

**Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística**

**Introdução aos Modelos Probabilísticos Discretos:
Binomial, Hipergeométrico, Binomial Negativo, Geométrico e Poisson**

Edna A. Reis e Ilka A. Reis

**Apostila Didática
RTE-01/2016**

Este material é de domínio público. Pedese apenas para citar a fonte:

Reis, E. A., Reis, I. A. (2016). *Introdução aos Modelos Probabilísticos Discretos: Binomial, Hipergeométrico, Binomial Negativo, Geométrico e Poisson*. Relatório Técnico do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais.

SUMÁRIO

1. Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidades	03
1.1. Variável Aleatória	03
1.2. Função de Probabilidade	05
1.3. Função de Distribuição Acumulada	06
1.4. Esperança e Variância	08
1.5. Propriedades de Linearidade da Esperança e da Variância	10
2. Modelo Binomial	12
2.1. Exemplo Inicial	12
2.2. Definições	12
2.3. Outros Exemplos	14
3. Modelo Hipergeométrico	15
3.1. Exemplo Inicial	15
3.2. Definições	16
3.3. Outros Exemplos	17
4. Modelo Binomial Negativo	18
4.1. Exemplo Inicial	18
4.2. Definições	18
4.3. Outros Exemplos	19
4.4. Caso Especial: O Modelo Geométrico	21
5. Modelo Poisson	22
5.1. Exemplo Inicial	22
5.2. Definições	22
5.3. Suposições	24
5.4. Outros Exemplos	24
5.5. Aproximação da Binomial pela Poisson	25
5.6. Verificação da Adequação do Modelo de Poisson	27
Referências Bibliográficas	28

1. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES

Nossa vida, pessoal ou profissional, é repleta de eventos incertos. Quantos minutos levarei para ir de casa até o trabalho ou escola? Vai chover hoje à tarde? Este medicamento terá o desejado em mim? Eliminar a incerteza de nossas vidas é tarefa impossível. Assim, devemos aprender a lidar com ela.

Quantificar a incerteza, expressando-a em um valor numérico, é uma das maneiras que o ser humano criou para lidar com ela nos eventos do dia-a-dia. A quantificação da incerteza é o que chamamos de *Probabilidade*. Assim, a Probabilidade é a medida da (in)certeza sobre a ocorrência de um evento.

Até aqui, já sabemos o que são experimentos aleatórios e aprendemos a calcular probabilidades em situações simples, que envolvem espaços amostrais cujos elementos têm todos a mesma probabilidade de ocorrer (ex: jogos de dados ou de cartas). Em geral, o interesse era calcular a probabilidade de ocorrência de um elemento do espaço amostral (ex: um ás no jogo de cartas) ou de uma combinação de eventos (ex: um ás ou um valete; um ás vermelho).

Neste capítulo, vamos aprender a transformar os elementos simbólicos de um espaço amostral em valores numéricos. Essa operação de transformação, cujo resultado chamamos de *variável aleatória*, facilita muito a resolução de problemas que envolvem incerteza. A medida dessa incerteza, ou seja, a probabilidade, será associada aos valores da variável aleatória e não mais a cada elemento ou combinação de elementos do espaço amostral.

Cada *variável aleatória* tem associada a si uma *função de probabilidade*. As subseções 1.1 a 1.5 apresentarão a definição para esses dois elementos e trarão exemplos de sua aplicação na resolução de problemas. As seções 2 a 5 apresentam alguns dos modelos matemáticos para a função de probabilidade de uma variável aleatória *discreta*, como o número de filhos em uma família ou o número de votos de um candidato.

O objeto deste texto é abordar os modelos probabilísticos mais utilizados para se trabalhar com variáveis aleatórias discretas. Para detalhes e informações sobre outros modelos probabilísticos, os trabalhos de Triola (2013), Montgomery e Runger (2012) e de Walpole e colegas (2009) são excelentes fontes de consulta.

1.1. Variável Aleatória

Exemplo Inicial: vamos considerar, como exemplo, o experimento aleatório de jogar dois dados e observar as faces de cima. O espaço amostral, neste caso, é formado pelos resultados mostrados na Figura 1.1. Se os dados são honestos, cada um desses 36 resultados tem a mesma probabilidade de ocorrer (1/36).

Vamos atribuir, a cada ponto amostral, a *soma dos valores das faces*, denotada por X . Por exemplo, para os pontos amostrais



temos que $X=2$ e $X=7$, respectivamente. Já os pontos amostrais



levam ao mesmo valor de $X=6$.

