolvidos no modelo em algum instante do tempo. Mudanças que podem ocorrer tanto na média como na variância do processo. O principal problema gerado pela presença de quebras estruturais numa série temporal é que podem-se chegar a uma conclusão errada sobre a presença de uma raiz unitária ou um efeito de memória longa. Nas séries econômicas, a presença de quebras é freqüente. A seguir, nas Figuras 1 e 2, apresentamos séries temporais correspondentes ao Banco Central do Brasil. Tais séries mostram como se apresentam, na prática, as quebras estruturais.



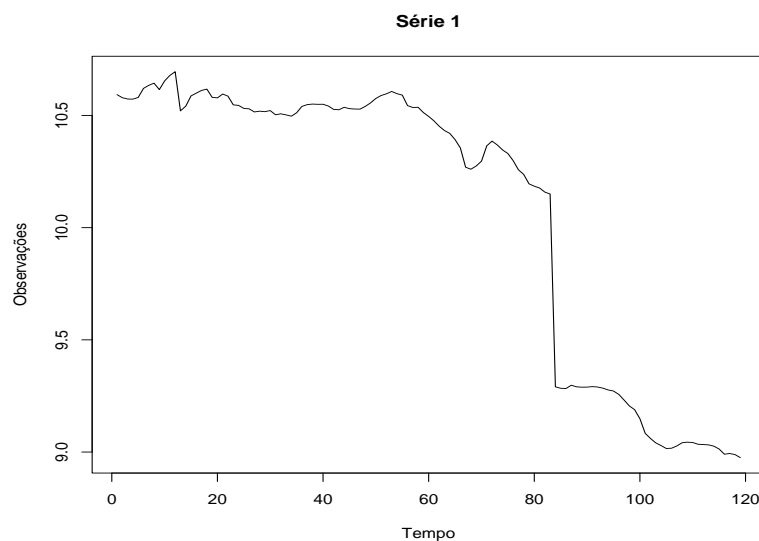


Figura 1: Série 1: Empréstimos - Sistema Financeiro ao Setor Privado - Habitação

O objetivo deste trabalho é estudar a forma de estimação de processos ARFIMA( $p,d,q$ ) que apresentam quebras estruturais na tendência, como também na variância, num instante de tempo conhecido. Nesta dissertação, consideramos adequado escolher o processo ARFIMA( $0,d,0$ ) pelo fato que o processo ARFIMA( $p,d,q$ ), no longo prazo, apresenta um comportamento similar ao processo ARFIMA( $0,d,0$ ), pois para observações muito distantes, os efeitos dos parâmetros de memória curta são desprezíveis.

O conteúdo deste trabalho foi dividido em cinco capítulos que serão descritos a seguir.

No capítulo 1, tem-se uma revisão do modelo ARFIMA( $p,d,q$ ) mostrando as principais definições deste modelo. Também foi feita uma rápida revisão dos métodos de estimação paramétricos e semi-paramétricos com ênfase especial no método GPH para a estimação do parâmetro de integração fracionária.

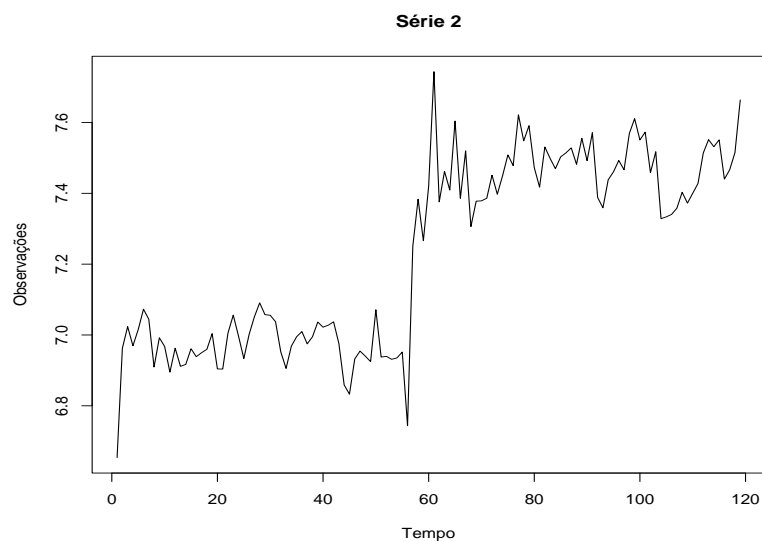


Figura 2: Série 2: Contribuição - Finsocial/Cofins - total - receita líquida

O capítulo 2 apresenta uma breve descrição sobre quebras estruturais, assim como os modelos considerados nesta dissertação e uma metodologia na estimação dos parâmetros do modelo ARFIMA (0,d,0) na presença de quebras estruturais.

No capítulo 3, apresentam-se os resultados das simulações feitas para os modelos propostos no capítulo 2.

O capítulo 4 apresenta uma aplicação da metodologia sugerida nesta dissertação usando séries do Banco Central de Brasil.

Finalmente no capítulo 5 apresentam-se as considerações finais, destacando as conclusões relevantes da pesquisa e as possíveis extensões para trabalhos futuros.

# Capítulo 1

## O Modelo ARFIMA (p,d,q)

### 1.1 Introdução

Os modelos ARFIMA (p,d,q) surgem como uma alternativa na modelagem de séries temporais que apresentam um comportamento diferente daquele apresentado pelos modelos ARMA(p,q) em suas funções de autocorrelação e de densidade espectral, em que  $\rho(k) \sim k^{2d-1}$  para  $k \rightarrow \infty$ ; e  $f(\omega) \sim C\omega^{-2d}$  para  $\omega \rightarrow 0$  respectivamente. Na Tabela 1.1, é feita uma comparação da função de autocorrelação de um processo ARFIMA(0,  $\frac{1}{3}$ , 0) com a função de autocorrelação de um processo AR(1). É fácil perceber que os valores da função de autocorrelação do modelo autoregressivo decaem rapidamente para zero, enquanto que os valores das autocorrelações do modelo ARFIMA decaem a um ritmo bem lento. Neste capítulo fazemos uma revisão das principais definições deste modelo.

Tabela 1.1: Comparação das funções de autocorrelação de um processo ARFIMA(0,  $\frac{1}{3}$ , 0) e um processo AR(1)

Lag (k)	ARFIMA(0, $\frac{1}{3}$ , 0)	AR (1) com $\phi = 0.5$
1	0.500	0.500
2	0.400	0.250
3	0.350	0.125
4	0.318	0.063
5	0.295	0.031
10	0.235	0.001
25	0.173	2.98x10-8
50	0.137	8.88x10-16
100	0.109	7.89x10-31

## 1.2 Processos Integrados

Formalmente, dizemos que  $X_t$  é um processo integrado de ordem  $\mathbf{d}$ , denotado por  $X_t \sim I(d)$ , se satisfaz a relação:

$$(1 - L)^d X_t = U_t \quad (1.1)$$

onde  $LX_t = X_{t-1}$  e, o termo  $(1 - L)^d$  é representado pela expansão binomial:

$$(1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-L)^k = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!} L^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!} L^3 - \dots \quad (1.2)$$

Esta expansão também pode ser expressa em termos da função hipergeométrica:

$$(1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)L^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)} = F(-d, 1, 1; L) \quad (1.3)$$

para  $d > 0$ ,  $F(a,b,c,z)$  é a função hipergeométrica definida como:

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i \Gamma(a+i)}{\Gamma(c+i)\Gamma(i+1)}$$

No caso dos Modelos ARFIMA, o parâmetro  $d$  é um número real. Se o processo  $U_t$  é um ARMA(p,q) da forma  $\Phi(L)U_t = \Theta(L)\xi_t$ , com  $\xi_t$  ruído branco, é dito que  $X_t$  é um processo ARMA(p,q) fracionalmente integrado ou ARFIMA (p,d,q).

### 1.3 O Modelo ARFIMA (0,d,0)

O modelo ARFIMA (0,d,0), também conhecido como ruído branco fracionalmente integrado, pode ser considerado como uma versão análoga em tempo discreto do movimento Browniano fracionário. O processo foi desenvolvido de forma simultânea e independente por Granger(1980); Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) ainda quando os trabalhos de Adenstedt (1974) e Taqqu (1975) já faziam referência a este modelo.

O modelo ARFIMA (0,d,0) é definido como em (1.1). Neste caso, o termo  $U_t$  é um processo de ruído branco com  $E(U_t)=0$ ,  $E(U_t^2) = \sigma^2$  e  $E(U_t U_s) = 0$  para  $s \neq t$ . Hosking (1981) mostrou que quando  $d > -0.5$  o processo é invertível e tem uma representação autoregressiva infinita da seguinte forma:

$$(1 - L)^d X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = \xi_t \quad (1.4)$$

onde  $\pi_k$  são os coeficientes do polinômio  $(1 - L)^d$  definido em (1.3). Para valores

de  $d < 0.5$ , Hosking(1981) mostrou que  $X_t$  é estacionário e tem uma representação média móvel infinita (ou de Decomposição de Wold) da seguinte forma:

$$X_t = (1 - L)^{-d} \xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \xi_{t-k} \quad (1.5)$$

onde o coeficiente  $\psi_k = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)}$ .

### 1.3.1 Função de Densidade Espectral

A partir da equação (1.5) podemos considerar o processo  $X_t$  como um processo resultante de um sistema linear, onde o processo de entrada é um ruído branco  $\xi_t$  com função de densidade espectral  $f(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}$ . Neste caso, a densidade espectral de  $X_t$  pode ser obtida a partir da densidade de  $\xi_t$  como mostra Priestley (1981):

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} [2 \sin(\frac{\omega}{2})]^{-2d}. \quad (1.6)$$

para  $\omega \in [-\pi ; \pi]$ . Quando  $\omega \rightarrow 0^+$  tem-se a seguinte aproximação:

$$f(\omega) \sim \frac{\sigma^2}{2\pi} \omega^{-2d}. \quad (1.7)$$

a qual é similar ao valor de  $f(\omega) \approx \omega^{-2}$  para os processos integrados I(1). Neste caso, o processo de ruído branco fracionário é consistente com a forma típica de muitas séries econômicas como foi observado por Granger (1966).

### 1.3.2 Funções de Autocovariância e Autocorrelação

Hosking (1981) derivou as expressões para as funções de autocovariância do modelo ARFIMA(0,d,0) apresentada a seguir:

$$\gamma(k) = \frac{\sigma^2 \Gamma(1-2d) \Gamma(k+d)}{\Gamma(d) \Gamma(1-d) \Gamma(k+1-d)} \quad k \geq 1. \quad (1.8)$$

A variância do processo:

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2 \Gamma(1-2d)}{[\Gamma(1-d)]^2}. \quad (1.9)$$

A função de autocorrelação do processo ARFIMA(0,d,0):

$$\rho(k) = \frac{\Gamma(1-d) \Gamma(k+d)}{\Gamma(d) \Gamma(k-d+1)} \quad k \geq 1. \quad (1.10)$$

Usando a aproximação de Stirling, quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \approx k^{a-b}$ , então pode-se observar que: os coeficientes da representação média móvel,  $\psi_k \approx k^{d-1}$ , os coeficientes autoregressivos,  $\pi_k \approx k^{-d-1}$ , e os coeficientes da função de autocorrelação,  $\rho_k \approx k^{2d-1}$ , apresentam um decaimento hiperbólico quando  $k \rightarrow \infty$ . Resumindo, as principais propriedades do Processo ARFIMA (0,d,0) são:

- Para  $-0,5 < d < 0,5$  o processo  $X_t$  é estacionário e invertível e os coeficientes da representação autoregressiva e média móvel decaem hiperbolicamente.
- Para  $0 < d < 0,5$ , os valores de  $\rho_k$  são positivos e convergem hiperbolicamente para zero de uma forma muito lenta. As somas  $\sum |\rho_k|$  e  $\sum |\psi_k|$  são

infinitas, mas  $\sum |\pi_k| < \infty$ . A densidade espectral tende para infinito quando as frequências  $\omega$  ficam próximas de zero. O processo é estacionário com memória longa.

- Para  $-0.5 < d < 0$  e  $k > 0$ , os valores de  $\rho_k$  são negativos e convergem hiperbólicamente para zero. A soma dos coeficientes da representação autoregressiva é infinita. A função de autocorrelação é absolutamente convergente, isto é,  $\sum |\rho_k| < \infty$ . O processo é estacionário com memória intermediária.

## 1.4 O Modelo ARFIMA (p,d,q)

O processo ARFIMA (p,d,q) pode ser entendido como uma generalização do processo ARFIMA(0,d,0), onde o termo  $U_t$  da equação (1.1) é um processo autoregressivo e de média móvel (ARMA). Neste caso  $X_t$  é um processo ARMA fracionário integrado, o ARFIMA(p,d,q). O processo admite a seguinte representação:

$$\Phi(L)(1 - L)^d X_t = \Theta(L)\xi_t \quad (1.11)$$

onde  $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$ ,  $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$ , são os polinômios de ordem p e q respectivamente. Hosking (1981) mostrou que quando  $d < 0.5$  e todas as raízes do polinômio  $\Phi(L)$  estão fora do círculo unitário, o processo  $X_t$  é estacionário, e se  $d > -0.5$  e todas as raízes do polinômio  $\Theta(L)$  estão fora do círculo unitário, o processo é invertível.

A razão da escolha dessa família de processos na modelagem de séries temporais, se faz pelo fato de que o efeito do parâmetro de memória **d** sobre observações



distantes decresce hiperbólicamente à medida que a defasagem aumenta, enquanto os efeitos dos parâmetros  $\phi$  e  $\theta$  decrescem exponencialmente. Assim, o parâmetro  $d$  descreve a estrutura de autocorrelação de longo prazo enquanto os parâmetros  $\phi$  e  $\theta$  do modelo descrevem a estrutura de autocorrelação de curto prazo. Segundo Hosking (1981), o comportamento de longo prazo deste modelo é similar ao comportamento do processo ARFIMA(0,d,0), pois para observações muito distantes, os efeitos dos parâmetros  $\phi$  e  $\theta$  do modelo são desprezíveis.

### 1.4.1 Função de Densidade Espectral

No caso dos processos ARFIMA(p,d,q) estacionários, ( $d < 0.5$ ), a função de densidade espectral do processo é dada pela seguinte equação:

$$f(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \left| \frac{\Theta(e^{i\omega})}{\Phi(e^{i\omega})} \right|^2 [4 \sin^2(\frac{\omega}{2})]^{-d} \quad (1.12)$$

para  $\omega \in [-\pi ; \pi]$ . Quando o valor de  $\omega$  vai se aproximando de zero, a expressão em (1.12) pode ser escrita como:

$$f(\omega) \approx \omega^{-2d}. \quad (1.13)$$

Então, o espectro do processo  $X_t$  é não limitado nas baixas frequências e o processo tem memória longa. No caso de valores de  $d < 0$ , a densidade espectral do processo se anula na frequência zero e, quando o valor de  $d > 0,5$  o processo tem variância infinita. Como um exemplo, a função de densidade espectral do modelo ARFIMA(1,d,0) é da forma:

$$f(\omega) = \begin{cases} \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \frac{(2 \sin(\frac{\omega}{2}))^{-2d}}{(1+\phi^2-2\phi \cos(\omega))} ; & 0 < \omega \leq \pi \\ \frac{\omega^{-2}}{(1-\phi)^2} ; & \omega \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

## 1.4.2 Funções de Autocovariância e Autocorrelação

Hosking (1981) derivou as expressões exatas para a função de autocorrelação para o modelo ARFIMA(p,d,q) e provou que se  $d < 0,5$  existe uma constante positiva  $C$  de modo que a função de autocorrelação decresce hiperbólicamente e as autocorrelações não são absolutamente somáveis. A função de autocorrelação tem a seguinte relação assintótica:

$$\rho(k) \approx Ck^{2d-1} \quad (1.15)$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Sowell (1992a) simplificou o cálculo das expressões para as autocovariâncias e mostrou que:

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=1}^p \zeta_j \sum_{n=0}^q \sum_{m=0}^q \theta_n \theta_m C(d, d, p + n - m - k, \lambda_j) \quad (1.16)$$

sendo:

- $\lambda_j$  a  $j$ -ésima raiz do polinômio  $\Phi(L)$ ;
- $\zeta_j = [\lambda_j \prod_{i=1, p} (1 - \rho_i \rho_j) \prod_{i=1, p} (\rho_i - \rho_j)^{-1}]$ ;
- $C(w, v, k, \rho) = G(w, v, k) [\rho^{2p} F(v+k; 1; 1-w+k; \rho) + F(w-k, 1; 1-v-k; \rho) - 1]$ .
- $G(w, v, k) = \frac{\Gamma(1-w-v)\Gamma(v+k)}{\Gamma(1-w+k)\Gamma(1-v)\Gamma(v)}$ ;

Chung (1994a) apresentou um método alternativo para o cálculo das autocovariâncias do processo ARFIMA(p,d,q), o qual é apresentado a seguir:

$$\gamma_k = \sum_{j=-q}^q a_j \sum_{n=1}^p \theta_n C(k - p - j; \psi_n) \quad (1.17)$$

onde:

- $C(k - p - j; \psi_k) = \psi_k^{2p} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_k^m \gamma_{k-p-j-m}^* + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_k^n \gamma_{k-p-j+n}^*$ ;
- $\gamma_k^*$  é a autocovariância no lag k de um processo ARFIMA(0,d,0)
- $a_k = [\psi_k \prod_{i=1,p} (1 - \psi_i \psi_k) \prod_{m \neq p} (\psi_k - \psi_m)]^{-1}$ ,  $k = 1, p$
- $\psi_j = \sum_{i=0}^{q-|j|} \theta_i \theta_{i+|j|}$

## 1.5 Métodos de Estimação.

Os métodos de estimação dos modelos ARFIMA são classificados em três grandes grupos: métodos paramétricos, métodos semi-paramétricos e métodos não paramétricos. Nesta secção apresentamos somente os dois primeiros métodos pelo fato de serem os mais usados na literatura atual.

