UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

50 desafios em probabilidade

Autores
Gabriel Oliveira Assunção
Flávio Bambirra Gonçalves

Agosto de 2014

Sumário

1 Introdução

Este é um trabalho de iniciação científica, desenvolvido por Gabriel Oliveira Assunção com o apoio do professor Flávio Bambirra Gonçalves, realizado com o apoio financeiro da FAPEMIG que ofertou a bolsa de duração de um ano. Este trabalho foi a primeira parte da bolsa .

O presente material tem como objetivo a elaboração de um material organizado com uma série de exercícios , cada um com a solução completa dos mesmos . Tais exercícios resultaram da tradução do livro, Fifty challenging problems in probability [1].

O presente material oferece um instrumento de estudo para as matérias de Probabilidade I e II. Na composição do trabalho, reuniram-se 53 questões, que estão classificadas por complexidade de dificuldade indo de 1 a 5, sendo o nível 1 exercícios fáceis ou apenas comentados e 5 exercícios que exigem mais do aluno.

2 Exercícios

2.1 Gaveta de meias

Dificuldade:2

Uma gaveta contém meias vermelhas e pretas. Serão retiradas duas meias aleatórias, a probabilidade das duas serem vermelhas é 1/2.

a)Qual é o número mínimo de meias que a gaveta deve conter?

b)Qual é o menor número par de meias pretas?

Solução:

Chamemos de v a quantidade de meias vermelhas, p a quantidade de meias pretas. Como serão retiradas duas meias sem reposição, temos:

$$\frac{v}{v+p} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Desenvolvendo a equação temos:

$$v \geq \frac{v+p}{\sqrt{2}}$$

$$v \geq \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$v - \frac{v}{\sqrt{2}} \geq \frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{(\sqrt{2}-1)v}{\sqrt{2}} \geq \frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$v \geq \sqrt{2} + p$$

Por outro lado temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{v-1}{v+p-1}$$

$$\frac{v-1}{\sqrt{2}} + \frac{p}{\sqrt{2}} \geq v-1$$

$$\frac{p}{\sqrt{2}} \geq (v-1) - \frac{v-1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{p}{\sqrt{2}} \geq \frac{(\sqrt{2}-1)(v-1)}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{p}{\sqrt{2}-1} \geq v-1$$

$$(\sqrt{2}+1)p \geq v-1$$

Através das duas inequações obtemos:

$$(\sqrt{2}+1)p+1 \geq v \geq (\sqrt{2}+1)p$$

Fazendo para p igual a 1, obteremos o menor valor para v.

$$(\sqrt{2}+1)+1 \geq v \geq (\sqrt{2}+1)$$

Através desse intervalo percebemos que o valor inteiro para v é 3, logo o número mínimo é 4, sendo 1 preta e 3 vermelhas.

Para descobrimos o menor valor par de meias pretas, pegamos o intervalo apresentado na resolução da questão e jogamos valores pares para p.

Para p igual a 2, v teria que ser 5, mas ao calcular as probabilidades encontramos um valor diferente de 1/2.Agora para p igual a 4, v seria 10, e novamente a probabilidade seria diferente de 1/2. Para p=6, v=15, e obtém-se probabilidade igual a 1/2, logo o menor número par de meias pretas é 6.

2.2 Vitórias seguidas

Dificuldade:2

Para incentivar a carreira promissora de Elmer no tênis, seu pai ofereceu a ele um preço se ele ganhar(pelo menos) dois sets seguidos em uma série de três sets, que será jogada com seu pai e o campeão do clube, alternando entre: pai-campeão-pai ou campeão-pai-campeão, de acordo com a escolha de Elmer. O campeão é melhor jogador que o pai de Elmer. Qual sequência Elmer deve escolher?

Solução:

Chamemos de p, a probabilidade de Elmer ganhar do pai, e de c, a probabilidade de Elmer ganhar do campeão, logo p≥c.

Pela sequência pai-campeão-pai, para Elmer ganhar, ele teria que, ou ganhar as duas primeiras, ou as duas últimas, ou todas. Logo a probabilidade dele ganhar é 2pc(1-p)+pcp=pc(2-p). Na sequência campeão-pai-campeão, a probabilidade seria 2cp(1-c)+cpc=pc(2-c). Comparando as duas temos:

$$pc(2-p) \leq pc(2-c)$$

Logo Elmer tem maior chance de ganhar na sequência campeão-pai-campeão.

2.3 O jurado irreverente

Dificuldade:2

Um júri composto de três pessoas tem dois membros, dos quais tem probabilidade p de fazer uma decisão correta e suas decisões são independentes e um terceiro membro que joga uma moeda para cada decisão. Um júri composto de uma pessoa tem probabilidade p de fazer a decisão correta. Qual júri tem maior probabilidade de fazer a decisão correta?

Solução:

Os dois juris terão a mesma probabilidade de acertar. No júri de três pessoas pode ocorrer: os dois acertarem; ou o primeiro acerta, o segundo errar e o terceiro membro aceita a decisão do primeiro; ou o primeiro errar, o segundo acertar e o terceiro aceitar a decisão do segundo. Logo a probabilidade do júri acertar seria:

$$p^2 + \frac{p(1-p)}{2} + \frac{p(1-p)}{2} = \frac{2p^2 + p - p^2 + p - p^2}{2} = \frac{2p}{2} = p$$

Já o júri de uma pessoa apresenta probabilidade p de acertar. Então, o júri de três pessoas e o juri de uma pessoa têm a mesma probabilidade de acertar.

2.4 Tentativas até o primeiro sucesso

Dificuldade:2

Em média, quantas vezes é necessário jogar um dado para que se obtenha um 6?

Solução:

Chamemos de X a variável tempo decorrido até o primeiro 6, X segue distribuição geométrica com parâmetro (1/6), logo a média de vezes necessárias de se jogar o dado é o mesmo que E[X]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

2.5 Moeda em um quadrado

Dificuldade:3

Em um jogo comum de festival, um jogador joga uma moeda a uma distância de 5 metros em uma superfície de uma mesa com uma polegada quadrada. Se a moeda(3/4 polegada de diâmetro) cair inteiramente dentro do quadrado, o jogador recebe 5 centavos, mas não recebe a sua moeda de volta; caso contrário, ele perde a moeda. Se a moeda cai na mesa, qual é a chance dele ganhar?

Solução:

Para resolvermos este exercício, devemos levar em consideração a distância máxima que o limite da moeda pode distanciar das extremidades da mesa. Este limite será um 1/4 para cada um dos lados, pois se ela cair a 1/4 da borda a esquerda, quer dizer que ela está no limite da borda direita e qualquer distância maior que essa provocará a queda da moeda, assim reduzimos a área de efeito da moeda por um quadrado de tamanho 1/4 de lado, que seria o centro da distância possível, logo a área do quadrado apresenta a probabilidade de ganhar ou seja 1/16.

2.6 Chuck-a-luck

Dificuldade:2

Chuck-a-luck é um jogo de apostas frequentemente jogado em festivais e casas de aposta. Um jogador deve escolher um número entre 1 e 6. Três dados são jogados. Se o número do jogador aparece em um, dois ou três dos dados, ele recebe respectivamente um, dois ou três vezes a aposta original mais o seu dinheiro de volta; caso contrário ele perde tudo. Qual é a expectativa do jogador de perder por aposta? (O jogador terá três escolhas de números, podendo ser elas, iguais ou diferentes).

Solução:

Há três possíveis situações; na primeira, o jogador aposta em números diferentes, então ele tem 3 números e a casa tem 3 também, logo o jogador não perde aposta nessa situação. Na segunda, o jogador aposta em 2 números iguais, então o jogador tem 2 números e a casa tem 3, assim ele perde 1 aposta. Na terceiro, o jogador aposta em 3 números iguais, assim o jogador tem 1 número e a casa 3, assim ele perde 2.

Para a primeira situação, há 120 combinações diferentes, para a segunda 90(pois temos 6x5x3, onde o 3 vem devido as possíveis mudanças dos dados $\binom{3}{2}$), para a terceira 6, com isso o esperado dele perder por aposta é:

$$\frac{120}{216}0 + \frac{90}{216}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{6}{216}\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{17}{216} \approx 0.079.$$

Então, ele perde 8 por cento por aposta.

2.7 Curando o jogador compulsivo

Dificuldade:2

Sr.Brown sempre aposta um dólar no número treze na roleta, contra o conselho de seu amigo. Para ajudar a curar Sr.Brown, seu amigo sempre aposta $20, que o Brown sempre estará com menos dinheiro após as 36 jogadas. A cura esta funcionando?

A maioria das roletas americanas tem 38 números. Se o número do jogador for o vencedor, ele é pago 35 vezes o seu jogo e recebe o sua aposta de volta; caso contrário ele perde.

Solução:

A probabilidade dele perder as 36 vezes é dado por $\left(\frac{37}{38}\right)^{36} \approx 0.383$. Em uma simples jogada é esperado:

$$35\frac{1}{38} - 1\frac{37}{38} = -\frac{2}{38}\$$$

e então durante as 36 rodadas são esperados:

$$-\frac{2}{38}36 \approx -1.89\$$$

Contra o seu amigo, a expectativa do Sr.Brown é

$$20(0.617) - 20(0.383) \approx 4.68\$$$

Assim no total, o Sr.Brown termina com 4.68-1.89=2.79$, logo a cura não está funcionando, pois o Sr.Brown estará fazendo dinheiro.