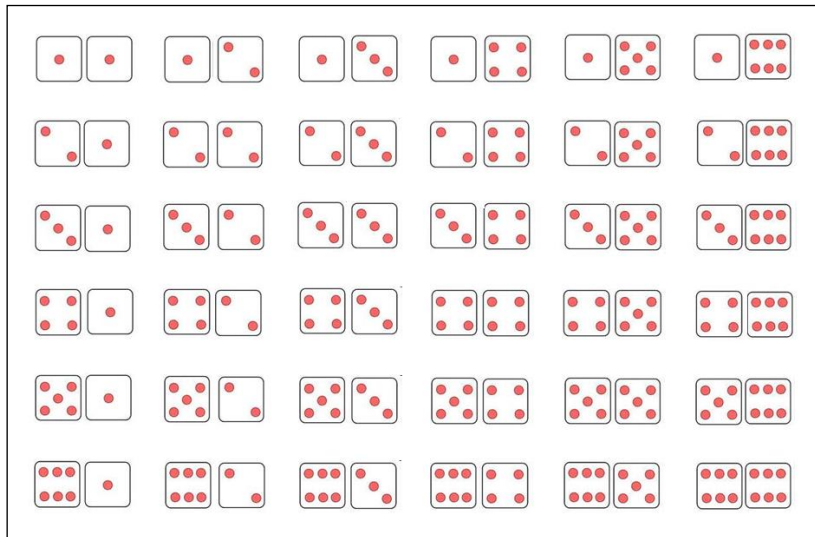


Figura 1.1: Espaço amostral no lançamento de dois dados.

A Figura 1.2 mostra os valores possíveis de X e quais elementos do espaço amostral levam a cada um desses valores. Note que cada ponto amostral leva a apenas um valor de X ; entretanto, um determinado valor de X pode vir de diferentes pontos amostrais.

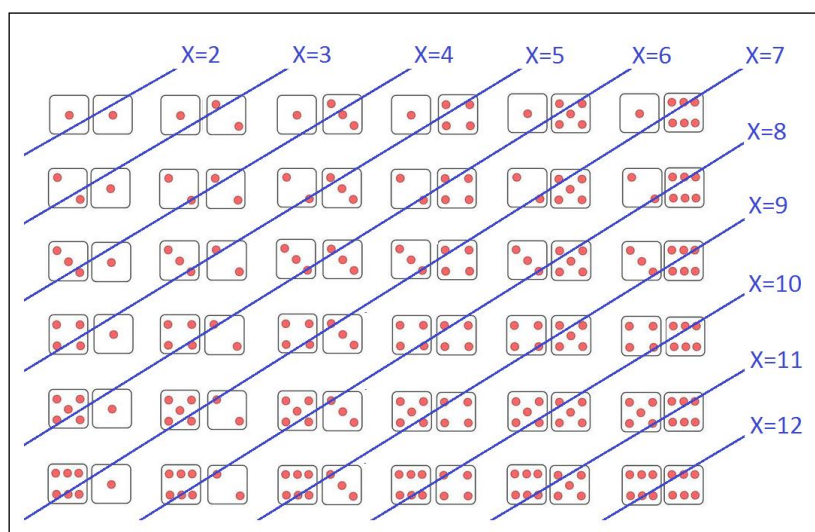


Figura 1.2: Valores possíveis da variável aleatória X : soma dos valores das faces no lançamento de dois dados.

A variável X : soma das faces de dois dados lançados é chamada de **variável aleatória**, pois associa um valor numérico a cada elemento do espaço amostral, por meio da operação matemática da soma. O adjetivo **aleatória** indica que o valor que a variável vai assumir é determinado pelo **acaso**, ou seja, seu valor somente é conhecido depois que o experimento aleatório é realizado.

Variável Aleatória: (v.a.) é uma **função** aplicada aos pontos do espaço amostral de um experimento aleatório e cujo resultado é um **número** real (inteiro ou não). A cada resultado possível do experimento é associado um único valor para a variável aleatória. Entretanto, mais de um resultado do experimento pode levar ao mesmo valor da variável.

Vamos adotar a seguinte notação para as variáveis aleatórias: as letras maiúsculas (X, Y, Z, \dots) são usadas para *nomear* ou *definir* a variável aleatória, enquanto as letras minúsculas (x, y, z) são usadas para representar os *valores* que ela pode assumir, ou seja, o *contradomínio* da variável aleatória. No exemplo do lançamento de dois dados, temos

$$X: \text{soma dos valores das faces} \quad e \quad x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

As variáveis aleatórias podem ser **discretas** ou **contínuas**.

Variável Aleatória Discreta:	Assume valores em um conjunto finito ou infinito contável. Exemplos: Y: nº de filhotes nascidos vivos em uma ninhada de cinco gatos, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; Z: nº de colônias de bactérias por litro de leite, $z \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
-------------------------------------	--

Variável Aleatória Contínua:	Assume valores em um conjunto infinito não contável. Exemplos: Y: peso de um filhote de gato, $y > 0$; Z: proporção de água no leite, $0 \leq z \leq 1$.
-------------------------------------	--

Neste capítulo, iremos estudar apenas **variáveis aleatórias discretas**.

