INTRODUÇÃO AOS RESSEGUROS

Adrian Hinojosa e Aniura Milanés

Departamento de Estatística
ICEx. UFMG.

Sumário

Capítulo 1. As probabilidades e a teoria do risco 1
1. Por que as probabilidades? 1
2. Probabilidades e variáveis aleatórias nos seguros 3
3. Funções que caracterizam a distribuição 6
4. Algumas estatísticas descritivas 13
5. Função geradora de momentos e de cumulantes 15
6. Vetores aleatórios 20
7. Construção de novas distribuições 24
8. Variáveis aleatórias não negativas 35
9. Exercícios 42

Capítulo 2. Introdução ao resseguro 47
1. Introdução 47
2. Formas de resseguro 48
3. Efeito do resseguro nas características das distribuições 57
4. Exercícios 69

Referências 71

CAPíTULO 1

As probabilidades e a teoria do risco

1. Por que as probabilidades?

A teoria do seguro está baseada no pressuposto de que indivíduos, ante uma possível grande perda, podem reduzir seus efeitos financeiros formando um grupo que a compartilhe. Dessa forma, a grande maioria das pessoas prefere assumir o compromisso pelo pagamento periódico de uma quantidade fixa e razoável de dinheiro a correr o risco de ter que eventualmente fazer face a uma perda muito grande, ainda que ela seja pouco provável.

O seguro é um mecanismo que transfere o risco de pessoas, instituições, empresas ou organizações (segurados) para companhias de seguros (seguradoras). Os segurados deixam de correr o risco de enfrentar grandes prejuízos financeiros por meio do pagamento periódico de uma quantia fixa chamada de prêmio do seguro. Isto é formalizado através de um contrato ou apólice de seguros feito entre segurado e seguradora. Quando um segurado sofre uma perda como consequência de algum acidente ou desastre natural, por exemplo, pela qual deseja ser reembolsado, ele apresenta uma reclamação de sinistro ou pedido de indenização à seguradora que, dependendo do contrato, atende ou não esse pedido.

Exemplo 1.1. As apólices dos seguros dos carros de Marta e Francisco valem de dezembro de 2007 a dezembro do 2008. Ambos pagam como prêmio o valor de $RS1.500,00$ por ano. Marta não reportou sinistros durante esse período. No entanto, Francisco teve que trocar o motor do carro, pois ele ficou submerso na água durante várias horas num alagamento.

O prêmio pago por Francisco foi várias vezes menor do que ele teria que ter pago pelo conserto do seu carro. A situação da Marta é outra. Aparentemente ela perdeu o valor pago, mas isto não é exatamente assim. Observe que no momento em que ela faz o pagamento, ainda não sabe se vai ter algum problema com seu carro no ano 2008. Ela fica mais tranquila sabendo que não terá que assumir grandes prejuízos financieiros devidos a problemas com seu carro. No seu caso, ela pagou somente por essa tranquilidade. Cabe a cada um decidir se a tranquilidade vale ou não esse preço.

◁

Caberia se perguntar como é possível que as companhias seguradoras possam assumir uma grande quantidade de riscos alheios sem ter prejuízos e, ainda mais, tendo lucro. Isso ocorre porque, na realidade, relativamente poucos segurados notificam sinistros significativamente vultosos. Além disso, os prêmios são calculados de forma que a companhia seguradora consiga fazer frente às indenizações solicitadas.

Dessa forma, aparece naturalmente na teoria sobre a atividade seguradora, a necessidade de lidar com a incerteza sobre a ocorrência de fenômenos que possam causar prejuízos. O principal objetivo das ciências atuariais é analisar as consequências financeiras de eventos futuros que são incertos. Em particular, interessa desenhar mecanismos de proteção contra os efeitos de perdas grandes e imprevisíveis. Por essa razão, é bastante natural pensar que uma teoria que dê um embasamento apropriado à atividade seguradora deve tratar com fenômenos nos quais há envolvida incerteza. A teoria da probabilidade é a área da matemática que se ocupa do estudo de tais fenômenos. Isso é feito através da quantificação da chance de ocorrência de cada um dos resultados possíveis.

A teoria do risco se ocupa do estudo dos modelos probabilísticos que melhor se adaptam à atividade seguradora. Seu objetivo é representar a evolução dos pagamentos futuros de uma empresa seguradora. Há vários fatores que podem influenciar o resultado.

Exemplo 1.2. Durante o ano de 2008 a seguradora **A** não recebeu nenhuma reclamação de indenização, a seguradora **B** teve que pagar um total de $RS20.000,00$ para reembolsar quatro segurados que apresentaram notificações de sinistros reclamando indenizações pelo mesmo valor, em janeiro, junho, agosto e novembro, respectivamente. Por outro lado, a seguradora **C** teve que indenizar somente 10 segurados na primeira semana do mês de agosto, tendo que pagar a cada um a quantia de $RS1.500,00$. É bastante claro que a seguradora **A** é a que está na melhor situação, pois ela não teve perdas no período analisado. O que dizer em relação às outras duas seguradoras? Certamente a seguradora **B** teve a maior perda ao longo do ano, talvez poderíamos concluir que foi essa a seguradora que teve o maior prejuízo entre as três? Esta seguradora perdeu no máximo $RS5.000,00$ por mês. No entanto, a seguradora **C** teve que pagar $RS15.000,00$ em uma semana!!

É claro que a resposta depende da maneira na qual as seguradoras controlam as suas finanças, mas é bastante lógico pensar que a melhor situação é a de ter perdas espalhadas ao longo do período analisado.

◁

Do exemplo anterior podemos concluir que necesitamos de uma teoria que leve em conta

- se há ou não ocorrência de sinistros no período analisado;
- os instantes das ocorrências;
- os valores pagos como indenização por essas ocorrências.

O estudo dos modelos associados aos ramos vida e não vida geralmente é feito por separado devido às grandes diferenças entre eles, particularmente no que diz respeito à validade das apólices e ao número máximo de indenizações por período relativo a cada apólice, por exemplo.

Neste texto trataremos somente o ramo não vida. Abordaremos o estudo dos modelos que descrevem melhor o montante das indenizações agregadas ou perda agregada, relativos a todos os sinistros ocorridos que dão lugar a indenizações ao longo de um determinado período de tempo. Analisaremos também a regularidade dessas ocorrências numa apólice ou conjunto definido de apólices.

Como mencionamos anteriormente, neste texto estudaremos modelos. Modelos matemáticos são representações de fenômenos reais que nos ajudam a esclarecer alguns dos aspectos do seu funcionamento. Um bom modelo matemático deve ser, por um lado, não muito complexo, pois isso dificulta o seu estudo teórico e, por outro, não muito simples, pois isso o afastaria da essência do fenômeno que queremos representar.

Claramente, todo modelo matemático é irreal, mas um bom modelo deve permitir esclarecer pontos importantes da realidade que queremos explicar. Faremos aqui algumas suposições com o objetivo de simplificar a teoria. Consideraremos que as perdas de uma seguradora ocorrem somente quando ela atende às indenizações. Na verdade isto não é bem assim, pois as seguradoras têm também despesas operacionais, de investimento, administrativas, etcétera. Além disso, embora haja na prática quase sempre uma diferença entre o instante de ocorrência de um sinistro e o instante de pagamento da indenização correspondente, assumiremos aqui que eles são iguais. Dessa forma, as perdas ou indenizações individuais (ou seja, relativas a uma apólice) coincidem, assim como as perdas ou indenizações agregadas. Na realidade, as seguradoras devem obter uma estimativa da importância que pagarão no futuro por sinistros que já ocorreram. Isto é chamado de reserva de sinistro e o seu cálculo merece um estudo detalhado que não faremos aqui (veja [**11**, **15**], por exemplo).

Podemos dizer então que a atividade seguradora funciona da seguinte forma: as pessoas, ante a possibilidade da ocorrência de uma situação adversa que não querem assumir, optam por transferir este risco a uma companhia seguradora e aceitam pagar a ela uma quantidade fixa periodicamente. A seguradora, por sua vez, forma grupos de indivíduos de forma a garantir que os gastos pelas indenizações agregadas sejam razoavelmente previsíveis. A teoria do risco lhe fornece ferramentas teóricas que a auxiliam no cálculo dos prêmios que lhe permitirão obter lucro nesse processo. Uma leitura mais detalhada sobre o funcionamento do seguro e sobre a modelagem na teoria do risco pode ser feita nos livros [**11**, **15**, **4**], por exemplo.

2. Probabilidades e variáveis aleatórias nos seguros

A probabilidade é a teoria que estuda os fenômenos ou situações envolvendo incertezas. Na teoria das probabilidades, chama-se de espaço amostral ao conjunto de todos os resultados possíveis de uma de tais situações. Os subconjuntos do espaço amostral são chamados de eventos. A chance de ocorrência de cada evento é quantificada no seu valor de probabilidade. Este é medido na escala de 0 a 1.

Exemplo 2.1. Um dado sobre o qual não temos nenhuma informação é lançado e se observa o número da face que é obtida. O espaço amostral está composto pelas seis faces do dado. Assumir que as probabilidades de todas as seis faces sejam iguais equivaleria a não poder arriscar nenhum palpite sobre o valor da face obtida. Em outras palavras, o dado é simétrico e um jogo de azar com este dado seria um jogo ”honesto”. Se, no entanto, soubéssemos que a probabilidade de sair a face 3 é 0.85, teríamos uma grande chance de acertar o resultado do lançamento ainda que não o tivéssemos visto, se arriscássemos que o resultado fosse 3.

$\triangleleft$

Exemplo 2.2. A probabilidade de um plano de saúde ter que arcar com vultosas despesas hospitalares de um cliente durante um ano depende da idade e, de forma geral, das condições de vida do segurado. Para clientes na faixa de idade acima dos 65 anos, este valor deve ser várias vezes maior que para clientes entre 20 e 30 anos, por exemplo. Esta é uma das razões pelas quais os prêmios cobrados pelas operadoras de planos de saúde para pessoas idosas são bem maiores que os cobrados nas outras faixas etárias.

$\triangleleft$

Quando uma seguradora de automóveis, por exemplo, vende uma apólice de seguro a um cliente, ela deve determinar o prêmio com base numa quantidade muito limitada de informações sobre este indivíduo. Tipicamente, esse valor é calculado utilizando dados históricos de grupos de motoristas com características similares. Com o passar do tempo, a seguradora vai adquirindo informações sobre o segurado que podem provocar mudanças no prêmio na hora de renovar o contrato, como número de multas, número de acidentes, etc. Essas novas informações farão com que a seguradora modifique a previsão que ela fez da chance do segurado ter um acidente no período do contrato e que ajuste correspondentemente o prêmio do seguro.

As probabilidades que são calculadas levando em conta novos fatos e informações são chamadas de probabilidades condicionais.

Exemplo 2.3. Isaac e Sérgio fazem o seguro dos seus carros pela primeira vez em uma certa seguradora. Ambos são clientes novos. Como eles têm perfis e automóveis similares, os atuários da companhia estimam que ambos têm probabilidade 0.01 de reportar algum sinistro durante o primeiro ano de validade da apólice. Durante esse ano, Isaac bateu o carro três vezes, enquanto Sérgio não fez nenhuma relamação de indenização. Uma ano depois, eles foram renovar as suas apólices, então o valor estimado da probabilidade de Isaac reportar algum sinistro foi 0.20 e o de Sérgio foi 0.015. Por esta razão o prêmio calculado para o Isaac foi bem maior e ele decidiu mudar de seguradora.

Os valores 0.20 e 0.015 são probabilidades condicionais, pois eles foram calculados atualizando o valor inicial de ocorrência de sinistros, usando a informação coletada ao longo do período de validade das apólices.

◁

Se A e B são eventos, então o símbolo $\mathbb{P}(A|B)$ denotará a chance de ocorrência do evento A, uma vez que sabemos que B ocorreu. Se $\mathbb{P}(B) > 0$, então esta probabilidade pode ser calculada da seguinte forma:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{2.1}$$

A expressão acima dá uma maneira de se calcular a probabilidade condicional a partir de probabilidades "incondicionais". A fórmula da probabilidade total, que apresentamos a seguir, funciona no sentido inverso, ou seja, nela calculamos uma probabilidade incondicional usando várias probabilidades condicionais.

Teorema 2.4 (Lei da probabilidade total). *Suponha que $A_1, A_2, \dots, A_n$ são eventos tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$ e $A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n = \Omega$, ou seja, eventos que formam uma* ***partição do espaço amostral****. Então para cada evento E teremos*

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(E|A_2)\mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(E|A_n)\mathbb{P}(A_n).$$

Na lei da probabilidade total, o que fazemos essencialmente é decompor uma probabilidade incondicional em componentes que são probabilidades condicionais e que são mais simples de se calcular na prática.

Exemplo 2.5. Uma seguradora de carros classifica seus segurados como sendo de risco médio ou risco alto seguindo certo procedimento. Três quartos dos segurados são considerados como de risco médio. Ao longo de um ano, 1% dos segurados de risco médio tiveram acidentes de carro da sua responsabilidade, enquanto que esse número foi 5% para aqueles de risco alto.

Qual foi a porcentagem de segurados que tiveram acidentes de carro da sua responsabilidade durante esse ano?

Consideremos os seguintes eventos:

A: O segurado é de risco médio.
B: O segurado é de risco alto.
C: O segurado teve acidentes de carro da sua responsabilidade ao longo do ano.

Sabemos que

$$\mathbb{P}(A) = 0.75, \quad \mathbb{P}(B) = 0.25,$$
$$\mathbb{P}(C|A) = 0.01, \quad \mathbb{P}(C|B) = 0.05.$$

Então, pela lei da probabilidade total o valor pedido será

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B)\mathbb{P}(B) \\ &= 0.01 \cdot 0.75 + 0.05 \cdot 0.25 \\ &= 0.02. \end{aligned}$$

Ou seja, 2% dos segurados tiveram acidentes de carro da sua responsabilidade durante esse ano.

◁

O teorema de Bayes dá uma fórmula para recalcular probabilidades incorporando nelas novas informações.

Teorema 2.6 (Teorema de Bayes). *Suponha que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos que formam uma partição do espaço amostral. Então para qualquer evento E e para $1 \leq j \leq n$ vale*

$$\mathbb{P}(A_j|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(E|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(E|A_2)\mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(E|A_n)\mathbb{P}(A_n)}.$$

Exemplo 2.7. Uma operadora de planos de saúde sediada em Belo Horizonte atende clientes que moram nesta cidade e também em algumas outras cidades da região metropolitana. Dos atendimentos de emergência feitos a moradores em Belo Horizonte, 90% são em unidades assistenciais nesta cidade e o resto em unidades em cidades da região metropolitana. Para clientes que não moram em Belo Horizonte, este valor é 15%.

Sabe-se que 80% dos clientes desta operadora moram em Belo Horizonte. Se um atendimento de emergência é feito em uma unidade assistencial fora da cidade de Belo Horizonte, qual é a probabilidade do paciente ter sido um morador desta cidade?

Chamemos de

A: O paciente mora em Belo Horizonte.
B: O paciente não mora em Belo Horizonte.
E: O atendimento é feito em Belo Horizonte.
F: O atendimento é feito fora de Belo Horizonte.

Do enunciado do problema temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E|A) = 0.90, \quad \mathbb{P}(F|A) = 0.10, \\ \mathbb{P}(E|B) = 0.15, \quad \mathbb{P}(F|B) = 0.85, \\ \mathbb{P}(A) = 0.80, \quad \mathbb{P}(B) = 0.20. \end{aligned}$$

Usando o teorema de Bayes obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|F) &= \frac{\mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F|B)\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{0.10 \cdot 0.80}{0.10 \cdot 0.80 + 0.85 \cdot 0.20} \\ &= 0.032. \end{aligned}$$

Como conclusão, temos que somente $3,2\%$ dos atendimentos feitos fora de Belo Horizonte correspondem a pacientes moradores desta cidade.

◁

Muitas vezes teremos associadas a fenômenos com vários resultados possíveis, certas quantidades numéricas cujo valor dependerá do resultado ocorrido. Elas serão chamadas de **variáveis aleatórias**.

Exemplo 2.8. Na comparação que fizemos logo depois do exemplo 1.2, vimos que quantias como número de e valor total das indenizações ao longo de um período são de grande interesse na atividade de uma empresa seguradora. Elas são exemplos de variáveis aleatórias e têm um papel fundamental na teoria do risco.

◁

3. Funções que caracterizam a distribuição

Muitas vezes será preciso calcular probabilidades associadas a variáveis aleatórias. Para isso, é fundamental a função de distribuição.

Definição 3.1. Chamaremos de função de distribuição da variável aleatória X à função F_X definida por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

A função de distribuição é chamada também de função de distribuição acumulada. Se X é uma variável aleatória, então a sua função de distribuição F_X sempre será não descrescente e contínua à direita, com limite zero em $-\infty$ e um em $+\infty$, ou seja, $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(+\infty) = 1$. Outra propriedade muito importante é apresentada a seguir.

Proposição 3.2. *Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, vale*

$$\mathbb{P}(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0-),$$

onde $F_X(x_0-)$ representa o limite pela esquerda de F_X no ponto $X = x_0$, ou seja, $F_X(x_0-) = \lim_{x \uparrow x_0} F_X(x)$.

Graficamente, teríamos:

A seguir apresentamos alguns exemplos de funções de distribuição.

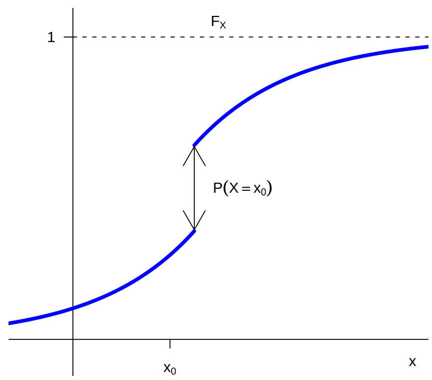

FIGURA 1. $\mathbb{P}(X = x_0)$ é o salto de F_X em $x = x_0$.

Exemplo 3.3. Representa-se o número de reclamações feitas numa apólice durante um ano através de uma variável aleatória com função de distribuição

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0,6, & 0 \le x < 1; \\ 0,75, & 1 \le x < 2; \\ 0,83, & 2 \le x < 3; \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

Este modelo corresponde a uma situação na qual podem haver nenhuma, uma, duas, ou três reclamações. O gráfico desta função aparece na figura 2

◁

Numa determinada situação, poderíamos precisar de um modelo que admitisse uma quantidade ilimitada de valores de reclamações possíveis. Neste caso, poderíamos utilizar outras distribuições como a de Poisson ou a Binomial Negativa, que serão estudadas no próximo capítulo.

Exemplo 3.4. O tempo em dias decorrido entre duas ocorrências de sinistros em apólices de uma determinada carteira é modelado por uma variável aleatória com distribuição

$$F_2(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{20}}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Observando o gráfico de F_2 percebemos que $F_2(x)$ nunca atinge o valor 1. Entretanto, como $F_2(47) \simeq 0,90$, podemos dizer que, se um sinistro ocorrer, em aproximadamente 90% dos casos ocorrerá o sinistro seguinte em no máximo 47 dias.

Nesse caso, diferentemente do anterior, a função de distribuição é contínua.

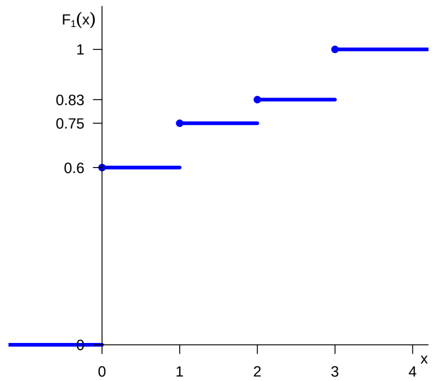

FIGURA 2. Gráfico de F_1.

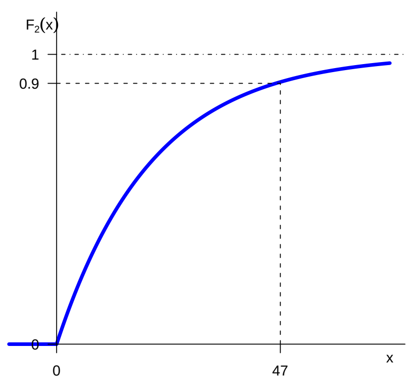

FIGURA 3. Gráfico de F_2.