2.8 A mão perfeita de Bridge

Dificuldade:1

Com um baralho bem embaralhado, qual é a chance que ela tem de tirar uma mão perfeita(13 cartas do mesmo naipe)?

Solução:

Para o jogador sair com cartas do mesmo naipe é necessário saber qual foi a primeira carta obtida por ele, já que esta determinará o naipe que as outras devem ter, para isso, há 52 opções, logo após a primeira carta, o jogador tem que sair com as outras 12 cartas, cada uma em uma ordem, logo pode haver alterações na ordem das cartas. Com isso, a combinação da mão perfeita seria 52x12!.

O total de combinações de mãos que um jogador pode receber é representado por $\frac{52!}{39!}$. Logo, a probabilidade de um jogador receber a mão perfeita é dada pela divisão da combinação para a mão perfeita sobre o total de combinações, isso é:

$$\frac{52x12!}{\frac{52!}{39!}} = \frac{12!39!}{51!} \approx 6.3x10^{-12}$$

2.9 Craps

Dificuldade:2

O jogo craps, jogado com dois dados, é um dos jogos de aposta mais rápido e mais popular da América.

As regras são as seguintes. Apenas o total dos dois dados é contado. O jogador lança os dados e ganha se o total das somas na primeira jogada for 7 ou 11, perde se for 2,3 ou 12. Qualquer outra soma é chamada de 'point'. Se no primeiro lançamento sair um point, o jogador lança os dados novamente repetidamente até que, ele ganhe tirando o seu point novamente, ou perde se tirar 7. Qual é a chance do jogador ganhar?

Solução:

Primeiro devemos pensar nas possibilidades de cada soma, por exemplo, para a soma ser 2 há 1 possibilidade (os dois dados saírem 1), para a soma dar 7, há 6 possibilidades (2 no primeiro e 5 no segundo, 1 no primeiro e 6 no segundo, 4 no primeiro e 3 no segundo, 3 no primeiro e 4 no segundo...), assim achamos também as probabilidades na primeira rodada.

Como na primeira rodada ele deve tirar 7 ou 11 para ganhar, temos que a probabilidade de ganhar é P(7)+P(11)=$\frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} \approx 0.222$

Após a primeira rodada, a probabilidade de vitória irá depender do point que foi tirado, por exemplo: se o point foi 4, há 3 combinações que podem gerar o 4 e há 6 combinações que geram o 7, logo a probabilidade de vencer após a primeira rodada, sendo que o point foi 4, é $\frac{3}{9}$, se for tirado outro valor, o dado será jogado novamente mantendo a mesma probabilidade, já que o jogador só ganha se tirar 4 e só perde se tirar 7. Fazendo isso para todos os points temos:

4:$\frac{3}{9}$	8:$\frac{5}{11}$
5:$\frac{4}{10}$	9:$\frac{4}{10}$
6:$\frac{5}{11}$	10:$\frac{3}{9}$

Agora para sabermos a probabilidade do jogador ganhar, devemos pensar na conta como uma probabilidade condicional: como se os resultados da tabela são ele ganhar dado que saiu o número, logo a probabilidade dele ganhar é:

$$\frac{3}{36}\frac{3}{9}+\frac{4}{36}\frac{4}{10}+\frac{5}{36}\frac{5}{11}+\frac{5}{36}\frac{5}{11}+\frac{4}{36}\frac{4}{10}+\frac{3}{36}\frac{3}{9}\approx 0.271$$

Logo, a probabilidade dele ganhar é 0.271+0.222=0.493

2.10 Um experimento no teste pessoal por dinheiro

Dificuldade:1

a)Uma urna contém 10 bolas pretas e 10 bolas brancas, idênticas exceto pela cor. Você escolhe preta ou branca. Uma bola é retirada ao acaso, e se a cor for a cor que você escolheu, você ganha $10 caso contrário, nada. Qual seria o valor máximo que você estaria disposto a pagar para jogar? O jogo é jogado apenas uma vez.

b)Um amigo seu tem muitas bolas brancas e pretas, e ele coloca bolas brancas e pretas dentro da urna de acordo com escolha dele. Você escolhe preta ou branca. Uma bola é retirada ao acaso da urna. Qual seria o valor máximo que você estaria disposto a pagar para jogar? O jogo é jogado apenas uma vez.

Solução:

O valor máximo dependeria da pessoa, mas no primeiro exercício é esperado que o valor máximo fosse $5 , pois a pessoa ganharia ou perderia com a mesma probabilidade, já no segundo é difícil dizer pois não se sabe ao certo a quantidade de bolas que o amigo irá colocar, se esta informação for apresentada, será mais fácil escolher a quantia paga.

2.11 Cooperação silenciosa

Dificuldade:1

Dois estranhos são questionados, separadamente, para escolher um número positivo e são avisados que se os dois escolherem o mesmo número, eles ganharão um prêmio. Se você fosse uma dessas pessoas, qual número você escolheria?

Solução:

Seria muito difícil uma pessoa escolher um número com muitos dígitos, as escolhas mais feitas são 1,3 e 7 ; 1 por uma escolha mais natural e 3 e 7 são as escolhas mais populares.

2.12 Quo vadis?

Dificuldade:1

Dois estranhos, que têm um sinal de reconhecimento próprio aceitam se encontrar em certa quinta-feira às 12 horas, em Nova York, uma cidade desconhecida por eles, para discutirem um importante acordo de negócios, mas, mais tarde, eles descobriram que não marcaram um lugar para o encontro, e nenhum deles pode avisar o outro, pois ambos já estão viajando. Se eles tentarem se encontrar, aonde eles iriam?

Solução:

Essa é uma questão difícil de responder, mas é esperado que eles se encontrassem em algum lugar famoso de Nova York, como estátua da liberdade, Empire State, Times Square.

2.13 O dilema do prisioneiro

Dificuldade:3

Três prisioneiros A,B e C, com aparentemente mesmo registro de boa ação, solicitaram liberdade condicional. O conselho da liberdade condicional decidiu liberar dois dos três, e os prisioneiros sabem disso, mas não sabem quais. Um carcereiro, amigo do prisioneiro A, sabe quem será liberado. O prisioneiro A acha que seria antiético perguntar se ele seria liberado, mas acha que pode perguntar o nome de um prisioneiro que será liberado, que não seja ele mesmo. Ele acha que antes dele perguntar, a probabilidade dele sair é de 2/3. Ele acha que se o carcereiro disser 'B será solto', a chance dele será reduzida para 1/2, porque ou será A e B ou B e C que serão liberados. E A decide não perguntar. Contudo, A está errado em seus cálculos. Explique.

Solução:

Vamos chamar de P(A) a probabilidade do prisioneiro A morrer, P(B) de B morrer, P(C) de C morrer, e chamaremos de X o evento: o carcereiro dizer que 'B será solto'. Seguindo a lógica do prisioneiro A, nós teríamos que $P(A|X)$=1/2, mas usando o teorema de Bayes percebemos que:

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)}$$

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|C)P(C)}$$

$$P(A|X) = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3} + 0\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Com isso fica provado que o prisioneiro está errado e que a sua probabilidade de ser solto não será alterada.

2.14 Coleta de cupons

Dificuldade:3

Cupons em caixas de cereal são enumerados de 1 a 5, e a junção de todos eles gera um prêmio. Com um cupom por caixa, quantas caixas em média são necessária para ganhar o prêmio?

Solução:

Os cupons da caixa seguem uma distribuição Geométrica. No primeiro momento, uma distribuição Geométrica com parâmetro 1, pois quer pegar qualquer um dos 5 cupons, logo a média de caixas seria 1. Após ter achado um cupom, segue para uma distribuição com parâmetro 4/5, a média já se torna 5/4. Após dois cupons, parâmetro 3/5, média 5/3. Após 3, parâmetro 2/5, média 5/2. Após 4, parâmetro 1/5, média 5. Somando todas as médias teremos a média de caixas necessária para achar os cinco cupons e essa média seria:

$$1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + 5 = 5\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) \approx 11.42$$

2.15 A linha do teatro

Dificuldade:2

8 solteiros e 7 lindas modelos compraram aleatoriamente assentos individuais em uma fila de 15 cadeiras no teatro. Em média, quantos pares de assentos adjacentes são permultados para casais?

Solução:

Como há 15 pessoas em uma fila, pode haver 14 combinações de casais, por exemplo: chamemos os homens de h e as mulheres de m, temos hmh - seriam dois casais, pois veio um homem do lado de uma mulher e uma mulher do lado de um homem. Vamos pensar no primeiro espaço, pode vir um homem e depois uma mulher, ou uma mulher e depois um homem, então para o primeiro casal temos que a probabilidade: $\frac{8}{15}\left(\frac{7}{14}\right)+\frac{7}{15}\left(\frac{8}{14}\right) = \frac{8}{15}$. Agora pensando isso para os outros 14 casais, temos de forma mais generalizada:

$$(h + m - 1)\left[\frac{hm}{(h+m)(h+m-1)} + \frac{mh}{(m+h)(m+h-1)}\right] = \frac{2hm}{m+h}$$

No nosso exercício então temos h=8 e m =7, logo a média é de 7,46 casais.