1.2. Função de Probabilidade

Apesar da aleatoriedade do valor da variável aleatória, podemos conhecer, de antemão, os valores ou intervalo de valores que ela **pode** assumir e qual é a **probabilidade** de cada um deles acontecer.

No exemplo do lançamento de dois dados, a probabilidade de cada um dos valores possíveis da variável aleatória X é calculada como a soma das probabilidades dos pontos amostrais associados a esses valores (que, nesse caso, são todas iguais a $1/36$). Por exemplo, são quatro os resultados do lançamento de dois dados que levam à soma das faces igual a 5. Desse modo, a probabilidade de a soma das faces seja igual a 5 é $4/36$. Os valores das probabilidades dos demais valores de X são mostrados na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Resultados possíveis da soma das faces de dois dados e suas probabilidades de ocorrência.

Valor de X	Nº de pontos amostrais	Probabilidade de X
2	1	1/36
3	2	2/36
4	3	3/36
5	4	4/36
6	5	5/36
7	6	6/36
8	5	5/36
9	4	4/36
10	3	3/36
11	2	2/36
12	1	1/36

O conjunto das probabilidades associadas aos valores do domínio de uma variável aleatória discreta é chamado de **função (massa) de probabilidade** dessa variável aleatória.

Função (massa) de Probabilidade:	É a função que associa uma <i>probabilidade</i> a cada valor possível da variável aleatória discreta. Notação: $P[X=x]$ é a probabilidade da variável aleatória discreta X assumir o valor x .
---	--

A função de probabilidade pode ser representada também por meio de um gráfico de barras verticais, como no caso do exemplo do lançamento de dois dados (Figura 1.3).

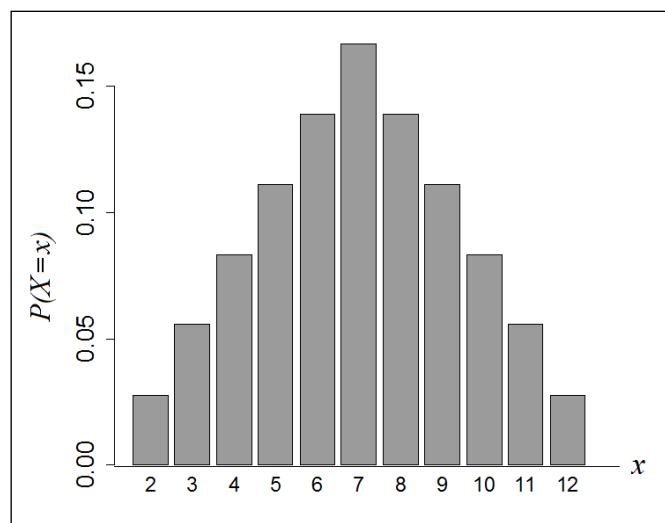


Figura 1.3: Representação gráfica da função de probabilidade da variável aleatória discreta X : soma dos valores das faces de cima no lançamento de dois dados.

Lembre-se de que a soma das probabilidades de todos os pontos do espaço amostral é igual a 1. Sabemos que cada ponto do espaço amostral leva a um único valor da variável aleatória X . Logo, a soma das probabilidades de todos os valores da variável aleatória X também é 1:

$$\sum_{\forall x} P[X = x] = 1.$$

1.3. Função de Distribuição Acumulada

Em alguns problemas, podemos estar interessados na probabilidade da variável aleatória discreta X assumir um valor menor ou igual a x , ou seja, em $P[X \leq x]$. O conjunto destas probabilidades definem a *função de distribuição (de probabilidade) acumulada de X* .

Função de Distribuição Acumulada:	Para uma variável aleatória discreta X , é definida por $F(t) \equiv P[X \leq t] = \sum_{\forall x \leq t} P[X = x], \quad -\infty < t < \infty.$
--	--

No exemplo do lançamento de dois dados, a probabilidade de a soma das faces de cima dos dois dados ser menor ou igual a 5 é calculada como:

$$P[X \leq 5] = P[X=2] + P[X=3] + P[X=4] + P[X=5] = 1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 = 10/36.$$

As demais probabilidades acumuladas para este exemplo são mostradas na Tabela 1.2.