◁

Exemplo 3.5. O valor total (em reais) pago por indenizações devidas a reclamações de "má prática médica" feitas em um determinado hospital ao longo de um ano é representado por uma variável aleatória com distribuição

$$F_3(x) = \begin{cases} 1 - 0,2e^{-\frac{x}{1000}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Embora esta função seja parecida com a do exemplo anterior, ela apresenta características muito diferentes, essencialmente pelo fato dela não ser mais contínua no ponto $x = 0$.

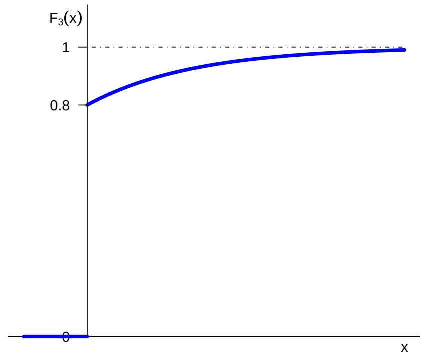

FIGURA 4. Gráfico de F_3.

Neste caso, temos a maior parte da probabilidade $(0, 8)$ concentrada no valor zero. Isso corresponde a uma situação na qual em oito de cada dez anos, a seguradora não paga nada por reclamações desse tipo.

◁

De alguma maneira, os exemplos que acabamos de estudar representam três grandes grupos nos quais se dividem as variáveis aleatórias.

Definição 3.6. Uma variável aleatoria X é discreta se ela toma uma quantidade enumerável de valores. A função que a cada valor de X faz corresponder o seu valor de probabilidade é chamada de função de massa de probabilidade de X e é denotada por p_X, ou seja, se x_j é um valor de X,

$$p_X(x_j) = \mathbb{P}(X = x_j).$$

A função de distribuição de uma variável aleatória discreta satisfaz

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i).$$

Exemplo 3.7. A função de distribuição representada no exemplo 3.3 corresponde a uma variável aleatória X discreta com função de massa de probabilidade

$$p_X(x) = \begin{cases} 0,6, & x = 0; \\ 0,15, & x = 1; \\ 0,08, & x = 2; \\ 0,17, & x = 3. \end{cases}$$

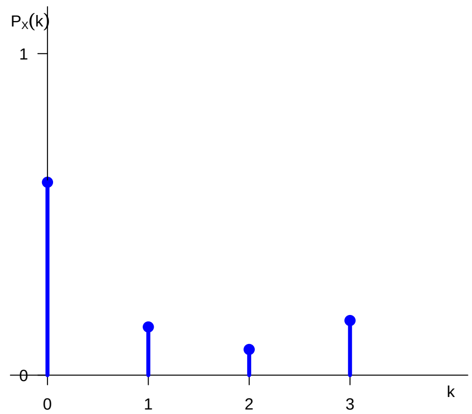

FIGURA 5. Gráfico de p_X no exemplo 3.3.

◁

Como conseqüência da propriedade 3.2, a função de distribuição de uma variável aleatória discreta sempre será constante por intervalos.

Definição 3.8. Uma variável aleatória X é dita contínua se a sua correspondente função de distribuição for contínua e diferenciável em todos os pontos, salvo em uma quantidade no máximo enumerável de pontos excepcionais. A derivada da função de distribuição $f_X(x) = F'_X(x)$, definida em quase todos os pontos, será chamada função de densidade ou simplesmente densidade de X.

A função de distribuição de uma variável aleatória X contínua se escreve como

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Exemplo 3.9. A variável aleatória X no exemplo 3.4 é contínua com função de densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}e^{-\frac{x}{20}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

O gráfico desta função aparece na figura 6.

◁

Devido à propriedade 3.2, toda variável aleatória contínua X deve satisfazer $\mathbb{P}(X = a) = 0$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Isso significa que, para este tipo de variáveis, é muito difícil (ou talvez irrelevante) na prática verificar a ocorrência de valores particulares, o que torna mais conveniente nos referirmos à ocorrência de uma faixa de valores.

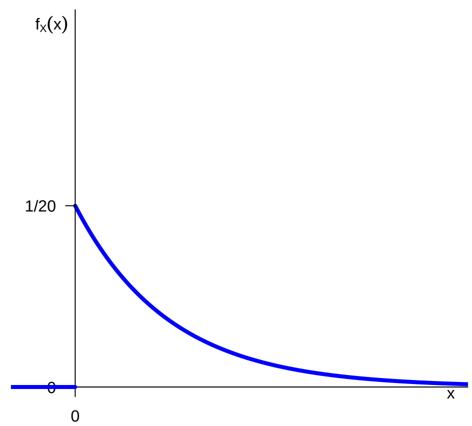

Figura 6. Gráfico de f_X no exemplo 3.4.

Para dar uma interpretação da função de densidade, suponhamos que f_X seja contínua em $x = x_0$ e consideremos um intervalo da forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Pelo teorema do valor médio integral, vale que se ε for suficientemente pequeno, então

$$\mathbb{P}(x_0 - \varepsilon < X < x_0 + \varepsilon) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f_X(x)dx \approx 2\varepsilon f_X(x_0).$$

e $f_X(x_0) \approx \frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{P}(x_0-\varepsilon < X < x_0+\varepsilon)$, ou seja, se considerarmos a probabilidade $\mathbb{P}(x_0-\varepsilon < X < x_0+\varepsilon)$ como o peso dos valores de X no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $f_X(x_0)$ corresponde ao limite deste peso por unidade de comprimento quando este comprimento vai para zero, correspondendo com a noção de densidade. Assim, aqueles x_0 com menor valor de $f_X(x_0)$ serão menos frequentes que os que têm $f_X(x_0)$ maior.

Definição 3.10. Uma variável aleatória X será chamada **mista** se ela não for discreta e se, além disso, a sua função de distribuição F_X for descontínua em pelo menos um ponto e, no máximo, em um conjunto enumerável de pontos.

As variáveis aleatórias mistas são híbridas de variáveis contínuas e discretas e aparecem muito na teoria do risco, particularmente em certos tipos de contratos de seguros. Elas não podem ser descritas nem através de funções de probabilidade nem através de funções de densidade.

Exemplo 3.11. A variável aleatória do exemplo 3.5 é uma variável mista.

◁

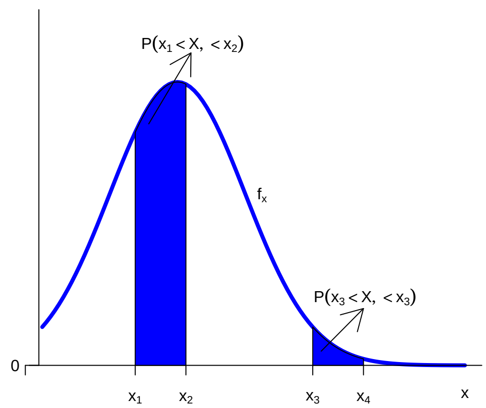

FIGURA 7. Os valores de X em (x_3, x_4) são menos frequentes que aqueles em (x_1, x_2) .

A partir da função de distribuição, podem ser definidas outras funções que também são de interesse da matemática atuarial.

Definição 3.12. Chamaremos de **função de sobrevivência** de uma variável aleatória X à função

$$S_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x).$$

A função **taxa de falha acumulada** ou **função de risco** é definida por

$$H_X(x) = -\log S_X(x).$$

Se X for uma variável aleatória contínua, utiliza-se também a função **taxa de falha**, [a]

$$h_X(x) = H'_X(x) = -\frac{S'_X(x)}{S_X(x)},$$

naqueles pontos $x \in \mathbb{R}$ onde F_X seja diferenciável. Neste caso, vale ainda

$$H_X(x) = \int_{-\infty}^{x} h_X(y)dy$$

e

$$S_X(x) = \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{x} \lambda_X(t)dt\right).$$

[a]também chamada de força de mortalidade na teoria dos seguros de vida

Na literatura matemática utiliza-se muito a notação $\bar{F}_X$ para a função de sobrevivência S_X. As funções de sobrevivência e taxa de falha são muito utilizadas quando X representa o tempo de vida, seja de uma pessoa ou de um produto, com duração limitada. Neste caso, $S_X(x_0)$ seria a probabilidade da pessoa (ou do produto) "viverem"mais de x_0 unidades de tempo. $\lambda_X(x_0)$ representa a densidade de frequência relativa de falha na idade x_0, dado que houve sobrevivência até a idade x_0.

Exemplo 3.13. As funções de sobrevivência nas variáveis dos exemplos 3.3, 3.4 e 3.5 são, respectivamente

$$S_1(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0,4, & 0 \leq x < 1, \\ 0,25, & 1 \leq x < 2, \\ 0,17, & 2 \leq x < 3, \\ 0, & x \geq 3; \end{cases}$$

$$S_2(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{20}}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

e

$$S_3(x) = \begin{cases} 0,2e^{-\frac{x}{1000}}, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

No caso do exemplo 3.4, existe também a função taxa de falha

$$h_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

◁

A função de sobrevivência é mais comumente usada para variáveis aleatórias com valores não negativos. Neste caso é comum considerar S_X como função definida somente nestes valores. No exemplo acima particularmente, escreveríamos $S_2(x) = e^{-\frac{x}{20}}$ e $\lambda_2(x) = \dfrac{1}{20}$, $x > 0$.

Vimos que as funções de distribuição, de probabilidade, de densidade e de sobrevivência caracterizam totalmente a distribuição das variáveis aleatórias. Entretanto, elas não permitem, por exemplo, fazer comparações rápidas entre duas variáveis aleatórias. Para isso, muitas vezes é melhor usar **estatísticas descritivas**, algumas das quais descreveremos a seguir

4. Algumas estatísticas descritivas

Às vezes é interessante conhecer, por exemplo, o tempo médio entre duas reclamações feitas numa determinada carteira ou o valor médio pago como indenização devido a reclamações.

Definição 4.1. O momento de ordem k, $k = 1, 2...$, de uma variável aleatória X é o valor esperado da k-ésima potência desta variável, assumindo que ele existe. Ele é denotado por $\mathbb{E}(X^k)$ ou μ'_k e é calculado como
$$\mu'_k = \sum_i x_i^k p_X(x_i),$$
se X for discreta e
$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx,$$
se X for contínua.

Quando $k = 1$, $\mathbb{E}(X)$ é chamado de esperança ou valor esperado de X e será denotado como μ_X.

Exemplo 4.2. No exemplo 3.3, podemos calcular
$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,08 + 3 \cdot 0,17 = 0,82.$$
No exemplo 3.4, a variável X é contínua, portanto devemos fazer
$$\mu_X = \int_0^{+\infty} \frac{x}{20} e^{-\frac{x}{20}} dx = 20,$$
enquanto no exemplo 3.5, X é uma variável mista e sua esperança e calculada como[1]
$$\mu_X = 0 \cdot 0,8 + \int_0^{+\infty} 0,2xe^{-\frac{x}{1000}} dx = 200000.$$
◁

Definição 4.3. O momento central de ordem k, $k = 1, 2...$, de uma variável aleatória X é a esperança da k-ésima potência da diferença entre X e sua média e é denotado por $\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^k]$, quando este número existe.

O segundo momento central é comumente chamado de variância e denotado por
$$\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2].$$
A sua raiz quadrada $\sigma_X = [Var(X)]^{\frac{1}{2}}$ é chamada de desvio padrão.

Nos cursos de cálculo de probabilidades, prova-se a seguinte fórmula muito útil para o cálculo da variância
$$\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu_X^2.$$

O desvio padrão é uma medida de quanto a probabilidade é espalhada sobre os valores possíveis da variável X em relação à sua média μ_X. Para considerar esta variação em termos relativos, define-se o coeficiente de variação.

[1] Na seção ??? isso ficará claro

Definição 4.4. A razão entre o desvio padrão e a esperança de uma variável X é chamada de coeficiente de variação de X e denotada por

$$CV = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

Quando seja interessante ressaltar a variável X cujo coeficiente de variação estamos calculando, o denotaremos como $CV(X)$.

O nome desvio padrão, dado à quantidade σ_X, corresponde ao fato da variável $Z = \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ estar "padronizada" no sentido de que ela é adimensional e sempre teremos $\mathbb{E}(Z) = 0$ e $Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) = 1$. Os momentos de ordem superior desta variável Z dependem de X. Alguns deles são utilizados como estatísticas descritivas.

Definição 4.5. Chamaremos de coeficiente de assimetria da variável aleatória X a quantidade

$$\gamma_X = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^3\right]$$

Não é difícil ver que para variáveis aleatórias X com distribuição simétrica, ou seja, quando $\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o coeficiente $\gamma_X = 0$. No entanto, é possível ter $\gamma_X = 0$ sem que X tenha distribuição simétrica. Em geral um valor positivo de γ_X indica que as probabilidades à direita da média tendem a ser atribuídas a valores mais afastados da média que aqueles à sua esquerda.

5. Função geradora de momentos e de cumulantes

Em geral, calcular os momentos de uma distribuição pode ser bastante complicado. Muitas vezes é mais fácil fazê-lo utilizando a chamada função geradora de momentos.

Definição 5.1. A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é a função $M_X(t)$ definida por

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right],$$

para aqueles valores de t para os quais esta expressão esteja bem definida.

Se X for contínua com densidade f_X, então

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx.$$

Se X for discreta com função de massa de probabilidade p_X, então

$$M_X(t) = \sum_i e^{tx_i} p_X(x_i)dx.$$

Pela definição, fica claro que quando $t = 0$, $M_X(t)$ sempre está definida e vale $M_X(0) = 1$.

Neste texto, estaremos mais interessados em variáveis aleatórias X que tomam valores não negativos. Isso é o que acontece, por exemplo, quando X representa a quantidade de reclamações feitas por segurados associados em uma determinada carteira ao longo de um ano ou quando X corresponde aos valores das indenizações individuais que uma seguradora tem que pagar. Ocorre que, se X é não negativa, $M_X(t)$ está definida para todo $t < h$, com $h \geq 0$, sendo que h pode tomar o valor $+\infty$. Se $h > 0$, dizemos que X tem **cauda leve** e, nesse caso, o resultado a seguir fornece uma maneira simples de calcular os momentos de X.

Propriedades 5.2. *Suponha que a função geradora de momentos M_X de uma variável aleatória X esteja definida numa vizinhança de $t = 0$. Então existem os momentos de X de todas as ordens e vale*

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} M_X(t) = M_X^{(n)}(0).$$

Exemplo 5.3. No exemplo 3.7, foi obtida a função de massa de probabilidade de uma variável X representando o número de reclamações

$$p_X(x) = \begin{cases} 0,6, & x = 0; \\ 0,15, & x = 1; \\ 0,08, & x = 2; \\ 0,17, & x = 3. \end{cases}$$

Podemos escrever então

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}], \\ &= e^{t\cdot 0} \cdot 0,6 + e^{t\cdot 1} \cdot 0,15 + e^{t\cdot 2} \cdot 0,08 + e^{t\cdot 3} \cdot 0,17 \\ &= 0,6 + 0,15e^{t} + 0,08e^{2t} + 0,17e^{3t}. \end{aligned}$$

$M_X(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto aqui $h = +\infty$. Derivando em relação a t, obtemos

$$M_X'(t) = 0,15e^{t} + 0,16e^{2t} + 0,51e^{3t}$$

e substituindo o valor $t = 0$, temos que $\mu_X = M_X'(0) = 0,82$, que coincide com o valor calculado no exemplo 4.2.

◁

Exemplo 5.4. No exemplo 3.4, a variável aleatória X representa o tempo entre duas ocorrências consecutivas de sinistros. Vimos, no exemplo 3.9, que a sua densidade satisfaz $f_X(x) = \dfrac{1}{20}e^{-\frac{x}{20}}, x > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}], \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{20} e^{tx} e^{-\frac{x}{20}} dx \\ &= \frac{1}{20} \int_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{1}{20}-t\right)} dx \\ &= \frac{1}{20} . \frac{1}{\frac{1}{20} - t} . -e^{-x\left(\frac{1}{20}-t\right)}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-20t} \end{aligned}$$

desde que $t < \dfrac{1}{20}$, ou seja $h = \dfrac{1}{20}$.

Derivando $M_X(t)$, obtemos

$$M'_X(t) = \frac{20}{(1-20t)^2}$$

e portanto, $\mu_X = M'_X(0) = 20$, que foi o valor da esperança que calculamos para X no exemplo 4.2.

◁

Exemplo 5.5. Vimos que a variável X que, no exemplo 3.5, representava valores de indenizações agregadas era uma variável mista. Apesar de não termos fornecido uma fórmula explícita para o cálculo da função geradora de momentos no caso deste tipo de variáveis, podemos proceder de forma similar a como fizemos no exemplo 4.2

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}], \\
&= e^{t.0} \cdot 0,8 + \int_0^{+\infty} 2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{tx} \cdot e^{-\frac{x}{1000}} dx \\
&= 0,8 + 2 \cdot 10^{-4} \int_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{1}{1000}-t\right)} dx \\
&= 0,8 + \frac{2.10^{-4}}{\frac{1}{1000}-t} \left| -e^{-x\left(\frac{1}{1000}-t\right)} \right|_0^{+\infty} \\
&= 0,8 + \frac{0,2}{1-1000t}
\end{aligned}$$

sempre que $t < \dfrac{1}{1000} = h$.

Podemos conferir que $M_X(0) = 0,8 + 0,2 = 1$ e, além disso,

$$M'_X(t) = \frac{200}{(1-1000t)^2},$$

portanto, $\mu_X = \mathbb{E}[X] = M'_X(0) = 200$, como foi obtido no final do exemplo 4.2.

◁

Outra propriedade muito útil da função geradora de momentos é que, sob condições bastante gerais, ela determina a distribuição de X. Em outras palavras, se duas variáveis aleatórias têm a mesma função geradora de momentos, elas devem ter a mesma distribuição.

Exemplo 5.6. Suponha que X é uma constante, por exemplo $X = 0$. Então $M_X(t) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha agora que a sua única informação sobre a distribuição de uma outra variável aleatória Y é que a sua função geradora de momentos satisfaz $M_Y(t) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, as funções geradoras de momentos de X e de Y coincidem. Assim, podemos concluir que as distribuições de X e de Y coincidem e, portanto, Y também será igual à constante 0.

◁

Exemplo 5.7. Suponha que uma variável Y tenha função geradora de momentos

$$M_Y(t) = 0,8 + \frac{0,2}{1-1000t}, t < \frac{1}{1000}.$$

Então Y é uma variável aleatória mista cuja função de distribuição é a função F_3 do exemplo 3.5.

$\triangleleft$

Algumas propriedades interessantes da função geradora de momentos são listadas a seguir.

Propriedades da função geradora de momentos

(1) $M_X(t) > 0$, para todo t onde $M_X(t)$ esteja definido;
(2) Se $X \geq 0$, então $M'_X(t) \geq 0$ e M_X é uma função estritamente crescente no seu domínio de definição a menos que X seja a constante 0, caso em que $M'_X(t) = 0$, para todo t;
(3) $M''_X(t) > 0$ para todo t tal que $M_X(t)$ esteja definido, a menos que X seja a constante 0, caso em que $M''_X(t) = 0$ para todo t;
(4) $M_X(0) = 1$ e o coeficiente angular de M_X no ponto $t = 0$ é igual a μ_X;
(5) Se a, $b \in \mathbb{R}$, temos

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at).$$

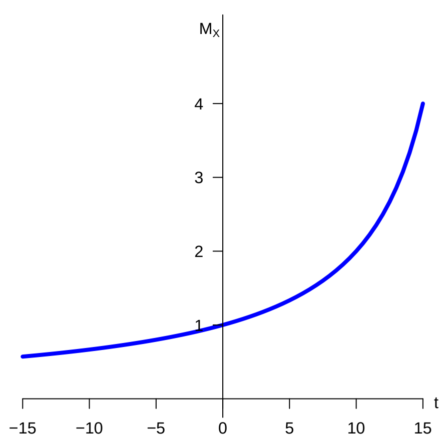

FIGURA 8. M_X com X não negativa

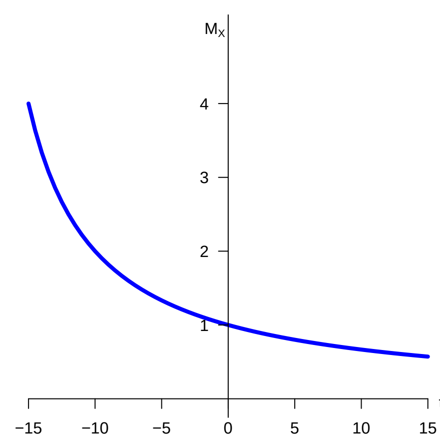

FIGURA 9. M_X com X não positiva

Existem outros valores numéricos que descrevem as características das distribuições de probabilidade. Eles são chamados **cumulantes** e estão estreitamente relacionados com os momentos. Estes valores são obtidos a partir da função geradora de cumulantes, definida a seguir.