### 1.5.1 Métodos Paramétricos

Os métodos de estimação paramétricos precisam da especificação prévia de um modelo paramétrico para os dados, o que implica a especificação de toda a estrutura de autocorrelação (de curto e longo prazo) ou da função de densidade espectral (em todas as frequências) do modelo.

Esses métodos estão baseados na maximização da função de verossimilhança ou de alguma aproximação dela. Os estimadores obtidos, estimadores de máxima verossimilhança, apresentam ótimas propriedades como a consistência e a normalidade assintótica.

Os primeiros resultados para o mais simples dos modelos fracionalmente integrados, o modelo ARFIMA(0,d,0), no enfoque paramétrico foram obtidos por Ya-

jima(1985) quem mostrou que o estimador do vetor de parâmetros  $\iota = (\sigma_\eta, d)$  é obtido pela maximização da função de verossimilhança exata:

$$L_1(\iota, x) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma(\iota)| - \frac{1}{2} x^t \Sigma^{-1}(\iota) x \quad (1.18)$$

onde  $T$  é o tamanho da série,  $\mathbf{X}$  é o vetor contendo os valores observados do vetor aleatório  $X$ , e  $\Sigma(\iota)$  a matriz de variâncias e covariâncias de  $\mathbf{X}$ . Maiores detalhes sobre a forma da verossimilhança nos modelos ARFIMA (p,d,q) podem ser encontrados em Dahlhaus(1989).

A principal desvantagem da utilização dos métodos paramétricos é o elevado custo em tempo computacional na maximização da função de verossimilhança que é feita usando métodos numéricos no cálculo da matriz inversa de  $\Sigma$  em cada iteração. Além disso, se o valor do parâmetro  $d$  está perto de 0,5, a matriz inversa de  $\Sigma$  apresenta instabilidade já que a mudança entre as autocovariâncias é mínima e a matriz torna-se singular. Sowell (1992) desenvolveu um algoritmo para o cálculo da matriz inversa de  $\Sigma$  a qual é substituída na equação (1.18). Maiores detalhes sob a forma de cálculo da matriz inversa podem ser encontrados em Sowell (1992).

Como uma alternativa na solução deste problema, Fox e Taqqu (1986) consideram melhor trabalhar com a aproximação da função de verossimilhança, no domínio da frequência, proposta por Whittle (1962). Os estimadores são obtidos minimizando a função:

$$L_2(\iota; x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\ln f(\omega; \iota) + \frac{I_T(\omega)}{f(\omega; \iota)}] d\omega \quad (1.19)$$

sendo  $f(\omega; \iota)$  a função de densidade espectral e  $I_T(\omega)$  a função periodograma definida

como:

$$I(\omega_j) = (2\pi T)^{-1} \left| \sum_{t=1}^T X_t \exp(-i\omega_j t) \right|^2 \quad (1.20)$$

sendo  $\omega_j = \frac{2k\pi}{T}$ . Fox e Taqqu (1986) provaram a consistência, a normalidade e eficiência assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança de Whittle para o processo ARFIMA (p,d,q) gaussiano. Estes estimadores são atraentes pelo fato de que substituem o cálculo da matriz inversa  $\Sigma$  pelas transformadas de Fourier do vetor de observações. Sob certas condições, os estimadores obtidos têm a mesma distribuição assintótica que os estimadores de máxima verossimilhança exatos. Mas ainda assim, o método proposto por Fox e Taqqu (1986) não escapa dos problemas computacionais, pois o cálculo da integral na equação (1.19) também deve ser feito usando algoritmos numéricos e repete-se em cada iteração. Com a finalidade de facilitar o cálculo, é recomendável substituir a integral em (1.19) por uma soma finita nas frequências de Fourier dada por:

$$L_2(\iota; x) = \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{T-1} \left[ \ln f(\omega_k; \iota) + \frac{I_T(\omega_k)}{f(\omega_k; \iota)} \right] \quad (1.21)$$

onde  $\omega_k$  é a k-ésima frequência de Fourier;  $\omega_k = \frac{2k\pi}{T}$ . Uma versão discreta do estimador de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros  $\iota$  é obtida minimizando-se a função em (1.21).

Os estimadores paramétricos gaussianos que temos visto até o momento apresentam propriedades boas, como a consistência e eficiência assintótica, mas como mostrou Robinson(1995b) os estimadores serão viciados e não consistentes no caso em que o modelo paramétrico para  $f(\omega)$  não for o adequado.

## 1.5.2 Métodos de Estimação Semi-paramétricos

Os métodos de estimação semi-paramétricos são uma boa alternativa na estimação dos parâmetros de modelos estatísticos, pois estes procedimentos prescindem da definição de um modelo específico na estimação do vetor de parâmetros. Estes métodos são também conhecidos como métodos de estimação em duas etapas, pois em uma primeira etapa é feita a estimação do parâmetro de integração fracionária e, numa segunda etapa é feita a estimação dos parâmetros  $\phi$  e  $\theta$  do modelo.

## 1.5.3 O Método GPH

O método de estimação usado com maior frequência é proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Eles propõem um estimador conhecido como GPH, o qual está baseado numa regressão que utiliza como variável dependente o logaritmo natural do periodograma. A densidade espectral de um processo ARFIMA (p,d,q) pode ser escrita como:

$$f(\omega) = f_U(\omega)[4 \sin^2(\frac{\omega}{2})]^{-d} \quad (1.22)$$

sendo  $f_U(\omega)$  é a densidade espectral do processo  $u_t \sim ARMA(p, q)$  então:

$$f_U(\omega) = \frac{\sigma_\eta^2}{2\pi} \left| \frac{\Theta(e^{i\omega})}{\Phi(e^{i\omega})} \right|^2 \quad (1.23)$$

Tomando o logaritmo na equação (1.22), e adicionando e subtraindo o termo  $\ln f_U(0)$  de os lados, temos que:

$$\ln f(\omega) = \ln f_U(0) - d \ln[4 \sin^2(\frac{\omega}{2})] + \ln\left\{ \frac{f_U(\omega)}{f_U(0)} \right\} \quad (1.24)$$

Na equação (1.24), substituindo  $\omega$  por  $\omega_j = \frac{2j\pi}{T}$  e adicionando  $\ln I(\omega_j)$  temos que:

$$\ln I(\omega_j) = \ln f_U(0) - d \ln[4 \sin(\frac{\omega_j}{2})] + \ln\left\{\frac{f_U(\omega_j)}{f_U(0)}\right\} + \ln\left\{\frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j)}\right\} \quad (1.25)$$

Em (1.25), o termo  $\ln\left\{\frac{f_U(\omega_j)}{f_U(0)}\right\}$  é considerado desprezível em comparação com os outros termos. Assim, a equação obtida é aproximada por:

$$\ln I(\omega_j) \cong \ln f_U(0) - d \ln[4 \sin(\frac{\omega_j}{2})] + \ln\left(\frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j)}\right) \quad (1.26)$$

a qual pode ser expressa como uma equação de regressão da seguinte forma:

$$Y_j = a + bX_j + e_j \quad (1.27)$$

onde:

- $Y_j = \ln I(\omega_j)$ ;
- $a = \ln f_U(0)$ ;
- $b = -d$ ;
- $X_j = \ln(4 \sin(\frac{\omega_j}{2}))$ ;
- $e_j = \ln\left\{\frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j)}\right\}$ .

Sendo o estimador de  $\mathbf{d}$  a constante  $-\mathbf{b}$  da equação em (1.27). Naturalmente, as propriedades deste estimador vão depender das características estocásticas do termo  $e_j$ . Geweke e Porter-Hudak (1983) argumentam que os erros  $e_j$  são assintoticamente

independentes e igualmente distribuídos com média zero e variância  $\frac{\pi^2}{6}$ . Posteriormente, Hassler(1993), Cheng, Abraham e Peris (1994) e Reisen(1994) propõem uma modificação do estimador usando o periodograma suavizado. Reisen (1994) mostrou, mediante estudos de simulação, que esta modificação fornece estimativas do parâmetro  $\mathbf{d}$  com menor erro quadrático médio. Robinson(1995a) propõe um estimador que é uma versão modificada e mais eficiente que o estimador GPH, além de mostrar a consistência e a normalidade do estimador para  $\mathbf{d} \in (-0,5 ; 0,5)$ . Uma revisão destes métodos de estimação e feita por Reisen, Abraham e Toscano (2000).

Agiaklogou (1992) mostrou que a não constância da variância na distribuição do termo  $e_j$  pode gerar um vício significativo, o qual pode ser maior quando o modelo tem parâmetros autoregressivos e de média móvel de valor elevado. Pons e Suriñach (1999) mostram que é possível reduzir o vício usando uma extensão do modelo de regressão na equação (1.26). Eles utilizam a parametrização do modelo exponencial de Bloomfield (1973) e afirmam que a inclusão de regressores permite discriminar as componentes de memória longa das componentes de memória curta, o que melhora a estimação do parâmetro de integração fracionária quando o processo apresenta uma ordem elevada de parâmetros de média móvel e autoregressivos.



## Capítulo 2

# Modelo ARFIMA (0,d,0) na presença de quebras estruturais

### 2.1 Quebras Estruturais

O estudo de quebras estruturais em séries financeiras e econômicas tem sido, nos últimos anos, centro da atenção da pesquisa econômica. Acontecimentos como a Grande Depressão em 1929, a crise do petróleo em 1973 e as mudanças nas políticas econômicas na economia mundial motivaram o estudo de novos modelos que incorporassem esses efeitos para poder realizar uma melhor avaliação das políticas econômicas. Engle, Hendry e Richard (1983) já tinham referido que a estabilidade do modelo estimado é crucial para fazer uma avaliação do impacto das políticas de intervenção num sistema macroeconômico.

A presença de quebras estruturais numa série temporal pode levar a inferir erroneamente a presença de uma raiz unitária na série temporal, quando de fato a série em estudo não apresenta esta característica. Estudos recentes mostraram que a presença de quebras estruturais em uma série temporal também gera efeito de

memória longa na função de autocorrelação, quando esse efeito realmente não está presente na série temporal. As soluções para este problema têm sido diversas. A literatura estatística como a econométrica faz referência a uma quantidade considerável de testes para determinar a presença ou não de quebras estruturais numa série.

Seguindo Perron (2005), consideremos o modelo de regressão mais simples  $\{y_t; t = 1, \dots, T\}$ :

$$y_t = \mu_1 + \mu_2 I_{\{t > \lambda T\}} + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

onde  $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $I_{\{t > \lambda T\}}$ ,  $0 < \lambda < 1$ , é uma variável indicadora que indica a mudança no nível no instante  $t_0 = \lambda T$ . Uma das discussões neste tema é se devemos considerar o ponto de mudança conhecido ou se ele deve ser estimado a partir dos dados. Chow (1960) apresentou uma estatística para testar a hipótese de não presença de quebras estruturais numa série quando o ponto de mudança é conhecido. Quandt (1960) argumenta que os pontos de mudança no modelo (2.1) são desconhecidos e propõe um teste em que considera a hipótese nula de não existência de quebras estruturais versus a hipótese alternativa que o modelo apresenta uma mudança na média num instante de tempo desconhecido. Quandt (1960) também apresenta o teste *Sup F*, ou teste de razão de verossimilhanças, que testa mudanças nos parâmetros do modelo. A estatística de teste é avaliada no tempo de quebra que maximiza a função de verossimilhança. Quandt (1960) encontrou uma distribuição limite para esta estatística, e fez o cálculo de valores críticos para alguns casos.

Posteriormente ao trabalho de Quandt (1960), Gardner (1969) de Chernoff e Zacks (1964) e Kander e Zacks (1966) propõem um teste alternativo baseado nas sugestões feitas por Page (1955, 1957), usando as somas parciais dos dados centrados na média para a análise de quebras estruturais na série. McNeill (1978) fez uma

extensão do procedimento para testar a presença de quebras estruturais numa série com tendência polinomial. A equação do modelo considerado por ele é:

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{i=0}^p \beta_{i,t} t^i + \varepsilon_t \\ \beta_{i,t} &= \beta_i + \delta_i I_{\{t > t_0\}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{p}$  é o grau do polinômio e  $t_0$  o instante do tempo onde ocorre a quebra. A não presença de quebras estruturais no modelo implica que todos os valores de  $\delta_i = 0$ , sob essa hipótese nula, a estatística proposta por MacNeill (1978) para fazer o teste é apresentada a seguir:

$$Q_p = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 T^{-2} \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{j=t+1}^T \hat{\varepsilon}_j \right]^2 \quad (2.3)$$

onde  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ ,  $\hat{\varepsilon}_t^2$  são os resíduos obtidos a partir da regressão (2.2). A distribuição limite para esta estatística é dada por  $Q \Rightarrow \int_0^1 B_p(r)^2 dr$ , onde  $B_p(r)$  representa a ponte browniana generalizada. MacNeill (1978) fez o calculo dos valores críticos fazendo uso de métodos numéricos. Perron(1991), Tang e McNeill (1993) fizeram a extensão deste teste quando os erros  $\varepsilon_t$  apresentam dependência. Perron (1991) apresenta uma estatística a qual sob certas condições apresenta a mesma distribuição limite que a estatística em (2.3):

$$Q_p^* = h_\varepsilon(\hat{0})^{-1} T^{-2} \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{j=t+1}^T \hat{\varepsilon}_j \right]^2 \quad (2.4)$$

onde  $h_\varepsilon(\hat{0})$  é uma estimativa consistente da função de densidade espectral do vetor  $\varepsilon_t$  avaliada na frequência zero. Esta estatística é bem conhecida pelos economistas, o chamado teste KPSS, o que é usado para testar a hipótese nula de um modelo

estacionário versus a alternativa de um modelo com presença de raiz unitária. Na literatura econômica tem-se proposto extensões deste teste, sendo a proposta por Nyblom e Harvey (2000) a mais conhecida para fazer testes de cointegração. Outras extensões foram feitas por Jandhyala e MacNeill (1992), Hansen (1992) e Qu(2004).

A mensagem importante nesta rápida revisão é que uma mesma estatística pode ser aplicada para testar estacionariedade versus a presença de uma raiz unitária, ou a presença de uma quebra estrutural. Isto mostra que estes dois temas estão muito relacionados. Então, evidências sobre a presença de raízes unitárias numa série temporal podem ser originadas pela presença de quebras estruturais e vice-versa.