2.16 Será o segundo melhor vice-campeão?

Dificuldade:3

Um torneio de tênis tem 8 jogadores. Os jogadores retiram números de 1 a 8 de um chapéu, para decidir qual serão suas posições na primeira rodada, e o torneio segue a seguinte tabela:

Figura 1: Torneio de tênis

O jogador que tirou 1 joga com 2, o melhor deles joga com o melhor do 3 e 4, e assim por diante. O perdedor da final é o vice-campeão. Qual é a chance do segundo melhor jogador ser vice-campeão?

Solução:

Devemos pensar que um dos jogadores que está do 1 ao 4 vai para final e um que está do 5 ao 8 também irá, logo para o segundo melhor ser vice, ele deve estar no grupo contrário ao melhor, de um modo mais generalizado temos, 2^n jogadores, 2^{n-1} posições na metade do torneio não ocupadas pelo melhor jogador e $2^{n-1}-1$ posições não ocupadas pelo melhor, assim a probabilidade do segundo melhor ser vice é de $\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}$, no nosso caso onde n=3 temos: $\frac{4}{7}$.

2.17 Cavaleiros gêmeos

Dificuldade:3

a)Suponha que Rei Arthur fez um torneio de justa onde os cavaleiros foram dispostos como no torneio de tênis(exercício 16). Há no torneio oito cavaleiros com mesma chance de ganhar, e nestes estão incluídos os gêmeos Balin e Balan. Qual é a chance de que os dois se encontrem durante o torneio?

b)Troque 8 por 2^n no problema. Qual é a chance deles se encontrarem agora?

Solução:

a)Para esse exercício vamos fixar o cavaleiro Balin, logo Balan pode ocupar outras 7 posições. Para os gêmeos encontrarem na primeira rodada, Balan tem que sair com o número oponente de Balin, a probabilidade disso ocorrer é $\frac{1}{7}$. Agora, para ambos se encontrarem na segunda rodada, há apenas dois números que Balan poderia tirar para isso ocorrer e ambos os irmãos devem ter ganhando, logo a probabilidade disso ocorrer é de $\frac{2}{7}\frac{1}{4}$. Para se encontrarem na final, há 4 opções de números para Balan e ambos têm que ter ganhado todas, a probabilidade disso ocorrer é: $\frac{4}{7}\frac{1}{16}$. Logo, a probabilidade deles se encontrarem no torneio é de:

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{7}\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}$$

b)Para um torneio com 2 pessoas é obvio que eles irão se encontrar. Para um com 4 pessoas a probabilidade deles se encontrarem é 1/2. Para 8, a probabilidade deles se encontrarem é 1/4.Então, por indução, é esperado que em um torneio de tamanho 2^n, a probabilidade deles se encontrarem é de $\frac{1}{2^{n-1}}$. Para a prova disso temos:

Primeiro, vamos considerar quando os cavaleiros saem cada um em uma metade diferente, a probabilidade disso acontecer é de $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$, e a probabilidade de um jogador chegar até a final é de $\frac{1}{2^{n-1}}$, como temos dois jogadores, a probabilidade deles se encontrarem quando estão em metades separadas é de:

$$\left(\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\right)\left(\frac{1}{2^{2n-2}}\right)$$

Agora, vamos pensar caso eles tivessem no mesmo lado, a probabilidade disso ocorrer é $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$, de acordo com a hipótese inicial, temos que, em um torneio com n-1 rodadas, a chance deles se encontrarem é $\frac{1}{2^{n-2}}$, logo a probabilidade deles se encontrarem é de:

$$\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\left(\frac{1}{2^{2n-2}}\right) + \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}\left(\frac{1}{2^{n-2}}\right) =$$

$$\frac{1}{(2^n - 1)2^{n-2}}\left(\frac{1}{2} + 2^{n-1} - 1\right) =$$

$$\frac{2^{n-1} - \frac{1}{2}}{2^{2n-2} - 2^{n-2}} =$$

$$\frac{2^{n-1} - \frac{1}{2}}{(2^{n-1})(2^{n-1} - 2^{-1})} =$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}$$

2.18 Uma divisão exata em um lançamento de moeda

Dificuldade:2

Quando 100 moedas são lançadas, qual é a probabilidade de exatamente 50 saírem cara?

Solução:

Para este exercício vamos levar em consideração que o total de caras X do lançamento segue distribuição Binomial com parâmetros 100, 1/2, logo queremos P(X=50):

$$\binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{100!}{50!50!}\frac{1}{2^{100}} \approx 0.0796$$

Podemos resolver esta conta usando a aproximação de Stirling, ela diz que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, no nosso caso teríamos:

$$\frac{\sqrt{2\pi 100}100^{100}e^{-100}}{(\sqrt{2\pi 50}50^{50}e^{-50})^2 2^{100}} = \frac{\sqrt{100}100^{100}}{\sqrt{2\pi}50^{100}50(2^{100})} = \frac{10}{\sqrt{2\pi}50} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}$$

2.19 Isaac Newton ajuda Samuel Pepys

Dificuldade:2

Pepys escreveu para Newton perguntando qual dos três eventos é mais favorável uma pessoa conseguir: (a) pelo menos 1 seis quando 6 dados são jogados, (b) pelo menos 2 seis quando 12 dados são jogados, (c) pelo menos 3 seis quando 18 dados são jogados. Qual é a resposta?

Solução:

Consideremos em todos os casos, a chance de sair uma quantidade X de 6 segue uma distribuição Binomial com parâmetro n(6,12,18) e p=1/6. Queremos, para o primeiro caso, que a P(x≥1), no segundo P(x≥2) e no terceiro P(x≥ 3).Em todos os casos é mais fácil achar a conta através do complementar.

Para o primeiro caso temos:

$$1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.665$$

Para o segundo caso temos:

$$1 - \sum_{i=0}^{1}\binom{12}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{12-i} \approx 0.619$$

Para o terceiro:

$$1 - \sum_{i=0}^{2}\binom{18}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{18-i} \approx 0.592$$

Após todas os cálculos é perceptível que o caso mais favorável é o primeiro.

2.20 O duelo de três pontas

Dificuldade:3

A,B e C irão disputar um duelo de três pontas de tiro. A chance de A acertar seu alvo é 0.3, C é 0.5, e B nunca erra. Eles irão disparar nas suas escolhas, em sucessão, na ordem A,B,C ciclicamente (se um homem for atingido, ele perde o direito de atirar) até sobrar apenas um. Qual estratégia A deve tomar?

Solução:

Se A for o primeiro atirador, se ele atirar em C primeiro, B irá atirar em A e ele estará fora. Se ele atirar em B e errar, B irá acertar C e A tentará acertar B. Agora se A atirar em B e acerta, sobrará apenas A e C na disputa, com isso teremos uma disputa apenas de C e A, no qual A acerta com 0.3 e C com 0.5. C atira primeiro que A, e é necessário que este erre, mas se A também erra na primeira rodada, C deve errar na segunda e A acertar e assim por diante, com isso temos que a probabilidade de A ganhar é:

$$(0.5)(0.3) + (0.5)^2(0.7)(0.3) + (0.5)^3(0.7)^2(0.3) + (0.5)^4(0.7)^3(0.3) + ...$$

Essa sequência é uma série geométrica e, com ela, temos que:

$$(0.5)(0.3)[1 + (0.5)(0.7) + [(0.5)(0.7)]^2 + [(0.5)(0.7)]^3 + ...] = \frac{(0.5)(0.3)}{1-(0.5)(0.7)} = \frac{0.15}{0.65} = \frac{3}{13}$$

A probabilidade de A ganhar sobrando apenas ele e B é 0.3, já a dele ganhar sobrando ele e C é 3/13, e 0.3>3/13, logo é melhor para A tentar o primeiro tiro contra B e errar e depois ficarem apenas os dois, do que acertar o primeiro tiro e depois tentar acertar o C.

2.21 Você deve escolher com ou sem reposição?

Dificuldade:3

Duas urnas contém bolas brancas e vermelhas, idênticas exceto pela cor. A urna A contém 2 vermelhas e 1 preta, a urna B contém 101 vermelhas e 100 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso, e você ganha um prêmio se responder corretamente o nome da urna baseado nas duas bolas que serão retiradas dessa. Após a primeira bola ser retirada e a cor reportada, você pode escolher se a bola é recolocada ou não para a segunda retirada. Como você ordena que seja a segunda retirada e como você decide a urna?