Tabela 1.2: Probabilidades acumuladas da soma das faces de dois dados.

x	P[X = x]	P[X ≤ x]	
2	1/36	1/36	= 1/36
3	2/36	1/36 + 2/36	= 3/36
4	3/36	1/36 + 2/36 + 3/36	= 6/36
5	4/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36	= 10/36
6	5/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36	= 15/36
7	6/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36	= 21/36
8	5/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36	= 26/36
9	4/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36	= 30/36
10	3/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 + 3/36	= 33/36
11	2/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 + 3/36 + 2/36	= 35/36
12	1/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36	= 1

Note que a função $F(t)$ é definida para todos os valores de t na reta real, ou seja, para $-\infty < t < \infty$, e não apenas para os valores de X com probabilidade não nula. Assim, define-se, por exemplo,

$$\begin{aligned} P[X \leq 5,6] &= P[X \leq 5] = 10/36, \\ P[X \leq 7,1] &= P[X \leq 7] = 21/36, \\ P[X \leq 13] &= P[X \leq 12] = 1 \quad \text{e} \\ P[X \leq 1] &= 0. \end{aligned}$$

Desse modo, a função de distribuição acumulada $F(t)$ é representada graficamente como uma função escada, como aquela da Figura 1.4.

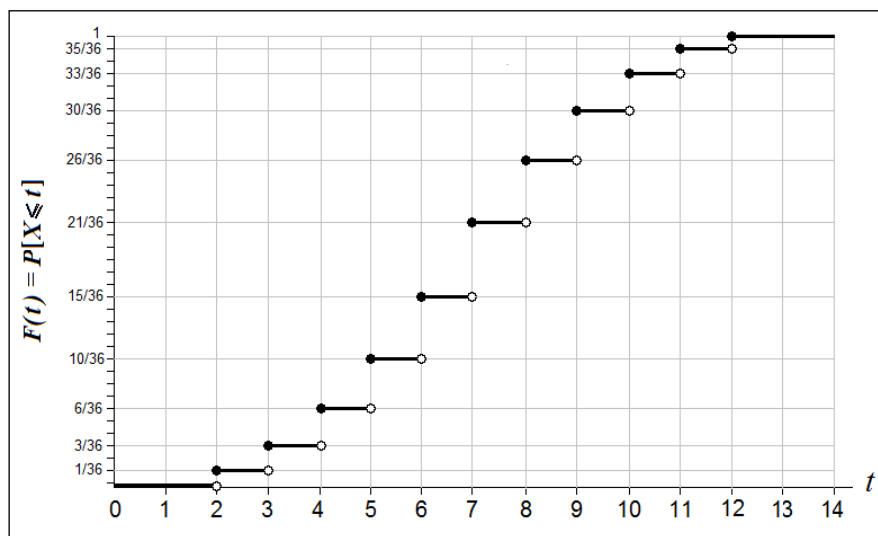


Figura 1.4: Representação gráfica da função de distribuição acumulada da variável aleatória X : soma dos valores das faces no lançamento de dois dados.

1.4. Esperança e Variância

Vamos introduzir agora o conceito de duas importantes medidas para variáveis aleatórias: *esperança* e *variância*.

Esperança ou Valor Esperado:	Seja X uma variável aleatória discreta. A <i>esperança</i> (<i>valor esperado</i> ou <i>média</i>) de X é calculada como
-------------------------------------	--

$$E[X] = \sum_{\forall x} x \cdot P[X = x].$$

Variância:	Seja X uma variável aleatória discreta com $E[X]=\mu$. A <i>variância</i> de X é calculada como
-------------------	--

$$Var[X] = \sum_{\forall x} (x - \mu)^2 \cdot P[X = x].$$

O *desvio-padrão* de X é calculado como $DP[X] = \sqrt{Var[X]}$.

Uma fórmula alternativa para o cálculo da variância é:

Fórmula Alternativa Para Cálculo da Variância:	$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$, com $E[X^2] = \sum_{\forall x} x^2 \cdot P[X = x]$
---	---

A esperança pode assumir qualquer valor real, enquanto a variância (e o desvio-padrão) assume apenas valores não-negativos.

Exemplo Inicial (*continuação*): Para a variável aleatória X : *soma das faces de dois dados lançados*, a esperança e a variância são dadas por:

$$E[X] = 2 \cdot P[X=2] + 3 \cdot P[X=3] + \dots + 12 \cdot P[X=12] = 2(1/36) + 3(2/36) + \dots + 12(1/36) = 7$$

e

$$Var[X] = (2-7)^2 \cdot P[X=2] + (3-7)^2 \cdot P[X=3] + \dots + (12-7)^2 \cdot P[X=12] = \frac{210}{36}.$$

Ou, usando a fórmula alternativa para calcular a variância, temos:

$$E[X^2] = (2^2) \cdot P[X=2] + \dots + (12^2) \cdot P[X=12] = 4(1/36) + \dots + 144(1/36) = \frac{1974}{36}$$

e, assim,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \left(\frac{1974}{36}\right) - (7)^2 = \frac{210}{36}.$$

A esperança indica o valor em torno do qual a variável X tende a se localizar depois de muitas repetições do experimento. Sendo a média de uma variável aleatória, a esperança indica qual é o

valor típico dessa variável. A variância, por sua vez, mede o quão espalhados (dispersos) em torno do valor da esperança estão os valores possíveis de X .