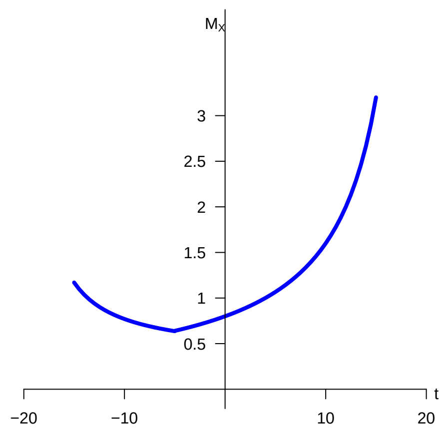

FIGURA 10. M_X com X tomando valores negativos e positivos

Definição 5.8. A função geradora de cumulantes de uma variável aleatória X é a função ψ_X definida por

$$\psi_X(t) = \ln M_X(t),$$

para todo t para o qual esta expressão faça sentido.

Se existir a j-ésima derivada de ψ_X no ponto $t = 0$, definimos o j-ésimo cumulante κ_j de X como

$$\kappa_j = \psi_X^{(j)}(0).$$

Quando for preciso especificar que estamos nos referindo ao cumulante da variável aleatória X escreveremos $\kappa_j(X)$.

Uma propriedade importante dos cumulantes é que para $j = 1$, κ_1 coincide com a média e para $j = 2$ e $j = 3$, eles coincidem com os momentos centrais. Vejamos como obter isto no caso $j = 2$.

Suponha que X seja uma variável aleatória tal que M_X seja duas vezes diferenciável numa vizinhança de $t = 0$. Derivando duas vezes a função geradora de cumulantes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\psi'_X(t) &= \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \\
\psi''_X(t) &= \frac{M''_X(t).M_X(t) - [M'_X(t)]^2}{[M_X(t)]^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo agora o valor $t = 0$ e usando que $M_X(0) = 1, M'_X(0) = \mathbb{E}X$ e $M''_X(t) = \mathbb{E}X^2$, vemos

$$\begin{aligned}\psi'_X(0) &= \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \mathbb{E}X \\ \psi''_X(0) &= \frac{M''_X(0).M'_X(0) - [M'_X(0)]^2}{[M_X(0)]^2} = \frac{\mathbb{E}X^2.1 - [\mathbb{E}X]^2}{1^2} = Var(X).\end{aligned}$$

Essa e outras propriedades da função geradora de cumulantes são resumidas a seguir.

Propriedades da função geradora de cumulantes

(1) Sob condições bastante gerais, ψ_X caracteriza a distribuição de X.

(2)
$$\kappa_j = \psi_X^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & j = 0; \\ \mathbb{E}X, & j = 1; \\ Var(X), & j = 2; \\ \mathbb{E}[(X-\mu)^3], & j = 3. \end{cases}$$

Se $j \geq 4$, em geral não vale $\kappa_j = \mathbb{E}[(X-\mu)^j]$

(3) $\psi_{aX+b}(t) = \psi_X(at) + bt$.

As propriedades da função geradora de cumulantes podem ser obtidas a partir daquelas da função geradora de momentos.

6. Vetores aleatórios

Muitas vezes as quantidades aleatórias aparecem na prática relacionadas com outras. Por exemplo, parece bastante razoável analisar a frequência de ocorrência de incêndios florestais junto com a intensidade e frequência das precipitações e número de acidentes de trânsito junto com as condições do tempo. Nestes casos interessa não somente o comportamento individual dessas quantidades, mas também as relações entre elas e por isso serão analisadas juntas, formando um vetor. Quantidades vetoriais associadas a experimentos aleatórios serão chamadas de vetores aleatórios.

Dadas duas variáveis aleatórias X e Y quaisquer, chamaremos de **função de distribuição conjunta** de X e Y ou função de distribuição do vetor (X, Y) à função de duas variáveis dada por

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

Se X e Y forem variáveis discretas, define-se a **função de massa de probabilidade conjunta** $p_{X,Y}$ como

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j),$$

onde x_i e y_j são valores possíveis de X e de Y, respectivamente.

As funções de massa de probabilidade de X e Y podem ser obtidas a partir da conjunta como mostrado a seguir,

$$p_X(x_i) = \sum_j p_{X,Y}(x_i, y_j), \quad p_Y(y_j) = \sum_i p_{X,Y}(x_i, y_j).$$

Neste contexto, as distribuições de probabilidade de X e Y são chamadas de **distribuições marginais**. Outras distribuições de interesse são as seguintes. Fixemos um valor possível para Y, y_j. Então podemos calcular

$$p_{X|Y=y_j}(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}.$$

$p_{X|Y=y_j}$ é chamada de **função de probabilidade condicional de X dado que** $Y = y_j$. Muitas vezes denota-se por $X|Y = y_j$ à distribuição correspondente e escreve-se por exemplo, $X|Y = y_j \sim Bernoulli(0, 2)$. A correspondente esperança é denotada como $\mathbb{E}(X|Y = y_j)$, ou seja,

$$\mathbb{E}(X|Y = y_j) = \sum_i x_i p_{X|Y=y_j}(x_i).$$

Observe que para cada y_j obtemos um valor $\mathbb{E}(X|Y = y_j)$, ou seja, podemos considerar a função

$$g(y_j) = \mathbb{E}(X|Y = y_j)$$

e poderíamos considerar então a variável aleatória $g(Y)$. Esta variável é chamada de **esperança condicional de X dada Y** e denotada por $\mathbb{E}(X|Y)$. É importante compreender que $\mathbb{E}(X|Y = y_j)$ é sempre um número, entanto que $\mathbb{E}(X|Y)$ é uma variável aleatória (definida como sendo uma função da variável Y).

Usando a lei da probabilidade total e do teorema de Bayes, respectivamente podemos obter

$$\begin{aligned} p_X(x_i) &= \sum_j p_{X|Y=y_j}(x_i) p_Y(y_j) \\ p_{X|Y=y_j}(x_i) &= \frac{p_{Y|X=x_i}(y_j) p_X(x_i)}{p_Y(y_j)} \end{aligned}$$

Uma propriedade essencial da esperança condicional é a seguinte.

Proposição 6.1.

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}X$$

Demonstração. Seja $g(y) = \mathbb{E}(X|Y = y_j)$. Então calculamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) &= \mathbb{E}(g(Y)) \\
&= \sum_j g(y_j)p_Y(y_j) \\
&= \sum_j \mathbb{E}(X|Y = y_j)p_Y(y_j) \\
&= \sum_j \left(\sum_i x_i p_{X|Y=y_j}(x_i)\right) p_Y(y_j) \\
&= \sum_j \sum_i x_i p_{X,Y}(x_i, y_j) \\
&= \sum_i x_i p_X(x_i) \\
&= \mathbb{E}X.
\end{aligned}$$

□

Se a $F_{X,Y}$ for diferenciável salvo em uma quantidade enumerável de pontos, então chamaremos de **função de densidade conjunta de** X **e** Y à função

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$$

As **funções de densidade marginais de** X **e** Y calculam-se como

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx.$$

Para y tal que $f_Y(y) > 0$, a distribuição condicional de X dada $Y = y$ será aquela com densidade

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_{Y(y)}}$$

cuja esperança é

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x)dx.$$

A esperança de X dada Y é a variável aleatória $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$, onde $g(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$. A propriedade de $\mathbb{E}(X|Y)$ apresentada na proposição 6.1 vale também neste caso e a prova é similar.

Formulações análogas da lei da probabilidade total e do teorema de Bayes são

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y=y}(x) f_Y(y)dy \\
f_{X|Y=y}(x) &= \frac{f_{Y|X=x}(y) f_X(x)}{f_Y(y)}
\end{aligned}$$

Se tivermos no caso discreto que $p_{X|Y=y_j}(x_i) = p_X(x_i)$, para todos os valores possíveis x_i e y_j ou, no caso contínuo que $f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$, podemos interpretar que informações adicionais sobre o valor de Y não afetam a predição que possamos fazer sobre o valor de X. Isto é a base da noção de independência.

Dizemos que duas variáveis aleatórias são independentes se a sua função de distribuição conjunta fatora no produto das marginais. Se X e Y são discretas, elas são independentes se e somente se

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j).$$

e se formarem um vetor contínuo, X e Y são independentes se e somente se

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Informalmente, podemos dizer que duas variáveis aleatórias são independentes se o conhecimento do valor de uma delas não afeta a distribuição de probabilidade da outra. Caso contrário, as variáveis são dependentes. Por exemplo, suponha que as variáveis S e N representam, respectivamente, indenização agregada e número de reclamações correspondentes a uma determinada carteira de uma empresa seguradora durante um determinado período de tempo. Então é claro que se o número N de indenizações reportadas for grande, o valor total das indenizações (S) deverá ser grande também. Resulta natural pensar que S e N devem ser variáveis aleatórias dependentes.

Mais formalmente, dizemos que duas variáveis X e Y são independentes se as suas funções de distribuição fatoram, ou seja, se

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Se X e Y são discretas, a independência equivale a

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j),$$

para todos os valores possíveis de x_i e y_j.

Se X e Y formam um vetor contínuo então a independência equivale a

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y),$$

para todos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Observe que quando as variáveis X e Y são independentes, podemos obter a distribuição conjunta a partir das marginais.

As variáveis aleatórias independentes possuem algumas outras características interessantes.

Definição 6.2. Sejam f e g duas funções de densidade. Chamamos de convolução de f e g à função de densidade dada por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)dy$$

Se $f_1, f_2, ..., f_n$ são n funções de densidade, definimos a convolução recursivamente como

$$f_1 * f_2 ... * f_n = f_1 * (f_2 * f_3 * ... * f_n).$$

Proposição 6.3. *Se $X_1, ..., X_n$ são variáveis contínuas e independentes, então*

$$f_{X_1+X_2+...+X_n} = f_{X_1} * f_{X_2} * ... * f_{X_n}.$$

Em particular, se as variáveis $X_1, X_2, ..., X_n$ são também identicamente distribuídas com densidade f, vale

$$f_{X_1+...+X_n} = \underbrace{f * f * ... * f}_{n\ vezes} = f^{*n}.$$

Outras propriedades úteis das variáveis aleatórias independentes aparecem resumidas a seguir

Propriedades Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes, então

(1) $M_{X_1+...+X_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t)$,
(2) $\psi_{X_1+X_2+...+X_n}(t) = \psi_{X_1}(t) + \psi_{X_2}(t) + \cdots + \psi_{X_n}(t)$,
(3) $\kappa_j(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \kappa_j(X_1) + \kappa_j(X_2) + \cdots + \kappa_j(X_n)$,

assumindo que todos os valores acima estejam bem definidos.

7. Construção de novas distribuições

7.1. Transformações de variáveis aleatórias. Com frequência ocorre que uma variável aleatória de interesse pode ser representada como função de uma outra cuja distribuição conhecemos.

Para fixar idéias suponha que temos uma variável Y dada pela expressão $Y = g(X)$, onde g denota alguma função escalar definida sobre os reais e X é uma variável aleatória com distribuição conhecida. Precisamos de métodos para encontrar a distribuição de Y.

Se X é discreta, o problema é bastante simples pois neste caso temos que

$$p_Y(y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) = \mathbb{P}(g(X) = y_j) = \sum_{\{i:g(X_i)=y_j\}} p_X(x_i).$$

Exemplo 7.1. Suponha que X tem a função de massa de probabilidade

$$p_X(i) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & |i| = 2; \\ \frac{1}{12}, & |i| = 1; \\ \frac{1}{2}, & i = 0. \end{cases}$$

Então $Y = X^2$ é uma variável aleatória que toma os valores 0, 1 e 4 com probabilidades

$$\begin{aligned} p_Y(0) &= p_X(0) = \frac{1}{2}, \\ p_Y(1) &= p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{6}, \\ p_Y(4) &= p_X(-2) + p_X(2) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Se X for contínua, o problema é mais complicado, pois $Y = g(X)$ pode ser discreta, contínua ou mesmo de um outro tipo.

Exemplo 7.2. Considere uma variável $X \sim N(0,1)$. Considere a função $g(x) = \text{sinal}(x)$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o seu sinal, ou seja

$$\text{sinal}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Então $Y = \text{sinal}(X)$ toma os valores 1 e -1, ambos com probabilidade $1/2$, sendo portanto uma variável aleatória discreta.

$\triangleleft$

Na próxima seção veremos um exemplo de uma função de uma variável aleatória contínua que é do tipo misto.

De forma geral sabemos que

$$F_Y(y) = F_{g(X)}(y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \int_{\{x: g(x) \leq y\}} f_X(x)dx, .$$

Se g for crescente, por exemplo, teremos que

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx.$$

Em alguns casos conseguimos garantir que Y seja também contínua.

7.1.1. *Transformações lineares.* Suponha que $Y = aX + b$, com $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Se $a > 0$ temos que

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(aX + b \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) \\ &= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \end{aligned}$$

Como F_Y é uma função diferenciável, obtemos que Y é contínua com função de densidade

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Em geral, se $a \neq 0$ vale

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Exemplo 7.3. Seja $X \sim U(0,1)$ e seja $Y = aX + b$, $a > 0$, então

$$f_Y(y) = \frac{1}{a}\left(\frac{y-b}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & b < y < a + b; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, $Y \sim U(b, a+b)$.

$\triangleleft$

7.1.2. *Transformações de potência.* Suponha que $Y = X^n$, onde n é um inteiro positivo. Se n for ímpar teremos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^n \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq y^{1/n} \\ &= F_X(y^{1/n}). \end{aligned}$$

Derivando F_Y obtemos que

$$f_Y(y) = \frac{1}{n} y^{1/n-1} f_X(y^{1/n}).$$

Se n for par, teremos que $X^n \geq 0$ e portanto $F_Y(y) = 0$ se $y \leq 0$. Se $y > 0$ vale

$$[X^n \leq n] = [-y^{1/n} \leq X \leq y^{1/n}].$$

Portanto, se $y > 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(X^n \leq y) = \mathbb{P}(-y^{1/n} \leq X \leq y^{1/n}) \\ &= F_X(y^{1/n}) - F_X(-y^{1/n}) \\ f_Y(y) &= \frac{d}{dy}\left[F_X(y^{1/n}) - F_X(-y^{1/n})\right] \\ &= \frac{1}{n} y^{1/n-1}\left[f_X(y^{1/n}) + f_X(-y^{1/n})\right]. \end{aligned}$$

Em particular, para a transformação $Y = X^2$ obtemos

$$f_Y(y) = \frac{1}{2y^{1/2}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right], \, y \geq 0.$$

Exemplo 7.4. Seja $X \sim N(0,1)$ e seja $Y = X^2$. Então se $y > 0$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2y^{1/2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}\right], \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{1/2} e^{-y/2}, \end{aligned}$$

ou seja, $Y \sim \chi^2_{(1)}$.

◁

7.1.3. *Transformações monótonas e diferenciáveis.* Utilizando o método usado nos casos anteriores é possível provar o seguinte resultado.

Proposição 7.5. *Seja Y uma variável aleatória com densidade f_X. Suponha que g é uma função estritamente monótona e diferenciável, então a variável aleatória $Y = g(X)$ tem função de densidade dada por*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|, & \text{se } y = g(x), \text{ para algum } x \in \mathbb{R}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 7.6. Seja $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ e seja $Y = -\ln(X)$. A função $g(x) = -\ln(x)$ é diferenciável e estritamente decrescente no intervalo $(0,1)$ e $\mathbb{P}(X \in (0,1)) = 1$, portanto, podemos aplicar o resultado acima. Como $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = -e^{-y}$, obtemos que $f_Y(y) = e^{-y}$, se $e^{-y} \in (0,1)$, ou seja, se $y > 0$ e concluimos que $Y \sim exp(1)$.

◁

Vimos que de maneira geral o cálculo da distribuição da variável $Y = g(X)$ pode ser bastante complicado. Por isso seria muito conveniente dispor de alguma ferramenta que simplifique o cálculo dos seus momentos.

Proposição 7.7. *Se $Y = g(X)$ tiver valor esperado finito, sendo X uma variável aleatória contínua, então*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx.$$

Exemplo 7.8. Seja $Y \sim exp(1)$ e seja $X = e^{-Y}$. Calculemos $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty e^{-2y} dy = \frac{1}{2}.$$

Observe que não precisamos determinar a distribuição de X para fazer os nossos cálculos.

No entanto, esta distribuição não é difícil de achar. Você consegue fazé-lo? (Sugestão: Veja o exemplo 7.6).

◁

7.2. Misturas e distribuições compostas.

Definição 7.9. Uma variável aleatória X é chamada de **mistura discreta** se a sua função de distribuição adota a forma

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_{X_k}(x), \tag{7.2}$$

para alguma sequência de variáveis aleatórias $\{X_k\}_{k\geq 1}$ e alguma sequência $\{p_k\}_{k\geq 1}$ de números positivos tais que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Ela será chamada de **mistura contínua** se

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{X_\lambda}(x) f(\lambda) d\lambda, \tag{7.3}$$

para alguma família de variáveis aleatórias $\{X_\lambda\}_{\lambda\in I}, I \subset \mathbb{R}$ e para alguma função de densidade f.

No primeiro caso, dizemos que X é uma mistura discreta de variáveis $\{X_k\}_{k\geq 1}$ com os pesos da mistura $\{p_k\}_{k\geq 1}$ ou, equivalentemente, que F_X é uma mistura das funções de distribuição $\{F_{X_j}\}_{j\geq 1}$, com pesos de mistura $\{p_k\}_{k\geq 1}$. No segundo caso, dizemos que X é uma mistura contínua das variáveis $\{X_\lambda\}_{\lambda \in I}$ com pesos de mistura representados pela função de densidade f.

Exemplo 7.10. Considere um contrato de seguros no qual se indeniza o segurado pelo valor total de sua perda (L) naa primeira vez que ela ocorre durante um período de tempo fixado. Chamemos de X o valor da indenização que o segurado recebe nesse período. Então teremos que

$$X = \begin{cases} 0, & \text{se não há sinistro no período;} \\ L, & \text{se há sinistro no período.} \end{cases}$$

Utilizando a fórmula da probabilidade total 2.4, podemos calcular a distribuição de X. Suponhamos que a probabilidade de haver sinistros durante o período é igual a p e denotemos $A =$"há sinistro no período". Suponhamos também que X toma valores independentemente da ocorrência de sinistros no período. Então, se $x > 0$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X \leq x|A^C)\mathbb{P}(A^C) \\ &= \mathbb{P}(L \leq x|A) \cdot p + \mathbb{P}(0 \leq x|A^C) \cdot (1-p) \\ &= pF_L(x) + (1-p)F_0(x). \end{aligned}$$

Ou seja, X é uma mistura discreta de variáveis L e da constante 0, com pesos p e $1-p$ respectivamente.

Se L for contínua, então X será uma variável mista. A variável aleatória do exemplo 3.5 é uma variável desse tipo.

$\triangleleft$

As variáveis de tipo mistura são muito utilizadas na teoria do risco. Esse tipo de modelo é adequado em situações nas quais o valor da variável X depende de um fator subjacente que corresponde a vários fenômenos que podem ocorrer com probabilidades desconhecidas. Por exemplo, o número de acidentes automobilísticos pode depender das condições meteorológicas, de negligência do motorista ou de sinalização ineficiente. Esse efeito subjacente também é aleatório, o que leva a pensar que também possa ser representado através de uma variável aleatória.

Se X for uma mistura discreta e o efeito subjacente for modelado por uma variável discreta Λ, tomando os valores inteiros não negativos, com as probabilidades $p_k, k \in \mathbb{N}$, ou seja, $p_\Lambda(k) = \mathbb{P}(\Lambda = k) = p_k, k \in \mathbb{N}$. A distribuição $F_{X|\Lambda=k}$ modela o comportamento de X sob o regime no qual $\lambda = k$. Se $X_k \sim X|\Lambda = k$ teremos que

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{X|\Lambda-k}(x)p_\Lambda(k) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{X_k}(x)p_\Lambda(k). \tag{7.4}$$

e obtemos (7.2).