Solução:

Se escolher repor a bola teremos as seguintes situações:

Situação	Urna A	Urna B	decisão
2 vermelho	$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}\frac{101}{201}\frac{101}{201} \approx \frac{1}{8}$	Urna A
vermelho, preta	$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}\frac{101}{201}\frac{100}{201} \approx \frac{1}{8}$	Urna B
preto, vermelho	$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}\frac{100}{201}\frac{101}{201} \approx \frac{1}{8}$	Urna B
2 pretos	$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}\frac{100}{201}\frac{100}{201} \approx \frac{1}{8}$	Urna B

Assim, a probabilidade de acerto devido às escolhas é de:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = \frac{43}{72}$$

Se escolhermos que após a primeira bola tirada não haverá reposição, temos:

Situação	Urna A	Urna B	decisão
2 vermelho	$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\frac{101}{201}\frac{100}{200} \approx \frac{1}{8}$	Urna A
vermelho, preta	$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\frac{101}{201}\frac{100}{200} \approx \frac{1}{8}$	Urna A
preto, vermelho	$\frac{1}{2}\frac{1}{3}1 = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\frac{100}{201}\frac{101}{200} \approx \frac{1}{8}$	Urna A
2 pretos	$\frac{1}{2}\frac{1}{3}0 = 0$	$\frac{1}{2}\frac{100}{201}\frac{99}{200} \approx \frac{1}{8}$	Urna B

Assim, a probabilidade de acerto seria:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]=\frac{5}{8}$$

Como $\frac{5}{8} > \frac{43}{72}$, é melhor escolher sem reposição, mas o melhor jeito de escolher seria, caso a primeira bola seja vermelha com reposição e caso a bola seja preta, sem reposição, com isso temos:

Situação	Urna A	Urna B	decisão
2 vermelho	$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}\frac{101}{201}\frac{101}{201}\approx\frac{1}{8}$	Urna A
vermelho, preta	$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}\frac{101}{201}\frac{100}{201}\approx\frac{1}{8}$	Urna B
preto, vermelho	$\frac{1}{2}\frac{1}{3}1=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\frac{100}{201}\frac{101}{200}\approx\frac{1}{8}$	Urna B
2 pretos	$\frac{1}{2}\frac{1}{3}0=0$	$\frac{1}{2}\frac{100}{201}\frac{99}{200}\approx\frac{1}{8}$	Urna B

A probabilidade de acertar, nesse caso, será $\frac{23}{36}$ que é maior que qualquer uma das outras probabilidades encontradas.

2.22 A urna

Dificuldade:3

Em uma eleição, dois candidatos, Albert e Benjamin, têm em uma urna a e b votos respectivamente, a > b, por exemplo,3 e 2. Se as cédulas são retiradas na sorte e lidas, qual é a chance de que pelo menos uma vez após a primeira contagem, os candidatos tenham o mesmo número de votos?

Solução:

Primeiro devemos perceber que há $\binom{a+b}{a}$ posições para a. Assim o total de posições é: $\frac{(a+b)!}{a!b!}$. Devemos perceber, também, que há três casos que podem ocorrer:

1)O primeiro voto ser um A e após isso eles nunca terem a mesma contagem.

2)O primeiro voto ser um A e após isso eles terem a mesma contagem ao menos uma vez.

3)O primeiro ser B, assim em algum momento terá a mesma quantidade.

Fazendo combinações básicas, por exemplo a=3 e b=2, percebemos que o 3 caso e o 2 caso têm a mesma quantidade de opções, mas como é mais fácil realizar cálculo para o 3 caso, iremos utilizar este cálculo, que é $\binom{a+b-1}{a}=\frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}$. Com isso temos:

$$\frac{2\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}}=$$

$$\frac{2\frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}}{\frac{(a+b)!}{a!b!}}=$$

$$\frac{2(a+b-1)!a!b!}{a!(b-1)!(a+b)!}=$$

$$\frac{2b}{a+b}$$

Percebemos que a probabilidade de ter a mesma quantidade de votos, pelo menos uma vez, é $\frac{2b}{a+b}$.

2.23 Encontros em um lançamento de moeda

Dificuldade:3

Jogadores A e B jogam moedas N vezes. Eles anotam suas vitórias e derrotas. Após o primeiro lançamento, qual é a chance, de que em nenhum momento durante o jogo, a contagem seja a mesma?

Solução:

Se tivermos N jogadas, no total teríamos 2^N possíveis maneiras de se permutar o jogo, se N é par(N=2n), temos $\binom{N}{n}$, possibilidades em que não há contagem igual, então a probabilidade para caso par é:

$$\frac{\binom{N}{n}}{2^N}$$

Já para jogadas ímpares(N=2n+1), temos que observar as partidas pares. Os resultados das pares que não dão contagem iguais, terão duas novas possibilidades e com isso obteríamos $2\binom{N-1}{n}$, mas há 2^N combinações, então para o caso ímpar, a probabilidade é dada por:

$$\frac{\binom{N-1}{n}}{2^{N-1}}$$

2.24 O metrô injusto

Dificuldade:1

Marvin sai do serviço entre 3 e 5 P.M. Sua mãe vive na parte alta da sua cidade, sua namorada no centro. Ele pega o primeiro metrô que vai para qualquer direção e janta com a primeira que encontra. Sua mãe queixa que ele nunca vai visitá-la, mas ele diz que tem chance de 50% .Ele jantou com ela duas vezes nos últimos 20 dias. Explique.

Solução:

Sai da estação a mesma quantidade de metrô para ambos os lados, mas a distância entre os horários é muito pequena, e o metrô que vai para o centro da cidade vem primeiro. Vamos supor que o intervalo entre um e o outro é de 1 min e a cada 5 min tem um metrô, então as 3h chega um que vai para o centro, e as 3h e 1min um que vai para a parte alta e 3h e 5m um que vai para o centro novamente, logo, Marvin deve chegar no intervalo entre o metrô para centro e o para parte alta, caso contrário, ele sempre irá pegar o para o centro.

2.25 Comprimentos aleatórios de uma corda

Dificuldade:4

Uma corda é colocada aleatoriamente em um círculo fixo, qual é a probabilidade de que a corda exceda o raio do círculo?

Solução:

Devemos considerar que a corda pode vir a ser colocada em qualquer ponto com a mesma probabilidade, isto é, uniformidade. Olhemos então o meio da corda: ela deve estar a uma certa distância do centro. Para acharmos essa distância, devemos imaginar um hexágono cujo lado apresente o tamanho do raio(r). Teremos uma distância d, que gera cordas maiores que o raio.

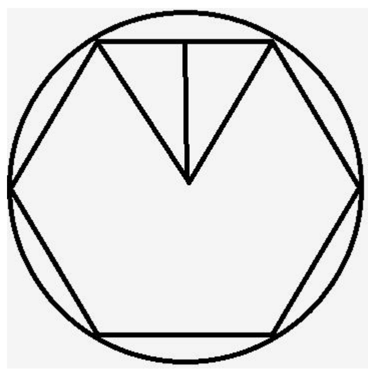

Figura 2: Hexágono em um círculo

Observando o desenho, percebemos que d é a altura de um triângulo equilátero, então $d = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Como o máximo de distância dos centros da cordas é d, teremos um círculo de raio d, e qualquer centro que estiver dentro deste círculo a sua corda será maior que o raio, logo a probabilidade de uma corda exceder o raio do círculo é:

$$\frac{\pi d^2}{\pi r^2} = \frac{r^2 \frac{3}{4}}{r^2} = \frac{3}{4}$$

2.26 Duelistas apressados

Dificuldade:3

Duelos em uma cidade são raramente fatais. Lá, cada concorrente chega em um momento aleatório entre 5 e 6 A.M. no dia decidido, e sai exatamente 5 minutos depois. Se o seu oponente chegar no intervalo de tempo, eles lutam. Qual é a fração de duelos que termina em luta?

Solução:

Chamemos o momento em que os duelistas chegam de x e y. Como eles estarão entre 5 A.M. e 6 A.M., x e y estão em um intervalo de tamanho 1, e como, ao passar 5 minutos após de um deles chegar, um sai, temos a seguinte situação:

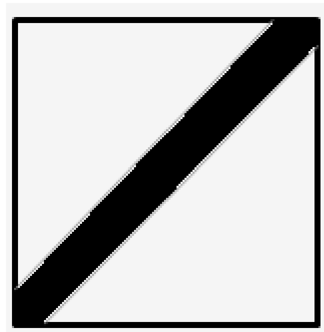

Figura 3: Região gráfica

Onde a parte colorida corresponde ao encontro dos duelistas, as retas que delimitam essa área são $y = x + \frac{1}{12}$ e $y = x - \frac{1}{12}$, a área em branco tem valor $\left(\frac{11}{12}\right)^2$, logo a área colorida corresponde a $\frac{23}{144} \approx \frac{1}{6}$.

2.27 Pegando o falsificador cauteloso

Dificuldade:3

a) O contador do rei coloca, em 100 caixas, 100 moedas. Em cada caixa, ele coloca uma moeda falsa. O rei suspeita do contador, tira de cada caixa uma moeda e verifica. Qual é a chance de a falsificação do contador não ser percebida?

b)Qual seria a chance, se no lugar de 100, fosse colocado n?

Solução:

a)A quantidade X de moedas falsas que o rei encontrará segue uma distribuição Binomial com parâmetros 100 e 1/100. Nesta questão, queremos que x=0, com isso temos:

$$\binom{100}{0}\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100} = \left(1-\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 0.366$$

b)Agora, uma distribuição Binomial com parâmetro n e 1/n, logo teremos:

$$\binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Quando n é um número grande, esta probabilidade é $\frac{1}{e}$.

2.28 Pegando o falsificador ganancioso

Dificuldade:4

O contador do rei coloca em n caixas n moedas. Cada caixa contém m moedas falsas. O rei suspeita do seu contador e retira uma moeda, na sorte, de cada caixa e verifica. Qual é a chance de as n moedas r serem falsas?