Exemplo 1.2: Uma mercearia compra lotes de leite de duas marcas, chamadas A e B. O lote tem cinco caixas de leite. Da observação das vendas até o momento, sabe-se que a variável aleatória X , o número de caixas vendidas por lote da marca A, tem função de probabilidade dada por

x	0	1	2	3	4	5
$P[X=x]$	0,01	0,08	0,23	0,34	0,26	0,08

e a variável aleatória Y , o número de caixas vendidas por lote da marca B, tem função de probabilidade dada por

y	0	1	2	3	4	5
$P[Y=y]$	0,00	0,01	0,05	0,20	0,41	0,33

Calcule a $E[X]$, $E[Y]$, $Var[X]$ e $Var[Y]$.

Solução:

- Para a marca A:

$$E[X] = 0 \cdot P[X=0] + 1 \cdot P[X=1] + 2 \cdot P[X=2] + 3 \cdot P[X=3] + 4 \cdot P[X=4] + 5 \cdot P[X=5]$$

$$= 0(0,01) + 1(0,08) + 2(0,23) + 3(0,34) + 4(0,26) + 5(0,08) = 3.$$

Para calcular a variância, vamos usar a fórmula alternativa:

$$E[X^2] = (0^2) \cdot P[X=0] + (1^2) \cdot P[X=1] + (2^2) \cdot P[X=2] + (3^2) \cdot P[X=3] + (4^2) \cdot P[X=4] + (5^2) \cdot P[X=5]$$

$$= 0(0,01) + 1(0,08) + 4(0,23) + 9(0,34) + 16(0,26) + 25(0,08) = 51/5.$$

$$\text{e, assim, } Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \left(\frac{51}{5}\right) - (3)^2 = \frac{6}{5} = 1,2.$$

- Para a marca B:

$$E[Y] = 0 \cdot P[Y=0] + 1 \cdot P[Y=1] + 2 \cdot P[Y=2] + 3 \cdot P[Y=3] + 4 \cdot P[Y=4] + 5 \cdot P[Y=5]$$

$$= 0(0,00) + 1(0,01) + 2(0,05) + 3(0,20) + 4(0,41) + 5(0,33) = 4.$$

$$E[Y^2] = (0^2) \cdot P[Y=0] + (1^2) \cdot P[Y=1] + (2^2) \cdot P[Y=2] + (3^2) \cdot P[Y=3] + (4^2) \cdot P[Y=4] + (5^2) \cdot P[Y=5]$$

$$= 0(0,00) + 1(0,01) + 4(0,05) + 9(0,20) + 16(0,41) + 25(0,33) = 16,82$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = (16,82) - (4)^2 = 0,82.$$

A marca B, além de ter, em média, um número maior de vendas, ainda tem uma variabilidade menor em torno deste valor esperado. Ou seja, as vendas da marca B seriam mais estáveis do que as da marca A. A Figura 1.5 mostra as funções de probabilidades do número de caixas vendidas por lote das duas marcas, que confirma que a marca B tem desempenho melhor, pois tem maiores probabilidades associados aos valores de vendas maiores do que 3.

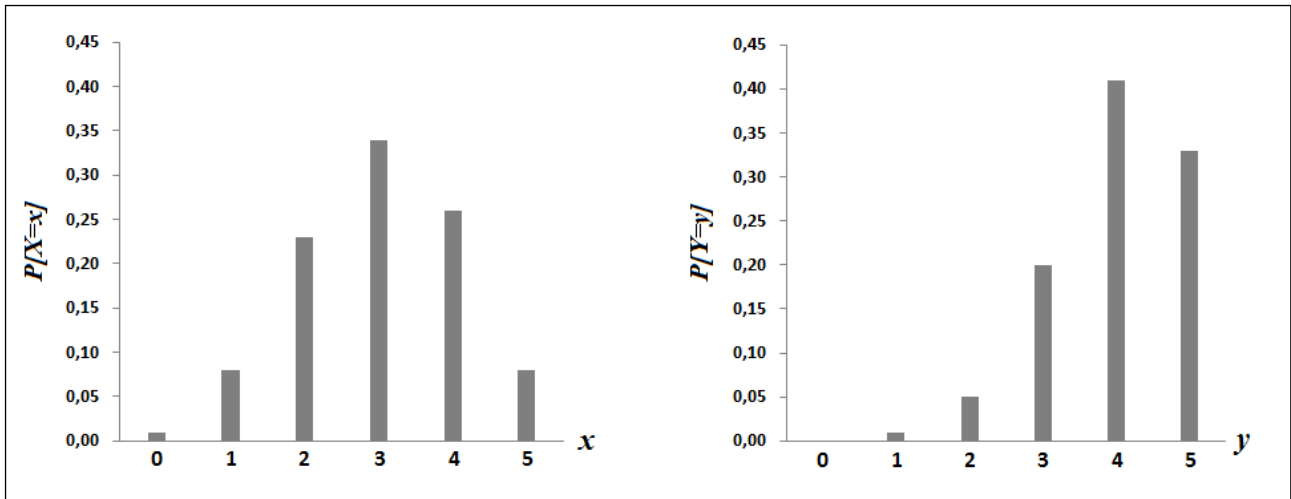


Figura 1.5: Funções de probabilidade das variáveis aleatórias X e Y do Exemplo 1.2.