Se o efeito Λ for modelado como uma variável aleatória contínua, teremos

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X|\Lambda=\lambda}(x)f_\Lambda(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_\lambda}(x)f_\Omega(\lambda)d\lambda \tag{7.5}$$

onde cada $X_\lambda \sim X|\Lambda = \lambda$.

Nos dois casos a variável Λ é chamada de variável misturadora e as variáveis X_λ (ou as distribuições F_{X_λ}) são as variáveis (ou as distribuições) misturadas. Geralemnte as distribuições misturadas são de uma mesma família paramétrica. Fala-se por exemplo de mistura de normais, sem fazer menção ao tipo de variável misturadora Λ. Muitas vezes as distribuições misturadas têm somente um parâmetro λ, nesse caso Λ representa uma aleatorização do parâmetro.

Exemplo 7.11. Uma seguradora classifica os seus segurados em dois grupos: baixo risco e alto risco. Em ambos, o valor de uma indenização segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ, sendo que $\lambda = 100$ para indivíduos classificados como baixo risco e $\lambda = \dfrac{1}{20}$ para indivíduos classificados como alto risco.

Obtenha a distribuição do valor da indenização para novos segurados (que ainda não foram classificados), assumindo que 20% das pessoas possuem características do grupo de alto risco e 80% do grupo de baixo risco.

Solução:

Chamemos de X o valor da indenização reclamada por um novo segurado. A variável Λ com função de probabilidade $p_\Lambda(100) = 0,80$ e $p_\Lambda\left(\dfrac{1}{20}\right) = 0,20$, representa a classificação do segurado em algum dos dois grupos de risco. Além disso, sabemos que $X|\Lambda = 100 \sim exp(100)$ e $X|\Omega = \dfrac{1}{20} \sim exp\left(\dfrac{1}{20}\right)$. Portanto, se $x > 0$, teremos

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_{X|\Lambda=\frac{1}{20}}(x) \cdot p_\Lambda\left(\frac{1}{20}\right) + f_{X|\Lambda=100}(x) \cdot p_\Lambda(100) \\ &= \frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{x}{20}} \cdot 0,20 + 100 \cdot e^{-100x} \cdot 0,80 \\ &= 0,01 \cdot e^{-\frac{x}{20}} + 80 \cdot e^{100x}. \end{aligned}$$

◁

Vejamos como obter diferentes características de uma mistura em termos das características das distribuições misturadas e dos pesos da mistura.

Proposição 7.12. *Seja X uma mistura discreta das variáveis $\{X_j\}_{j\geq 1}$ com pesos $\{p_j\}_{j\geq 1}$, então*

(1) Se todas as variáveis $\{X_j\}_{j\geq 1}$ possuírem k-ésimo momento finito, X também o possuirá, valendo

$$\mathbb{E}X^k = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbb{E}X_j^k;$$

(2) Se todas as variáveis $\{X_j\}_{j\geq 1}$ possuírem variância finita, então $Var(X)$ também será finita e teremos

$$Var(X) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j Var(X_j) + \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbb{E}X - \mathbb{E}X_j)^2 p_j;$$

(3) Se todas as funções geradoras de momento $M_{X_j}, j \geq 1$ existirem e estiverem definidas no intervalo (a,b), então o mesmo ocorre para M_X e vale

$$M_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j M_{X_j}(t), \in (a,b).$$

Exemplo 7.13. As indenizações (em milhões de reais) por incêndios florestais que uma certa seguradora deve assumir se comportam da seguinte forma:

Período de seca		Período de chuva	
Valor da indenização	Probabilidade	Valor da indenização	Probabilidade
5	0,1	5	0,3
20	0,1	20	0,6
100	0,8	100	0,1

Assumindo que os períodos de seca e chuva têm a mesma duração, calcule a esperança e a variância da variável X: valor da indenização ocorrida ao longo de um ano.

Solução:

Chamemos de X_1 a variável aleatória relativa á indenização paga por um incêndio ocorrido no período de seca e de X_2 à correspondente ao período de chuva. Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_1 &= 5 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,1 + 100 \cdot 0,8 = 82,5 \\ \mathbb{E}X_2 &= 5 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,6 + 100 \cdot 0,1 = 23,5 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= (5-82,5)^2 \cdot 0,1 + (20-82,5)^2 \cdot 0,1 + (100-82,5)^2 \cdot 0,8 = 1236,25 \\ Var(X_2) &= (5-23,5)^2 \cdot 0,3 + (20-23,5)^2 \cdot 0,6 + (100-23,5)^2 \cdot 0,1 = 695,25. \end{aligned}$$

Para uma indenização ocorrida durante um ano, temos probabilidade $\frac{1}{2}$ de ela ter ocorrido no período de chuva e, portanto,

$$p_X(x) = \frac{p_{X_1}(x) + p_{X_2}(x)}{2},$$

onde $x = 5$, $x = 20$ ou $x = 100$.

Aplicando a proposição 7.12, teremos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}X_1 + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}X_2 = 53 \\ Var(X) &= \frac{1}{2} \cdot Var(X_1) + \frac{1}{2} \cdot Var(X_2) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X)^2 + \frac{1}{2}(\mathbb{E}X_2 - \mathbb{E}X)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1236,25 + 695,25) + \frac{1}{2} \cdot (82,5 - 53)^2 + \frac{1}{2} \cdot (23,5 - 53)^2 \\ &= 1400,875 \end{aligned}$$

◁

Exemplo 7.14. Suponha que X é mistura de uma variável constante $X_1 = a$ e uma outra variável $X_2 \sim exp(\beta)$, com pesos p e $1 - p$ respectivamente. Calcule a função geradora de momentos de X.

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= p \cdot M_{X_1}(t) + (1 - p) \cdot M_{X_2}(t) \\ &= p \cdot e^{at} + (1 - p)\frac{\beta}{\beta - t}, \end{aligned}$$

para $t < \lambda$. Observe que o domínio de M_X será a interseção dos domínios das funções geradoras de momentos das variáveis misturadas.

◁

Resultados análogos aos apresentados para misturas discretas na proposição 7.12 também valem no caso contínuo.

Proposição 7.15. *Seja X uma mistura contínua de variáveis $\{X_\lambda\}_{\lambda \in I}$, com pesos representados pela função f, então*

(1) *Se cada $X_\lambda, \lambda \in I$ possuir k-ésimo momento finito, X também o possuirá, valendo*

$$\mathbb{E}X^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}X_\lambda^k f(\lambda) d\lambda,$$

(2) *Se cada $X_\lambda, \lambda \in I$ possuir variância finita, então $Var(X)$ também será finita e*

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Var(X_\lambda) f(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbb{E}X_\lambda - \mathbb{E}X)^2 f(\lambda) d\lambda,$$

(3) *Se todas as funções geradoras de momentos $M_{X_\lambda}, \lambda \in I$ existirem e estiverem definidas no intervalo (a, b), então o mesmo ocorre para M_X e vale*

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_{X_\lambda}(t) f(\lambda) d\lambda, \; t \in (a, b).$$

Exemplo 7.16. Suponha que X é uma mistura contínua de variáveis $X_\lambda \sim exp(\lambda), \lambda > 0$ com variável misturadora $\Lambda \sim Gama(\alpha, \beta), \alpha > 0, \beta > 0$, ou seja

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1}\beta^\alpha e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}, \lambda > 0.$$

Como as variáveis misturadas X_λ são todas contínuas, então X também o será. Calculemos a sua função de densidade.

Seja $x > 0$, então

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_\lambda}(x).f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}.\frac{\lambda^{\alpha-1}\beta^\alpha e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}d\lambda \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \lambda^\alpha e^{-(\beta+x)\lambda}d\lambda \\
&= \frac{\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha(\beta+x)^{\alpha+1}e^{-(\beta+x)\lambda}}{\Gamma(\alpha+1)}d\lambda \\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

pois o integrando que aparece na penúltima linha é a função de densidade de uma distribuição $Gama(\alpha+1, \beta+x)$.

A densidade obtida corresponde à distribuição de Pareto com parâmetros (α, β). Para um valor $\alpha > 1$, calculemos $\mathbb{E}X$ utilizando a proposição 7.15

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(X_\lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda^{\alpha-1}\beta^\alpha e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}d\lambda \\
&= \frac{\beta}{\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha-2}\beta^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha-1)}d\lambda \\
&= \frac{\beta}{\alpha-1},
\end{aligned}$$

pois o integrando na penúltima linha é a função de densidade de uma $Gama(\alpha-1, \beta)$.

◁

7.3. Distribuições compostas. Suponha que representemos como S o valor total que uma seguradora pagou a clientes associados a uma determinada carteira como indenizações durante um certo período de tempo. Se chamarmos de N o total de reclamações atendidade e de X_j o valor da j-ésima indenização paga nesse período, teremos que

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0; \\ \sum_{j=1}^{N} X_j, & N > 0. \end{cases} \tag{7.6}$$

Assumiremos que as variáveis $N, X_1, X_2, \ldots$ são independentes e que $X_1, X_2, \ldots$ sao identicamente distribuídas. Chamemos de X uma variável com a mesma distribuição de X_1.

Definição 7.17. Dizemos que S definida em (7.6) possui uma distribuição composta. A sua função de distribuição F_S está determinada pela função de massa de probabilidade $\mathbb{P}_N(k)$ e pela função de distribuição F_X através da fórmula

$$F_S = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) F_X^{*k}, \tag{7.7}$$

onde F^{*k} denota a k-ésima convolução de F_X.

Observe que (7.7) representa um caso particular de mistura discreta.

Vejamos agora como obter algumas características da distribuição de S.

Proposição 7.18. *Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que a composição $\psi_N(\psi_X(t))$ esteja bem definida, então*

$$\psi_S(t) = \psi_N(\psi_X(t)).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathbb{E}(e^{St}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{St}|N)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{S_k t}|N = k) p_N(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{S_k t}) p_N(k), \end{aligned}$$

onde $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$, se $k > 0$ e $S_0 = 0$. A última igualdade é válida pelo fato de N e S_k serem independentes. Pelas hipóteses consideradas, teremos que

$$\mathbb{E}(e^{S_k t}) = \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{k} e^{X_j t}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}\left(e^{X_j t}\right) = [M_X(t)]^k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}[M_X(t)]^k p_N(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{k\ln[M_X(t)]} p_N(k) \\ &= M_N(\ln M_X(t)) = M_N(\Psi_X(t)). \\ \Psi_S(t) &= \ln M_S(t) = \ln M_N(\Psi_X(t)) = \Psi_N(\Psi_X(t)). \end{aligned}$$

□

Exemplo 7.19. Vamos utilizar o resultado acima para obter a distribuição composta resultante de fixar N com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$ e X com distribuição logarítmica com parâmetro $p \in (0,1)$, ou seja

$$p_X(k) = -\frac{(1-p)^k}{k\ln(p)}\, k = 1, 2, \ldots.$$

Vale que $M_X(t) = \dfrac{\ln[1-(1-p)e^t]}{\ln(p)}$ e $\Psi_N(t) = \lambda(e^t - 1)$, portanto

$$\begin{aligned} \Psi_S(t) &= \lambda\left(e^{\Psi_X(t)} - 1\right) = \lambda(M_X(t) - 1) \\ &= \frac{\lambda\ln[1-(1-p)e^t] - \lambda\ln(p)}{\ln(p)} \\ &= \ln\left[\frac{1-(1-p)e^t}{p}\right]^{\frac{\lambda}{\ln(p)}} \\ &= \ln\left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^{-\frac{\lambda}{\ln(p)}}, \end{aligned}$$

que é a função geradora de cumulantes da distribuição Binomial Negativa com parâmetros $r = -\dfrac{\lambda}{\ln(p)}$ e p.

◁

Proposição 7.20. *Seja S definida como em (7.6). Então*

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X,$$

$$Var(X) = Var(N)(\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}N Var(X),$$

desde que os momentos envolvidos estejam bem definidos.

Demonstração. Faremos a prova assumindo que a função geradora de momentos esteja definida em uma vizinhança do zero, mas é importante salientar que ambos os resultados poder ser provados assumindo somente que os momentos envolvidos estejam bem definidos.

Sabemos que $\mathbb{E}S = \Psi'_S(0)$ e $Var(S) = \Psi''_S(0)$. Aplicando a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} \Psi'_S(t) &= \Psi'_N(\Psi_X(t))\Psi'_X(t) \\ \Psi''_S(t) &= \Psi''_N(\Psi_X(t))[\Psi'_X(t)]^2 + \Psi'_N(\Psi_X(t))\Psi''_X(t) \end{aligned}$$

Analisando no instante $t = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_S &= \Psi'_S(0) \\ &= \Psi'_N(\Psi_F(0)) = \Psi'_X(0) \\ &= \mathbb{E}N\mathbb{E}X \\ Var(X) &= \Psi''_S(0) \\ &= \Psi''_N(\Psi_X(0))[\Psi'_X(0)]^2 + \Psi'_N(\Psi_X(0))\Psi''_X(0) \\ &= Var(N)(\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}NVar(X). \end{aligned}$$

□

Exemplo 7.21. Calculemos a esperança da variável composta S no exemplo 7.19.

Temos que $\mathbb{E}N = \lambda$, $\mathbb{E}X = -\dfrac{(1-p)}{p\ln(p)}$. Então

$$\mathbb{E}S = -\frac{\lambda(1-p)}{p\ln(p)}.$$

Por outro lado, sabemos que a esperança de uma variável com distribuição Binomial Negativa e $r\dfrac{(1-p)}{p}$, que coincide com a expressão obtida quando $r = -\dfrac{\lambda}{\ln(p)}$.

◁

8. Variáveis aleatórias não negativas

No ramo de seguros não vida, geralmente se trabalha com variáveis aleatórias que tomam valores não negativos. Esta família de variáveis possui características peculiares que apresentamos a seguir.

8.1. Propriedades. Primeiramente, observe que se F_X é a função de distribuição de uma variável aleatória X não negativa, ou seja, tal que $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, então $F_X(0-) = 0$ ou, equivalentemente, $S_X(0-) = 1$. Se X for contínua então $F_X(0) = 0$, $S_X(0) = 1$ e

$$S_X(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda_X(t)dt\right).$$

O seguinte resultado permite calcular o valor esperado de X usando a função S_X.

Proposição 8.1. *Seja $X \geq 0$ com $\mathbb{E}X < +\infty$. Então*

$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > \lambda)d\lambda = \int_0^{+\infty} S_X(\lambda)d\lambda.$$

Além disto, se X toma valores nos inteiros não negativos, temos

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

O resultado acima significa, em outras palavras, que a esperança de uma variável aleatória com função de distribuição como no gráfico na figura 11 vai ser a área hachurada neste gráfico.

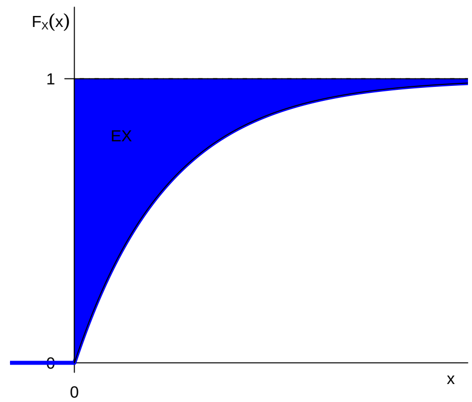

FIGURA 11. Esperança de uma variável aleatória não negativa

Exemplo 8.2. Podemos calcular a esperança da variável aleatória discreta apresentada no exemplo 3.3. Neste caso, temos

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \begin{cases} 0,4, & k = 1; \\ 0,25, & k = 2; \\ 0,17, & k = 3; \\ 0, & k \geq 4. \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}X = 0,4 + 0,25 + 0,17 = 0,82.$$

Esse foi o mesmo resultado obtido no exemplo 4.2.

◁

Exemplo 8.3. A função de sobrevivência da variável do exemplo 3.4 satisfaz $S_X(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{20}}, \lambda > 0$. Portanto,

$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} S_X(\lambda) d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{20}} d\lambda = -20e^{-\frac{\lambda}{20}} \Big|_0^{+\infty} = 20.$$

◁

A proposição 8.1 nos motiva a formular a seguinte definição.

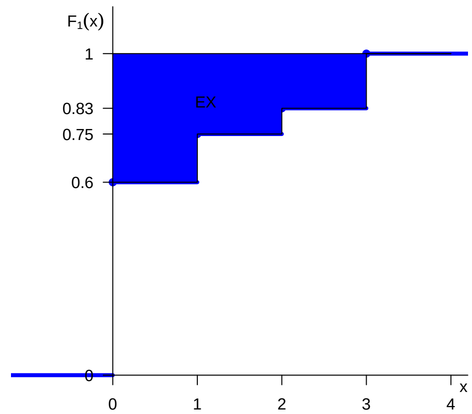

FIGURA 12. Esperança da variável do exemplo 3.3

Definição 8.4. Suponha que F é a função de distribuição de uma variável aleatória não negativa com esperança μ finita. Então a distribuição de cauda integrada F^S está dada por

$$F^S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{\mu}\int\limits_0^x S(\lambda)d\lambda, & x > 0. \end{cases}$$

onde $S(\lambda) = 1 - F(\lambda)$.

Exemplo 8.5. Dando continuidade ao exemplo 8.3 acima, calculemos agora F^S. Se $x > 0$, teremos

$$F^S(x) = \frac{1}{20}\int\limits_0^x e^{-\frac{\lambda}{20}}d\lambda = -\frac{20}{20}e^{-\frac{\lambda}{20}}\Bigg|_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{20}}.$$

e obtemos que neste caso $F^S = F$.

$\triangleleft$

8.2. Algumas transformações especiais. Se representarmos por X o valor da perda financeira originada por um sinistro, é bastante razoável supor que X é uma variável aleatória contínua não negativa. Neste parágrafo trataremos algumas transformações de variáveis aleatórias deste tipo que são baseadas na estrutura de diferentes contratos de seguros.

8.2.1. *A transformação* $Y = \min\{X, m\}$. Ao preencher uma proposta de seguro é necessário especificar o valor atribuído ao bem segurado. Poderia ser por exemplo, o valor de um automóvel ou de um imóvel. A este valor dâ-se o nome de importância segurada, capital segurado ou valor máximo indenizável. Esta quantia é o valor máximo que a companhia seguradora estará obrigada a indenizar, em caso de ocorrência de sinistros. Desta maneira temos que se um segurado sofre uma perda X, ele receberá como indenização o valor

$$Y = \min\{X, m\}.$$

onde m é a o valor da importância segurada contratada.

A variável Y acima às vezes é chamada variável de **perda limitada** (veja [12]). Vamos determinar agora sua a funçao de distribuição. Não é difícil ver que $\min\{x, m\} > y$ se e somente se $x > y$ e $m > y$. Portanto,

$$\begin{aligned} S_Y(y) &= \mathbb{P}(\min\{X, m\} > y) = \mathbb{P}(X > y, m > y) \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}(X > y), & y < m; \\ 0, & y \geq m \end{cases} \\ &= \begin{cases} S_X(y), & y < m; \\ 0, & y \geq m. \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos escrever então

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < m; \\ 1, & y \geq m. \end{cases}$$

Ou seja, as funções de distribuição das duas variáveis X e $Y = \min\{X, m\}$ coincidem até chegar no ponto $X = m$. Dai para a frente, F_Y vale 1, como aparece representado na figura 13.

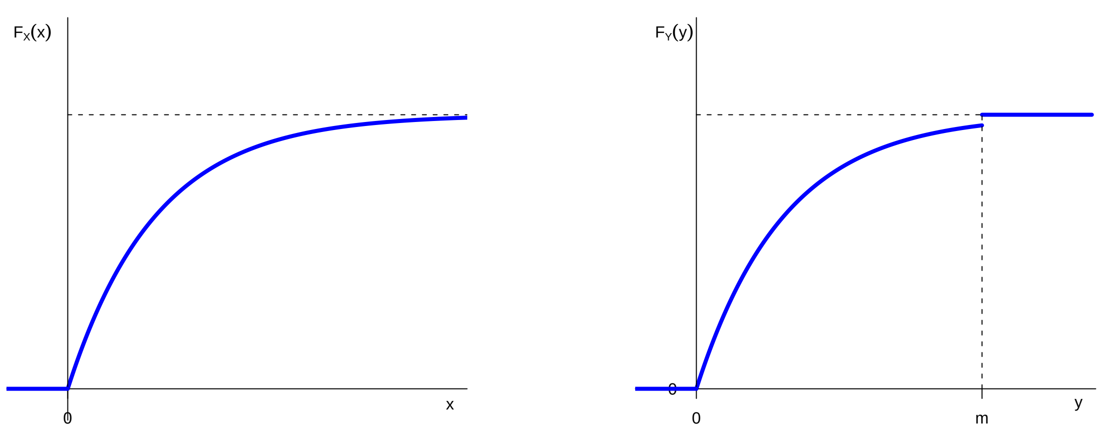

FIGURA 13. Funções de distribuição da perda X e da perda limitada $Y = \min\{X, m\}$.