Solução:

Como visto no exercício anterior, a quantidade de moedas falsas achadas pelo rei segue distribuição Binomial, mas dessa vez, seus parâmetros são n e m/n. Chamaremos novamente de X a quantidade de moedas falsas que o rei descobriu. Neste exercício queremos saber a probabilidade de x=r.

$$\binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-r}$$

Agora vamos, ver o que acontece quando r e m são fixos e n é grande. Podemos escrever P(x=r) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{r!}\frac{n(n-1)...(n-r+1)}{n^r}m^r\left(1-\frac{m}{n}\right)^n\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-r}$$

Como r e m são fixos, temos que $\frac{1}{r!}$ não altera e nem m^r. Agora, a parte $\frac{n(n-1)...(n-r+1)}{n^r}$ tende a 1, assim como $\left(1-\frac{m}{n}\right)^n$ tende a e^{-m} e $\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-r}$ tende a 1, assim teremos que a probabilidade pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{e^{-m}m^r}{r!}$$

Essa fórmula é a função densidade da distribuição Poisson.

2.29 Gelatina mofada

Dificuldade:4

Certo esporo cria uma colônia de fungos, em placa de gelatina, em um laboratório. As placas têm, em média, três colônias por placa. Qual é a fração de placas que tem exatamente três colônias? Se a média passa a ser um número grande e inteiro m, qual é a fração de placas que tem exatamente m colônias?

Solução:

Supondo que a quantidade de colônias achadas em cada placa siga uma distribuição Binomial, com parâmetro n e p, sua média(Esperança) é m, e m é dada por np, logo p=m/n, como a distribuição é Binomial, temos a seguinte função densidade:

$$\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

Trocando p por m/n e lembrando que m e r são fixos, quando n tende a um número grande, temos uma distribuição Poisson, que é dada por:

$$P(r)=\frac{e^{-m}m^r}{r!}$$

No primeiro exercício, temos que r=3 e m=3, assim a fração de placas que terá 3 colônias é 0.224.

Para o caso que r=m, temos que usar a aproximação de Stirling, e ela diz que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Fazendo os cálculos temos:

$$P(m) = \frac{e^{-m}m^m}{m!} \approx \frac{e^{-m}m^m}{\sqrt{2\pi m}m^m e^{-m}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \approx \frac{0.4}{\sqrt{m}}$$

2.30 Vendas par

Dificuldade:4

Um vendedor de pães vende em média 20 bolos. Qual é a chance de que ele venda um número par de bolos?(Consideremos que as vendas seguem distribuição Poisson)

Solução:

Primeiro devemos perceber que as vendas seguem distribuição Poisson com parâmetro 20, m=20, após isso, devemos pensar que:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-m}m^r}{r!} = 1$$

$$e^{-m}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{m^r}{r!} = 1$$

$$e^{-m}\left(1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + ...\right) = 1$$

$$e^{-m}e^{m} = 1$$

Agora, queremos tirar os números impares dessa conta, para isso teremos o seguinte cálculo:

$$e^{-m}e^{-m} = e^{-2m}$$

$$e^{-m}\left(1 - \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} - \frac{m^3}{3!} + ...\right) = e^{-2m}$$

Fazendo a soma $1 + e^{-2m}$, teríamos a soma das probabilidades da venda ser par, multiplicado por dois, para procurarmos a probabilidade da venda ser par, devemos fazer $\frac{1+e^{-2m}}{2}$, assim teremos a probabilidade de ter venda par. Como m=20, esta probabilidade será algo próximo de 0,5, pois e^{-40} é um número muito baixo.

2.31 Sorteio de aniversário

Dificuldade:4

Qual é o número mínimo de pessoas necessárias para que a probabilidade de que duas ou mais pessoas façam aniversário no mesmo dia exceda 1/2?

Solução:

É mais fácil procurar o complementar dessa probabilidade, isto é, a probabilidade que ninguém faça aniversário no mesmo dia, consideremos o ano com 365 dias, essa probabilidade é dada por:

$$1\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\left(1-\frac{3}{365}\right)...\left(1-\frac{n-1}{365}\right)=\frac{365.364.363...(365-n+1)}{365^n}=\frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

Computacionalmente aplicando as propriedades de logaritmo, temos que, o menor número inteiro que faz com que essa conta seja menor que 0.5 é 23.

2.32 Encontrando seu parceiro de aniversário

Dificuldade:4

Você deseja encontrar alguém que faz aniversário no mesmo dia que você. Qual é o menor número de estranhos aos quais você deve perguntar a data do aniversário para que tenha 50% de chance?

Solução:

Como no exercício anterior, devemos pensar no complementar, para isso, vamos considerar novamente 365 dias, com isso, temos que a probabilidade de que n pessoas entrevistadas não façam aniversário no mesmo dia que você é:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n=\left(1-\frac{1}{365}\right)^n\approx e^{\frac{-n}{365}}$$

Como queremos que este valor dê meio, aplicando logaritmo, temos $\frac{n}{365}\approx 0.693$, assim n é 253, logo, é necessário pergunta para 253 pessoas.

2.33 Relacionando o sorteio de aniversário e o encontro do parceiro

Dificuldade:3

Se r pessoas comparam seus aniversários, como no problema do sorteio de aniversário, chamemos de Pr a probabilidade de que duas pessoas façam aniversário no mesmo dia. Qual deve ser o número n de pessoas, no problema do parceiro de aniversário, para que a probabilidade de sucesso seja aproximadamente Pr?

Solução:

Para o problema do parceiro dos aniversários, a pessoa pergunta diretamente n pessoas, enquanto no problema de comparação, temos r pessoas comparando que dá r(r-1)/2 comparações de aniversário, então queremos que:

$$\frac{r(r-1)}{2}=n$$

Substituindo r por 23, teremos 23(22)/2=253, que são os resultados obtidos nas duas questões anteriores.

2.34 Feriados no aniversário

Dificuldade:4

As leis trabalhistas em Erewhon exige que os donos de fábricas deem um feriado para os funcionários sempre que um deles fizer aniversário, e para contratar sem discriminação, devido a data do aniversário. Exceto por esses feriados, eles trabalham 365 dias por ano. Os donos querem maximizar o total de dias trabalhados por ano. Quantos trabalhadores deve-se ter em uma fábrica em Erewhon?

Solução:

Chamaremos 365 de N. A fábrica deve contratar n pessoas para maximizar. A probabilidade de que o dia seja um dia de trabalho é $\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$ e a quantidade de dias esperadas por trabalho é nN. Logo, o dia de trabalho esperado para n trabalhadores é:

$$nN\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

Queremos maximizar esta função, então, temos o seguinte:

$$(n+1)N\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1} \leq nN\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

$$(n-1)N\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1} \leq nN\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

Reduzindo a primeira inequação temos:

$$(n+1)\left(1-\frac{1}{N}\right) \leq n$$

$$(n+1)-\frac{(n+1)}{N} \leq n$$

$$-\frac{(n+1)}{N} \leq -1$$

$$N \leq n+1$$

Da segunda inequação temos:

$$n-1 \leq n\left(1-\frac{1}{N}\right)$$

$$n-1 \leq n-\frac{n}{N}$$

$$-1 \leq \frac{-n}{N}$$

$$n \leq N$$

Com isso temos que $n \leq N \leq n+1$, concluimos que n deve ser 364 ou 365.

2.35 Pendurado no penhasco

Dificuldade:5

A partir de onde ele está, um passo para o precipício enviaria o homem bêbado para longe da borda. Ele dá passos aleatório em direção ao precipício ou em sentido contrário. A cada passo, sua probabilidade de dar um passo em sentido contrário é 2/3, e em direção ao precipício 1/3. Qual é a chance dele fugir da queda?

Solução:

Primeiro percebemos que é necessário ele dar um número ímpar de passos para que caia do penhasco. Consideremos a distância que o bêbado está como uma reta, logo, o seu ponto original é x=1, se ele chega em x=0, ele cai. Vamos chamar de p a probabilidade de ele ir para x=2, e 1-p a probabilidade de ele ir para x=0. De um modo mais geral, se ele está no ponto x=m, tem probabilidade p de ir para x=m+1 e probabilidade 1-p de ir para x=m-1. Vamos chamar P_1 a probabilidade de ele chegar em x=0, dado que ele começou em x=1.

Como ele pode ir para dois lados, temos que P_1 é:

$$P_1 = 1 - p + pP_2$$

Onde ele pode ir para 0 com probabilidade 1-p, e tem probabilidade pP_2 de voltar, onde P_2 é a probabilidade dele chegar em 0 dado que seu marco inicial é x=2. Em P_2, temos duas situações para que ele chegue ao ponto 0: primeiro, ele tem que ir de 2 para 1, não necessariamente no primeiro passo; segundo, de 1 para 0 não necessariamente no primeiro passo. Ele ir de x=2 para x=1, tem probabilidade P_1, logo P_2=P_1^2, substituíndo temos:

$$P_1 = 1 - p + pP_1^2$$

As soluções para essa equação são 1 e $\frac{1-p}{p}$. Para valores menores que $\frac{1}{2}$ a solução seria 1, para valores maiores que $\frac{1}{2}$ a solução seria $\frac{1-p}{p}$. Para o nosso exercício o valor é 2/3, então, temos que a probabilidade de ele fugir da queda é 1/2.