1.5. Propriedades de Linearidade da Esperança e da Variância

A esperança e a variância têm algumas propriedades úteis nas transformações lineares de uma variável aleatória, ou seja, quando uma constante é somada à variável aleatória e/ou multiplicada à variável, criando uma nova variável aleatória.

Propriedade 1: Seja X uma variável aleatória com $E[X]=\mu$ e $\text{Var}[X]=\sigma^2$. Se somarmos uma constante b a X , criando a nova variável aleatória $Y=X+b$, então

$$E[Y] = E[X] + b = \mu + b$$

e $\text{Var}[Y] = \text{Var}[X] = \sigma^2$.

Propriedade 2: Seja X uma variável aleatória com $E[X]=\mu$ e $\text{Var}[X]=\sigma^2$. Se multiplicarmos X por uma constante a , criando a nova variável aleatória $Z=aX$, então

$$E[Z] = aE[X] = a\mu$$

e $\text{Var}[Z] = a^2\text{Var}[X] = a^2\sigma^2$.

Estas propriedades podem ser visualizadas na Figura 1.6. No primeiro caso, a soma da constante 4 à variável aleatória X desloca o centro (a *média*) da distribuição das probabilidades, mas não altera a dispersão (*variância*) dos valores. Já no segundo caso, a multiplicação de X pela constante 2, além de deslocar o centro da distribuição das probabilidades, também aumenta a dispersão dos valores. Se a constante multiplicada fosse tal que $-1 < a < 1$, a dispersão da variável resultante seria menor que a da original (Figura 1.6c).

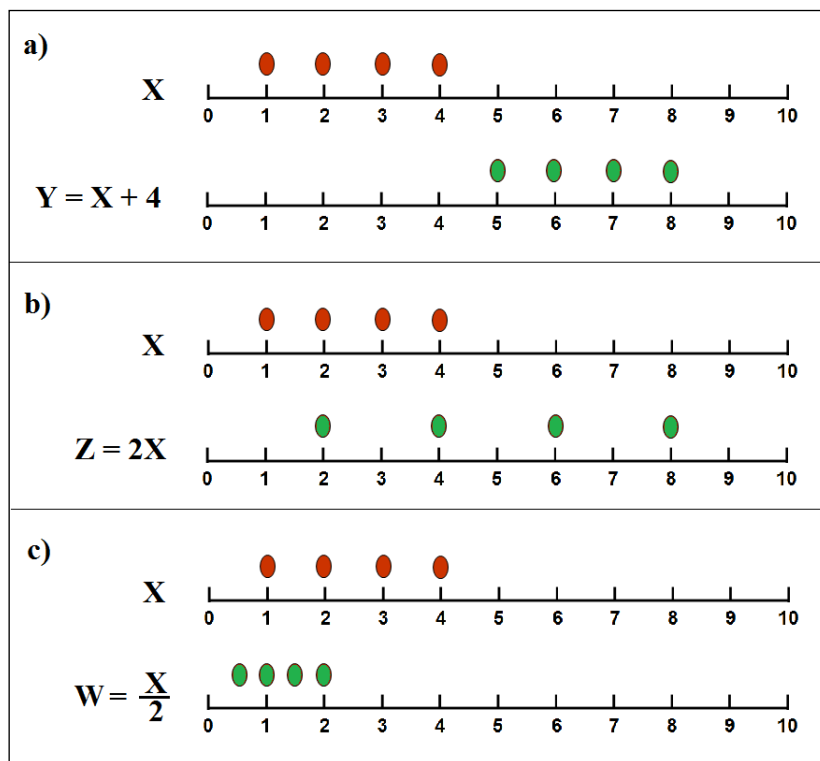


Figura 1.6: Ilustração das propriedades 1 (a) e 2 (b e c).

Exemplo 1.3: Uma mercearia compra um lote com cinco caixas de leite ao preço de atacado de 1,20 reais por caixa e revende cada caixa por 1,65 reais. Depois da data de validade, o leite não vendido é retirado da prateleira e a mercearia recebe, do distribuidor, um crédito igual de 0,90 reais por caixa. Sabe-se que a variável aleatória X, o número de caixas vendidas do lote, tem distribuição de probabilidade com média igual a 3 caixas e variância igual a 6/5. Encontre a média e a variância do lucro do vendedor por lote.