Como vemos nos gráficos acima Y é uma variável mista com um único ponto que acumula massa, o ponto $y = m$, mais exatamente $\mathbb{P}(Y = m) = S_X(m)$. Se $\mathbb{E}X$ for finita então $\mathbb{E}Y$

também o será pois

$$\mathbb{E}Y = \int_0^{+\infty} S_Y(y)dy = \int_0^{m} S_X(y)dy \le \int_0^{+\infty} S_X(x)dx = \mathbb{E}X.$$

Em considerações posteriores será útil a seguinte definição.

Definição 8.6. Seja X uma variável aleatória contínua e não negativa e seja $m \ge 0$. O valor esperado limitado de X em relação ao limite m é a constante

$$\mathbb{E}[X;m] = \mathbb{E}\left[\min\{X,m\}\right].$$

Vimos que $\mathbb{E}[X;m]$ nunca é maior que $\mathbb{E}X$, o que é bastante natural.

Utilizando a definição do valor esperado podemos escrever o seguinte.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X - \mathbb{E}[X;m] &= \int_0^{+\infty} xf_X(x)dx - \left(\int_0^{m} xf_X(x)dx + \int_m^{+\infty} mf_X(x)dx\right) && (8.8)\\
&= \int_0^{+\infty} xf_X(x)dx - \left(\int_0^{m} xf_X(x)dx + m\int_m^{+\infty} f_X(x)dx\right) && (8.9)\\
&= \int_m^{+\infty} (x-m)f_X(x)dx. && (8.10)
\end{aligned}$$

Se $m \ge 0$ for tal que $S_X(m) > 0$ então podemos considerar uma variável aleatória Z cuja distribuição coincida com a distribuição condicional de $X - m$ dado $X > m$, ou seja,

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(X - m \le z | X > m) = \frac{F_X(m+z) - F_X(m)}{S_X(m)}.$$

Pela sua definição, Z será uma variável aleatória não negativa e como F_Z é diferenciável, será também contínua com função de densidade $f_Z(z) = \dfrac{f_X(m+z)}{S_X(m)}$, $x > 0$. Z é chamada de **excesso de danos** (excess loss variable em inglês, veja [12]) pois ela é construída primeiro **descontando** os valores das perdas abaixo de m e depois subtraindo m dos valores restantes. Usando os cálculos feitos em (8.8)-(8.10) vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Z &= \int_0^{+\infty} z\frac{f_X(m+z)}{S_X(m)}dz && (8.11)\\
&= \frac{1}{S_X(m)}\int_m^{+\infty} (x-m)f_X(x)dx && (8.12)\\
&= \frac{\mathbb{E}X - \mathbb{E}[X;m]}{S_X(m)}. && (8.13)
\end{aligned}$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 8.7. Para um valor de $m \geq 0$ tal que $S_X(m) > 0$, define-se a função **excesso médio de X com prioridade** m como

$$e_X(m) = \frac{\mathbb{E}X - \mathbb{E}[X;m]}{S_X(m)}. \tag{8.14}$$

Se X representa o tempo de vida total de uma pessoa, então $e_X(m)$ é o valor esperado do tempo de vida futuro de alguém que agora tem idade m. Por esta razão ele também recebe o nome de função vida média residual. Embora talvez esta notação não seja por encuanto muito clara, observe que parece bastante natural pensar que podemos escrever

$$e_X(m) = \mathbb{E}(X - m|X > m). \tag{8.15}$$

8.2.2. *A transformação* $Y = (X - d)^+$. A variável de perda limitada $\min\{X, d\}$ e a perda X estão relacionadas pela expressão

$$(X - d)^+ + \min\{X, d\} = X,$$

onde $y^+ = \max\{0, y\}$, ou seja,

$$(X - d)^+ = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X - d, & X > d. \end{cases}$$

A transformação $Y = (X - d)^+$ corresponde a uma apólice com franquia dedutível, bastante utilizadas nos seguros de automóveis. A franquia, no nosso caso denotada por d, constitui uma faixa mínima de prejuízo pelo qual o segurador não responde. No sistema de franquia dedutível, uma perda de valor menor ou igual a d deverá ser suportada, integralmente, pelo segurado. Aquelas que excederem este valor serão indenizadas pela diferença $X - d$.

Na construção de Y, o que se faz é primeiramente transladar todos os valores de perdas d unidades à esquerda e depois pegar todos aqueles que se tornaram negativos depois desta translação e concentrá-los no valor zero. Desta forma, a variável $(X - d)^+$ toma o valor zero com probabilidade $F_X(d) = \mathbb{P}(X \leq d)$. Por esta razão Y é chamada de variável **transladada censurada à esquerda** (veja [12]).

Embora na variável Z considerada antes, também haja uma censura e uma translação é bom observar que na construção de $Y = (X - d)^+$, estes valores não são descontados e sim concentrados no zero. Por isto sempre teremos que Z é contínua e $F_Z(0) = 0$ enquanto que $F_Y(0) = \mathbb{P}(X \leq d)$ e Y será contínua somente se $\mathbb{P}(X \leq d) = 0$, ou seja, se nunca houver perdas menores do que a franquia. Como não ocorre na prática, tipicamente $Y = (X - d)^+$ é uma variável mista.

Usando a fórmula da probabilidade total, podemos calcular a função de distribuição de Y. Seja $y \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}((X-d)^+ \leq y) \\
&= \mathbb{P}((X-d)^+ \leq y | X-d > 0)\mathbb{P}(X-d>0) + \mathbb{P}((X-d)^+ \leq y | X-d \leq 0)\mathbb{P}(X-d \leq 0) \\
&= \frac{\mathbb{P}(d < X \leq y+d)}{\mathbb{P}(X-d>0)}\mathbb{P}(X-d>0) + \mathbb{P}(0 \leq y | X-d \leq 0)\mathbb{P}(X-d \leq 0) \\
&= \mathbb{P}(d < X \leq y+d) + \mathbb{P}(X \leq d) \\
&= F_X(y+d).
\end{aligned}$$

Ou seja, $F_Y(y) = F_X(y+d)$, se $y \geq 0$ e obviamente $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$, pois $Y = (X-d)^+$ é uma variável não negativa.

Na figura 14 podemos observar a relação entre F_X e F_Y.

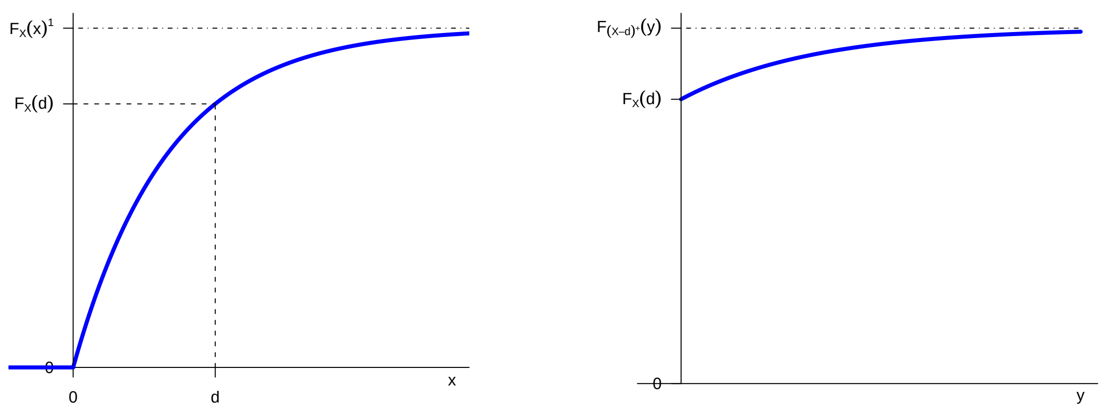

FIGURA 14. Funções de distribuição de X e de $(X-d)^+$.

Repare que se $F_X(d) > 0$ então $(X-d)^+$ será uma variável mista, como é o caso do exemplo 3.5.

Note também que $E[(X-d)^+] = \int_d^{+\infty} (x-d) f_X(x) dx$. Portanto se $S_X(d) > 0$ usando (8.12-8.14) teremos

$$E[(X-d)^+] = e_X(d) S_X(d).$$

9. Exercícios

1.1. A função F satisfazendo

$$F(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \; 1 \leq x < 2$$

define a função de distribuição de uma variável aleatória contínua X.

(a) Sabendo que $F(2) = 1$, calcule o valor de k.
(b) Determine os valores de $F(x)$ para $x < 1$ e $x \geq 2$.
(c) Determine a função de densidade de X. Você pode dizer quais são os valores que toma X?
(d) Calcule a esperança de X utilizando a sua função de densidade.
(e) Ache a função de sobrevivência de X e represente-a graficamente.
(f) Calcule novamente a esperança de X utilizando a função de sobrevivência calculada acima.

1.2. A taxa de falha T de um determinado equipamento é dada por

$$h_T(t) = 3t^2, \; t > 0.$$

(a) Calcule a probabilidade de $T > 1$.
(b) Você poderia dizer se $\mathbb{E}X$ é finita?

1.3. A função de sobrevivência de certa variável aleatória X é

$$S_X(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^2, \; x \geq 0.$$

Determine o valor esperado de X. O que você pode dizer sobre a sua variância?

1.4. O valor de uma indenização individual tem função de densidade

$$f(x) = 2,5x^{-3,5}, \; x \geq 1.$$

Calcule o seu coeficiente de variação.

1.5. Os valores possíveis de indenizações individuais são 100, 200, 300, 400 ou 500. As probabilidades de cada um destes valores são 0.05, 0.20, 0.50, 0.20 e 0.05, respectivamente. Determine o coeficiente de assimetria desta distribuição.

1.6. Considere uma variável aleatória X com função de densidade

$$f_X(x) = (1 + 2x^2)e^{-2x}, \; x \geq 0.$$

(a) Determine a função de sobrevivência S_X.
(b) Determine a função taxa de falha $\lambda_X(x)$.
(c) Calcule $e_X(d)$, com $d > 0$.

1.7. A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é dada por

$$M_X(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{4t}.$$

(a) Calcule a esperança e a variância de X.
(b) Determine a probabilidade de X tomar algum valor entre -1 e 3.

(c) Calcule o coeficiente de assimetria de X. Você pode dizer se X é simétrica? Justifique a sua resposta.

1.8. Suponha que X é uma variável aleatória com função geradora de momentos dada por

$$M_X(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-t},\ t > 1.$$

(a) Determine $\mathbb{E}X$
(b) Calcule F_X e represente-a graficamente. (Sugestão: Consulte uma tabela de funções geradoras de momentos.)
(c) Esta variável X é contínua, discreta ou mista? Justifique a sua resposta.

1.9. Prove que o coeficiente de assimetria γ_X de uma variável X pode ser calculado usando qualquer uma das seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \gamma_X &= \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X] + 2\mathbb{E}^3[X]}{\sigma_X^3} \\ \gamma_X &= \frac{\psi_X^{(3)}(0)}{[\psi_X^{(2)}(0)]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

1.10. A seguir aparecem as funções geradoras de momentos de variáveis aleatórias com diferentes distribuições. Para cada uma delas, determine a média, a variância e os coeficientes de variação e de assimetria.

(a) $M_X(t) = \dfrac{1}{1-t}, t < 1;$

(b) $M_X(t) = \dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{1}{2}e^{-2t}, t \in \mathbb{R};$

(c) $M_X(t) = \left(\dfrac{3}{4}e^t + \dfrac{1}{4}\right)^3, t \in \mathbb{R};$

(d) $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R};$

(e) $M_X(t) = \exp\{e^t - 1\}, t \in \mathbb{R}.$

1.11. Determine a função de densidade de $Y = \ln X$ se X segue a distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$.

1.12. Considere a transformação

$$Y = \begin{cases} \sqrt{X}, & X \geq 0, \\ 0, & X < 0. \end{cases}$$

Determine a função de densidade de Y se X segue a distribuição normal padrão.

1.13. Seja X com função de distribuição $F_X(x) = 1 - (1+x)^{-\alpha}, x > 0, \alpha > 0$. Calcule a função de densidade de $Y = \theta X$, sendo θ uma constante positiva.

1.14. Em uma determinada apólice, uma companhia seguradora indeniza os segurados por perdas até um valor máximo m. A seguradora modela os pagamentos por reclamações de sinistro em milhões de reais usando uma distribuição exponencial truncada com parâmetro λ e cobertura máxima m. Se não houvesse cobertura máxima, o pagamento esperado por apólice seria de $R\$S2.000,00$. A seguradora quer que o pagamento esperado por apólice não supere $R\$1.000,00$. Qual deve ser o nível esperado para m para conseguir isto?

1.15. Em muitos casos é bem mais simples resolver problemas trabalhando com a função geradora de momentos no lugar de fazé-lo diretamente com a função de densidade, de massa de probabilidade ou de distribuição. A seguir apresentamos um desses exemplos.

Duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 são independentes e identicamente distribuídas com densidade

$$f(x) = e^{-x},\ x > 0$$

(a) Determine a função de distribuição da variável $Y = X_1 + X_2$ usando a convolução.
(b) Calcule a função geradora de momentos de X_1 e utilize-a para calcular a de Y e chegar à distribuição obtida no item anterior.

1.16. Em um tipo de apólice de seguros, o montante das indenizações pode ser modelado usando a densidade

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0$$

onde $\lambda = \dfrac{1}{\mathbb{E}X}$. A seguradora não conhece o verdadeiro valor de λ para um grupo de segurados e, por isso, decide modelar esta incerteza usando a função de densidade

$$f_\Lambda(\lambda) = 4\lambda e^{-2\lambda},\ \lambda > 0.$$

(a) Determine a função de densidade do valor de indenização para este grupo de segurados. Calcule a probabilidade desse valor ser maior que 2.
(b) Suponha que seja recebida uma indenização igual a 2. Como isso afeta a predição da seguradora sobre o verdadeiro valor de λ?

1.17. Assuma que o número (N) de incêndios forestais numa determinada região durante o mês de janeiro pode ser modelado por uma distribuição mista de Poisson. A variável de estrutura corresponde com 5 possíveis tipos de clima. Na tabela a seguir aparecem os tipos de clima considerados, com a suas probabilidades de ocorrência e as médias correspondentes para o número de incêndios nesse clima.

Tipos de clima	λ_i	p_i
Muito seco	300	0,05
Seco	175	0,20
Normal	80	0,40
Húmido	60	0,25
Muito húmido	30	0,10

(1) Escreva a função de probabilidade da variável de estrutura (Λ).
(2) Escreva a função de probabilidade de N.
(3) Calcule a probabilidade de não haver incêndios forestais nessa região durante o mês de janeiro

1.18. Determine quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas. Prove as afirmações verdadeiras e quando possível, modifique as afirmações falsas para convertí-las em verdadeiras.

(1) Uma mistura contínua de exponenciais com peso de mistura dado pela densidade de uma exponencial(1) tem distribuição de Pareto (1,1).
(2) A distribuição binomial negativa é uma mistura contínua de binomiais com peso de mistura dado pela densidade de uma gamma.
(3) A variável aleatória não negativa W, com distribuição dada por
$$F_W(w) = 1 - \frac{2}{5}e^{-w} - \frac{1}{2}e^{-2w},\ w \geq 0$$
é uma mistura de exponenciais.

CAPíTULO 2

Introdução ao resseguro

1. Introdução

Uma empresa seguradora aceita riscos transferidos por seus clientes pois o valor cobrado nos prêmios deve permitir fazer face a eventuais indenizações ela tenha que assumir. Existem no entanto, muitas situações nas quais isto é difícil de ser garantido. Isto ocorre por exemplo em carteiras sujeitas a riscos catastróficos como terremotos, falhas em usinas nucleares, furacões, guerras, etcétera. Além disto, poderiamos ter o caso de uma carteira de muitos riscos pequenos, mas que foram atingidos por um evento ou uma série deles, ocasionando uma grande acumulação de sinistros que pode ameaçar o resultado do segurador. Com o intuito de se precaverem contra perdas que possam afetar a sua solvência, muitas vezes as seguradoras resseguram parte da sua carteira. Este seguro da seguradora é o que se chama de resseguro. Através de um tratado de resseguro, uma seguradora compartilha o risco de eventuais perdas assim como os prêmios da carteira.

Resseguro é a transferência do risco de seguro de uma seguradora para outra por meio de um contrato no qual uma das seguradoras (a resseguradora ou cessionária) concorda, em troca de um prêmio de resseguro, em indenizar à outra seguradora (seguradora primária ou cedente) de algumas ou todas as consequências financieiras resultantes de certas exposições a prejuízos cobertos por apólices desta seguradora.

O resseguro tem vários efeitos importantes. Ao compartilhar o risco, a resseguradora aumenta a capacidade da seguradora para assumir perdas de maior porte e também para suportar eventos que conduzam a uma grande quantidade de sinistros. Além disto, as seguradoras são obrigadas por meio de regulamentações governamentais a ter um capital adequado em relação ao volume de riscos aos que elas estão expostas. Uma maneira de aumentar o número de apólices contratadas sem ter que aumentar o capital da seguradora seria utilizar o resseguro, de forma a ter as despesas de capital adicional arcadas pela resseguradora.

O resseguro pode ser facultativo ou obrigatório ou ainda, uma mistura dos dois. O resseguro facultativo se aplica a riscos individuais (grandes), por exemplo, para acidentes em plataformas de petróleo. A seguradora cedente tem liberdade para decidir se quer ceder um risco ou não e a resseguradora tem liberdade para aceitar ou recusar a sua participação no risco. No resseguro obrigatório, a seguradora oferece uma carteira inteira. A resseguradora pode aceitar ou não o contrato, mas não pode retirar riscos individuais da carteira. Ele se aplica por exemplo em seguros de danos contra terceiros ou de automóveis.

2. Formas de resseguro

Se X é o valor de uma indenização ou perda individual, após a subscrição de um contrato de resseguro, ele se decompõe como

$$X = X^{ret} + X^{ced},$$

onde X^{ret} é a parte da perda que detém a seguradora primária (perda ou indenização retida) e X^{ced} é a parte cedida à resseguradora (perda ou indenização cedida).

A forma de resseguro é local se for aplicada nas indenizações individuais e global se for aplicada nas indenizações agregadas.

Lembremos que fixando um período t de vigência do contrato, usamos a notação S_N para as perdas agregadas no modelo de risco coletivo e S_n para o de risco individual, onde

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k = \sum_{j=1}^{n} Z_j = S_n,$$

sendo cada X_k a k-ésima indenização paga pela seguradora e Z_j o valor total que foi pago pela seguradora ao j-ésimo cliente por indenizações reclamadas durante o período de tempo considerado.

Os tratados de resseguro podem ser divididos em proporcionais e não proporcionais.

2.1. Resseguro Proporcional. Nestes tratados, os prêmios e indenizações são divididos segundo uma proporção estabelecida contratualmente entre a seguradora direta e a resseguradora.

2.1.1. *Resseguro cota-parte.* No resseguro cota-parte (quota share) ou resseguro por quotas, a resseguradora assume uma porcentagem fixa (cota) de todas as apólices de seguro subscritas pelo segurador direto no âmbito dos ramos estipulados no contrato. Ela é uma forma local na qual a resseguradora participa em todos os riscos na porcentagem $1 - a$, digamos, com $a \in (0, 1)$ e recebe em troca a cota correspondente do prêmio original.

Teremos então que $X_a^{ret} = aX$ representa a indenização retida pela seguradora primária e $X_a^{ced} = (1 - a)X$ é a proporção da indenização cedida à resseguradora.