Observação: como o valor inicial era x=1, temos que as soluções são 1 ou $\frac{1-p}{p}$, mas se o marco inicial fosse x=m, as soluções seriam 1 para $p \leq \frac{1}{2}$ e $\left(\frac{1-p}{p}\right)^m$ se $p \geq \frac{1}{2}$.

2.36 A ruína de um apostador

Dificuldade:5

O jogador M tem \$1 e o jogador N tem \$2 . Cada jogada dá ao jogador vencedor \$1 do outro. O jogador M é melhor que o jogador N. Ele ganha 2/3 dos jogos. Eles jogam até um falir. Qual é a chance do jogador M ganhar?

Solução:

Como visto no exercício anterior, o jogador M tem a chance de falir com probabilidade $\left(\frac{1-p}{p}\right)^m$, onde m é o valor inicial do jogador M. Vamos usar 1-p=q, e o evento Q a probabilidade do jogador N ganhar e n o valor inicial do jogador N, com isso temos:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^m = Q + (1-Q)\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}$$

O valor $(1-Q)\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}$ é a probabilidade de ele ter ganhado m+n e após isso perder. E P=1-Q, onde P é a probabilidade do jogador M ganhar, com isso temos:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^m = 1 - P + P\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)^m - 1 = P\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right)$$

$$P = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^m}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}$$

No nosso exercício temos que p=2/3, q=1/3 , m=1 e n=2, então P=$\frac{4}{7}$.

2.37 Jogador ousado vs jogador cauteloso

Dificuldade:5

Em Las Vegas, um jogador com \$20 precisa de \$40, mas ele tem vergonha de pedir a sua mulher mais dinheiro. Ele decide investir na roleta(jogo que ele não gosta de jogar) e considera duas estratégias: colocar os \$20 em todos os pares de uma só vez e parar de jogar se perde ou ganhar, ou colocar \$1 de cada vez, nos números pares, até ganhar \$20 ou perder. Compare as duas estratégias.

Solução:

O jogador ousado tem probabilidade $\frac{18}{38} \approx 0.474$ de ganhar, enquanto a probabilidade do jogador cauteloso segue o exemplo 36, mas agora com valores m=20, n=20, p=$\frac{18}{38}$ e q=$\frac{20}{38}$. Então, temos que a probabilidade do cauteloso ganhar é:

$$P = \frac{1-\left(\frac{20}{18}\right)^{20}}{1-\left(\frac{20}{18}\right)^{40}} \approx 0.11$$

Logo, jogar na maneira do jogador ousado, dá uma maior chance de ganhar.

2.38 A moeda grossa

Dificuldade:4

Qual deve ser a espessura de uma moeda, para que ela tenha chance de 1/3 de não sair nem cara e nem coroa?

Solução:

Para resolver esse exercício, devemos pensar que, a moeda ao ser jogada, descreverá uma esfera e que o centro dessa esfera é o centro da moeda. Se toda a moeda estiver reta, em vertical, ela não cairá nem cara nem coroa. Com isso temos a área que corresponde a esta situação (esta área será a área lateral de um cilindro). Temos que:

$$\frac{areadocilindro}{areadaesfera} = \frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}$$

Onde r é o raio da moeda e que corresponde também ao raio da esfera e h é altura do cilindro, ou a espessura da moeda. Resolvendo a igualdade temos:

$$\frac{h}{2r} = \frac{1}{3}$$

$$h = \frac{2r}{3}$$

Logo, a espessura da moeda é $\frac{2}{3}$ do raio da moeda.

2.39 O químico atrapalhado

Dificuldade:3

Em um laboratório, tinha um punhado de finas hastes de vidro de 9 polegadas, algumas têm um ponto azul marcando e outras um ponto vermelho. Quando o assistente do laboratório tropeçou e deixou cairem as hastes no chão, muitas quebraram em três pedaços. Para essas, em média, qual seria o tamanho do comprimento do ponto azul?

Solução:

Considerando o príncipio de simetria, temos que, como as hastes foram quebradas em três pedaços, é esperado que a haste se quebre em pedaços iguais, isto é, o ponto azul terá comprimento 3 polegadas.

2.40 O primeiro ás

Dificuldade:3

Embaralha-se um baralho regular de 52 cartas com 4 ases. Então vira-se a carta do topo até que apareça o primeiro ás. Em média, quantas cartas são necessárias para aparecer o primeiro ás?

Solução:

Consideramos as puxadas de cartas indo de 0 a 52, isto é, 0 quer dizer que nenhuma carta foi puxada. Como há 4 ases, são esperado 5 intervalos entre 0 à 52. Considerando os ases como ponto entre eles, em média, cada ponto terá $\frac{48}{5} = 9.6$ cartas entre eles, logo são necessárias em média 10.6 cartas para retirar o primeiro ás(10.6, pois, após as 9.6 cartas a próxima será um ás).

Há outro modo de resolver o exercício, mas é mais complicado. Este modo seria, fazer a soma das posições em que o ás iria aparecer, vezes a probabilidade dele aparecer naquela posição.

2.41 O problema da locomotiva

Dificuldade:3

a)Uma ferrovia tem trens enumerados de 1 a N. Um dia, você vê uma locomotiva e seu número é 60. Imagine quantas locomotivas a companhia tem.

b)Você viu 5 locomotivas e o maior número observado foi 60. De novo, imagine quantas locomotivas a companhia tem.

Solução:

Este exercício não tem solução exata, mas há maneiras razoáveis de resolvê-lo. Se usarmos o príncipio da simetria para o primeiro caso, temos que, antes da locomotiva vista, há 59 locomotivas. Então, provavelmente após há também 59 locomotivas. Logo, a companhia teria 119 locomotivas.

Para a questão b, temos que, como foram vistas 5 locomotivas e a maior foi 60, os espaços entre elas seriam em média 11((60-5)/5),então seriam esperadas dessa vez 71 locomotivas.

2.42 A pequena extremidade do graveto

Dificuldade:3

a)Se um graveto é quebrado em dois, de forma aleatória, qual é o tamanho, em média, do menor pedaço?

b)Qual seria, em média, a divisão do menor pedaço pelo maior?

Solução:

Quebrado de forma aleatória, quer dizer que a quebra segue distribuição Uniforme. Como serão criados dois 'novos' gravetos, um da direita e um da esquerda, temos que o máximo de tamanho que o menor graveto pode chegar é 1/2. Como a distribuição é Uniforme, temos que a sua esperança é:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}$$

Logo, o tamanho médio do menor graveto é 1/4.

b)Agora, vamos chamar de x o maior pedaço. A divisão é $\frac{1-x}{x}$, como x está entre 1/2 e 1, e 1-x está entre 0 e 1/2, temos dois intervalos com mesmo tamanho, logo, o resultado do valor médio dessa divisão é:

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1-x}{x}dx = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)dx = 2\ln 2 - 1 \approx 0.386$$

2.43 A barra quebrada

Dificuldade:4

Uma barra é quebrada aleatoriamente em dois lugares. Ache o tamanho médio do menor, do médio e do maior pedaço.

Solução:

A barra irá se quebrar em dois lugares, chamaremos de x e y estes locais, considerando a barra 'uma reta' sendo a borda da esquerda o ponto 0 e a da direita o ponto 1. Consideremos também, $0 < x < y < 1$. Considerando que qualquer ponto quebrado tenha distribuição Uniforme, se o intervalo [0,x] for o menor intervalo, temos as seguintes propriedades:

$$x \le y$$

$$x \le y - x$$

$$x \le 1 - y$$

A área correspondente que satisfaz essa região tem valor 1/6 (por integral dupla) e:

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\int_{2x}^{1-x} xdydx = \frac{1}{54}$$

Então temos que o valor esperado para x é $\frac{\frac{1}{54}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{9}$.

Agora, vamos considerar o intervalo [0,x] como o tamanho médio. Teremos as seguintes propriedades:

$$x \le y$$

$$x \le y - x$$

$$1 - y \le x$$

ou:

$$x \le y$$

$$y - x \le x$$

$$x \le 1 - y$$

A área correspondente a ambas propriedades tem valor 1/12 e fazendo $\int\int x dA = \frac{5}{216}$, com isso, o valor esperado será $\frac{\frac{5}{216}}{\frac{1}{12}} = \frac{5}{18}$. Agora, para [0,x] representar o maior intervalo temos as seguintes propriedades:

$$x \leq y$$

$$y - x \leq x$$

$$1 - y \leq x$$

A área correspondente a este intervalo é 1/6 e fazendo $\int\int x dA = \frac{11}{108}$, o valor esperado é $\frac{\frac{11}{108}}{\frac{1}{6}} = \frac{11}{18}$. Somando todos os valores esperados temos: $\frac{1}{9} + \frac{5}{18} + \frac{11}{18} = 1$.

2.44 Ganhando um jogo injusto

Dificuldade:5

Um jogo consiste em uma sequência de jogadas; em cada jogada você ou o seu oponente faz um ponto. Você com probabilidade p (menor que 1/2). Ele com probabilidade 1-p. O número de jogadas será par: 2, ou 4 ou 6 e assim por diante. Para ganhar, você deve ter mais da metade dos pontos. Você sabe p, ele é 0.45 e você recebe um prêmio se ganhar. Você deve escolher qual a quantidade de jogadas deve ter. Quantas você escolheria?