Solução: O lucro do vendedor por lote (Y) é dado pelo soma do valor que ele ganha pelas X caixas vendidas com o valor perdido pelas 5-X caixas não vendidas:

$$Y = (1,65-1,20)X + (-1,20+0,90)(5-X) \Rightarrow Y = 0,75X - 1,50.$$

Logo,

$$E(Y) = (0,75) \cdot E(X) + 1,50 = (0,75)(3) + 1,50 = 0,75 \text{ reais e}$$

$$\text{Var}(Y) = (0,75)^2 \cdot \text{Var}(X) = (0,75)^2 (6/5) = 0,68 \text{ reais}^2.$$

Em algumas situações, é possível identificar um padrão para a função de probabilidade de uma variável aleatória. Quando isso acontece, podemos adotar o que chamamos de **Modelo Probabilístico** para representar a função de probabilidade de uma variável aleatória. Um Modelo Probabilístico é definido por uma função de probabilidade ou por uma função de distribuição que, por sua vez, dependem de valores conhecidos, chamados **parâmetros** do modelo, e também dos valores que a variável aleatória pode assumir.

Os modelos probabilísticos são muito úteis na resolução de vários problemas práticos como dimensionamento de serviços (centrais telefônicas, portos e aeroportos), inventário da vida selvagem (método de captura-recaptura de aves e peixes), inspeções de elementos (controle de qualidade em indústrias, detecção de contrabando em alfândegas), estudo da eficácia de vacinas e muitos outros. Nas seções a seguir, vamos estudar os principais modelos probabilísticos para variáveis discretas, começando com um dos mais simples e intuitivo: o Modelo Binomial.

2. MODELO BINOMIAL

2.1. Exemplo Inicial

Uma caixa tem 3 bolas azuis e 7 bolas de outras cores. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, observa-se sua cor (azul ou não azul) e ela é devolvida para a caixa. Repete-se este procedimento 6 vezes. Qual a probabilidade de 4 das 6 bolas selecionadas serem azuis?

2.2. Definições

Primeiramente, vamos definir o tipo de experimento aleatório no qual surge a variável aleatória Binomial.

Experimento Bernoulli $Be(p)$	Um experimento aleatório de Bernoulli tem as seguintes propriedades: - Resulta em um de dois eventos excludentes: sucesso ou fracasso ; - A probabilidade de sucesso (p) é constante em todas as repetições do experimento, ou seja, as repetições geram resultados independentes .
---	---

Alguns exemplos de experimentos que podem ser representados como de Bernoulli são:

- lançamento de uma moeda e observação da face de cima (cara ou coroa);
- lançamento de um dado e observação da face de cima (seis ou outro valor);
- nascimento de um bebê e observação do seu sexo (masculino ou feminino);
- verificação de um produto na linha de produção (conforme ou defeituoso);

A contagem dos sucessos em repetições de um experimento de Bernoulli define a variável aleatória Binomial.

Variável Aleatória Binomial $X \sim B(n;p)$	Seja X o número de sucessos em n repetições de um experimento $B(p)$. A função de probabilidade de X é dada por $P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$
---	--

Lembre-se de que

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}, \quad n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \quad e \quad 0! = 1.$$

Exemplo 2.1 (continuação): Como a bola retirada é colocada de volta na caixa para a próxima retirada, o número de bolas azuis será sempre 3 em 10; logo, a probabilidade de bola azul em qualquer retirada é sempre $p=3/10=0,3$. Assim, X , o número de bolas azuis em $n=6$ retiradas, é uma v.a. $B(6 ; 0,3)$. A probabilidade de bola azul em 4 das 6 retiradas é dada por

$$P[X = 4] = \binom{6}{4} (0,3)^4 (1 - 0,3)^{6-4} = \frac{6!}{4!2!} \cdot (0,3)^4 (0,7)^2 = 15 \cdot (0,008) \cdot (0,49) \approx 0,06.$$

**Esperança e
Variância da
Binomial:**

Seja $X \sim B(n;p)$. A esperança e a variância de X são, respectivamente,
 $E[X] = np$
e $\text{Var}[X] = np(1-p)$.

Exemplo 2.1 (continuação): O número esperado de bolas azuis em 6 retiradas é de $6(0,3) = 1,8$.

A Figura 2.1 mostra a função de probabilidade do modelo Binomial para diversos valores de n (nas linhas) e p (nas colunas). Observe que:

- quando p está fixo e n cresce, a esperança cresce e a variância cresce também, pois X pode assumir uma maior variedade de valores;
- quando n está fixo e p cresce, a esperança cresce. A variância, por sua vez, cresce até $p=0,5$, atingindo seu valor máximo ($n/4$). Para valores de $p > 0,5$, a variância volta a diminuir.