É possível fazer um paralelo a partir do comentário de Perron (2005), mas no contexto de processos de longa dependência. Voltando aos trabalhos de Page(1955, 1957), quem apresentou a seguinte estatística baseada na soma parcial dos dados centrados para testar a presença de quebras estruturais em uma série temporal:

$$\max_{0 \leq r \leq T} [S_r - \min_{0 \leq i \leq r} S_i] \text{ e } \max_{0 \leq r \leq T} [\min_{0 \leq i \leq r} S_i - S_r] \quad (2.5)$$

sendo  $S_r = \sum_{j=1}^r (y_j - \bar{y})$ . Então, a hipótese nula de não presença de quebras estruturais no nível será rejeitada se a soma parcial aumenta significativamente a partir de seu valor mínimo prévio, ou diminui significativamente a partir de seu valor máximo prévio. Nadler e Robbins (1971) mostraram que a estatística em (2.5) é equivalente à estatística apresentada a seguir:

$$R/S = \frac{1}{S_n} [\max_{0 \leq r \leq T} S_r - \min_{0 \leq r \leq T} S_r] \quad (2.6)$$

onde  $S_n = [\frac{1}{n} \sum_{j=1}^r (y_j - \bar{y})^2]^{\frac{1}{2}}$ . Mas esta é a estatística de amplitude relativa proposta por Hurst (1951). Esta estatística é usada para testar a hipótese de memória curta contra a alternativa de memória longa numa série temporal. Então, a presença de memória longa em uma série pode ser atribuída à presença de quebras estruturais e vice-versa.

A discussão que surge é como entender a natureza destas mudanças. Sob o ponto de vista da modelagem estatística, as mudanças que acontecem na tendência deveriam ser assumidas como de natureza estocástica, mas de uma natureza diferente daqueles choques aleatórios que acontecem em cada período. Isto significa que essas mudanças provêm de uma distribuição de probabilidade diferente, mas pelo fato de que estas mudanças são *pouco frequentes*, torna-se difícil a especificação e a estimação dessa distribuição de probabilidade. Considerando que as mudanças são determinísticas, sob a suposição de que acontecem devido à intervenção de algum agente externo, o qual ocorre com frequência em séries econômicas.

O propósito desta dissertação é discutir a estimação de processos ARFIMA (0,d,0) que apresentam quebras estruturais. Neste trabalho não serão estudadas as questões de quebras estruturais e raízes unitárias.

## 2.2 Estimação de Modelos ARFIMA (0,d,0) com quebra estrutural

### 2.2.1 Modelos ARFIMA(0,d,0) com quebra estrutural no nível e tendência

Seguindo a idéia de Tsay (1988) e Robinson (1994a), nós podemos considerar o processo  $X_t$ , definido em (1.1), como um processo não observável. Assim, a série que apresenta quebras estruturais pode ser expressa como uma relação:

$$Y_t = f(t) + X_t \quad (2.7)$$

onde  $f(t)$  é uma função paramétrica que representa as perturbações que afetam  $X_t$ . Essa função pode ser de natureza determinística ou estocástica, segundo o tipo de perturbação.

Considerando  $f(t)$  como uma função determinística, assim como Perron (2005), podemos definir os seguintes modelos:

Modelo 1 : Mudança no nível de uma série sem tendência.

$$Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t \quad (2.8)$$

Modelo 2: Mudança no nível em uma série com tendência.

$$Y_t = \mu_1 + \beta t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t \quad (2.9)$$

Modelo 3: Mudança na tendência.

$$Y_t = \mu_1 + \beta_1 t + (\beta_2 - \beta_1)DT_t + X_t \quad (2.10)$$

onde  $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2$  são os parâmetros da função  $f(t)$ ,  $DU_t$  e  $DT_t$  são variáveis que indicam o instante do tempo  $t_0 = \lambda T$ ,  $0 < \lambda < 1$ , em que ocorre a mudança na série. Para os modelos 1 e 2 temos que:

$$DU_t = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

No caso do modelo 3 temos que:

$$DT_t = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ t - t_0, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Para os modelos definidos em (2.8), (2.9) e (2.10), aplicando esperança à função em (2.7) temos expressão para o valor esperado de  $Y_t$ :

$$E(Y_t) = E(f(t) + X_t).$$

onde para o modelo 1:

$$E(Y_t) = \begin{cases} \mu_1 + E(X_t), & t < t_0 \\ \mu_2 + E(X_t), & t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

para o modelo 2:

$$E(Y_t) = \begin{cases} \mu_1 + \beta t + E(X_t) , t < t_0 \\ \mu_2 + \beta t + E(X_t) , t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Finalmente, para o modelo 3:

$$E(Y_t) = \begin{cases} \mu_1 + \beta_1 t + E(X_t) , t < t_0 \\ \mu_1 + \beta_2 t + (\beta_1 - \beta_2)t_0 + E(X_t) , t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

A variância do modelo geral, pelo fato que  $f(t)$  é determinística é dada por:

$$Var(Y_t) = Var(f(t) + X_t).$$

$$Var(Y_t) = Var(X_t).$$

Observa-se que para estes modelos somente o valor esperado do modelo geral muda na presença de quebras estruturais no nível e tendência da série. Uma forma geral dos modelos é como segue:

$$\vec{Y}_t = Z_t' \beta' + X_t \quad (2.16)$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{Y}_t - Z_t' \beta' = X_t.$$



Aplicando operador de diferenciação obtemos:

$$(1 - L)^d(\vec{Y}_t - Z'_t\beta')=(1 - L)^d X_t$$

Finalmente:

$$(1 - L)^d \underbrace{(\vec{Y}_t - Z'_t\beta^t)}_{Y_t^*} = \mu_t$$

sendo o vetor  $\vec{Y}_t$  uma seqüência observada,  $Z_t = (z_{t1}, \dots, z_{tl})'$  um vetor de dimensão "l" de regressores não estocásticos e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$  são os parâmetros a estimar. As componentes de  $Z_t$  são não estocásticas, são funções do tipo impulso ou de grau como as definidas em (2.11) e (2.12) as quais absorvem o efeito da quebra estrutural para um ponto de mudança determinado.

## 2.2.2 Modelos com quebra estrutural na variância

Tsay (1988) apresenta o caso em que  $f(t)$  é estocástica e assume a seguinte forma:

$$f(t) = \omega_0 \frac{\omega(L)}{\delta(L)} e_t^{(t_0)} \quad (2.17)$$

onde  $\omega_0$  é a constante que indica o impacto inicial da perturbação,  $\omega(L)$  e  $\delta(L)$  são polinômios de ordem p e q respectivamente no operador L é  $LX_t = X_{t-1}$ . O termo  $e_t^{(t_0)}$  é definido a seguir:

$$e_t^{(t_0)} = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \{e_t^{(t_0)}\}, & t \geq t_0 \end{cases}$$

Neste caso,  $e_t^{(t_0)}$  é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância  $\sigma_e^2$ . A função  $f(t)$  que afeta a variância de  $Y_t$ , será usada nesta dissertação para fazer a modelagem das mudanças na variância de  $X_t$ .

No caso do modelo com quebra na variância, consideremos  $f(t)$  como na equação (2.17). Então, sejam  $\omega_o = W$ ,  $\frac{\omega(L)}{\delta(L)} = \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}$  e  $e_t^{(t_0)} = X_t$  para  $t \geq t_0$ . Defina-se  $X_t$  ARFIMA (p,d,q) tal que  $X_t \sim (\mu; \sigma_\xi^2)$  então:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ W \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)} X_t, & t \geq t_0 \end{cases}$$

e no caso  $t \geq t_0$ , substituindo no modelo (2.7) o valor de  $f(t)$  pela expressão definida em (2.17) com os valores de  $\omega_o$ ,  $\frac{\omega(L)}{\delta(L)}$  e  $e_t^{(t_0)}$  definidos acima tem-se que:

$$\begin{aligned} Y_t &= W \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)} X_t + X_t \\ \frac{\Phi(L)}{\Theta(L)} Y_t &= W \frac{\Phi(L)}{\Theta(L)} \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)} X_t + \frac{\Phi(L)}{\Theta(L)} X_t \\ \frac{\Phi(L)}{\Theta(L)} Y_t &= W X_t + \frac{\Phi(L)}{\Theta(L)} X_t \end{aligned}$$

Mas como  $X_t$  é um ARFIMA(0,d,0), então  $\frac{\Phi(L)}{\Theta(L)} = 1$ . Assim, a média é dada por  $E(Y_t) = (1 + W_v)\mu$  e a variância muda de  $\sigma_\xi^2$  para  $(1 + W)\sigma_\xi^2$  no instante de tempo  $t_0$ . Sem perda da generalidade, pode-se assumir que  $-1 < W < \infty$ , e então o modelo com mudança estrutural na variância é dado por:

$$\text{Modelo 4: } Y_t = \begin{cases} X_t; & t < t_0 \\ (1 + W_v)X_t; & t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Como uma extensão do modelo 1 e o modelo 4, temos um modelo que apresenta uma quebra estrutural no nível e uma quebra estrutural na variância, que é dado por:

$$\text{Modelo 5 : } Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + Z_t, \quad (2.19)$$

$$Z_t = \begin{cases} X_t ; & t < \tau_0 \\ (1 + W_v)X_t ; & t \geq \tau_0 \end{cases}$$

### 2.2.3 Estimação de Modelos ARFIMA (0,d,0) com quebra estrutural no nível e tendência.

Para estimar os parâmetros do modelo ARFIMA (0,d,0) na presença de quebras estruturais, quando os pontos de mudança são conhecidos, nós assumimos a idéia apresentada por Robinson (1994a). O vetor paramétrico neste caso está formado por  $\Lambda = \{\beta, d, \sigma_\eta^2\}$ . É possível tentar modelar a quebra estrutural retirando a parte determinística do modelo, que implica a estimação do vetor de parâmetros  $\beta$  e dos resíduos correspondentes a essa regressão. O método de estimação sugerido é o método de mínimos quadrados ordinários (OLS). Seja  $Y_T = (y_1, \dots, y_T)'$  a seqüência de observações,  $\hat{\beta}_T = (\hat{\beta}_{1_T}, \dots, \hat{\beta}_{l_T})$  o estimador OLS de  $\beta$ ,  $e_T = (e_1, \dots, e_T)$  o vetor de resíduos estimados. Então as estimativas de  $\beta$  e dos resíduos são dadas respectivamente por:

$$\hat{\beta}_T = \left( \sum_{t=1}^T Z_t Z_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^T Z_t y_t \quad (2.20)$$

$$e_T = \vec{Y}t - Z_t' \hat{\beta}_T \quad (2.21)$$

Os resíduos estimados tornam-se então uma nova série, que é utilizada para a estimação do parâmetro de integração fracionária pelo método proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), descrito no capítulo 1.

Considerando que o termo  $X_t$  apresenta uma estrutura de autocorrelação que não é compatível com aquela apresentada pelo modelo de regressão linear com erros normais independentes, temos que analisar como esse fato afeta as estimativas de mínimos quadrados do vetor  $\beta$  no modelo em (2.16). Segundo Yajima (1985), o estimador de mínimos quadrados quando o modelo apresenta erros de memória longa é consistente, mas não é mais eficiente. Yajima (1985, 1988) mostra também que esta perda não é severa. Andested (1974) mostrou que somente a estimativa OLS do vector de parâmetros  $\beta$  apresenta uma perda de eficiência do 2% em relação a estimativa obtida pelo método de mínimos quadrados generalizados (GLS) no modelo 1. Mais detalhes podem ser encontrados em Yajima (1985,1988) e Andested (1974).

O procedimento descrito anteriormente é equivalente a fazer uma intervenção no periodograma da série. O periodograma definido em (1.20) pode ser escrito incluindo-se o efeito da mudança no valor esperado da série. A seguir apresentamos a forma como é considerada essa mudança.

$$I(\omega_j) = (2\pi T)^{-1} \left| \sum_{t=1}^T Y_t \exp(-i\omega_j t) \right|^2$$

$$I(\omega_j) = (2\pi T)^{-1} \left| \sum_{t=1}^T (Y_t - E(Y_t)) \exp(-i\omega_j t) \right|^2$$

sendo o valor esperado de  $Y_t$  definido para cada modelo em (2.13), (2.14) e (2.15) respectivamente. Então, o pseudo-periodograma da série  $Y_t$  será:

$$I(\omega_j) = (2\pi T)^{-1} \left| \sum_{t=1}^{t_0-1} (Y_t - E(Y_t)) \exp(-i\omega_j t) + \sum_{t=t_0}^T (Y_t - E(Y_t)) \exp(-i\omega_j t) \right|^2 \quad (2.22)$$

a expressão (2.22) será utilizada na estimação do parâmetro de integração fracionária pelo método GPH descrito no capítulo 1.

#### 2.2.4 Estimação de Modelos ARFIMA (0,d,0) com quebra estrutural na variância.

Tsay (1988) apresenta uma estatística de teste para detectar mudanças na variância quando o ponto de mudança é conhecido:

$$\hat{r}_{t_0} = \frac{(t_0 - 1) \sum_{t=t_0}^T Y_t^2}{(T - t_0 + 1) \sum_{t=1}^{t_0-1} Y_t^2} \quad (2.23)$$

Esta estatística está baseada na razão dos valores de  $Y_t$  antes e depois do instante do tempo em que ocorre a mudança, além de ser o estimador de  $(1 + W_v)^2$ . Sob a hipótese nula de não existir uma mudança na variância no instante  $t_0$ , a estatística  $\hat{r}_{t_0}$  tem uma distribuição F com  $(T-t_0+1, t_0-1)$  graus de liberdade. Esse teste é o mais poderoso para detectar mudanças na variância quando o instante de tempo  $t_0$  é conhecido. Quando  $t_0$  é desconhecido, outros testes podem ser construídos, Hsu (1977), mas nenhum desses testes tem uma forma fechada de distribuição quando o tamanho da amostra é maior que 2 (Tsay, 1988).

# Capítulo 3

## Simulações

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos simulações de Monte Carlo dos modelos apresentados no capítulo 2 com o propósito de verificar algumas propriedades dos parâmetros desses modelos. O objetivo principal foi verificar o efeito da quebra estrutural na estimação do parâmetro de integração fracionária nos modelos sugeridos no capítulo 2.

A posição da quebra estrutural foi considerada no meio da série isto é  $t_0 = \lambda T$ , sendo  $\lambda = 0,5$ , pelo fato de que simulações preliminares mostraram que quando o tempo de quebra é conhecido os valores das estimativas do parâmetro de integração fracionária não apresentam mudanças importantes. Os tamanhos de amostra considerados foram de  $T=300$  e  $T=500$  no caso dos modelos 1 e 5 definidos em (2.8) e (2.19) respectivamente. Foram feitas 5000 réplicas do processo ARFIMA(0,d,0) no caso dos modelos em que o ponto de mudança é conhecido, e 500 réplicas nos casos em que o ponto de mudança é desconhecido. Os valores do parâmetro de integração fracionária considerados neste trabalho foram:  $d=0,10; 0,20; 0,30; 0,40$ . Os tama-

nhos dos saltos, isto é, os valores dos coeficientes  $\beta_i$ ,  $\mu_i$ ,  $i=1,2$  e  $W_v$ , foram escolhidos arbitrariamente.

O processo de simulação e estimação em todos os modelos foram implementados no *software* R; a simulação dos processos ARFIMA foi feita utilizando-se o pacote *fracdiff.sim*, que gera processos fracionários através do algoritmo proposto por Haslett and Raftery (1989); a estimação dos pontos de mudança foi feita no pacote **strucchange** que avalia as mudanças estruturais em modelos de regressão linear usando os métodos CUSUM, MOSUM para a estimação dos pontos de mudança. Maiores referências podem ser encontradas em Bai e Perron (1998,2003) e Zeileis, Krämer e Hornik (2003).

A metodologia de simulação foi a seguinte:

1. Simulação do modelo ARFIMA em estudo;
2. Estimação do ponto de mudança (quando este é desconhecido);
3. Construção da variável indicadora com a informação fornecida pelo item 2;
4. Análise de regressão: cálculo das estimativas dos parâmetros do modelo e dos resíduos.
5. Estimação do parâmetro de integração fracionária usando-se a série de resíduos obtida no item 4.

Denotamos por  $\hat{d}_{GPH_1}$  o estimador do parâmetro  $\mathbf{d}$  obtido levando-se em conta a metodologia sugerida na capítulo 2 e, por  $\hat{d}_{MV}$  a estimativa do mesmo parâmetro obtido pelo método de máxima verossimilhança. No caso do modelo 1 definido em (2.8), foi estimado o valor do parâmetro de integração fracionária, quando a quebra

estrutural não é considerada na modelagem, com a finalidade de mostrar o comportamento não estacionário da série originada pela quebra estrutural e fazer uma comparação da metodologia apresentada no capítulo 2 com os resultados obtidos por Tavares (2004). Essa estimativa é denotada por  $\hat{d}_{GPH_2}$ . A seguir apresentamos os principais resultados das simulações feitas para cada um dos modelos apresentados no capítulo 2.