Solução:

Chamaremos de 1-p de q. A quantidade de jogadas será 2n, com isso, a probabilidade de ganhar com 2n jogadas é:

$$P_{2n} = \sum_{x=n+1}^{2n} \binom{2n}{x} p^x q^{2n-x}$$

Já com 2n+2 jogadas, a probabilidade é:

$$P_{2n+2} = \sum_{x=n+2}^{2n+2} \binom{2n+2}{x} p^x q^{2n+2-x}$$

P_{2n+2} seria igual a de P_{2n} exceto por duas possibilidades, sendo elas: primeiro, a chance de o jogador ter ganhado n+1 jogos nas 2n jogadas, e depois perder duas, diminuindo a probabilidade de ganhar 2n+2 em: $q^2\binom{2n}{n+1}p^{n+1}q^{n-1}$; segundo, ter ganhado n em 2n jogadas e depois ganhar mais duas, aumentando a probabilidade de ganhar 2n+2 em: $p^2\binom{2n}{n}p^n q^n$.

Chamemos $q^2\binom{2n}{n+1}p^{n+1}q^{n-1}$ de a_n e $q^2\binom{2n}{n+1}p^{n+1}q^{n-1}$ de b_n, então temos que:

$$P_{2n+2} = P_2n - a_n + b_n$$

Como queremos maximizar P_n, temos as seguintes relações:

$$P_2n \geq P_{2n-2} \qquad P_2n \geq P_{2n+2}$$

Desenvolvendo a inequação $P_2n \geq P_{2n-2}$, temos:

$$P_2n \geq P_2n + a_{n-1} - b_{n-1}$$

$$a_{n-2} \leq b_{n-2}$$

$$q^2\binom{2n-2}{n}p^nq^{n-2} \leq p^2\binom{2n-2}{n-1}p^{n-1}q^{n-1}$$

$$\frac{q^2q^{n-2}}{q^{n-1}}\left(\frac{(2n-2)(2n-1)...(n+2)(n+1)n!}{n!(n-2)!}\right) \leq \frac{p^2p^{n-1}}{p^n}\left(\frac{(2n-2)(2n-1)...(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\right)$$

$$q\left(\frac{(2n-2)(2n-1)...(n+2)(n+1)}{(n-2)!}\frac{(n-1)!}{(2n-2)(2n-1)...(n+1)n}\right) \leq p$$

$$q\frac{n-1}{n} \leq p$$

$$(n-1)q \leq np$$

Agora, desenvolvendo a outra inequação, temos:

$$P_2n \geq P_2n - a_n + b_n$$

$$a_n \geq b_n$$

$$q^2\binom{2n}{n+1}p^{n+1}q^{n-1} \geq p^2\binom{2n}{n}p^nq^n$$

$$\frac{q^2q^{n-1}}{q^n}\left(\frac{(2n-2)(2n-1)...(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n-1)!(n+1)!}\right) \geq \frac{p^2p^n}{p^n+1}\left(\frac{(2n-2)(2n-1)...(n+2)(n+1)n!}{n!n!}\right)$$

$$q\left(\frac{(2n-2)(2n-1)...(n+3)(n+2)}{(n-1)!}\frac{n!}{(2n-2)(2n-1)...(n+2)(n+1)}\right) \geq p$$

$$q\frac{n}{n+1} \geq p$$

$$nq \geq (n+1)p$$

Através das inequações $(n-1)q \leq np$ e $nq \geq (n+1)p$, tentaremos encontrar um valor de 2n, para isso temos:

$$(n-1)q \leq np$$

$$(n-1)(1-p) \leq np$$

$$n - np - 1 + p \leq np$$

$$-1 + p \leq np - n + np$$

$$-1 + p \leq 2np - n$$

$$-1 + p \leq n(2p-1) \qquad (-2)$$

$$2 - 2p \geq 2n(1-2p)$$

$$\frac{2-2p}{1-2p} \geq 2n$$

$$\frac{1}{1-2p} + 1 \geq 2n$$

e temos:

$$nq \geq (n+1)p$$

$$n(1-p) \geq (n+1)p$$

$$n - np \geq np + p$$

$$2 - 2np \geq$$

$$n(1-2p) \geq p \qquad (2)$$

$$2n \geq \frac{2p}{1-2p}$$

$$2n \geq \frac{1}{1-2p} - 1$$

Através disso, percebemos que $\frac{1}{1-2p} - 1 \leq 2n \leq \frac{1}{1-2p} + 1$, como o nosso p é 0.45, teremos $9 \leq 2n \leq 11$, então deve-se escolher 10 jogadas.

2.45 Números médios de combinações

Dificuldade:3

Serão apresentada duas versões para o mesmo exercício.

a)De um baralho, cartas são colocadas em uma mesa, uma de cada vez, de face para cima e da esquerda para a direita. Outro baralho é colocado, também, do mesmo modo, mas cada carta debaixo das cartas do primeiro baralho. Qual é o número médio de cartas que serão idênticas em cima e embaixo na repetição do experimento?

b)Um digitador digita cartas e coloca em envelopes para n pessoa. As cartas são colocadas aleatoriamente nos envelopes. Em média, quantas cartas serão colocadas em seus envelopes?

Solução:

Para os dois exemplos, devemos pensar que há n posições de encontros. Chamaremos de X_i a variável que diz se houve encontro ou não. Ela assume valor 1 para encontro e 0 para não ter encontro, com isso temos que:

$$E(X_i) = 1\left(\frac{1}{n}\right) + 0\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Como queremos saber a média de encontros em todas as posições, temos:

$$E\left(\sum_{i=0}^{n} X_i\right) = \sum_{i=0}^{n} E(X_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

É esperado, então, pelo menos 1 encontro.

2.46 Problema das combinações

Dificuldade:5

Usando as condições do problema anterior, qual é a probabilidade de que ocorra exatamente r encontros?

Solução:

Primeiro devemos pensar que a quantidade de encontros não é independente, para haver encontro em uma posição a probabilidade é de (1/n), já no outro(1/(n-1)). Sabendo que temos n posições a probabilidade de r ocorrer é:

$$P(r|n) = \binom{n}{r} \frac{1}{n(n-1)(n-2)...(n-r-1)} P(0|n-r)$$

Tem-se $P(0|n-r)$, pois dos n-r que sobraram teremos 0 encontros. Reduzindo esta equação temos:

$$P(r|n) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{(n-r)!}{n!} P(0|n-r)$$

$$P(r|n) = \frac{1}{r!} P(0|n-r)$$

Por raciocínio, percebemos que, as somas das probabilidades 0 até n encontros, dado que tem n posições, será 1, isso é:

$$P(0|n) + P(1|n) + ... + P(n-1|n) + P(n|n) = 1$$

$$\frac{1}{0!} P(0|n) + \frac{1}{1!} P(0|n-1) + ... \frac{1}{(n-1)!} P(0|1) + \frac{1}{n!} = 1$$

Através desta equação poderemos descobrir os valores de cada probabilidade, para isso, devemos jogar valores para n, começando em 1:

$$P(0|1) + \frac{1}{1!} = 1$$

$$P(0|1) = 0$$

Para n=2

$$P(0|2) + \frac{1}{1!} P(0|1) + \frac{1}{2!} = 1$$

$$P(0|2) = \frac{1}{2}$$

Para n=3

$$P(0|3) + \frac{1}{1!} P(0|2) + \frac{1}{2!} P(0|1) + \frac{1}{3!} = 1$$

$$P(0|3) = \frac{4}{6}$$

Agora, vamos procurar os valores para $P(0|n)-P(0|n-1)$. Olhando alguns valores teremos:

$$P(0|1) - P(0|0) = 0 - 1 = -\frac{1}{1!},$$
$$P(0|2) - P(0|1) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2!},$$
$$P(0|3) - P(0|2) = \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3!}$$
$$P(0|4) - P(0|3) = \frac{9}{24} - \frac{2}{6} = \frac{1}{4!}$$

Com isso, percebemos que $P(0|n-r)-P(0|n-r-1) = \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}$. Bom, então temos também que a diferença entre $P(0|n-r) - P(0|0)$ é:

$$P(0|n-r) - P(0|0) = -\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}$$

$$P(0|n-r) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}$$
$$P(0|n-r) = \sum_{i=0}^{n-r} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Quando n-r é grande, temos que $P(0|n-r) \approx e^{-1}$, agora substituindo em:

$$P(r|n) = \frac{1}{r!}P(0|n-r)$$

Temos:

$$P(r|n) = \frac{1}{r!}e^{-1}.$$

2.47 Escolhendo o maior dote

Dificuldade:5

Um rei, para testar um candidato a posição de sábio, oferece a ele a chance de casar com uma jovem dama com o maior dote. Os valores dos dotes são escritos em pedaços de papeis e misturados. Um pedaço é retirado aleatoriamente e o sábio deve decidir se aquele é o maior dote ou não. Se ele decide qual é, ele consegue a dama e o dote se ele estiver correto; caso contrário, ele não ganha nada. Se ele recusar o primeiro, deve recusar ou aceitar o próximo, e assim por diante até acabar. No total, 100 moças participam, cada uma com um dote diferente. Como o sábio deve fazer sua decisão?