Exemplo 2.1. Considere uma apólice com importância segurada de 10 milhões de reais e pagando um prêmio (anual) de $R\$20.000$ que faz parte de uma carteira que foi ressegurada através de um contrato de cota-parte no qual a seguradora cede 30% dos prêmios e das indenizações, ou seja, $a = 0,7$. Se um sinistro nesta apólice der lugar a uma indenização por valor de 6 milhões de reais, teriamos

	Retenção da seguradora	Cedido ao resseguro
Prêmio	14.000	6.000
Perda	4,2 milhões	1,8 milhões

◁

O contrato de cota-parte apresenta a desvantagem de não considerar suficientemente as diferentes necessidades de resseguro da seguradora cedente, pois a resseguradora avalia tudo globalmente, sem distinguir as diferenças. Este tipo de contrato é indicado para companhias

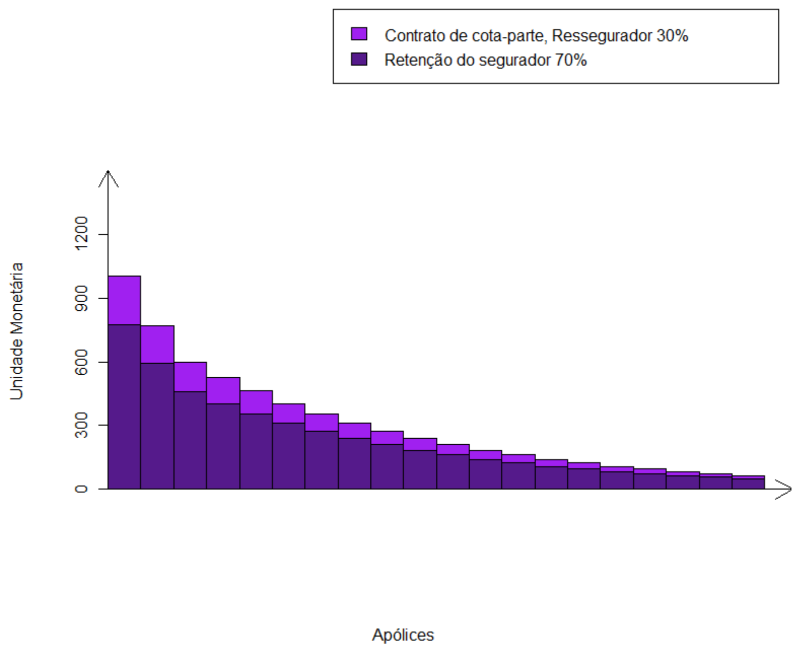

Figura 1. Resseguro cota-parte.

em desenvolvimento, ou para aquelas que começam a trabalhar em um novo ramo de seguros. Nestas situações, as seguradoras sentem-se inseguras para determinar os prêmios adequados e a resseguradora assume então o risco de uma eventual avaliação errada.

Observe ainda que indenizações agregadas retidas adotam a forma

$$(S_N)_a^{ret} = \sum_{k=1}^{N} (X_k)_a^{ret} = \sum_{k=1}^{N} aX_k = a\sum_{k=1}^{N} X_k = aS_N.$$

2.1.2. *Resseguro excedente de responsabilidade.* No resseguro excedente de responsabilidade (surplus share), a resseguradora não participa de todos os riscos como no contrato de cota-parte. A seguradora direta retém todos os riscos até uma determinada quantia, o seu limite técnico ou limite de retenção (pleno). A parte da cobertura que exceder a retenção será cedida à resseguradora. Isto é, ao invés de se tomar a proporção a igual para cada risco, vamos variar cada cota dependendo da apólice. Somente as apólices cujas importâncias seguradas excedam a retenção fixada serão parcialmente cedidas à resseguradora. A parte da cobertura que exceder a retenção será cedida à resseguradora.

As indenizações e os prêmios são divididos da mesma forma.

Assim, seja v_0 o limite de retenção e seja v_j a importância segurada da j-ésima apólice Z_j e definamos

$$a_j := 1 \wedge \left(\frac{v_0}{v_j}\right) = \begin{cases} 1, & v_j \le v_0, \\ \frac{v_0}{v_j}, & v_j > v_0. \end{cases}$$

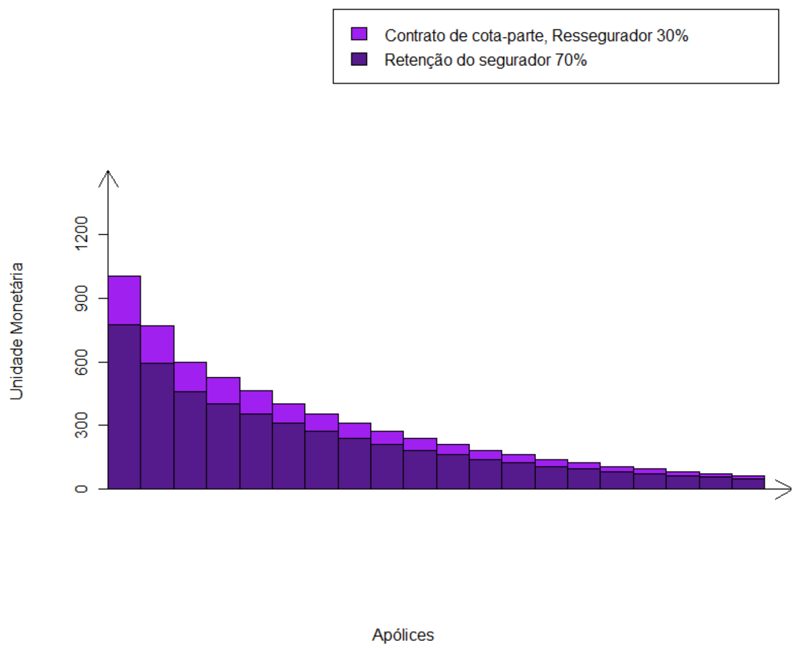

FIGURA 2. Resseguro cota-parte, a=0,7.

Isto significa que a seguradora primária retém

$$Z_j^{ret} = a_j Z_j = \begin{cases} Z_j, & v_j \leq v_0, \\ \frac{v_0}{v_j} Z_j, & v_j > v_0. \end{cases}$$

e cede a porcentagem

$$1 - a_j = \left(1 - \frac{v_0}{v_j}\right)^+ = \max\left(0, 1 - \frac{v_0}{v_j}\right) = \begin{cases} 0, & v_j \leq v_0, \\ \frac{v_j - v_0}{v_j}, & v_j > v_0, \end{cases}$$

ou seja

$$Z_j^{ced} = \begin{cases} 0, & v_j \leq v_0, \\ \frac{v_j - v_0}{v_j} Z_j, & v_j > v_0. \end{cases}$$

Observe que esta forma de resseguro se aplica no contrato e não no sinistro.

Na prática, as resseguradoras geralmente limitam a sua obrigação de aceitar os riscos através dos chamados excedentes, que são múltiplos do limite de retenção da seguradora. Cada múltiplo é chamado de pleno da apólice.

Exemplo 2.2. Considere uma seguradora com limite de retençao de $R\$300\,000$ que realiza um contrato de resseguro de excedente de responsabilidade com excedente de 9 plenos $= R\$2\,700\,000$ e que cobra como prêmio de cada apólice, $1,5\%$ da sua importância segurada.

- Suponha que uma apólice com importancia segurada de $R\$130\,000$ reporta à seguradora primária uma indenização por valor de $R\$80\,000$. Como a importância segurada é menor que a retenção, a resseguradora não participa neste risco e temos a seguinte divisão (em reais):

	Total	Retenção	Excedente
IS	130 000	130 000 = 100%	0 = 0%
Prêmio	195	195 = 100%	0 = 0%
Perda	80 000	80 000 = 100%	0 = 0%

- Consideremos agora uma apólice cuja importância segurada é de 3 milhões de reais e que notifica um sinistro que ocasionou uma perda por valor de $1,5$ milhões de reais. Neste caso
$$\frac{v_0}{v_j} = \frac{300.000}{3.000.000} = 0,1$$
e resulta a seguinte distribuição:

	Total	Retenção	Excedente
IS	3 000 000	300 000 = 10%	2 700 000 = 90%
Prêmio	4 500	450 = 10%	4 050 = 90%
Perda	1 500 000	150 000 = 10%	1 350 000 = 90%

- Uma outra apólice, com importância segurada de $3,5$ milhões de reais, reclama uma indenização de 2 milhões de reais. Neste caso,
$$\frac{v_0}{v_j} = \frac{300\,000}{3\,500\,000} \approx 0,857$$
e a importância segurada excede a retenção da seguradora mais a capacidade de resseguro ($300\,00 + 2\,700\,000 = 3\,000\,000$). Este excesso ficará por conta da seguradora direta, como estamos assumindo na divisão a seguir, ou deverá ser coberta de forma facultativa, o que é o mais frequênte.

	Total	Retenção	Excedente
	3 500 000	300 000 = 8,57%	2 700 000 = 77,14%
IS		+500 000 = 14,29%	
		22,86%	
Prêmio	5 250	1 200 = 22,86%	4 050 = 77,14%
Perda	2 000 000	457 200 = 22,86%	1 542 800 = 77,14%.

◁

As indenizações agregadas cedidas e retidas, respectivamente, são

$$\begin{aligned} S_n^{ret} &= \sum_{k=1}^{n} a_j Z_k, \\ S_n^{ced} &= \sum_{k=1}^{N} (1 - a_j) Z_j. \end{aligned}$$

A diferença entre os tratados cota-parte e o excedente de responsabilidade está na porcentagem da cessão. No caso do primeiro, a porcentagem é fixa para todos os riscos, desta forma ele resulta mais apropriado para carteiras homogêneas, como por exemplo, apólices de seguro residencial. No tratado excedente de responsabilidade, a porcentagem cedida depende das características da apólice e por isso é mais adequado para carteiras não homogêneas como é o caso, por exemplo, de apólices de incêndio industrial. Este tipo de resseguro é um excelente meio para equilibrar a carteira da seguradora direta, limitando os riscos mais expostos, contrariamente ao que ocorre no resseguro cota-parte. A desvantagem deste tipo de contrato é ser complicado em sua aplicação. Ele também resulta teoricamente mais complexo pois a princípio todas as variáveis Z_j^{ret} têm distribuições de probabilidade diferentes.

2.2. Resseguro não proporcional. No resseguro não proporcional, não há nenhuma proporção fixa, estabelecendo antecipadamente a distribuição dos prêmios e indenizações entre a seguradora primária e a resseguradora. No contrato será fixado o montante do valor das indenizações (prioridade) até o qual a seguradora cedente deverá assumir todas as reclamações com seus próprios recursos. A resseguradora se compromete a assumir os valores das indenizações que excederem a prioridade até o limite de cobertura acordado.

A obrigação de pagamento da resseguradora somente se efetiva quando a carteira ou o apólice resseguradas são atingidos por sinistros resultantes em indenizações maiores que a prioridade.

2.2.1. *Resseguro excesso de danos por risco.* O resseguro excesso de danos por risco (per risk excess of loss em inglês ou XL) tem uma estrutura completamente diferente dos tipos de seguros proporcionais apresentados. Enquanto para aqueles interessa na cessão a importância segurada, no resseguro excesso de danos por risco, o montante das reclamações é que se torna decisivo. Neste tipo de contrato, a seguradora direta assume os valores das indenizações até um determinado limite, independentemente da importância segurada. Sinistros que superarem este limite deverão ser cobertos pela resseguradora, até o limite de cobertura previamente acordado.

Este tipo de contrato é o mais indicado para as seguradoras cedentes que pretendem reter uma grande parte do prêmio sem querer renunciar à cobertura de resseguro em caso de reclamações de indenizações muito vultuosas. Se comparado aos contratos proporcionais, aqui a seguradora assume um risco maior, pois a resseguradora não tem obrigação nenhuma em caso de indenizações de valor menor à prioridade.

O modo de distribuição dos prêmios entre a seguradora direta e a resseguradora não decorre da estrutura do contrato, como no resseguro proporcional. A resseguradora dispõe de vários métodos de tarifação, bastante bem difundidos e aceitos, para definir como será feito o cálculo dos prêmios.

O contrato de excesso de danos por risco tem atualmente grande importância como proteção para seguradoras diretas contra eventuais indenizações de grande valor.

Seja X o valor uma perda individual. Após o resseguro teremos que a seguradora primária retém

$$X_d^{ret} = X \wedge d = \min\{X, d\} = \begin{cases} X, & X \leq d, \\ d, & X > d. \end{cases} .$$

para algum $d > 0$. O valor d é a chamada prioridade ou dedutível (ou nível de retenção da seguradora cedente no caso de seguros de vida).

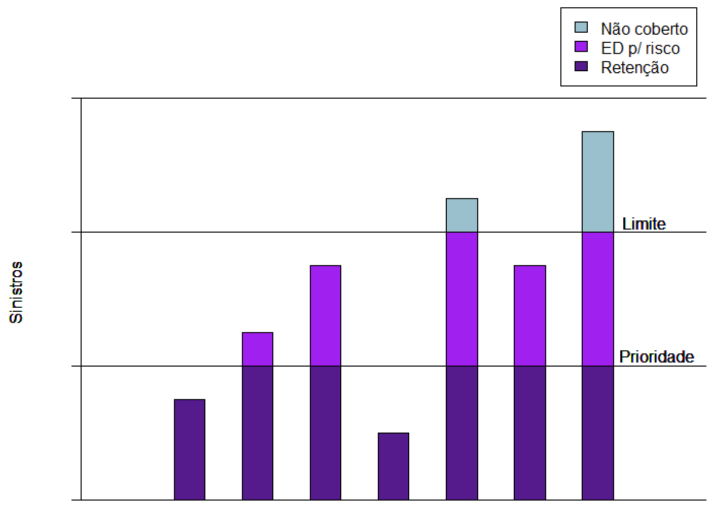

Figura 3. Resseguro excesso de danos por risco.

Para as indenizações agregadas teremos

$$(S_N)_d^{ret} = \sum_{k=1}^{N} (X_k \wedge d).$$

Usando que $X = (X-d)^+ + X \wedge d$, segue que a seguradora primária paga de cada perda individual no máximo o valor d, enquanto cede à resseguradora o valor

$$X_d^{ced} = (X-d)^+ = \max\{0, X-d\} = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X-d, & X > d. \end{cases}.$$

Na prática, é combinada uma cobertura máxima L de forma que no lugar de X_d^{ced} temos

$$X_{d,L}^{ced} = (X-d)^+ \wedge L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X-d, & d < X \leq d+L \\ L, & X > d+L. \end{cases}.$$

Para um contrato excedente de danos por risco com prioridade d e cobertura L, utiliza-se a notação L xs d o que seria em palavras "L em excesso de d". É possível fechar vários contratos nos quais $d+L$ passa a ser o dedutível do contrato seguinte. Isto é mais barato que utilizar um valor muito alto de L. $[d, d+L]$ é chamado de faixa (layer) do contrato.

Exemplo 2.3. Uma carteira consiste de 100 apólices de proprietários de imóveis na mesma região geográfica. Cada apólice cobre até $R\$150\,000$ por ocorrência. Para se proteger contra

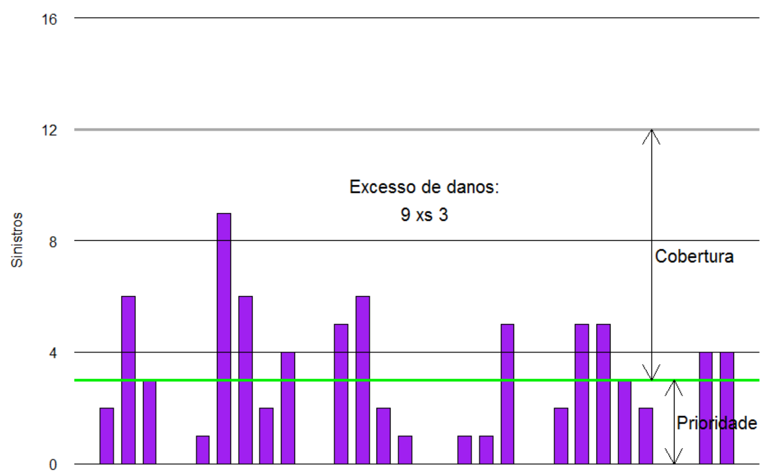

FIGURA 4. Excesso de danos por risco: 9 xs 3.

perdas individuais grandes, a seguradora compra uma cobertura de excesso de danos por risco de 130 000 xs 20 000, ou seja, neste caso a prioridade é $d = 20\,000$ e o limite é $L = 130\,000$. Então por cada apólice que sofra um sinistro, a seguradora retém $R\$20\,000$ e a resseguradora cobre qualquer valor acima de $R\$20\,000$ até $R\$150\,000$.

- Suponha que por causa de um incêndio uma das apólices reporta uma perda de $R\$15\,000$. Como a perda individual é menor que a prioridade, ela é totalmente assumida pela seguradora primária.
- Suponha agora que após uma forte chuva, três apólices que chamaremos de A, B e C reportam perdas de $R\$10\,000$, $R\$70\,000$ e $R\$170\,000$, respectivamente. Nesse caso as indenizações serão distribuídas da forma seguinte.

	Perda total	Indenização de A	Indenização de B	Indenização de C
da seguradora primária	50 000	10 000	20 000	20 000
da resseguradora	180 000	0	50 000	130 000.

Neste caso a apólice C terá um prejuízo de $R\$20\,000$, pois a sua perda total ultrapassa a capacidade do seguro que é de $R\$150\,000$.

$\triangleleft$

2.2.2. *Resseguro excesso de danos por ocorrência.* Ainda no exemplo 2.3 suponha que temos a seguinte situação.

Exemplo 2.4. Após uma outra chuva, 80 imóveis sofrem danos parciais, de forma que 60 segurados solicitam $R\$15\,000$ e o resto, $R\$25\,000$. A resseguradora deve honrar um montante de

$$R\$200\,000 = 40 \cdot R\$5\,000$$

enquanto que a perda total da seguradora será

$$R\$1\,400\,000 = 60 \cdot R\$15\,000 + 20 \cdot R\$25\,000!!$$

$\triangleleft$

No exemplo acima temos uma situação na qual o resseguro excesso de danos por risco não é muito útil para a seguradora primária pois as perda individuais não são muito altas, de fato poucas chegam a ultrapassar a prioridade da seguradora. No entanto, o montante da perda total atinge um valor muito elevado por causa da grande quantidade de sinistros. Este tipo de fenômeno se dá tipicamente na ocorrência de um terremoto, furacão ou algum outro desastre natural.

Para cobrir eventos deste tipo é mais apropriado usar o chamado resseguro excesso de danos por ocorrência ou por catástrofe (catastrophe excess-of-loss, per occurrence excess-of-loss ou Cat XL em inglês). Esta é uma forma de resseguro não proporcional que protege a seguradora cedente contra a acumulação de perdas devido a eventos catastróficos sejam eles naturais ou produto da ação do homem.

A diferença em relação ao resseguro excesso de danos por risco é que neste tipo de tratados, o dedutível e a cobertura máxima são aplicados a cada apólice, enquanto no excesso de danos por catástrofe, eles são aplicados às perdas agregadas que resultem de um determinado evento previamente definido como catástrofe, no qual várias apólices cobertas são atingidas ao mesmo tempo.

Para esclarecer melhor a relação entre estes dois tipos de tratados, consideremos a seguinte situação.

Exemplo 2.5. Agora a seguradora do exemplo 2.3 também subscreve um tratado de excesso de danos por catástrofe de $R\$1\,500\,000$ xs $R\$500\,000$ por ocorrência.

- Suponhamos que após um forte vendaval 80 imóveis são danificados e cada um destes segurados têm um prejuízo de $R\$20\,000$. O valor total reclamado à seguradora será $R\$\ 1\,600\,000 = 80 \cdot R\$20\,000$. A resseguradora responsável pelo tratado de excesso de danos por risco nem seria notificada da ocorrência e a cobertura do resseguro de excesso de danos por catástrofe assumiria o valor $R\$1\,600\,000 - R\$500\,000 = R\$1\,100\,000$. Desta forma, o prejuízo da seguradora primária será de $R\$500\,000$.

  Observe que se a seguradora não tivesse feito o resseguro de excesso de danos por catástrofe, a sua perda teria sido o valor total reclamado, ou seja, $R\$\ 1\,600\,000$.
- Suponha agora que o vendaval foi tão forte que os 80 imóveis foram totalmente destruídos e cada um destes segurados solicita o valor máximo possível, ou seja, $R\$150\,000$. A seguradora deve uma perda total de $R\$12\,000\,000$.