## 3.2 Resultados das Simulações do Modelo 1

O Modelo 1 definido em (2.8) é usado na modelagem de séries temporais que apresentam uma quebra estrutural no nível num instante de tempo  $t_0 = \frac{T}{2}$  conhecido. A Figura 3.1 apresenta um gráfico de uma série correspondente a este modelo obtido a partir de um processo de simulação.

Os resultados da estimação do modelo considerando o ponto de mudança conhecido para  $T=300$  e  $T=500$  são apresentados nas Tabelas 3.1 e 3.2 respectivamente. Podemos observar que o estimador de  $(\mu_2 - \mu_1)$  apresenta uma distribuição do vício com média em torno do valor zero e uma dispersão maior naqueles processos onde o valor de  $\mathbf{d}$  está mais próximo da região de não estacionariedade. Também pode ser observada uma diminuição na dispersão da distribuição quando o tamanho de amostra aumenta. (ver Figura 3.2).

Os resultados referentes às estimativas do parâmetro de integração fracionária considerando a quebra estrutural, podemos observar que o vício do estimador deste parâmetro apresenta uma distribuição centrada em torno do valor zero e uma variabilidade menor quando o tamanho de amostra aumenta (ver Figura 3.3). Também pode ser observado que os valores do coeficiente de variação deste estimador



diminuem quando o valor real do parâmetro de integração fracionária está próximo da região de não estacionariedade (ver Tabela 3.2). Comparando as estimativas  $\hat{d}_{GPH_1}$ , considerando a quebra estrutural, com as estimativas do parâmetro de integração fracionária obtidas sem considerar a quebra estrutural na modelagem  $\hat{d}_{GPH_2}$ , observamos características similares em variabilidade, mas a distribuição do vício do estimador não está mais centrada em torno do valor zero (ver Figuras 3.4 e 3.5).

Na Tabela 3.3 e 3.4 apresentamos a estimação do modelo 1 quando o ponto de mudança é desconhecido. Observamos que em média o programa R identificou o ponto de mudança certo, melhorando o percentual de acertos na estimação do ponto real quando o processo apresenta valores de  $\mathbf{d}$  próximos do valor zero, e o tamanho do salto  $(\mu_2 - \mu_1)$  é grande (ver Tabela 3.3). Na Tabela 3.4 apresentamos os resultados da estimação deste modelo. Observamos que os estimadores dos parâmetros  $\mu_1$ ,  $\mu_2 - \mu_1$  e do parâmetro de integração fracionária, apresentam características similares, na distribuição do vício e variabilidade, que as obtidas quando o ponto de mudança é conhecido.

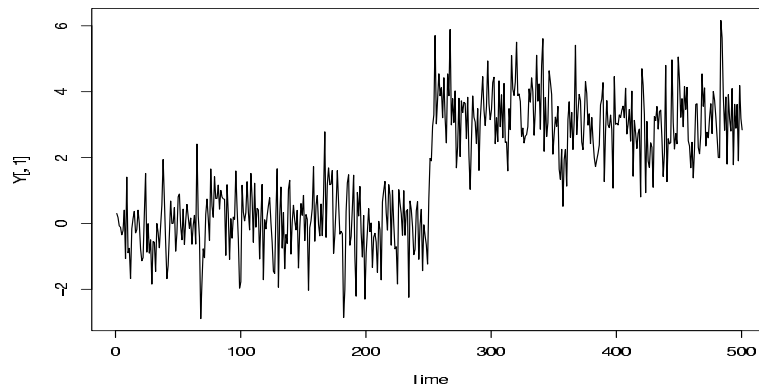


Figura 3.1: Modelo 1:  $Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t$ ,  $T=300$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\mu_1 = 0$

Tabela 3.1: Resultados da estimação do Modelo 1:  $Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t$ ;  $ARFIMA(0, d, 0)$  com uma quebra estrutural quando o ponto de mudança é conhecido.  $T=300$ ,  $\lambda = 0, 50$ ,  $\mu_1 = 0$

$d$	$\mu_2$	1			2			3		
		$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH1}$	$\hat{d}_{GPH2}$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH1}$	$\hat{d}_{GPH2}$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH1}$	$\hat{d}_{GPH2}$
<b>0,1</b>	Média	1,0019	0,9975	0,1935	0,9982	0,9984	0,2707	3,0027	0,0969	0,3287
	Desv. Padrão	0,1312	0,0625	0,0571	0,1325	0,0630	0,0538	0,1303	0,0623	0,0531
	Vício	0,0019	-0,0025	0,0935	-0,0018	-0,0016	0,1707	0,0027	-0,0031	0,2287
	EQM	0,0172	0,0039	0,0120	0,0175	0,0040	0,0320	0,0170	0,0039	0,0551
	C.V.	0,1310	0,6413	0,2950	0,0663	0,6409	0,1989	0,0434	0,6434	0,1616
<b>0,2</b>	Média	0,9982	0,1997	0,2687	2,0003	0,2014	0,3377	3,0012	0,2001	0,3918
	Desv. Padrão	0,2194	0,0631	0,0593	0,2215	0,0623	0,0563	0,2206	0,0627	0,0539
	Vício	-0,0018	-0,0003	0,0687	0,0003	0,0014	0,1377	0,0012	0,0001	0,1918
	EQM	0,0481	0,0040	0,0082	0,0491	0,0039	0,0221	0,0487	0,0039	0,0397
	C.V.	0,2198	0,3157	0,2207	0,1107	0,3092	0,1668	0,0735	0,3132	0,1376
<b>0,3</b>	Média	0,9978	0,3066	0,3500	1,9965	0,3062	0,4075	3,0018	0,3054	0,4567
	Desv. Padrão	0,3987	0,0627	0,0607	0,4008	0,0628	0,0581	0,3943	0,0611	0,0542
	Vício	-0,0022	0,0066	0,0500	-0,0035	0,0062	0,1075	0,0018	0,0054	0,1567
	EQM	0,1590	0,0040	0,0062	0,1607	0,0040	0,0149	0,1555	0,0038	0,0275
	C.V.	0,3996	0,2046	0,1736	0,2008	0,2051	0,1426	0,1313	0,2002	0,1186
<b>0,4</b>	Média	0,9925	0,4173	0,4334	2,0160	0,4164	0,4780	3,0244	0,4177	0,5248
	Desv. Padrão	0,8536	0,0645	0,0639	0,8429	0,0640	0,0613	0,8268	0,0638	0,0584
	Vício	-0,0075	0,0173	0,0334	0,0160	0,0164	0,0780	0,0244	0,0177	0,1248
	EQM	0,7286	0,0045	0,0052	0,7107	0,0044	0,0098	0,6842	0,0044	0,0190
	C.V.	0,8600	0,1545	0,1474	0,4181	0,1537	0,1282	0,2734	0,1526	0,1113

Tabela 3.2: Resultados da estimação do Modelo 1:  $Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t$ ; ARFIMA  $(0,d,0)$  com uma quebra estrutural, quando o ponto de mudança é conhecido.  $T=500$ ,  $\lambda = 0, 50$ ,  $\mu_1 = 0$ .

$d$	$\mu_2$	1			2			3		
		$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH1}$	$\hat{d}_{GPH2}$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH1}$	$\hat{d}_{GPH2}$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH1}$	$\hat{d}_{GPH2}$
0,1	Estatísticos									
	Média	0,9969	0,9993	0,1770	2,0003	0,9989	0,2396	3,0027	0,9981	0,2894
	Desv. Padrão	0,1084	0,0467	0,0435	0,1055	0,0471	0,0421	0,1077	0,0471	0,0407
	Vício	-0,0031	-0,0007	0,0770	0,0003	-0,0011	0,1396	0,0027	-0,0019	0,1894
	EQM	0,0117	0,0022	0,0078	0,0111	0,0022	0,0213	0,0116	0,0022	0,0375
0,2	C.V.	0,1087	0,4705	0,2456	0,0528	0,4763	0,1756	0,0359	0,4796	0,1405
	Média	0,9924	0,2005	0,2550	1,9964	0,1999	0,3101	2,9943	0,2002	0,3557
	Desv. Padrão	0,1866	0,0474	0,0457	0,1923	0,0474	0,0428	0,1867	0,0465	0,0412
	Vício	-0,0076	0,0005	0,0550	-0,0036	-0,0001	0,1101	-0,0057	0,0002	0,1557
	EQM	0,0349	0,0022	0,0051	0,0370	0,0022	0,0140	0,0349	0,0022	0,0259
0,3	C.V.	0,1881	0,2362	0,1793	0,0963	0,2370	0,1379	0,0624	0,2321	0,1158
	Média	0,9962	0,3033	0,3371	2,0049	0,3042	0,3843	2,9933	0,3038	0,4238
	Desv. Padrão	0,3584	0,0475	0,0463	0,3557	0,0478	0,0444	0,3571	0,0475	0,0432
	Vício	-0,0038	0,0033	0,0371	0,0049	0,0042	0,0843	-0,0067	0,0038	0,1238
	EQM	0,1284	0,0023	0,0035	0,1266	0,0023	0,0091	0,1276	0,0023	0,0172
0,4	C.V.	0,3597	0,1565	0,1373	0,1774	0,1570	0,1157	0,1193	0,1562	0,1020
	Média	1,0083	0,4120	0,4245	1,9979	0,4112	0,4598	3,0046	0,4127	0,4951
	Desv. Padrão	0,8056	0,0485	0,0482	0,7932	0,0487	0,0468	0,8011	0,0484	0,0452
	Vício	0,0083	0,0120	0,0245	-0,0021	0,0112	0,0598	0,0046	0,0127	0,0951
	EQM	0,6491	0,0025	0,0029	0,6291	0,0025	0,0058	0,6418	0,0025	0,0111
0,4	C.V.	0,7990	0,1177	0,1135	0,3970	0,1185	0,1018	0,2666	0,1174	0,0912

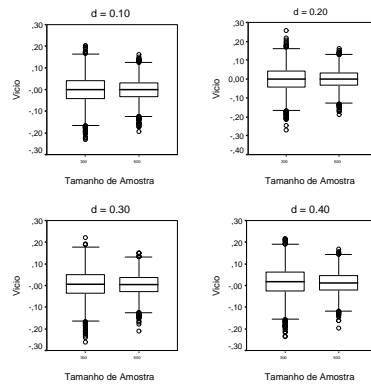


Figura 3.2: Vício na estimação do parâmetro  $d$ , no modelo 1 considerando a presença de quebra estrutural quando o ponto de quebra é conhecido.  $\lambda = 0,5$ ;  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$

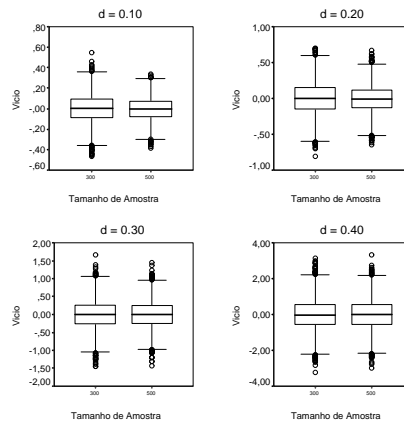


Figura 3.3: Vício na estimação do parâmetro  $(\mu_2 - \mu_1)$  no modelo 1 considerando a presença de quebra estrutural quando o ponto de mudança é conhecido,  $\lambda = 0,5$ ;  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$

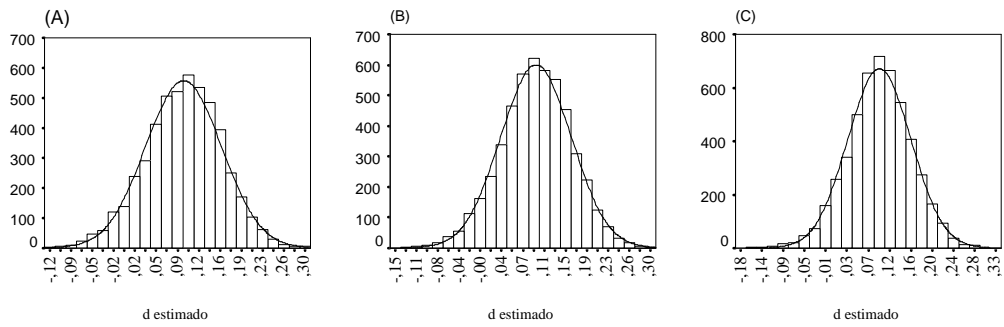


Figura 3.4: Estimativas do parâmetro  $d = 0,10$  pelo método  $GPH_1$  no modelo 1 quando o processo possui uma quebra estrutural e o ponto mudança é conhecido,  $\lambda = 0,5$ ;  $T = 300$  : (A)  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (B)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (C)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$ .

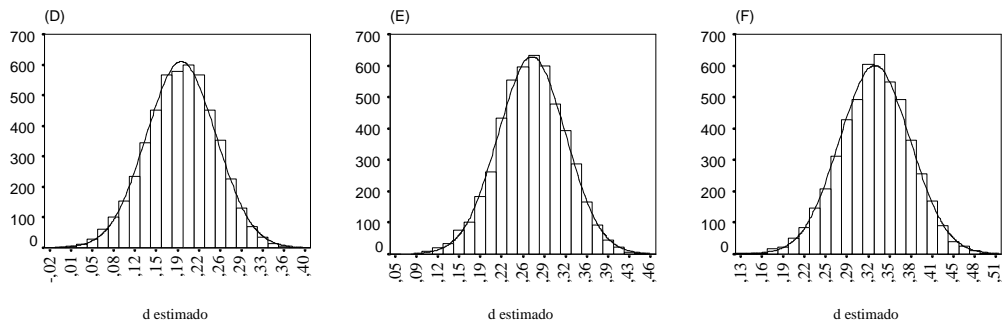


Figura 3.5: Estimativas do parâmetro  $d = 0,10$  pelo método  $GPH_2$  no modelo 1 quando o processo possui uma quebra estrutural e o ponto de mudança é conhecido,  $\lambda = 0,5$ ;  $T = 300$  : (D)  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (E)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (F)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$ .

Tabela 3.3: Resultados da estimação do ponto de mudança no Modelo 1:  $Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t$  ARFIMA (0,d,0) quando  $\lambda = 0,5$ ,  $T=300$ ,  $\mu_1 = 0$

	$\mu_2 - \mu_1=1$ d=0.10	$\mu_2 - \mu_1=1$ d=0.40	$\mu_2 - \mu_1=3$ d=0.10	$\mu_2 - \mu_1=3$ d=0.40
Média	150,544	150,410	149,982	149,800
Desv. Padrão	10,6740	47,732	0,6500	7,708
Vício	0,544	0,41	-0,018	-0,2
% de Acertos $t_0 = 150$	26 %	7,8 %	82,8 %	72 %

Tabela 3.4: Resultados da estimação do Modelo 1:  $Y_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t$  ARFIMA (0,d,0) quando o ponto de mudança é desconhecido.  $T=300$ ,  $\mu_1 = 0$ .

d	$\mu_2$	1			3		
		$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH_1}$	$\hat{d}_{GPH_2}$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH_1}$	$\hat{d}_{GPH_2}$
0,1	Média	1,0145	0,0987	0,1946	2,9890	0,1028	0,3307
	Desv. Padrão	0,1404	0,0598	0,0564	0,1362	0,0579	0,0537
	Vício	0,0145	-0,0013	0,0946	-0,0110	0,0028	0,2307
	EQM	0,0199	0,0036	0,0121	0,0187	0,0034	0,0561
	C.V.	0,1384	0,6066	0,2896	0,0456	0,5635	0,1623
0,4	Média	1,0301	0,4036	0,4310	3,0086	0,4116	0,5235
	Desv. Padrão	0,9099	0,0692	0,0646	0,8547	0,0636	0,0571
	Vício	0,0301	0,0036	0,0310	0,0086	0,0116	0,1235
	EQM	0,8288	0,0048	0,0051	0,7305	0,0042	0,0185
	C.V.	0,8833	0,1715	0,1498	0,2841	0,1546	0,1092

### 3.3 Resultados das Simulações do Modelo 2

O Modelo 2 definido em (2.9) é usado na modelagem de séries temporais que apresentam uma tendência linear e uma quebra estrutural no nível num instante determinado de tempo. A Figura 3.6 apresenta um exemplo do modelo simulado.