Solução:

Como não sabemos a distribuição dos dotes, é razoável pensar que, após um número k de dotes ele escolha o maior depois deles.

Vamos chamar de D a posição do maior dote, D=1 se a primeira dama tem o maior dote, D=2 se a segunda dama tem o maior dote. Podemos escrever a sua probabilidade de ganhar (P(G)) como:

$$P(G) = \sum_{i=1}^{100} P(G|D = i)P(D = i)$$

Temos que: P(D=i)=1/100, já a probabilidade $P(G|D = i)$ é (k/i-1), isso é, as k dotes devem ter aparecido antes de i-1. Logo, a probabilidade de ganhar passa a ser.

$$P(G) = \frac{1}{100} \sum_{i=k+1}^{100} \frac{k}{i-1} = \frac{k}{100} \sum_{i=k+1}^{100} \frac{1}{i-1}$$

Observe que:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \ln n$$

Logo:

$$P(G) = \frac{k}{100} \sum_{i=k+1}^{100} \frac{1}{i-1} = \frac{k}{100}(\ln 100 - \ln k) = -\frac{k}{n} \ln \frac{k}{n}$$

Devemos maximizar este valor. O máximo de $-x \ln x$ é $\frac{1}{e}$, com isso temos que $k \approx 37$, logo, a melhor estratégia é que após 37 dotes, ele escolha o maior que aparecer.

2.48 Escolhendo o maior número aleatório

Dificuldade:5

Em uma segunda tarefa, o rei pede para que o sábio escolha o maior número entre 100, com as mesmas regras, mas agora são sorteados números aleatórios entre 0 e 1 (números aleatórios uniformemente distribuídos). Qual deve ser a estratégia do sábio?

Solução:

Chamaremos de x o número retirado. Se já foram tirados 97 números, e 98 é o número X, temos que depois dele pode ocorrer de não haver nenhum número maior que ele, ou ter 1 ou 2 maiores. As probabilidades para isso são: x^2,2x(1-x),$(1-x)^2$ (só lembrar que foram escolhidos números entre 0 e 1, seguindo distribuição uniforme) respectivamente, se escolhermos o próximo número maior a probabilidade de acertar é $2x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2$. Queremos, então, que a probabilidade de que tenha nenhum número maior que x e a de que o próximo número maior seja o maior, sejam iguais. Isso é:

$$x^2 = 2x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2$$

De uma forma mais geral se faltam r números para serem sorteados, temos:

$$x^r = \binom{r}{1} x^{r-1}(1-x) + \frac{1}{2}\binom{r}{2} x^{r-2}(1-x)^2 + ... + \frac{1}{r}\binom{r}{r}(1-x)^r$$

A maior contribuição desta equação vem de $rx^{r-1}(1-x)$, ou seja:

$$x^r \approx rx^{r-1}(1-x)$$

$$\frac{x^r}{x^{r-1}} \approx r - rx$$

$$x + rx \approx r$$

$$x(1+r) \approx r$$

$$x \approx \frac{r}{1+r}$$

Assim, temos que dependendo da quantidade de números que falta podemos escolher um maior, isso é se falta 3, o número maior que 0.75 deve ser escolhido. Isso não dá certeza se é o maior, mas é a melhor estratégia.

2.49 Dobrando sua precisão

Dificuldade:4

Um instrumento para medir distância imparcial faz erros aleatórios cuja distribuição tem desvio padrão σ. São permitidas duas medições para estimar o tamanho de duas barras cilíndricas, uma claramente maior que a outra. Você pode fazer melhor do que tirar uma medida pra cada barra?(Um instrumento imparcial é aquele que, em média, dá a verdadeira medida)

Solução:

Iremos chamar de A o tamanho do maior e B o tamanho do menor. Podemos colocar as barras lado a lado e medir a diferença(A-B) e podemos colocar uma ponta na outra e medir a soma(A+B). Vamos chamar D=A-B e S=A+B. Assim a estimativa para A é $\frac{1}{2}(S+D)$ e a estimativa para B é $\frac{1}{2}(S-D)$.

Agora, temos que a medida de D é A-B+d, onde d é o erro, e temos que a medida de S é A+B+s, onde s é o erro. Logo, a estimativa para A seria A+$\frac{1}{2}(d+s)$, a variância dessa estimativa é $\frac{1}{2}\sigma^2$. Isso é o mesmo que a variância para a média de duas medidas retiradas da barra A. Pelo mesmo raciocínio percebemos que a variância da estimativa para B é $\frac{1}{2}\sigma^2$. Com isso, tirar as medidas da soma e diferença das barras é o mesmo que tirar 4 medidas, duas para cada cilíndro.

2.50 Equações quadráticas aleatórias

Dificuldade:4

Qual é a probabilidade de que a equação quadrática x^2 + 2bx + c = 0, tenha soluções reais?

Solução:

Para esse exercício, devemos pensar que a equação só terá solução quando $b^2 - c \geq 0$. Faremos a conta para um valor B fixo, para depois achar de uma maneira geral. Vamos fixar B=4 e utilizar uma demonstração gráfica para explicar o exercício:

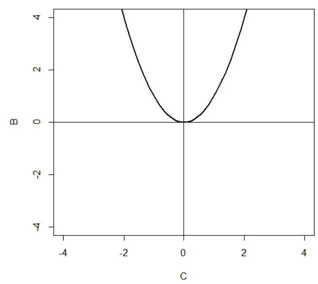

Figura 4: Equação $b^2 - c = 0$

A parte de dentro da parábola corresponde a $b^2 - c \leq 0$ e isto é, quando a equação não dá números reais, esta área é de $\frac{4}{3}B^{\frac{3}{2}}$ ($\int \sqrt{c}dA$), isso, quando $B \geq 1$. A área total é $4B^2$. A probabilidade de dar raízes complexas é:

$$\frac{\frac{4B^{\frac{3}{2}}}{3}}{4B^2} =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{B}}$$

Para o caso de B=4, temos que a probabilidade de dar raiz complexa é $\frac{1}{6}$. Agora, quando B vai crescendo $\frac{1}{\sqrt{B}}$ tende a zero, logo, a probabilidade de ter raízes reais quando B cresce tende a 1.

2.51 Duas dimensões andar aleatório

Dificuldade:5

Começando do ponto 0, uma partícula tem probabilidade 1/2 de dar um passo para Norte e 1/2de dar um passo para Sul, e também, 1/2 de dar uma passo para Leste e 1/2 de dar um passo para Oeste. Após um passo ter sido dado, a partícula se movimenta novamente, indo para algum ponto. Qual é a chance de que a partícula retorne para o seu ponto original?

Solução:

Primeiro iremos chamar de P a probabilidade da partícula voltar ao ponto inicial, e temos que 1-P=Q. Logo a probabilidade de ter x retornos ao andar é P^xQ, com isso temos que a média de não retornos é:

$$\sum_{x=0}^{\infty} xP^xQ = \frac{1}{Q}$$

Logo a média de sucessos é 1/Q -1. Então devemos procurar esse valor.

Para isso vamos olhar os movimentos da partícula por coordenada(x- Leste e Oeste, y- Norte e Sul),no primeiro passo, ela irá para x=1 ou x=-1, no segundo passo, ela pode ir para x=-2,x=0,x=2, com probabilidades $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$ respectivamente e o mesmo para y. Expandindo estas possibilidades de passos, percebemos que é preciso um número par de passos para que a partícula volte a posição original, e também percebemos que P(X=0)=$\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$, e a probabilidade P(Y=0)=$\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$, e os passos são independentes, com isso, a probabilidade de a partícula voltar para origem é:

$$\left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2$$

Usando a aproximação de Stirling, temos:

$$\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{n!n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \approx \frac{\sqrt{2\pi 2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\right)^2 2^{2n}} = \frac{2\sqrt{\pi n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}}{2(\sqrt{\pi n})^2 n^{2n}e^{-2n}2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Para o nosso caso, teremos $\frac{1}{\pi n}$. Devemos fazer a soma para todos os valores de n, isso é:

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Essa soma é divergente, logo não tem limites e como $Q = \frac{1}{1+p}$, temos que Q tende a zero, logo P tende a 1, a partícula retornará a origem.

2.52 Urna de Molina

Dificuldade:1

Duas urnas, com o mesmo número de bolas, algumas brancas e algumas pretas em ambos. De cada urna serão retiradas n(n≥3) bolas com reposição. Ache o número de retiradas e a composição das duas urnas para que a probabilidade de todas as brancas serem tiradas da primeira seja igual a probabilidade de tirar todas brancas ou todas pretas da segunda.

Solução:

Chamaremos de z a quantidade de bolas brancas na primeira urna, x a quantidade de bolas brancas na segunda e y a quantidade de bolas pretas na segunda.Temos então:

$$\left(\frac{z}{x+y}\right)^n = \left(\frac{x}{x+y}\right)^n + \left(\frac{y}{x+y}\right)^n$$

$$z^n = x^n + y^n$$

Seguindo o último teorema de Fermat não há solução possível para esta equação, quando n≥3, pelo menos para n<2000 até hoje, não foi encontrada solução.

Referências

[1] Monsteller, Frederick, Fifty challenging problems in probability with solutions(1916).