  Agora o resseguro de excesso de danos por risco cobrirá $R\$130\,000$ por apólice, então a seguradora retém $R\$1\,600\,000 = 80 \cdot R\$20\,000$. A cobertura do tratado de excesso de danos por catástrofe assume $R\$1\,600\,000 - R\$500\,000 = R\$1\,100\,000$. Portanto, a seguradora primária retém uma perda total de $R\$500\,000$, igual àquela retida por ela no caso anterior com indenizações individuais relativamente pequenas.

$\triangleleft$

2.2.3. *Resseguro excesso de danos anual.* Um outro tipo de tratado de excesso de danos é o chamado resseguro excesso de danos anual ou agregado (stop loss ou abreviadamente SL). Através deste tratado, a seguradora direta busca uma ampla cobertura contra oscilações anuais da sinistralidade em um ramo de negócios. A resseguradora se compromete a assumir a parte das indenizações agregadas anuais que supera a prioridade. Ela pode ter sido excedida pela acumulação de valores pequenos e médios das indenizações ou por vultuosos montantes de indenizações individuais.

O contrato stop loss oferece à seguradora direta a mais ampla cobertura de ressseguro. Por outro lado, as resseguradoras têm vários motivos de reserva diante deste tipo de contrato pois nele há uma transferência excessiva de risco para a resseguradora, perda de volume de prêmios da resseguradora, grande necessidade da resseguradora de obter informações e possibilidades de manipulação da seguradora direta, entre outros. Por estas razões, este tipo de contrato é pouco difundido.

Este tratado é similar ao excedente de danos por risco, mas é aplicado ao sinistro agregado, ou seja

$$\begin{aligned} S_d^{ret} &= S_N \wedge d = \left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) \wedge d \\ S_d^{ced} &= (S_N - d)^+. \end{aligned}$$

2.3. Contratos combinados não proporcionais. Vimos acima que no tratado de excesso de danos anual há uma grande transferência de risco para a resseguradora. Por esta razão às vezes a resseguradora prefere introduzir uma componente proporcional no tratado, de forma que a sua responsabilidade sobre o excesso $X - d$ seja dividida com a seguradora primária, sendo esta limitada a uma certa proporção $(1 - a)$, ou seja

$$X_{d,L,a}^{ced} = (X - d)^+ \wedge L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ (1-a)X - d, & d < X \leq d + L \\ (1-a)L, & X > d + L. \end{cases} .$$

Desta forma aparece de maneira natural uma combinação de vários tipos de resseguro. Outras possibilidades são:

- Cotas antes de XL/SL:

$$\begin{aligned} X^{ced} &= (aX - d)^+ \\ S^{ced} &= (aS_N(X) - d)^+ \end{aligned}$$

- XL/SL antes da cota:

$$\begin{aligned} X^{ced} &= a(X - d)^+ \\ S^{ced} &= a(S_N(X) - d)^+ \end{aligned}$$

Na prática isto é feito para evitar a agravação moral de risco (moral hazard em inglês) de parte da seguradora primária, pois se ela fica com parte maior do risco, tentará disminuí-lo, verificar melhor as ocorrências de sinistros, etcétera.

A maneira de resumo, apresentamos a seguir um diagrama com os principais contratos de resseguro.

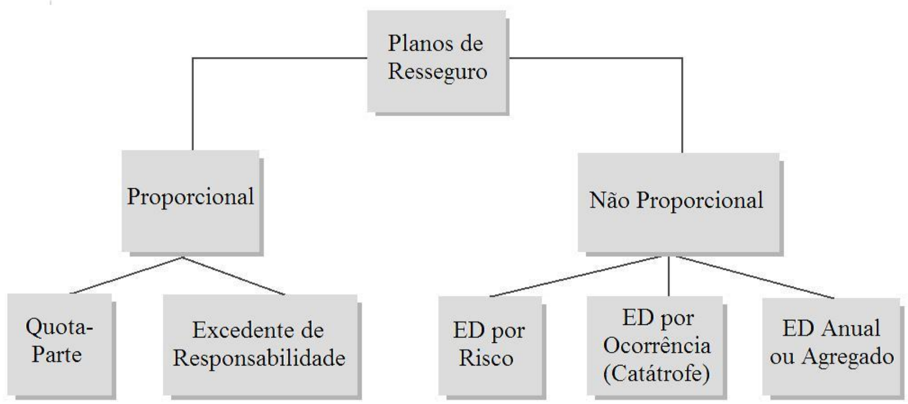

Figura 5. Tipos de contratos de resseguro.

3. Efeito do resseguro nas características das distribuições

Estudaremos a seguir como se transforma o modelo de risco coletivo uma vez que o um tratado de resseguro é subscrito. Consideraremos somente tratados cota-parte e de excesso de danos por risco.

3.1. Resseguro cota parte. Consideraremos um resseguro cota-parte, ou seja

$$X_a^{ret} = aX, \quad X_a^{ced} = (1-a)X, \quad a \in (0,1).$$

As novas funções de distribuição do valor da indenização individual podem ser calculadas da forma seguinte.

$$\begin{aligned} F_{X_a^{ret}}(x) &= \mathbb{P}(aX \le x) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{x}{a}\right) = F_X\left(\frac{x}{a}\right) \\ F_{X_a^{ced}}(x) &= \mathbb{P}((1-a)X \le x) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{x}{1-a}\right) = F_X\left(\frac{x}{1-a}\right). \end{aligned}$$

Então o efeito na distribuição de X_a^{ret} e na de X_a^{ced} é o mesmo. Além disto, tipicamente as novas distribuições continuam na mesma família paramétrica de F_X e não se transformam em distribuições mais "perigosas".

A distribuição do número de indenizações não se modifica pois

$$N = N_a^{ret} = N_a^{ced},$$

onde N_a^{ret} é o número de indenizações que deve assumir a seguradora primária e N_a^{ced} as que assume a resseguradora.

Podemos também calcular a esperança das indenizações

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_a^{ret}) &= \mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(X),\\ \mathbb{E}(X_a^{ced}) &= (1-a)\mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

e também a variância

$$\begin{aligned}Var(X_a^{ret}) &= Var(aX) = a^2Var(X) < Var(X),\\ Var(X_a^{ced}) &= Var((1-a)X) = (1-a)^2Var(X),\\ Cov(X_a^{ret}, X_a^{ced}) &= a(1-a)Cov[X,X] = a(1-a)Var(X).\end{aligned}$$

Observa-se que o resseguro cota-parte diminui a variabilidade no valor das indenizações. Além disto, as indenizações retida e cedida são positivamente correlacionadas.

Neste tipo de resseguro, o coeficiente de variação não é alterado pois

$$CV(X_a^{ret}) = \frac{\sqrt{Var(X_a^{ret})}}{\mathbb{E}(X_a^{ret})} = \frac{a\sqrt{Var(X)}}{a\mathbb{E}(X)} = CV(X) = CV(X_a^{ced})$$

Para analisarmos o que ocorre com o valor em risco, observe que

$$\mathbb{P}(X > VaR_\varepsilon(X)) = \mathbb{P}(aX > aVaR_\varepsilon(X)),$$

logo

$$\begin{aligned}VaR_\varepsilon(X_a^{ret}) &= a.VaR_\varepsilon(X) < VaR_\varepsilon(X),\\ VaR_\varepsilon(X_a^{ced}) &= (1-a)Var_\varepsilon(X) < VaR_\varepsilon(X).\end{aligned}$$

Para o valor em risco condicional obtemos propriedades similares, ou seja,

$$\begin{aligned}CVaR_\varepsilon(X_a^{ret}) &= aCVaR_\varepsilon(X) < CVaR_\varepsilon(X),\\ CVaR_\varepsilon(X_a^{ced}) &= (1-a)CVaR_\varepsilon(X) \leq CVaR_\varepsilon(X).\end{aligned}$$

Exemplo 3.1. Considere um modelo de risco no coletivo no qual o número de indenizações N segue a distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$ e a distribuição do valor das indenizações é exponencial com média $\mu > 0$, ou seja

$$f_X(x) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}},\ x > 0.$$

Após fazer um resseguro cota-parte com $a \in (0,1)$, obtemos que

$$F_{X_a^{ret}}(x) = F_X\left(\frac{x}{a}\right) = 1 - e^{-\frac{x}{a\mu}},\ x > 0,$$

portanto

$$f_{X_a^{ret}}(x) = \frac{1}{a\mu}e^{-\frac{x}{a\mu}},\ x > 0,$$

logo $X_a^{ret} \sim exp\left(\frac{1}{a\mu}\right)$. Analogamente podemos obter que $X_a^{ced} \sim exp(\frac{1}{(1-a)\mu})$ ou $X_a^{ced} \sim exp\left(\frac{1}{(1-a)\mu}\right)$. Além disto,

$$\begin{array}{lll} \mathbb{E}(X_a^{ret}) = a\mu, & \mathbb{E}(X_a^{ced}) = (1-a)\mu, & \\ Var(X_a^{ret}) = a^2\mu^2, & Var(X_a^{ced}) = (1-a)^2\mu^2, & Cov(X_a^{ret}, X_a^{ced}) = a(1-a)\mu^2. \end{array}$$

Para calcularmos o valor em risco e o valor em risco condicional, vamos usar que se $X \sim exp\left(\frac{1}{\mu}\right)$, vale $VaR_\varepsilon(X) = -\mu \ln(\varepsilon)$ e $CVaR_\varepsilon(X) = \mu(1 - \ln(\varepsilon))$. Logo,

$$\begin{array}{ll} VaR_\varepsilon(X_a^{ret}) = -a.\mu\ln(\varepsilon), & VaR_\varepsilon(X_a^{ced}) = -(1-a)\mu\ln(\varepsilon), \\ CVaR_\varepsilon(X_a^{ret}) = a\mu(1-\ln(\varepsilon)), & CVaR_\varepsilon(X_a^{ced}) = (1-a)\mu(1-\ln(\varepsilon)). \end{array}$$

Resumindo, temos que após feito este resseguro, a seguradora primária teria que utilizar um modelo de risco no coletivo onde o número de indenizações continua tendo a distribuição de Poisson com parâmetro λ, mas a distribuição das indenizações individuais seria exponencial com média $a\mu$. A resseguradora deveria utilizar um modelo semelhante. Só seria diferente o parâmetro da distribuição das indenizações individuais que seria agora exponencial com média $(1-a)\mu$.

$\triangleleft$

3.2. Resseguro excesso de danos por risco. No resseguro de excesso de danos por risco com prioridade d e cobertura ilimitada, tínhamos que

$$X_d^{ret} = \min\{X, d\} = X \wedge d \qquad\qquad X_d^{ced} = \max\{X, d\} = (X-d)^+.$$

Estudaremos a seguir o efeito deste tipo de resseguro nas características das quantidades aleatórias de interesse para a seguradora e a resseguradora. Embora na realidade seja mais frequente encontrar resseguros com cobertura finita, devido às relações seguintes

$$\begin{aligned} X_{d,h}^{ret} &= X_d^{ced} - X_{d+h}^{ced} = X_{d+h}^{ret} - X_d^{ret}, \\ X_{d,h}^{ret} &= X - (X_d^{ced} - X_{d+h}^{ced}) = X_d^{ret} + X_{d+h}^{ced}, \end{aligned}$$

consideraremos aqui somente contratos com cobertura ilimitada, pois estes são mais simples de analisar.

3.2.1. ***O efeito do resseguro no valor das indenizações individuais.*** As variáveis aleatórias X_d^{ret} e X_d^{ced} são transformações aplicadas à variável aleatória X. No capitulo anterior, estudamos estas transformações. Elas foram chamadas de variável de perda limitada e de variável transladada censurada à esquerda, respectivamente. Utilizaremos no que segue, os resultados mencionados naquele parágrafo.

A variável X_d^{ret} tem função de distribuição

$$F_{X_d^{ret}} = \begin{cases} F_X(y) & y < d, \\ 1, & y \geq d. \end{cases}$$

Portanto, se $\mathbb{P}(X < d) < 1$, X_d^{ret} não é mais uma variável contínua e passa a ter massa acumulada em d.

Já para o valor cedido X_d^{ced} a função de distribuição será

$$F_{X_d^{ced}} = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ F_X(y+d), & y \geq 0. \end{cases}$$

Portanto, X_d^{ced} deixará de ser contínua se $F_X(d) > 0$.

Além disto, teremos que

$$\mathbb{E}(X_d^{ret}) = \int_0^d S_X(y)dy \underset{d\to\infty}{\nearrow} \int_0^\infty S_X(y)dy = \mathbb{E}X,$$
$$\mathbb{E}[X_d^{ced}] = \mathbb{E}X - \mathbb{E}(X_d^{ret}) = \int_d^\infty S_X(y)dy = \int_d^\infty (y-d)f_X(y)dy \leq \mathbb{E}X.$$

Vemos que como os valor retido e cedido são sempre menores ou iguais à indenização total, as sua médias também satisfazem isto. Além disso, a medida que a prioridade cresce a média do valor retido aproxima-se mais da média sem a prioridade, o que também é bastante natural.

Nota 3.2. Usando que $S_X(y) \leq 1$ é simples obter que $\mathbb{E}(X_d^{ret}) \leq d$. Ou seja, estamos dizendo que a média do valor retido nunca ultrapassa a prioridade, o que é lógico porque o próprio valor retido nunca o faz.

Nota 3.3. Seja $\rho_X = F_X^S$, onde F_X^S é a distribuição de cauda integrada de X Utilizando a definição de F_X^S não é difícil verificar que

$$\mathbb{E}[X_d^{ced}] = \rho_X(d)\mathbb{E}X;$$
$$\mathbb{E}[X_d^{ret}] = (1-\rho_X(d))\mathbb{E}X = \overline{\rho_X}(d)\mathbb{E}X.$$

Ou seja, $\rho_X(d)$ (respectivamente $\overline{\rho_X}(d)$) funciona como um coeficientes de proporcionalidade entre $\mathbb{E}[X_d^{ced}]$ (respectivamente $\mathbb{E}[X_d^{ret}]$) e $\mathbb{E}X$. Lembre que obtivemos expressões semelhantes no caso do resseguro conta-parte. $\rho_X(d)$ é chamado de coeficiente de retenção

Exemplo 3.4. Suponnha que uma seguradora modela o valor das indenizações individuais correspondentes a determinada carteira usando o modelo exponencial com parâmetro $\mu > 0$. Se esta seguradora fizesse um contrato de resseguro de excedente de danos por risco com dedutível d e cobertura ilimitada, teremos que

$$F_{X_d^{ret}} = \begin{cases} 1 - e^{-\mu y}, & y < d, \\ 1, & y \geq d. \end{cases}$$

Neste caso X_d^{ret} será uma variável mista. Além disto,

$$\mathbb{E}(X_d^{ret}) = \int_0^d S_X(y)dy = \int_0^d e^{-\mu y}dy = \frac{1-e^{-\mu y}}{\mu}.$$

Observe que $\mathbb{E}(X_d^{ret}) \leq \mathbb{E}X = \frac{1}{\mu}$ e $\mathbb{E}(X_d^{ret}) \xrightarrow[d\to\infty]{} \frac{1}{\mu} = \mathbb{E}X$.

Para a indenização cedida à resseguradora teriamos que

$$F_{X_d^{ced}} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-\mu(y+d)}, & y \geq 0 \end{cases}$$

e X_d^{ced} sempre será uma variável aleatória mista. Além disto,

$$\mathbb{E}(X_d^{ced}) = \mathbb{E}X - \mathbb{E}(X_d^{ret}) = \frac{1}{\mu} - \frac{1-e^{-\mu d}}{\mu} = \frac{e^{-\mu d}}{\mu}.$$

◁

Exemplo 3.5. Suponha que estamos na mesma situação do exemplo anterior com a única diferença que agora a distribuição da indenização individual segue a distribuição de Pareto com parâmetros α e x_0, respectivamente. Ou seja,

$$f_X(x) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \qquad F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, \qquad x > x_0.$$

Observe que deve ocorrer $x_0 < d$, caso contrário o resseguro não faria sentido. Então

$$F_{X_d^{ret}} = \begin{cases} 0, & y \le x_0, \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, & x_0 < y < d, \\ 1, & y \ge d, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_d^{ret}) &= \int_0^d S_X(y)dy = \int_0^{x_0} 1dy + \int_{x_0}^d \left(\frac{x_0}{y}\right)^\alpha dy \\ &= x_0 + x_0^\alpha \frac{y^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_0^d = x_0 + \frac{x_0^\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x_0^{\alpha-1}} - \frac{1}{d^{\alpha-1}}\right) \\ &= \frac{\alpha x_0}{\alpha-1} - \frac{x_0^\alpha}{(\alpha-1)d^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Teremos portanto que $\mathbb{E}(X_d^{ret}) \le \dfrac{\alpha x_0}{\alpha-1} \le \mathbb{E}X$ e além disto, se $d \to \infty$, $\dfrac{x_0^\alpha}{(\alpha-1)d^{\alpha-1}} \to 0$ e $\mathbb{E}(X_d^{ret}) \to \mathbb{E}X$.

Para a indenização cedida à resseguradora, temos que

$$F_{X_d^{ced}} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - \left(\frac{x_0}{y+d}\right)^\alpha, & y \ge 0. \end{cases}$$

Novamente X_d^{ced} será uma variável aleatória mista. Para a esperança teremos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_d^{ced}) &= \mathbb{E}X - \mathbb{E}(X_d^{ret}) \\ &= \frac{\alpha x_0}{\alpha-1} - \left(\frac{\alpha x_0}{\alpha-1} - \frac{x_0^\alpha}{(\alpha-1)d^\alpha}\right) \\ &= \frac{x_0^\alpha}{(\alpha-1)d^\alpha}. \end{aligned}$$

◁

A estrutura do resseguro excesso de danos por risco é mais complexa que a do resseguro cota-parte e isto faz com que em geral as expressões das características das distribuições sejam mais complicadas. Assim ocorre também com as variâncias covariâncias e coeficiente de variação. Passaremos a explicar isto a seguir.

Proposição 3.6. *Para os valores retido X_d^{ret} e cedido X_d^{ced} valem*

$$\mathbb{E}[(X_d^{ret})^2] = 2\int_0^d xS_X(x)dx$$
$$\mathbb{E}[(X_d^{ced})^2] = 2\int_d^\infty (x-d)S_X(x)dx.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_d^{ret})^2] &= \int_0^d x^2 f_X(x)dx + \int_d^\infty d^2 f_X(x)dx = \int_0^d x^2 f_X(x)dx + d^2 S_X(d)\\ &= x^2 S_X(x)\Big|_0^d + 2\int_0^d xS_X(x)dx + d^2 S_X(d)\\ &= 2\int_0^d xS_X(x)dx.\end{aligned}$$

Para o risco cedido, usando que $X^2 = (X_d^{ret} + X_d^{ced})^2 = (X_d^{ret})^2 + 2X_d^{ret}X_d^{ced} + (X_d^{ced})^2$ e também que $X_d^{ret}X_d^{ced} = dX_d^{ced}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_d^{ced})^2] &= \mathbb{E}[X^2] - 2d\mathbb{E}[X_d^{ced}] - \mathbb{E}[(X_d^{ret})^2]\\ &= 2\int_0^\infty xS_X(x)dx - 2d\int_d^\infty S_X(x)dx - 2\int_0^d xS_X(x)dx\\ &= 2\int_d^\infty (x-d)S_X(x)dx.\end{aligned}$$

□

Como consequência da proposição acima obtemos que

$$Var[X_d^{ret}] = 2\int_0^d xS_X(x)dx - \Big(\int_0^d S_X(x)dx\Big)^2$$
$$Var[X_d^{ced}] = 2\int_d^\infty (x-d)S_X(x)dx - \Big(\int_d^\infty S_X(x)dx\Big)^2.$$

Nota 3.7. Expressões alternativas podem ser obtidas para $Var[X_d^{ret}]$ e $Var[X_d^{ced}]$ utilizando a relação $S_X(x) = \mathbb{E}[X]\rho'_X(x)$. Para mais detalhes, veja o exercício 2.6.