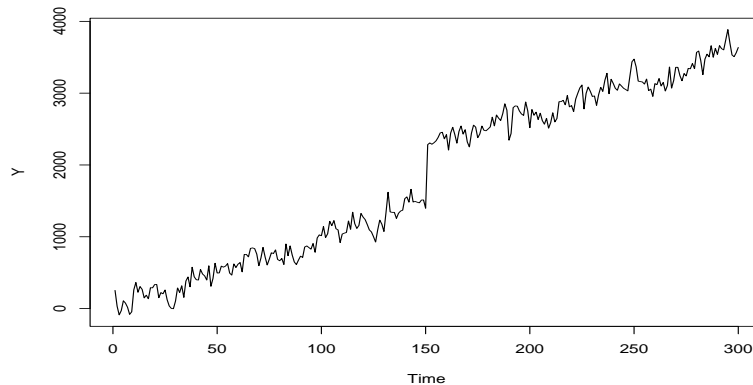


Figura 3.6: Modelo 2

A Tabela 3.5, apresenta os resultados obtidos na estimação do modelo 2 considerando o ponto de mudança conhecido. Observamos que os estimadores dos parâmetros  $\beta_1$  e  $(\mu_2 - \mu_1)$  apresentam uma distribuição do vício centrada em torno do valor zero, com um aumento da variabilidade quando o valor real de  $\mathbf{d}$  está próximo da região de não estacionariedade. Os resultados referentes às estimativas do parâmetro de integração fracionária, obtidas pelo método GPH e MV, apresentam uma distribuição do vício centrada em torno de zero para diversas magnitudes do salto (ver Figura 3.7). O estimador obtido pelo método GPH apresenta um valor do vício menor do que aquele obtido pelo método de máxima verossimilhança, mas este último apresenta uma variabilidade menor em comparação com o estimador obtido pelo método GPH.(ver Tabela 3.5).

Podemos observar também que o estimador GPH do parâmetro  $\mathbf{d}$  apresenta uma distribuição simétrica centrada em torno do valor  $\mathbf{d}$  real, (ver Figura 3.8), e a variabilidade da distribuição do estimador diminui quando os valores do parâmetro  $\mathbf{d}$  real estão próximos da região de não estacionariedade (ver Tabela 3.5).



Tabela 3.5: Resultados da estimação do Modelo 2:  $Y_t = \mu_1 + \beta t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + X_t$ ; ARFIMA  $(0, d, 0)$  com uma quebra estrutural conhecida.  $T=300$ ,  $\lambda = 0, 50, 50$ ,  $\mu_1 = 0$ .

d real	$\beta = 1$										$\beta = 1$									
	$\mu_2 = 100$					$\mu_2 = 200$					$\mu_2 = 300$					$\mu_2 = 300$				
	$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$		$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$		$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$		$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	
0,1	Média	1,000	100,001	0,090	0,076	1,000	199,999	0,090	0,075		1,000	299,997	0,090	0,075		1,000	300,006	0,090	0,075	
	Desv Padrão	0,001	0,298	0,063	0,046	0,001	0,292	0,064	0,047		0,001	0,286	0,063	0,046		0,001	0,286	0,063	0,046	
	Vício	6,83E-06	-0,001	0,010	0,024	-7,78E-06	0,001	0,010	0,025		-1,04E-05	0,003	0,010	0,025		-1,04E-05	0,003	0,010	0,025	
	EQM	1,63E-03	0,089	0,004	0,003	1,58E-06	0,085	0,004	0,003		1,52E-06	0,082	0,004	0,003		1,52E-06	0,082	0,004	0,003	
	CV	0,001	0,003	0,696	0,609	0,001	0,001	0,713	0,622		0,001	0,001	0,695	0,616		0,001	0,001	0,695	0,616	
0,2	Média	1,000	100,008	0,190	0,173	1,000	200,004	0,192	0,174		1,000	299,993	0,189	0,172		1,000	300,006	0,296	0,275	
	Desv Padrão	0,002	0,421	0,064	0,050	0,002	0,417	0,064	0,049		0,002	0,419	0,065	0,050		0,002	0,419	0,065	0,050	
	Vício	1,12E-05	-0,008	0,010	0,027	1,32E-05	-0,004	0,008	0,026		-3,35E-05	0,007	0,011	0,028		-3,35E-05	0,007	0,011	0,028	
	EQM	3,83E-06	0,177	0,004	0,003	3,82E-06	0,174	0,004	0,003		3,77E-06	0,175	0,004	0,003		3,77E-06	0,175	0,004	0,003	
	CV	0,002	0,004	0,338	0,292	0,002	0,002	0,332	0,283		0,002	0,001	0,342	0,292		0,002	0,001	0,342	0,292	
0,3	Média	1,000	100,007	0,297	0,276	1,000	199,984	0,296	0,274		1,000	300,006	0,296	0,274		1,000	300,006	0,296	0,275	
	Desv Padrão	0,003	0,637	0,064	0,049	0,003	0,635	0,064	0,049		0,003	0,640	0,064	0,049		0,003	0,640	0,064	0,049	
	Vício	1,79E-06	-0,007	0,003	0,024	-1,06E-04	0,016	0,004	0,026		4,06E-05	-0,006	0,004	0,025		4,06E-05	-0,006	0,004	0,025	
	EQM	1,13E-05	0,405	0,004	0,003	1,12E-05	0,404	0,004	0,003		1,12E-05	0,410	0,004	0,003		1,12E-05	0,410	0,004	0,003	
	CV	0,003	0,006	0,215	0,177	0,003	0,003	0,217	0,180		0,003	0,002	0,216	0,180		0,003	0,002	0,216	0,180	
0,4	Média	1,000	100,004	0,410	0,378	1,000	199,975	0,409	0,377		1,000	300,001	0,410	0,379		1,000	300,001	0,410	0,379	
	Desv Padrão	0,007	1,055	0,069	0,048	0,007	1,065	0,067	0,047		0,007	1,061	0,069	0,047		0,007	1,061	0,069	0,047	
	Vício	4,33E-05	-0,004	-0,010	0,022	-1,01E-04	0,025	-0,009	0,023		5,46E-05	-0,001	-0,010	0,021		5,46E-05	-0,001	-0,010	0,021	
	EQM	4,75E-05	1,112	0,005	0,003	4,71E-05	1,135	0,005	0,003		4,72E-05	1,126	0,005	0,003		4,72E-05	1,126	0,005	0,003	
	CV	0,007	0,011	0,167	0,127	0,007	0,005	0,164	0,125		0,007	0,004	0,168	0,125		0,007	0,004	0,168	0,125	

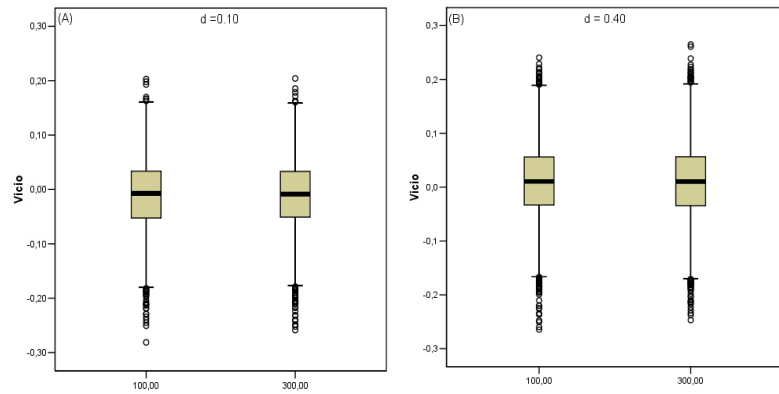


Figura 3.7: Vício na estimação do parâmetro  $d$  obtidas pelo método GPH, no Modelo 2, quando  $\lambda = 0,5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu_2 - \mu_1 = 100$ ,  $\mu_2 - \mu_1 = 300$  e o ponto de mudança é conhecido.

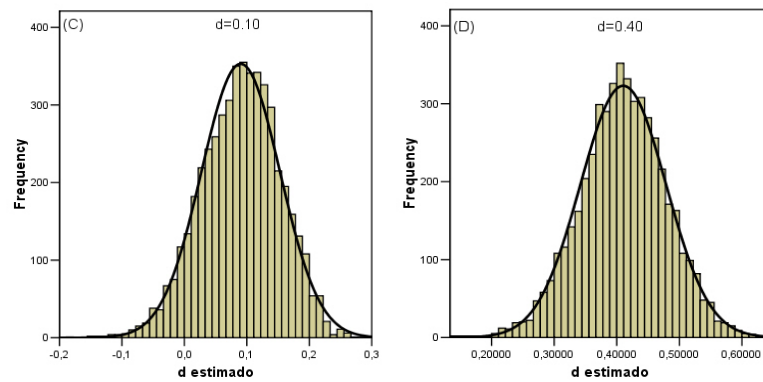


Figura 3.8: Distribuição do estimador do parâmetro  $d$  obtido pelo método GPH, no Modelo 2, quando o ponto de mudança é conhecido.  $\lambda = 0,5$ ,  $T=300$ : (C)  $d=0,10$  (D)  $d =0,40$ , ( $\mu_2 - \mu_1 = 100$ ).

### 3.4 Resultados das Simulações do Modelo 3.

O Modelo 3 definido em (2.10) é usado na modelagem de séries temporais com tendência linear, que apresentam uma quebra estrutural nesta tendência num instante determinado de tempo. A Figura (3.9) descreve o modelo simulado.

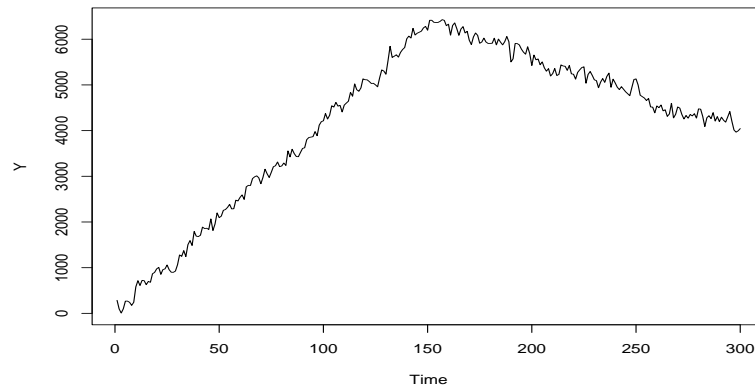


Figura 3.9: Modelo 3.

A Tabela 3.6 apresenta os resultados da estimação deste modelo. Podemos observar que os estimadores dos parâmetros  $\beta_1$  e  $(\beta_2 - \beta_1)$  apresentam uma distribuição do vício centrada em torno do valor zero e a variabilidade dessas distribuições aumenta na medida que o valor real do parâmetro  $\mathbf{d}$  se torna próximo da região de não estacionariedade. Os resultados referentes à estimação do parâmetro de integração fracionária apresentam características similares aqueles obtidos nos modelos 1 e 2.

Na Tabela 3.7 apresentamos os resultados da estimação do ponto de mudança para o Modelo 3. Observamos que, em média, o programa R identificou o ponto de mudança corretamente, melhorando o percentual de acertos na estimação do ponto real quando o processo apresenta valores do parâmetro de integração fracionária  $\mathbf{d}$  próximos ao valor zero e o valor da diferença  $(\beta_2 - \beta_1)$  é grande.

Na Tabela 3.8, apresentamos os resultados da estimação deste modelo usando a informação do ponto de mudança estimado. Podemos observar que os estimadores dos parâmetros  $\beta_1$  e  $(\beta_2 - \beta_1)$  apresentam características similares aquelas estimativas obtidas quando o ponto de mudança é conhecido, enquanto os resultados referentes à estimação do parâmetro de integração fracionária apresentaram mudanças em comparação com aqueles resultados em que o ponto de mudança é conhecido. O estimador do parâmetro  $\mathbf{d}$  obtido pelo método GPH e MV apresenta um maior vício que aquele observado no caso em que o ponto de mudança é conhecido. No referente à variabilidade, a distribuição do estimador do parâmetro de integração fracionária tem características similares às obtidas quando o ponto de mudança é conhecido. Neste caso, o estimador obtido pelo método de máxima verossimilhança tem menor vício e menor variabilidade que aquele obtido pelo método GPH.

Tabela 3.6: Resultados da estimação do Modelo 3:  $y_t = \mu_1 + \beta t + (\beta_2 - \beta_1)DT_t + X_t$ ; ARFIMA  $(0, d, 0)$  com uma quebra estrutural conhecida.  $T=300$ ,  $\lambda = 0, 50$ ,  $\mu_1 = 0$ .

$d$	Estatísticas	$\beta_1 = 1 \beta_2 = 2$				$\beta_1 = 1 \beta_2 = 3$				$\beta_1 = 1 \beta_2 = 4$			
		$\hat{\beta}_1$	$(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1)$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	$\hat{\beta}_1$	$(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1)$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	$\hat{\beta}_1$	$(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1)$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$
0,1	Média	1,000	1,000	0,087	0,074	1,000	2,000	0,086	0,074	1,000	3,000	0,086	0,074
	Desv padrão	0,001	0,003	0,065	0,046	0,001	0,003	0,064	0,046	0,001	0,003	0,064	0,045
	Vício	-1,8E-05	6,3E-05	-0,013	-0,026	-2,4E-05	2,4E-05	-0,014	-0,026	4,7E-06	2,7E-05	-0,014	-0,026
	EQM	1,3E-06	9,6E-06	0,004	0,003	1,4E-06	9,5E-06	0,004	0,003	1,3E-06	9,1E-06	0,004	0,003
	CV	0,001	0,003	0,744	0,626	0,001	0,002	0,744	0,630	0,001	0,001	0,746	0,616
0,2	Média	1,000	1,000	0,189	0,173	1,000	2,000	0,187	0,172	1,000	3,000	0,188	0,172
	Desv padrão	0,002	0,005	0,064	0,049	0,002	0,005	0,065	0,050	0,002	0,005	0,065	0,050
	Vício	7,2E-06	4,6E-05	-0,011	-0,027	-2,0E-05	8,7E-05	-0,013	-0,028	1,1E-05	-5,6E-05	-0,012	-0,028
	EQM	3,8E-06	2,2E-05	0,004	0,003	3,7E-06	2,2E-05	0,004	0,003	3,8E-06	2,2E-05	0,004	0,003
	CV	0,002	0,005	0,336	0,287	0,002	0,002	0,346	0,292	0,002	0,002	0,345	0,293
0,3	Média	1,000	1,000	0,290	0,272	1,000	2,000	0,291	0,272	1,000	3,000	0,290	0,272
	Desv padrão	0,004	0,008	0,066	0,050	0,003	0,008	0,065	0,049	0,004	0,008	0,065	0,050
	Vício	-2,1E-05	1,4E-04	-0,010	-0,028	2,2E-05	-2,0E-05	-0,009	-0,028	1,6E-06	8,7E-05	-0,010	-0,028
	EQM	1,2E-05	5,7E-05	0,004	0,003	1,2E-05	5,7E-05	0,004	0,003	1,2E-05	5,9E-05	0,004	0,003
	CV	0,004	0,008	0,226	0,182	0,003	0,004	0,223	0,181	0,004	0,003	0,225	0,182
0,4	Média	1,000	1,000	0,398	0,372	1,000	2,000	0,397	0,371	1,000	3,000	0,399	0,372
	Desv padrão	0,007	0,013	0,065	0,047	0,007	0,013	0,067	0,047	0,007	0,013	0,067	0,047
	Vício	2,4E-04	-4,9E-04	-0,002	-0,028	-3,9E-05	1,8E-04	-0,003	-0,029	2,9E-05	-3,0E-05	-0,001	-0,028
	EQM	5,3E-05	1,8E-04	0,004	0,003	5,3E-05	1,7E-04	0,004	0,003	5,2E-05	1,7E-04	0,004	0,003
	CV	0,007	0,013	0,162	0,126	0,007	0,007	0,168	0,126	0,007	0,004	0,167	0,127

Tabela 3.7: Resultados da estimação do Ponto de mudança no Modelo 3 quando  $\lambda = 0,5$ ;  $T=300$ .

	<b>Estatísticas</b>	$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2$	$\beta_1 = 1, \beta_2 = 4$
0,1	<b>Média</b>	150,45	150,49
	<b>Desv padrão</b>	1,72	0,70
	<b>Vício</b>	0,45	0,49
	<b>% Acertos <math>t_0=150</math></b>	23,0 %	48,2 %
0,4	<b>Média</b>	150,53	150,45
	<b>Desv padrão</b>	1,89	0,77
	<b>Vício</b>	0,53	0,45
	<b>% Acertos <math>t_0=150</math></b>	19,8 %	46,0 %

Tabela 3.8: Resultados da estimação do Modelo 3:  $y_t = \mu_1 + \beta t + (\beta_2 - \beta_1)DT_t + X_t$ ; ARFIMA  $(0,d,0)$  com uma quebra estrutural, quando o ponto de mudança é desconhecido.  $T=300$ ,  $\lambda = 0,50$ ,  $\mu_1 = 0$ .

<b>d</b>	<b>Estatísticas</b>	$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2$				$\beta_1 = 1, \beta_2 = 4$			
		$\hat{\beta}_1$	$(\hat{\beta}_2 - \beta_1)$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	$\hat{\beta}_1$	$(\hat{\beta}_2 - \beta_1)$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$
<b>0,1</b>	<b>Média</b>	1,001	1,001	0,185	0,177	1,004	3,004	0,212	0,205
	<b>Desv padrão</b>	0,005	0,006	0,103	0,099	0,006	0,007	0,144	0,139
	<b>Vício</b>	0,001	0,001	0,085	0,077	0,004	0,004	0,112	0,105
	<b>EQM</b>	2,61E-05	3,80E-05	0,018	0,016	5,37E-05	6,47E-05	0,033	0,030
	<b>CV</b>	0,005	0,006	0,557	0,563	0,006	0,002	0,678	0,675
<b>0,4</b>	<b>Média</b>	1,002	1,001	0,433	0,399	1,004	3,003	0,453	0,414
	<b>Desv padrão</b>	0,008	0,014	0,073	0,053	0,009	0,015	0,085	0,055
	<b>Vício</b>	1,004	0,001	0,033	-0,001	0,004	0,003	0,053	0,014
	<b>EQM</b>	1,007	1,97E-04	0,006	0,003	1,06E-04	2,34E-04	0,010	0,003
	<b>CV</b>	0,008	0,014	0,169	0,132	0,009	0,005	0,187	0,132

### 3.5 Resultados das simulações do Modelo 4

Em algumas situações, algumas séries temporais apresentam mudanças na componente da variância a partir de um instante do tempo. O modelo 4 definido em (2.18) é uma alternativa na modelagem destas séries. A Figura 3.10 mostra o modelo simulado.

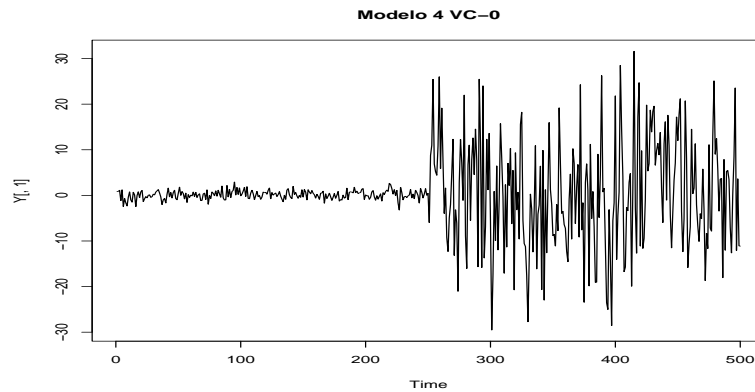


Figura 3.10: Modelo 4, com  $d=0,10$ ;  $W_v = 10$  e  $\mu_1 = 0$

A Tabela 3.9 apresenta os resultados da estimação deste modelo. Pode-se observar que a o estimador do parâmetro  $W_v$  apresenta uma distribuição com média centrada em torno do valor zero e que a variabilidade da distribuição do estimador aumenta na medida que o valor de  $\mathbf{d}$  se aproxima da região de não estacionariedade (ver Figura 3.11).

O vício do estimador do parâmetro de integração fracionária apresenta uma distribuição que não está centrada em torno do valor zero e sua variabilidade diminui quando o valor real de  $\mathbf{d}$  está próximo da região de não estacionariedade. O estimador de máxima verossimilhança apresenta um vício menor em comparação com o estimador GPH (ver Figuras 3.12 e 3.13).

Tabela 3.9: Resultados da estimação do Modelo 4,  $T=300$ ,  $\lambda = 0,50$ ,  $X_t$  ARFIMA  $(0, d, 0)$  com uma quebra estrutural na variância.

d	Estatísticas	$W_v = 10$			$W_v = 50$			$W_v = 100$		
		$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	$\hat{W}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	$\hat{W}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	$\hat{W}$
0,1	Média	0,087	0,091	9,993	0,083	0,086	49,977	0,083	0,086	99,828
	Desv Padrão	0,057	0,047	0,705	0,075	0,060	4,288	0,076	0,060	8,446
	Vício	-0,013	-0,009	-0,007	-0,017	-0,014	-0,023	-0,017	-0,014	-0,172
	EQM	0,003	0,002	0,497	0,006	0,004	18,387	0,006	0,004	71,365
	CV	0,654	0,523	0,071	0,906	0,702	0,086	0,924	0,705	0,085
0,2	Média	0,175	0,189	10,008	0,171	0,182	50,020	0,175	0,184	100,302
	Desv Padrão	0,058	0,051	0,809	0,076	0,067	4,933	0,075	0,067	9,644
	Vício	-0,025	-0,011	0,008	-0,029	-0,018	0,020	-0,025	-0,016	0,302
	EQM	0,004	0,003	0,655	0,007	0,005	24,332	0,006	0,005	93,089
	CV	0,330	0,268	0,081	0,441	0,367	0,099	0,428	0,362	0,096
0,3	Média	0,267	0,292	10,047	0,265	0,287	50,351	0,263	0,286	100,537
	Desv Padrão	0,057	0,050	1,222	0,076	0,065	6,846	0,076	0,066	13,556
	Vício	-0,033	-0,008	0,047	-0,035	-0,013	0,351	-0,037	-0,014	0,537
	EQM	0,004	0,003	1,496	0,007	0,004	46,984	0,007	0,005	184,057
	CV	0,214	0,170	0,122	0,286	0,226	0,136	0,291	0,232	0,135
0,4	Média	0,361	0,396	10,177	0,362	0,391	50,807	0,363	0,393	101,689
	Desv Padrão	0,058	0,048	2,112	0,077	0,062	10,835	0,076	0,060	21,457
	Vício	-0,039	-0,004	0,177	-0,038	-0,009	0,807	-0,037	-0,007	1,689
	EQM	0,005	0,002	4,494	0,007	0,004	118,044	0,007	0,004	463,273
	CV	0,162	0,121	0,208	0,214	0,158	0,213	0,209	0,153	0,211



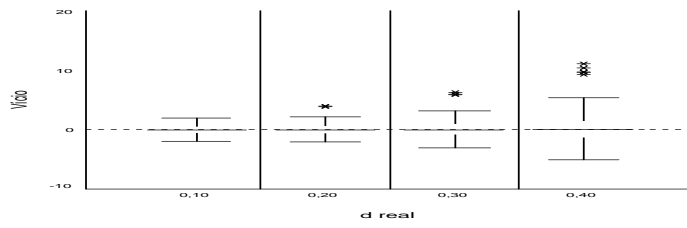


Figura 3.11: Vício na estimação de  $W_v$  no modelo 4, para diferentes valores de  $\mathbf{d}$  e ponto de mudança conhecido.  $W_v = 10$

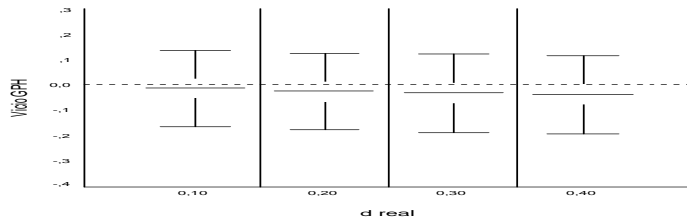


Figura 3.12: Vício na estimação do parâmetro  $\mathbf{d}$  no modelo 4, pelo método GPH e ponto de mudança conhecido.  $W_v = 10$

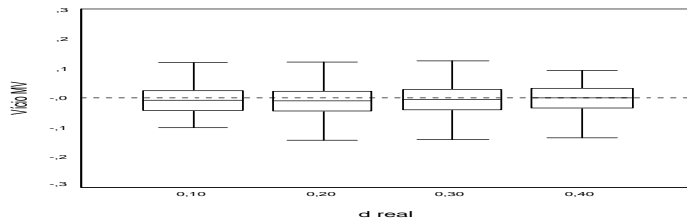


Figura 3.13: Vício na estimação do parâmetro  $\mathbf{d}$  no modelo 4, pelo método MV e ponto de mudança conhecido.  $W_v = 10$

### 3.6 Resultados das Simulações do Modelo 5.

O modelo 5 apresentado em (2.19) é uma mistura do modelo 1 e do modelo 4, onde a série além de apresentar uma quebra estrutural no nível num instante  $t_0$ , também apresenta uma quebra estrutural na variância num instante  $\tau_0$  determinado. A Figura 3.14 mostra um exemplo deste modelo simulado.

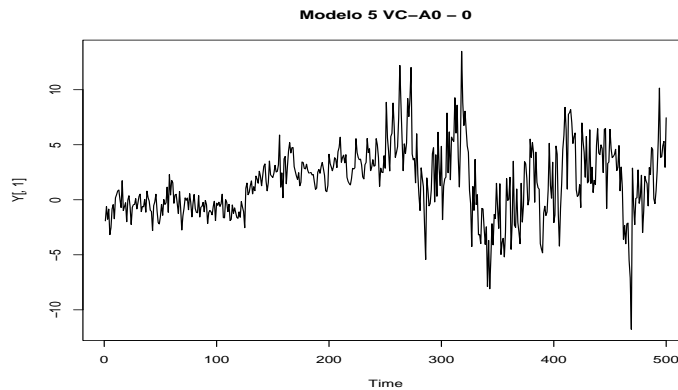


Figura 3.14: Modelo 5, com  $d=0,40$ ;  $W_v = 2$  e  $\mu_1 = 0$   $\mu_2 = 3$ ,  $t_0 = 125$ ;  $\tau_0=250$

Os resultados obtidos na estimação deste modelo são apresentados na Tabela 3.10. A Figura 3.15 mostra que a distribuição do vício do estimador de  $W_v$  esta centrada em torno de -0.5. A variabilidade desta distribuição apresenta um comportamento semelhante ao modelo 4, isto é, na medida em que o valor de  $\mathbf{d}$  vai se aproximando da região de não estacionariedade, a variabilidade aumenta.

A média da distribuição do vício do estimador de máxima verossimilhança de  $\mathbf{d}$  não está centrada em torno de zero (ver Figura 3.16), observando-se uma diminuição na variabilidade na medida em que o valor de  $\mathbf{d}$  vai se aproximando da região de não estacionariedade (ver Tabela 3.10).

Observa-se na Figura 3.17 que a distribuição do vício do estimador de  $(\mu_2 - \mu_1)$

mostra características semelhantes ao estimador do mesmo parâmetro obtido no modelo 1. A Figura 3.17 mostra também que essa distribuição está centrada em torno do valor zero, apresentando um aumento na variabilidade na medida que o valor de  $\mathbf{d}$  vai se aproximando da região de não estacionariedade.

Tabela 3.10: Resultados da estimação do Modelo 5:  $X_t$  ARFIMA  $(0, d, 0)$  com uma quebra estrutural conhecida na variância e no nível.  $T=500$ ,  $\lambda = 0, 25$ ,  $\tau_0=0,50T$  e  $\mu_1=0$ .

$d$	Estatísticas	$\mu_2 = 1, W_v = 2$				$\mu_2 = 2, W_v = 2$				$\mu_2 = 3, W_v = 2$			
		$\hat{\mu}_2$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	$\hat{W}_v$	$\hat{\beta}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	$\hat{W}_v$	$\hat{\beta}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{MV}$	$\hat{W}_v$
0,1	Média	1,002	0,087	0,086	1,517	1,996	0,088	0,088	1,517	2,996	0,087	0,088	1,521
	Desv. Padrão	0,226	0,053	0,045	0,196	0,225	0,052	0,045	0,200	0,227	0,052	0,045	0,195
	Vício	0,002	-0,013	-0,014	-0,483	-0,004	0,012	0,012	0,483	-0,004	-0,001	-1,430	0,479
	EQM	0,051	0,003	0,002	0,271	0,051	0,003	0,002	0,273	0,052	0,003	2,046	0,267
0,2	CV	0,226	0,608	0,521	0,129	0,113	0,592	0,507	0,132	0,076	0,596	0,509	0,128
	Média	0,995	0,177	0,186	1,504	2,002	0,177	0,188	1,503	3,000	0,178	0,187	1,497
	Desv. Padrão	0,408	0,052	0,046	0,222	0,407	0,053	0,047	0,224	0,402	0,053	0,047	0,218
	Vício	-0,005	-0,023	-0,014	-0,496	0,002	0,023	0,012	0,497	-0,000	0,022	0,013	0,503
0,3	EQM	0,167	0,003	0,002	0,296	0,165	0,003	0,002	0,298	0,161	0,003	0,002	0,300
	CV	0,410	0,294	0,248	0,148	0,203	0,299	0,248	0,149	0,134	0,299	0,251	0,145
	Média	1,002	0,270	0,289	1,458	1,989	0,270	0,288	1,454	3,008	0,269	0,288	1,456
	Desv. Padrão	0,803	0,052	0,046	0,296	0,804	0,053	0,045	0,289	0,808	0,053	0,046	0,301
0,4	Vício	0,002	-0,030	-0,011	-0,542	-0,011	0,030	0,012	0,546	0,008	0,031	0,012	0,544
	EQM	0,644	0,004	0,002	0,382	0,647	0,004	0,002	0,381	0,653	0,004	0,002	0,386
	CV	0,801	0,192	0,159	0,203	0,404	0,195	0,157	0,198	0,269	0,197	0,160	0,206
	Média	0,977	0,366	0,392	1,315	1,992	0,366	0,391	1,315	2,993	0,365	0,390	1,308
0,4	Desv. Padrão	1,832	0,053	0,043	0,466	1,807	0,053	0,043	0,475	1,780	0,053	0,043	0,471
	Vício	-0,023	-0,034	-0,008	-0,685	-0,008	0,034	0,009	0,685	-0,007	0,035	0,010	0,692
	EQM	3,358	0,004	0,002	0,686	3,265	0,004	0,002	0,695	3,167	0,004	0,002	0,701
	CV	1,875	0,146	0,111	0,354	0,907	0,144	0,111	0,361	0,595	0,144	0,110	0,360

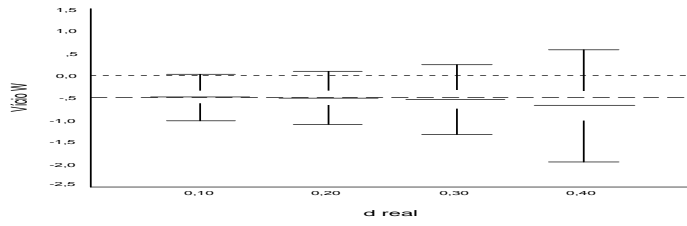


Figura 3.15: Vício na estimação do parâmetro  $\mathbf{W}_v$  no modelo 5, com  $W_v = 2$ ,  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$

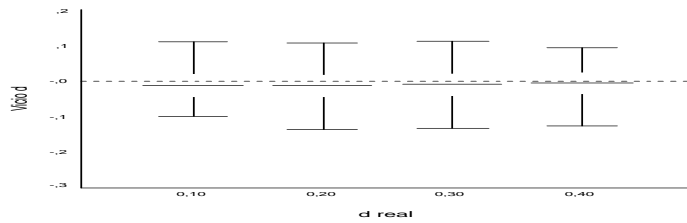


Figura 3.16: Vício na estimação do parâmetro  $\mathbf{d}$  no modelo 5, pelo método MV com  $W_v = 2$ ,  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$

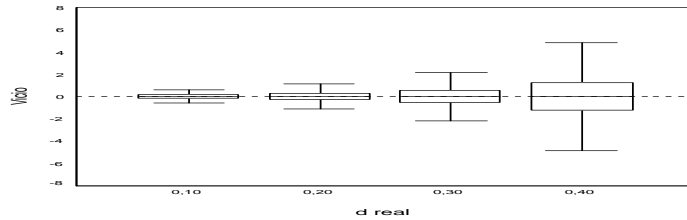


Figura 3.17: Vício na estimação do parâmetro  $(\mu_2 - \mu_1)$  no modelo 5, pelo método OLS com  $W_v = 2$ ,  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$

# Capítulo 4

## Aplicações

Neste capítulo, apresentamos os resultados de aplicação da metodologia desenvolvida nesta dissertação a duas séries de dados correspondentes ao Banco Central do Brasil. Nosso objetivo é mostrar que essa metodologia pode ser usada em situações práticas. Inicialmente será feita uma descrição destas séries e, posteriormente será aplicada a teoria desenvolvida no presente trabalho.