Podemos também calcular a covariância entre X_d^{ret} e X_d^{ced}.

$$\begin{aligned}Cov[X_d^{ret}, X_d^{ced}] &= \mathbb{E}[X_d^{ret} \cdot X_d^{ced}] - \mathbb{E}[X_d^{ret}]\mathbb{E}[X_d^{ced}]\\ &= d\mathbb{E}[X_d^{ced}] - \mathbb{E}[X_d^{ret}]\mathbb{E}[X_d^{ced}]\\ &= \mathbb{E}[X_d^{ced}](d - \mathbb{E}[X_d^{ret}]).\end{aligned}$$

Em particular obtemos que $Cov[X_d^{ret}, X_d^{ced}] \geq 0$, ou seja X_d^{ret} e X_d^{ced} são positivamente correlacionados. Segue também que

$$Var[X] \geq Var[X_d^{ret}] + Var[X_d^{ced}].$$

Portanto, $Var[X_d^{ret}] \leq Var[X]$ e $Var[X_d^{ced}] \leq Var[X]$. Em outras palavras, a subscrição deste tipo de tratado não aumenta a variabilidade do valor da indenização.

Em relação ao coeficiente de variação temos o seguinte:

$$\begin{aligned} CV[X_d^{ret}] &\leq CV[X] \\ CV[X_d^{ced}] &\geq CV[X]. \end{aligned}$$

Ou seja, para a resseguradora, o risco medido em termos do coeficiente de variação aumentou em comparação ao risco original. Para a seguradora ocorreu o contrário, o risco diminuiu. Isto é uma outra diferença em relaçao ao resseguro cota-parte, onde o coeficiente de variação não era alterado.

Vejamos o que ocorre com outras medidas de risco.

Para o valor em risco temos

$$\begin{aligned} VaR_\varepsilon[X_d^{ret}] &= \begin{cases} d, & d < VaR_\varepsilon[X]; \\ VaR_\varepsilon[X], & d \geq VaR_\varepsilon[X]. \end{cases} \\ VaR_\varepsilon[X_d^{ced}] &= VaR_\varepsilon[X] - d. \end{aligned}$$

Em particular, sempre teremos que $VaR_\varepsilon[X_d^{ret}] < VaR_\varepsilon[X]$ e $VaR_\varepsilon[X_d^{ced}] < VaR_\varepsilon[X]$.

Em relação ao valor em risco condicional, podemos obter (veja o exercício 2.7)

$$\begin{aligned} CVaR_\varepsilon[X_d^{ret}] &= \begin{cases} 2d, & d < VaR_\varepsilon[X]; \\ CVaR_\varepsilon[X], & d \geq VaR_\varepsilon[X]. \end{cases} \\ CVaR_\varepsilon[X_d^{ced}] &= CVaR_\varepsilon[X] - 2d \leq CVaR_\varepsilon[X]. \end{aligned}$$

Exemplo 3.8. Voltemos ao exemplo 3.4. Aqui tínhamos que $X \sim exp(\mu)$.

Temos que $VaR_\varepsilon[X] = -\frac{1}{\mu}\ln(\varepsilon)$. Então

$$VaR_\varepsilon[X_d^{ret}] = \begin{cases} d, & d < -\frac{1}{\mu}\ln(\varepsilon); \\ -\frac{1}{\mu}\ln(\varepsilon), & d \geq -\frac{1}{\mu}\ln(\varepsilon). \end{cases}$$

Além disto, $VaR_\varepsilon[X_d^{ced}] = -\frac{1}{\mu}\ln(\varepsilon) - d$. Para o valor em risco condicional na cauda, teremos que $CVaR_\varepsilon[X] = ...$

◁

Exemplo 3.9. No exemplo 3.5 assumimos que $X \sim Pareto(\alpha, x_0)$.

◁

3.2.2. ***O efeito do resseguro na quantidade de indenizações.*** Se denotarmos por N_d^{ret} e N_d^{ced} o número de indenizações assumidas pela seguradora e pela resseguradora, respectivamente, durante o período de tempo considerado, teremos que

$$N_d^{ret} = N,$$

pois toda vez que há um sinistro a seguradora será notificada e pagará pelo menos, parte da indenização. Isto nem sempre ocorre desta maneira com a resseguradora. De fato ela será notificada somente quando houver sinistros que resultem em indenizações de maiores do que a prioridade do contrato. Sendo assim,

$$N_d^{ced} = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{I}_{\{X_k > d\}},$$

ou seja, as indenizações que assume a resseguradora são todas aquelas que resultaram em valores maiores que a prioridade. Calcularemos a seguir a função de probabilidade de N_d^{ced}.

Proposição 3.10.

$$p_{N_d^{ced}}(n) = [S_X(d)]^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} [F_X(d)]^{k-n} p_N(k).$$

Demonstração.

$$p_{N_d^{ced}}(n) = \mathbb{P}(N_d^{ced} = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_d^{ced} = n | N = k)\mathbb{P}(N = k)$$
$$= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}_{\{X_k > d\}} = n | N = k \Big) p_N(k).$$

Como N e a sequência $\{X_j\}$ são independentes, temos que

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}_{\{X_j > d\}} = n | N = k \Big) = \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}_{\{X_j > d\}} = n \Big).$$

Lembre que a variável $\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}_{\{X_j > d\}}$ conta o número de vezes que alguma das k primeiras indenizações passa da prioridade. Além disto, as indenizações ocorrem uma independentemente da outra. Portanto esta variável segue a distribuição binomial com parâmetros k e S_{X_j}. Então

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}_{\{X_j > d\}} = n \Big) = \binom{k}{n} [S_X(d)]^n [F_X(d)]^{k-n}$$

e obtemos dai o resultado desejado. □

Consideraremos agora dois exemplos.

Exemplo 3.11. Suponha que $N \sim Poisson(\lambda)$. Então $N_d^{ret} \sim Poisson(\lambda)$. Calculemos a distribuição de N_d^{ced} usando a proposição anterior.

$$\begin{aligned}
p_{N_d^{ced}}(n) &= [S_X(d)]^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} [F_X(d)]^{k-n} p_N(k) \\
&= [S_X(d)]^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} [F_X(d)]^{k-n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}[\lambda S_X(d)]^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(n-k)!} \frac{1}{k!} [\lambda F_X(d)]^{k-n} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{n!}[\lambda S_X(d)]^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{[\lambda F_X(d)]^{k-n}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{n!}[\lambda S_X(d)]^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda F_X(d)]^{-j}}{j!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{n!}[\lambda S_X(d)]^n e^{[\lambda F_X(d)} \\
&= \frac{e^{-\lambda S_X(d)}}{n!}[\lambda S_X(d)]^n,
\end{aligned}$$

ou seja, $N_d^{ced} \sim Poisson(\lambda S_X(d))$.

◁

Exemplo 3.12. Assuma agora que $N \sim BN(r,p)$. Então $N_d^{ret} \sim BN(r,p)$ e passaremos a calcular a distribuição de N_d^{ced}.

Sabemos que

$$p_{N_d^{ced}}(n) = [S_X(d)]^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} [F_X(d)]^{k-n} p_N(k).$$

Vamos transformar um pouco o termo da direita da igualdade acima para chegarmos em uma distribuição que possamos identificar.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} [F_X(d)]^{k-n} p_N(k) &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} [F_X(d)]^{k-n} \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \\
&= p^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} \frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!} [F_X(d)]^{k-n} (1-p)^k \\
&= \frac{p^r}{n!(r-1)!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k+r-1)!}{(k-n)!} [F_X(d)]^{k-n} (1-p)^k.
\end{aligned}$$

No somatório acima vamos simplesmente trocar a variável k pela nova variável $j = k - n$. Obtemos então

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}[F_X(d)]^{k-n}p_N(k) &= \frac{p^r}{n!(r-1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+n+r-1)!}{j!}[F_X(d)]^j(1-p)^{j+n}\\ &= \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}p^r\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+n+r-1)!}{j!(n+r-1)!}[F_X(d)]^j(1-p)^{j+n}\\ &= \binom{n+r-1}{n}p^r\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+n+r-1}{j}[F_X(d)]^j(1-p)^{j+n}.\end{aligned}$$

Seja $q = p + (1-p)S_X(d)$. Então $q \in [0,1]$ e $1 - q = (1-p)F_X(d)$, portanto,

$$\begin{aligned}p_{N_d^{ced}}(n) &= \binom{n+r-1}{n}p^r[(1-p)S_X(d)]^n\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+n+r-1}{j}[(1-p)F_X(d)]^j\\ &= \binom{n+r-1}{n}\frac{p^r[(1-p)S_X(d)]^n}{q^{n+r}}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+n+r-1}{j}q^{n+r}[(1-p)F_X(d)]^j\\ &= \binom{n+r-1}{n}\frac{p^r}{q^r}\frac{[(1-p)S_X(d)]^n}{q^n}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+n+r-1}{j}q^{n+r}[(1-p)F_X(d)]^j.\end{aligned}$$

Agora repare que o termo geral do somatório é a função de probabilidade de uma $BN(n+r,q)$, portanto ele vale um. Por outro lado, $\binom{n+r-1}{n}\frac{p^r}{q^r}\frac{[(1-p)S_X(d)]^n}{q^n}$ é o termo geral da função de probabilidade de uma $BN(r,p/q)$. Podemos concluir então que

$$N_d^{ced} \sim BN\left(r, \frac{p}{p+(1-p)S_X(d)}\right).$$

◁

3.2.3. ***O efeito do resseguro nas indenizações agregadas.*** Chamando de $S_{N,d}^{ret}$ e $S_{N,d}^{ret}$ às indenizações agregadas retidas e cedidas, respectivamente, teremos que

$$S_{N,d}^{ret} = \sum_{k=1}^{N}X_{k,d}^{ret},\ \ F_{S_{N,d}^{ret}} = \sum_{k=1}^{\infty}F^{*k}_{X_{N,d}^{ret}}(x)p_N(k).$$

Enquanto à resseguradora, observe que como $S_N = S_{N,d}^{ret} + S_{N,d}^{ced}$, temos que

$$S_{N,d}^{ced} = \sum_{k=1}^{N}X_{k,d}^{ced} = \sum_{k=1}^{N}(X_k - d)^+.$$

A representação acima tem uma desvantagem para a resseguradora. Lembremos que os modelos utilizados por qualquer companhia de seguros são obtidos a partir da análise estatística dos dados históricos do comportamento das suas carteiras. No entanto, repare que **a resseguradora não tem acesso aos valores observados da variável $(\mathbf{X} - \mathbf{d})^+$**. Isto ocorre porque quando são notificadoas à seguradora sinistros que resultam em valores de indenização menores que o dedutível, a resseguradora não é notificada, como observamos anteriormente.

A resseguradora observa uma outra variável aleatória que chamaremos de X_d que satisfaz $X_d \sim X - d|X > d$. Ou seja, toda vez que a indenização passar do dedutível, esta variável representa quanto esta indenização o excedeu. No final de um período de tempo, a resseguradora terá valores correspondentes a esta variável. Portanto, é esta a variável com a que vamos trabalhar.

No modelo coletivo observado pela resseguradora, a variável N^{ced} conta o número de indenizações e a sequência de variáveis i.i.d. $\{X_{j,d}\}_{j=1}^{\infty}$ satisfaz $X_{j,d} \sim X - d|X > d$. Além disto, temos que

$$S_{N,d}^{ced} = \sum_{k=1}^{N^{ced}} X_{j,d}.$$

Tentaremos ilustrar isto com um exemplo.

Exemplo 3.13. Suponha que uma seguradora subscreve um resseguro de excesso de danos por risco com cobertura ilimitada e dedutível $1.000,00$ reais. Suponha também que ao longo do mês foram notificadas na sequência, dez indenizações com os valores listados na tabela seguinte. Cada valor x_j que aparece acima é um valor observado da variável X_j. Repare agora que

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
750, 00	500, 00	1.200, 00	100, 00	200, 00	1.500, 00	1.700, 00	250, 00	1.000, 00	350, 00.

somente o terceiro, sexto e sétimo valores de indenizações excedem o dedutível. Desta forma, a resseguradora receberá $n_{1000}^{ced} = 3$ notificações de sinistros. Os valores individuais que ela deverá honrar aparecem listados na tabela a seguir. Na tabela acima listamos valores observados das

$x_{1,1000}$	$x_{2,1000}$	$x_{3,1000}$
700, 00	500, 00	700, 00.

variáveis $X_{1,1000}$, $X_{2,1000}$ e $X_{3,1000}$, respectivamente. Estas três variáveis têm a distribuição $X - 1000|X > 1000$.

$\triangleleft$

No capitulo anterior, estudamos a distribuição da variável $X_d \sim X - d|X > d$. Ela foi chamada de excedente de danos. A sua função de distribuição estava dada por

$$F_{X_d}(x) = \frac{F_X(x+d) - F_X(d)}{S_X(d)},$$

e portanto,

$$S_{X_d}(x) = \frac{S_X(x+d)}{S_X(d)}.$$

$\mathbb{E}[X_d]$ foi chamada de excesso médio de X com prioridade d. Denotando $\mathbb{E}[X_d]$ como $e_X(d)$ vemos que

$$\begin{aligned} e_X(d) &= \int_0^\infty S_{X_d}(x)dx = \int_0^\infty \frac{S_X(x+d)}{S_X(d)}dx \\ &= \frac{\int_d^\infty S_X(x)dx}{S_X(d)} = \frac{\mathbb{E}[(X-d)^+]}{S_X(d)} = \frac{\mathbb{E}[X^{ced}]}{S_X(d)}. \end{aligned}$$

Ou seja, $e_X(d) = \dfrac{\mathbb{E}[X^{ced}]}{S_X(d)}$, onde estamos assumindo que $S_X(d) > 0$. De alguma maneira podemos interpretar o valor $\frac{1}{S_X(d)}$ como um fator de correção de $\mathbb{E}[X_d]$. Observe também que teremos $e_X(d) = \mathbb{E}[X_d] > \mathbb{E}[X^{ced}]$, a menos que $S_X(d) = 1$. Na prática a condição $\mathbb{P}(X > d) = 1$ significa que quase todos os valores de indenização (salvo raríssimas exceções) são maiores que o dedutível, só que nenhuma resseguradora aceitaria um contrato nessas condições.

Observe que se $X \sim exp(\lambda)$, então

$$e_X(d) = \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(X)$$

e que neste caso particular, obtemos que $e_X(d)$ independe da prioridade d. Para $X \sim Pareto(\alpha, x_0)$, vimos que

$$e_X(d) = \frac{d + x_0}{\alpha - 1}.$$

Neste caso o excesso médio é uma função linear da prioridade d.

4. Exercícios

2.1. Considere um tratado de resseguro no qual o valor da indenização individual cedida é 70% de cada indenização individual em excesso de um dedutível de 500 reais, com uma cobertura de 5000 reais. Suponha que as indenizações individuais, medidas em milhares de reais, seguem a distribuição de Pareto com parâmetros 3 e 2.

(a) Determine a fórmula para a função de distribuição da indenização individual retida pela seguradora.
(b) Quanto receberá a seguradora assinante do contrato em média por cada indenização individual?

2.2. Em certo tratado de resseguro o valor da indenização individual cedida é 80% dos primeiros 2000 reais em excesso de um dedutível de 200 reais e 50% do valor restante até atingir uma cobertura de 10000 reais.

(a) Decomponha este contrato de duas faixas numa carteira de dois contratos de uma faixa.
(b) Suponha que o valor das indenizações segue a distribuição exponencial com média 4000. Determine a média da indenização individual cedida pela seguradora.

2.3. Uma seguradora modela a sua indenização agregada como $S \sim$ Poisson composta com $\lambda = 10$ e distribuição das indenizações $p_Y(1) = 0,2 = p_Y(2)$, $p_Y(3) = 0,6$. A seguradora vai contratar um resseguro com retenção com níveis $d = 1,5$ ou $d = 2,5$.

(a) Qual destas escolhas minimiza o valor esperado da perda da resseguradora?
(b) Com o d obtido no item anterior qual seria o valor esperado do número de reclamações que deve atender a resseguradora?
(c) A resseguradora faria a mesma escolha entre todos níveis de retenção que satisfazem $2 \leq d \leq 2,5$? Por quê?

2.4. Considere um tratado de resseguro por quotas no qual a indenização individual retida representa uma fração de 40% do valor da indenização individual.

(a) Determine fórmulas para a função geradora de momentos e para a função geradora de cumulantes da indenização individual retida em função da função geradora de momentos e da função geradora de cumulantes da indenização individual X.
(b) Utiliza o item anterior para reobter as fórmulas para a média, a variância e o coeficiente de variação da indenização individual retida neste caso

2.5. Esboce os gráficos da indenização individual retida e cedida por uma seguradora em função do valor da indenização individual para cada um dos seguintes tipos de contrato:

(a) resseguro de excesso de danos com cobertura ilimitada;
(b) resseguro de excesso de danos com cobertura finita;
(c) resseguro por quotas.

2.6. Neste exercício vamos obter expressões alternativas para a variância dos valores retido e cedido das indenizações individuais.

(a) Utilizando que $S_X(x) = \mathbb{E}[X]\rho'_X(x)$, a expressão obtida para $\mathbb{E}[(X_d^{ret})^2]$ e fazendo integração por partes obtenha que

$$\mathbb{E}[(X_d^{ret})^2] = 2\mathbb{E}X \int_0^d [\rho_X(d) - \rho_X(x)]dx.$$

(b) Use o item anterior para obter que

$$Var[X_d^{ret}] = 2\mathbb{E}X \int_0^d [\rho_X(d) - \rho_X(x)]dx - \rho_X^2(d)(\mathbb{E}X)^2.$$

(c) Verifique que como consequência da expressão acima temos

$$\mathbb{E}[(X_d^{ced})^2] = 2\mathbb{E}X \int_d^\infty \overline{\rho_X}(x)dx.$$

(d) Use o item anterior para obter que

$$Var[X_d^{ced}] = 2\mathbb{E}X \int_d^\infty \overline{\rho_X}(x)dx - \overline{\rho_X}^2(d)(\mathbb{E}X)^2.$$

2.7. Verifique que

(a) $Var_\varepsilon[X_d^{ret}] = \begin{cases} d, & d < VaR_\varepsilon[X]; \\ VaR_\varepsilon[X], & d \geq VaR_\varepsilon[X]. \end{cases}$

(b) $CVaR_\varepsilon[X_d^{ret}] = \begin{cases} 2d, & d < VaR_\varepsilon[X]; \\ CVaR_\varepsilon[X], & d \geq VaR_\varepsilon[X]. \end{cases}$

(c) $Var_\varepsilon[X_d^{ced}] = Var_\varepsilon[X] - d.$

(d) $CVaR_\varepsilon[X_d^{ced}] = CVaR_\varepsilon[X] - 2d \leq CVaR_\varepsilon[X].$

Referências

[1] S. Asmussen. *Ruin Probabilities*. World Scientific, River Edge, NJ, 2001.

[2] M. A. Bean. *Probability:the Science of Uncertainty*. Americal Mathematical Society, New York, 2009.

[3] N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, and C. J. Nesbitt. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Schaumburb, Illinois, 1997.

[4] M. L. Centeno. *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*. Celta Editora, Oeiras, 2003.

[5] C. D. Daykin, T. Pentikainen, and M. Pesonen. *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman & Hall/CRC Press, ??, 1994.

[6] J. Dhaene, M. Denuit, R. Kaas, and M. Goovaerts. *Modern Actuarial Risk Theory Using R*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[7] Christophe Dutang, Vincent Goulet, and Mathieu Pigeon. actuar: An R Package for Actuarial Science. *Journal of Statistical Software*, 25(7):38, 2008.

[8] Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, and Thomas Mikosch. *Modelling extremal events. For insurance and finance.Applications of Mathematics (New York), 33*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 1*. John Wiley, New York, 1957.

[10] J. Grandell. *Aspects of Risk Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[11] D. Hoopes. *Introdução a sinistros*. FUNENSEG, Rio de Janeiro, 2001.

[12] S. A. Klugman, H. H. Panjer, and G. E. Willmot. *Loss Models From Data to Decisions*. John Wiley e Sons Inc, Hoboken, New Jersey, 2004.

[13] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2010. ISBN 3-900051-07-0.

[14] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels. *Stochastic processes for insurance and finance*. John Wiley, New York, 2009.

[15] B. D. Smith and E. A. Wiening. *Como funciona o seguro*. FUNENSEG, Rio de Janeiro, 1999.

[16] Swiss-Re. *Introdução ao resseguro*. Swiss Reinsurance Company, 1999. Reporte técnico.

[17] J. Teugels and B. Sundt. *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley, 2004.