### 4.1 Série 1 :“Empréstimos - Sistema Financeiro ao Setor Privado - Habitação”

A Figura 1 apresenta a série de dados Empréstimos - Sistema Financeiro ao Setor Privado - Habitação no período de julho de 1994 até junho de 2004. A série apresenta um comportamento decrescente no longo do período e percebe-se a existência de uma quebra estrutural no instante de tempo  $t_0 = 83$ . A existência desta quebra estrutural que pode ser observada através da Figura 1 foi verificada utilizando-se o pacote *strucchange* do *software* R.

A Figura 4.1, que mostra a função de autocorrelação da série, sugere um pro-

cesso não estacionário devido a presença de uma quebra estrutural pelo que consideramos adequado fazer uso do Modelo 2 na modelagem desta série. Numa primeira etapa, foram calculadas as estimativas de  $\beta$ ,  $\mu_1$  e  $(\mu_2 - \mu_1)$  que são apresentadas na Tabela 4.1.

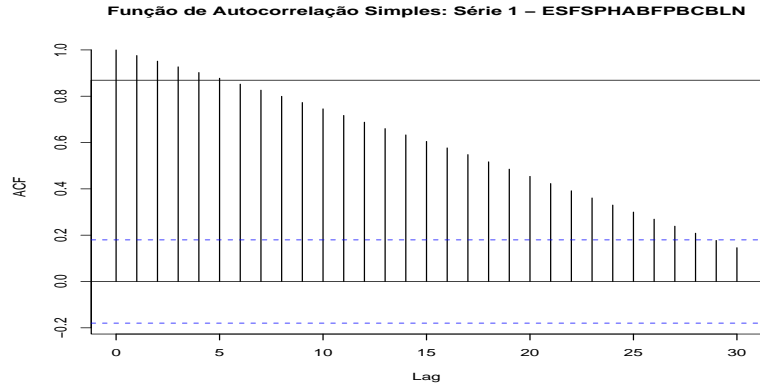


Figura 4.1: Função de autocorrelação da série 1: Empréstimos - Sistema Financeiro ao Setor Privado - Habitação

Tabela 4.1: Estimativas dos parâmetros do Modelo 2, obtidas na primeira etapa da análise na série 1

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	P-valor
$\beta$	- 1,353978	0,02577	2,E-16
$\mu_1$	10,491772	0,01417	2,E-16
$\mu_2 - \mu_1$	-0,4189	0,6431	2,E-16

O correlograma dos resíduos indica um comportamento de longa dependência (ver Figura 4.2 (A)). Assim, foi feita a estimação do parâmetro de integração fracionária e a posterior integração da série. A Tabela 4.2 apresenta os resultados da estimação do parâmetro de integração fracionária pelo método GPH, MV (assumindo um processo ARFIMA(1,d,0) ) e da componente AR(1).

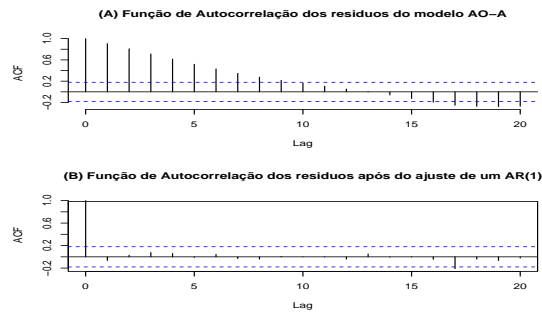


Figura 4.2: Gráficos correspondentes a análise da série 1: (A) Gráfico da função de autocorrelação dos resíduos obtidos após o ajuste do modelo 2; (B) Gráfico da função de autocorrelação dos resíduos do modelo 2 após a modelagem de um AR(1).

Tabela 4.2: Estimativas do parâmetro  $d$  e  $\phi$  na série 1 após a análise de regressão

Método	Valor	Erro Padrão
$d_{GPH}$	0,7833	0,1876
$d_{MV}$	0,4989	1,62E-06
$\phi$	0,5756	0,0754

A metodologia desenvolvida mostra que o processo real é um ARFIMA(1,d,0) que apresenta uma tendência determinística com uma quebra estrutural segundo o modelo 2. O modelo ajustado é como segue:

$$\hat{Y}_t = 10,4918 - 1,354t - 0,4189DU_t + X_t$$

onde,

$$DU_t = \begin{cases} 0 & ; t < 83 \\ 1 & ; t \geq 83 \end{cases}$$

$$(1 - 0,5756L)(1 - L)^{0,49}X_t = \xi_t$$



## 4.2 Série 2: Contribuição - Finsocial/Cofins - Total - Receita Líquida

A Figura 2 da página 13, representa a segunda série de dados correspondente à Contribuição - Finsocial/Cofins -Total-Receita Líquida, com período mensal desde julho de 1994 até junho de 2004. Nesta série, percebe-se uma quebra estrutural no nível no instante de tempo  $t_0 = 56$  correspondente a fevereiro de 1999. A existência desta quebra foi verificada fazendo-se uso do pacote *strucchange* do *software* R. Pelas características que esta série apresenta, consideramos adequado usar o modelo 1 na modelagem. Numa primeira etapa, foram calculadas as estimativas de  $\mu_1$  e  $(\mu_2 - \mu_1)$  apresentadas na Tabela 4.3 e os resíduos. Sob esses resíduos foi feita a estimação do parâmetro de integração fracionária (ver Tabela 4.4) pelo método GPH e de máxima verossimilhança. Seguidamente, foi feita a integração da série de resíduos. A Figura 4.3 mostra as funções de autocorrelação simples e parcial da série de resíduos integrada. Nestas podemos observar que o processo é semelhante ao ARFIMA(0,d,0) com uma quebra estrutural no nível. O modelo ajustado é como segue:

$$\hat{Y}_t = 6,9653 + 0,50196DU_t + X_t$$

onde:

$$DU_t = \begin{cases} 0 ; & t < 56 \\ 1 ; & t \geq 56 \end{cases}$$

$$(1 - L)^{0,30}X_t = \xi_t$$

Tabela 4.3: Estimativas dos parâmetros do Modelo 1 ajustado na série 2 na primeira etapa da modelagem

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão
$\mu_1$	6,96528	0,01166
$\mu_2 - \mu_1$	0,50196	0,01602

Tabela 4.4: Estimativas do parâmetro  $d$  na série de resíduos obtidos após do ajuste do Modelo 1

Método	$\hat{d}$	Erro Padrão
GPH	0,1892739	0,1876507
MV	0,3087767	1,367105e-06

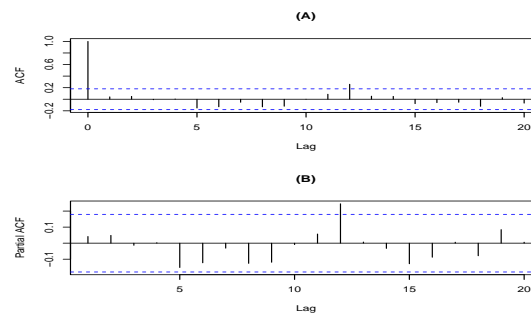


Figura 4.3: Gráficos correspondentes a análise da série 2: (A) Gráfico da função de autocorrelação simples da série resíduos integrados obtida após o ajuste do Modelo 1; (B) Gráfico de autocorrelação parcial da série de resíduos integrados obtida após o ajuste do Modelo 1.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

### 5.1 Conclusões

A metodologia apresentada neste trabalho, é uma alternativa boa na estimação de processos ARFIMA(0,d,0) que apresentam quebras estruturais na tendência ou na variância. Observa-se que as estimativas dos parâmetros da função determinística, quando o ponto de mudança é conhecido apresentam uma distribuição do vício centrada em torno de zero, e que a variabilidade destes aumenta quando o valor de  $d$  vai se aproximando da região de não estacionariedade. Nos casos onde o ponto de mudança é desconhecido, as estimativas dos parâmetros da função  $f(t)$  apresentam as mesmas características que o caso onde o ponto de mudança é conhecido, mas isso não acontece com as estimativas do parâmetro de integração fracionária quando a quebra é apresentada numa tendência crescente (Modelo 3).

As estimativas obtidas nos modelos com quebra estrutural na tendência, usando a metodologia proposta neste trabalho ( $\hat{d}_{GPH_1}$ ) ficam melhores em relação aos resultados onde aquela não aplicada ( $\hat{d}_{GPH_2}$ ). Além disso, se observa que existe uma

relação direta entre o vício da estimativa do parâmetro de integração fracionária e o tamanho de salto quando é calculada a estimativa de  $\mathbf{d}$  sem considerar a quebra estrutural na modelagem.

Referente aos modelos com mudança na variância, as características dos parâmetros da parte determinística do modelo, são similares aquelas observadas nos modelos com quebra no nível mas as estimativas da distribuição do vício do parâmetro de integração fracionária não estão mais centradas em torno de zero. O estimador de máxima verossimilhança é mais consistente que o estimador GPH nesta classe de modelos. O comportamento da variabilidade do parâmetro de integração fracionária é similar aquele apresentado nos modelos com quebras na tendência.

## 5.2 Extensões

As possíveis extensões ao presente trabalho são apresentadas a seguir:

- Estender o estudo para processos não estacionários ( $d > 0.5$ ).
- Modelagem de quebras estruturais em Modelos ARFIMA  $(p,d,q)$  que apresentam erros GARCH $(p,q)$ .
- Estudo de quebras estruturais em Modelos FIGARCH  $(P,D,Q)$ .

# Apêndice A

## Apêndice

### A.1 Algoritmo para a simulação de processos AR-FIMA (0,d,0)

Os passos para a simulação de processos ARFIMA (0,d,0), considerando um ruído branco gaussiano, são os seguintes:

1. Gerar uma variável aleatória  $X_0$  com distribuição  $N(0,1)$ ;
2. Calcular os coeficientes  $\phi_{tt}$  e  $\phi_{tj}$  usando:

$$\phi_{tt} = \frac{d}{t-d} \quad \text{e} \quad \phi_{tj} = \phi_{t-1,j} - \phi_{tt}\phi_{t-1,t-j}$$

para  $j = 1, 2, \dots, t-1$  e  $t = 1, 2, \dots, T$ ;

3. Calcular a média  $m_t$  e a variância  $\nu_t$  por

$$m_t = \sum_{j=1}^t \phi_{tj} X_{tj}$$
$$\nu_t = (1 - \phi_{tt}^2) \nu_{t-1}, \quad \nu_0 = \sigma^2 = 1;$$

4. Gerar uma variável aleatória  $X_t$  com distribuição  $N(m_t, \nu_t)$ ;
5. Repetir (2), (3) e (4) para  $t = 1, 2, \dots, T-1$ ;

Maiores detalhes sobre o processo de simulação do modelos ARFIMA podem ser encontrados em Reisen (1995) e Hosking (1982, 1984).

## A.2 Modelo 1 AO-0 : Gráficos

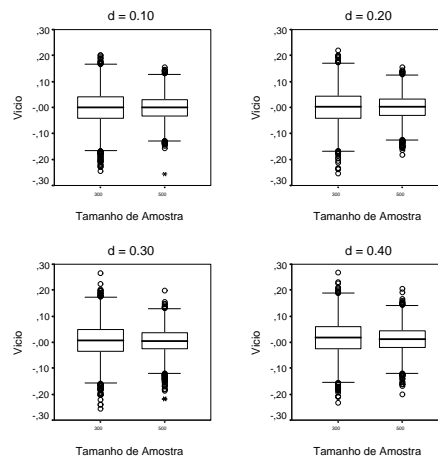


Figura A.1: Vício na estimação do parâmetro  $d$ , considerando a presença de quebra estrutural quando  $\lambda = 0,5$ ;  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$

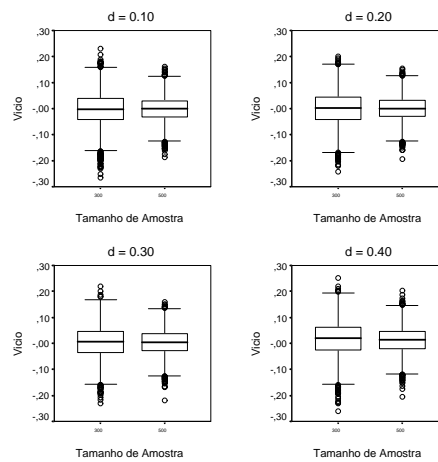


Figura A.2: Vício na estimação do parâmetro  $d$ , considerando a presença de quebra estrutural quando  $\lambda = 0,5$ ;  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$

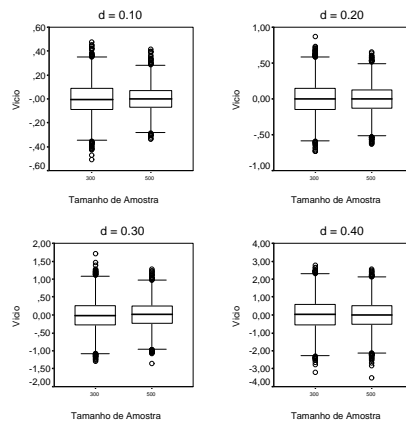


Figura A.3: Vício na estimação do parâmetro  $(\mu_2 - \mu_1)$  considerando a presença de quebra estrutural quando  $\lambda = 0,5$ ;  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$

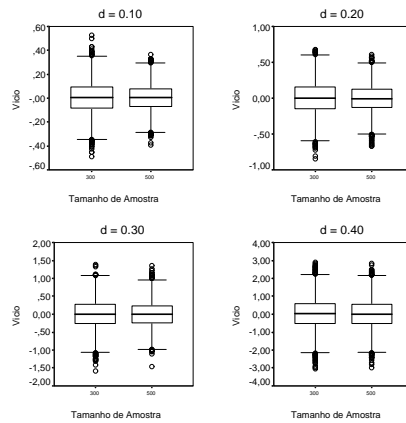


Figura A.4: Vício na estimação do parâmetro  $(\mu_2 - \mu_1)$  considerando a presença de quebra estrutural quando  $\lambda = 0,5$ ;  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$



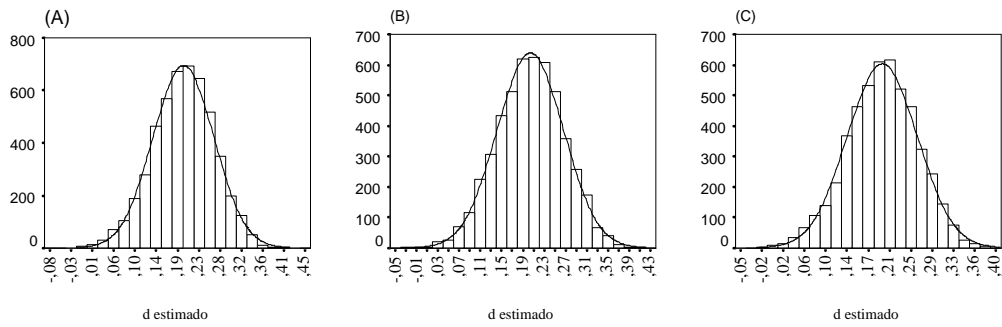


Figura A.5: Estimativas do parâmetro  $d = 0,20$  pelo método  $GPH_1$  quando o processo possui uma quebra estrutural em  $\lambda = 0,5$ ,  $T = 300$  : (A)  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (B)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (C)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$

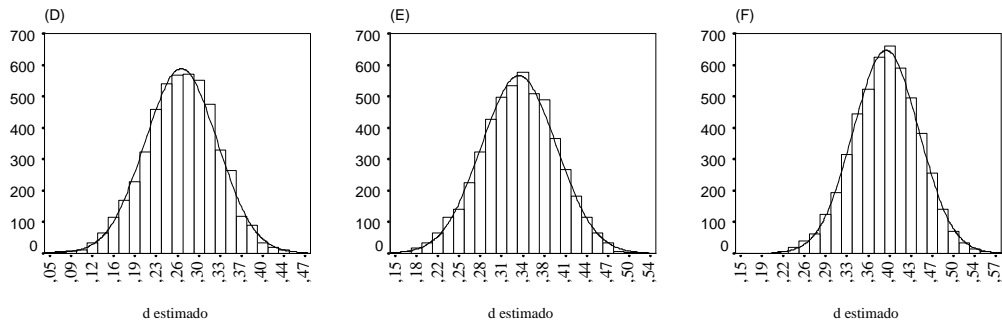


Figura A.6: Estimativas do parâmetro  $d = 0,20$  pelo método  $GPH_2$  quando o processo possui uma quebra estrutural em  $\lambda = 0,5$ ,  $T = 300$  : (D)  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (E)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (F)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$

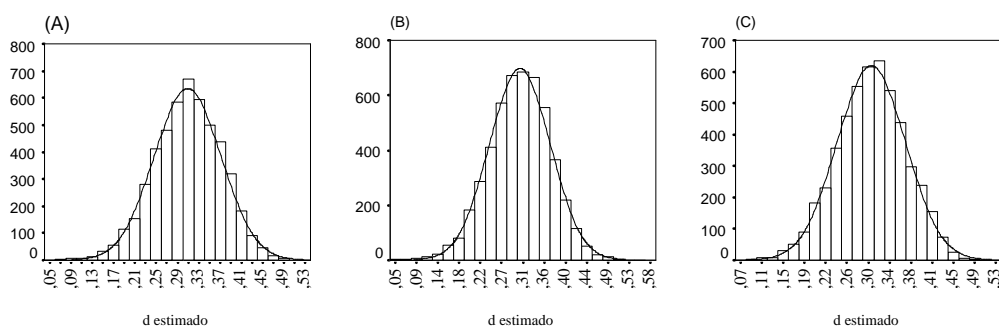


Figura A.7: Estimativas do parâmetro  $d = 0,30$  pelo método  $GPH_1$  quando o processo possui uma quebra estrutural em  $\lambda = 0,5$ ,  $T = 300$  : (A)  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$  ;(B)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$  ;(C)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$

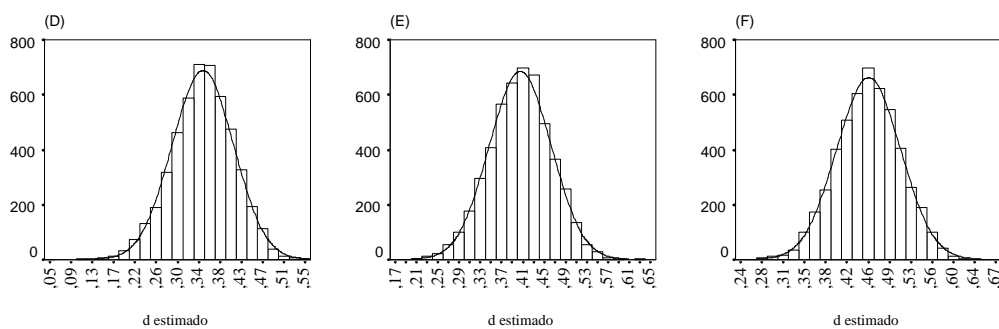


Figura A.8: Estimativas do parâmetro  $d = 0,30$  pelo método  $GPH_2$  quando o processo possui uma quebra estrutural em  $\lambda = 0,5$ ,  $T = 300$  : (D)  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$  ;(E)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$  ;(F)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$

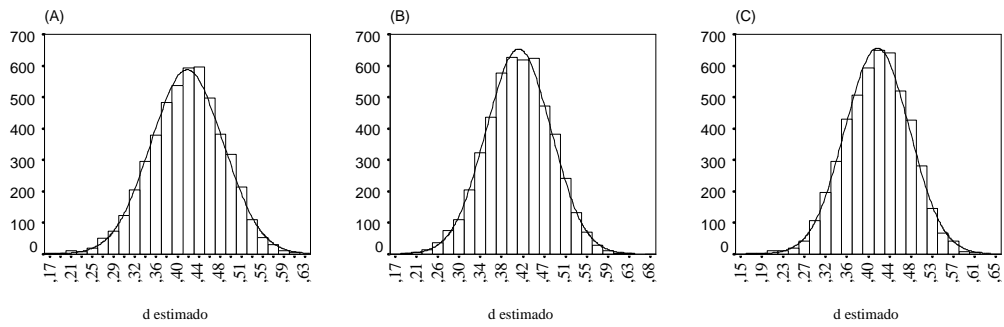


Figura A.9: Estimativas do parâmetro  $d = 0,40$  pelo método  $GPH_1$  quando o processo possui uma quebra estrutural em  $\lambda = 0,5$ ,  $T = 300$  : (A)  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (B)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (C)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$

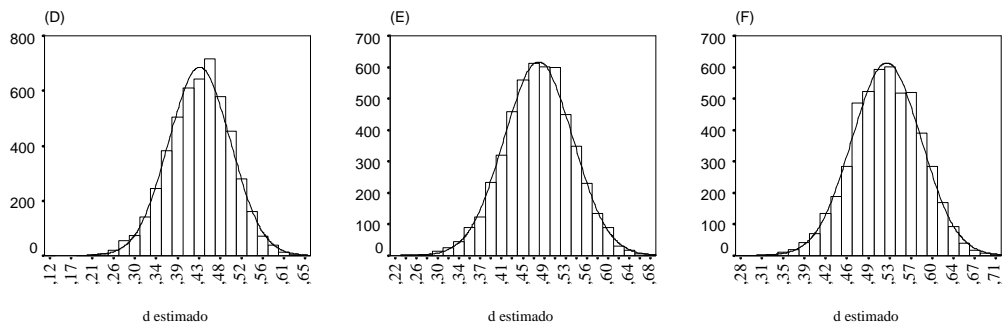


Figura A.10: Estimativas do parâmetro  $d = 0,40$  pelo método  $GPH_2$  quando o processo possui uma quebra estrutural em  $\lambda = 0,5$ ;  $T = 300$  : (D)  $(\mu_2 - \mu_1) = 1$ ; (E)  $(\mu_2 - \mu_1) = 2$ ; (F)  $(\mu_2 - \mu_1) = 3$

# Referências Bibliográficas

- [01] AGIAKLOGLOU, C. P. NEWBOLD (1993) *Bias in an estimator of the fractional difference parameter*. Journal of Time Series Analysis, 14 235 - 246.
- [02] ANDENSTEDT, R. K. (1974) *On large sample estimation for the mean of a stationary random sequence*. Annals of Statistics 2, 259-72
- [03] BAI, J., PERRON, P. (1998) *Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes*. Econometrica, 66, 47-78.
- [04] BAILLIE, Richard T. (1996) *Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics*. Journal of Econometrics, Vol.73, n° 1, pp. 5-59.
- [05] BERAN, J. (1994) *Statistics for Long-Memory Processes*. New York, Chapman and Hall.
- [06] BLOOMFIELD, P. (1973) *An exponential model for the spectrum of a scalar time series*. Biometrika, 60, 217-226.
- [07] BLOOMFIELD, P. (1976) *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*. New York, Wiley.
- [08] BROCKWELL, P.J. AND DAVIS, R.A. (1991) *Time Series: Theory and Methods*. Berlin, Springer Verlag

- [09] CHERNOFF, H., ZACKS, S. (1964) *Estimating the current mean of a normal distribution which is subject to changes in time*. The Annals of Mathematical Statistics 35, 999-1018.
- [10] CHENG, G., ABRAHAM, B AND PEIRIS, S. (1994) *Lag window estimation of the degree of differencing in fractionally integrated time series models*. Journal of Time Series Analysis 15, 473-487.
- [11] CHOW, G. (1960) *Tests of the equality between two sets of coefficients in two linear regressions*, Econometrica, 65, 561-605.
- [12] CHUNG, C.F. (1994) *A note on calculating the autocovariances of the fractionally integrated ARMA models*. Economics Letters, 18, 791-806.
- [13] DALHLAUS, R. (1989) *Efficient parameter estimation for self-similar processes*. The Annals of Statistics, 17, 1749-1766
- [14] ENGLE, R. F., HENDRY, D. F., AND RICHARD, J. F. (1983) *Exogeneity*. Econometrica 51, 277-304.
- [15] FOX, R. AND TAQQU, M.S. (1986) *Large-sample properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series*. Annals of Statistics, 14, 221-238.
- [16] GARDNER, L.A. (1969) *On detecting changes in the mean of normal variates*. The Annals of Mathematical Statistics 40, 116-126.
- [17] GIL-ALANA, L.A. (2004) *A joint test of fractional integration and structural breaks at a known period of time*. Journal of Time Series Analysis, 25, No.5 691-700.

- [18] GEWEKE, J., PORTER-HUDAK, S. (1983) *The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models*. Journal of Time Series Analysis, 4, 15-39.
- [19] GRANGER,CW.J.. (1966) *The Typical spectral shape of an economic variable*. Econometrica, 34, 150-161 .
- [20] GRANGER,CW.J.. (1980) *Long-memory relationships and the aggregation of dynamic models*.Journal of Econometrics, 14, 227-238. .
- [21] GRANGER,CW.J.. (1990) *Aggregation of time series variables: a survey*. In T. Baker and M.H. Pesaran (eds.). Disaggregation in Econometric Modelling. London, Routledge.
- [22] GRANGER,CW.J.AND JOYEUX, R. (1980) *An introduction to Long-memory Time Series Models and Fractional Differencing*.Journal of Time Series Analysis, 1, 15-29.
- [23] HANSEN, B.E. (1992) *Testing for parameter instability in linear models*. Journal of Policy Modeling 14, 517-533.
- [24] HASLETT, J. AND RAFTERY, A.E. (1989) *Space-time modelling with long-memory dependence: Assessing Ireland's wind power resource*. Journal of the Royal Statistical Society C 38, 1-50.
- [25] HASSLER, U. (1993) *Regression of spectral estimators with fractionally integrated time series*. Journal of Time Series Analysis 14, 369-380.
- [26] JANDHYALA,V.K., MACNEILL, I.B. (1989) *On testing for the constancy of coefficients under random walk and change-point alternatives*. Econometric Theory 8, 501-517.

- [27] KANDER, Z., ZACKS, S. (1966) *Test procedures for possible changes in parameters of statistical distributions occurring at unknown time points*. The Annals of Mathematical Statistics 37, 1196-1210.
- [28] HOSKING, J. R. M. (1981) *Fractional Differencing*. Biometrika, 68, 165-176.
- [29] HURST, H. E. (1951) *Methods for storage capacity of reservoirs*. Trans. Am. Soc. Civil Engineers, 116. 770-799.
- [30] KUAN, Chung-Ming, HSU, Chih-Chiang (1998) *Change-point estimation of fractionally integrated processes*. Journal of time series analysis, vol. 19, n° 6.
- [31] MACNEILL, I.B. (1978) *Properties of sequences of partial sums of polynomial regression residuals with applications to test for change of regression at unknown times*. The Annals of Mathematical Statistics 6, 422-433.
- [32] MANDELBROT, B.B., TAQQU, M.S. (1979) *Robust R/S analysis of long run serial correlation*. In Proceedings of the 42nd Session of International Statistical Institute, Vol. 2, 69-99.
- [33] NADLER, J., ROBBINS, N.B. (1971) *Some characteristics of Page's two-sided procedure for detecting a change in a location parameter*. The Annals of Mathematical Statistics 42, 538-551.
- [34] NYBLOM, J., HARVEY, A.C. (2000) *Test of common stochastic trends*. Econometric Theory 16, 176-199.
- [35] PAGE, E.S. (1955) *A test for a change in a parameter occurring at an unknown point*. Biometrika 42, 523-527.
- [36] PAGE, E.S. (1957) *On problems in which a change in a parameter occurs at an unknown point*. Biometrika 44, 248- 252.

- [37] PERRON, P. (1991) *A test for a changes in a polynomial trend function for dynamic time series*. Research Memorandum No. 363, Econometric Research Program, Princeton University.
- [38] PERRON, P. (2005) *Dealing with Structural Breaks*. Paper prepared for the Palgrave Handbook of Econometrics, Vol 1: Econometric Theory.
- [39] PALMA, Wilfredo. (1999) *Change points in ARFIMA models*. Catholic University.
- [40] PRIESTLEY, M.B.. (1981) *Spectral Analysis and Time Series*. London Academic Press.
- [41] PONS, E., SURIÑACHM J. (1999) *Una extensión de la regresión propuesta por Geweke y Porter Hudak para la estimación del orden de diferenciación en Modelos ARFIMA*, Documento de Trabajo Universitat de Barcelona, Setiembre 1999
- [42] PFEILSTICKER, Nizam de Abreu, TOSCANO, Ela Mercedes M. de, REISEN, Valdério A. (2003). *Modelos ARFIMA-FIGARCH: Um Estudo Aplicado*. Departamento de Estatística, UFMG.
- [43] QU, Z. (2004) *Searching for cointegration in a dynamic system*. Manuscript, Departament of Economics, Boston University.
- [44] QUANDT, R.E. (1960) *Test of the hypotesis that a linear regression system obeys two separate regimes*. Journal of the American Statistical Association 55, 324-330.
- [45] REISEN, V. A. (1994) *Estimation of the fractional parameter for the ARIMA(p,d,q) model using the smoothed periodogram*. Journal of Time Series Analysis, v.15, p.335-350.



- [46] REISEN, Valdério A. (1995) *ARFIMA - O Modelo ARIMA para d Fracionário*. 6ª ESTE - ABE & SBE, Vitória/ES, Brasil.
- [47] REISEN, V. A., LOPES, S. (1999) *Some simulations and applications of forecasting long memory time series models*. Journal of Statistical Planning and Inference, v.80, p.269-287.
- [48] REISEN, V. A., ABRAHAM, B., TOSCANO, E. M. (2000) *Parametric and Semiparametric Estimations of Stationary Univariate ARFIMA Models*. Brazilian Journal of Probability and Statistics 14, pp. 185-206.
- [49] ROBINSON,P.M. (1978) *Statistical Inference for a random coefficient autoregressive model*. Scandinavian Journal of Statistics 5, 163-168.
- [50] ROBINSON,P.M. (1994a) *Efficient tests of nonstationary hypotheses*. Journal of the American Statistical Association 89, 1420-37
- [51] ROBINSON,P.M. (1994b) *Time series with strong dependence*. In C.A. Sims (ed.), *Advances in Econometrics: Sixth World Congress vol 1*, 47-96. Cambridge, Cambridge University Press.
- [52] ROBINSON,P.M. (1995a) *Log-periodogram regression of time series with long-run dependence*. Annals of Statistics 23, 1048-1072.
- [53] ROBINSON,P.M. (1995b) *Gaussian semiparametric estimation of long range dependence*. Annals of Statistics 23, 1630-1661.
- [54] SIBBERTSEN, Philipp (2002) *Long Memory in Volatilities of German Stock Returns*. Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, Germany.
- [55] SOWELL,F. (1992) *Maximum likelihood of Stationary univariate fractionally integrated time series models*. Journal of Econometrics, 53, 165-188.

- [56] TANG, S.M., MACNEILL, I.B. (1993) *The effect of serial correlation on test for parameter change at unknown time*. Annals of Statistics 21, 552-575.
- [57] TAQQU, M. S. (1975) *Weak convergence to fractional Brownian Motion and to the Rosenblatt Process*. Probability Theory and Related Fields 31, 287 - 302.
- [58] TSAY, R. S. (1988) *Outliers, level shifts and variance changes in time series*. Journal of Forecasting 7, 1-20.
- [59] TAVARES, R. (2004) *Quebra estrutural , Teste ADF, e Diferenciação Fracionária em Séries Financeiras*. Dissertação de Mestrado, ICEX, UFMG
- [60] TOJEIRO, C. A. V., TOSCANO, E. M. M. de, REISEN, Valdério A. (1999). *Testes de Raízes Unitárias no Fenômeno de Longa Dependência*. Departamento de Estatística, UFMG.
- [61] TOSCANO, E. M. M., REISEN, V. A. (2000) *The use of canonical analysis to identify the order of multivariate ARMA models*. Journal of Forecasting, v.19, n.3, p. 441-456.
- [62] YAJIMA, Y. (1985) *On estimation of long-memory time series models*. Australian Journal of Statistics, 27, 303-320.
- [63] YAJIMA, Y. (1988) *On estimation of a Regression Model with Long-Memory Stationary Errors*. The annals of Statistics, Vol 16, No. 2 791-807.
- [64] WHITTLE, P. (1962) *Gaussian Estimation in Stationary Time Series*. Bulletin of the International Statistical Institute, 39, 105-129
- [65] ZEILEIS, Achim, LEISCH, Friedrich, HORNIK, Kurt, KLEIBER, Christian (2002) *strucchange: An R package for testing for structural change in linear regression models*. Journal of Statistical Software, 7(2):1-38.

- [66] ZEILEIS, Achim, KLEIBER, Christian, KRÄMER, Walter, HORNIK, Kurt  
(2003) *Testing and dating of structural changes in practice*. Computational  
Statistics and Data Analysis, 44(1-2): 109-123.