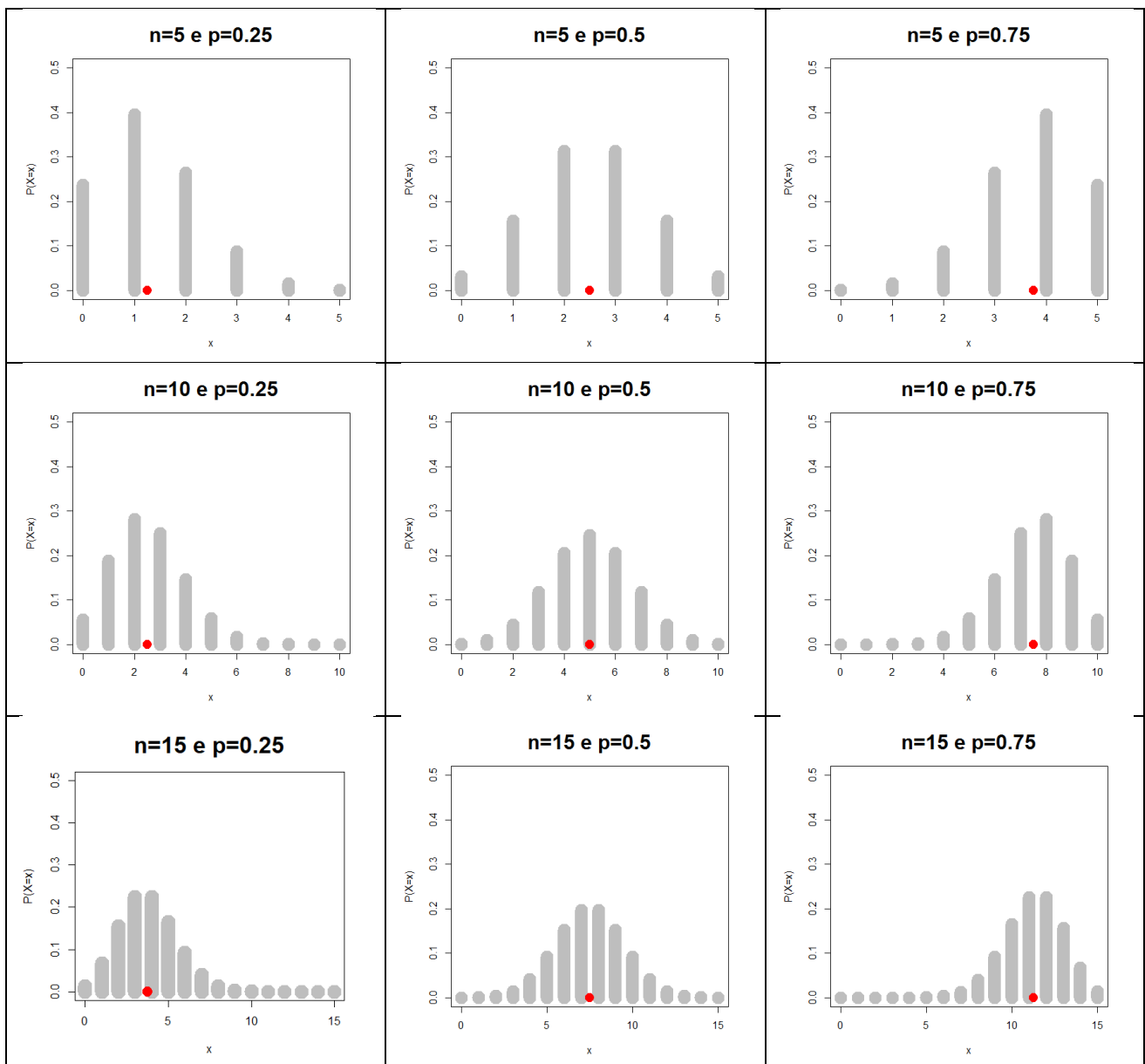


Figura 2.1: Função de Probabilidade da Binomial com diferentes valores de n e p (em vermelho, a *esperança*).

2.3. Outros Exemplos

Exemplo 2.2: Uma mercearia compra um lote com cinco caixas de leite. Se a probabilidade de uma caixa ser vendida é de $3/5$ e as caixas são vendidas de modo independente, determine a função de probabilidade do número de caixas vendidas por lote. Calcule $E[X]$ e $\text{Var}[X]$.

Solução: Seja a variável aleatória X , o número de caixas vendidas por lote. Podemos assumir que X segue o modelo Binomial com $n=5$ e $p=3/5$. Logo, a função de probabilidade de X é dada por

$$P[X = x] = \binom{5}{x} \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Substituindo os valores de x na fórmula acima, obtemos:

x	0	1	2	3	4	5
$P[X=x]$	0,01	0,08	0,23	0,34	0,26	0,08

E ainda, $E[X] = np = 5(3/5) = 3$ e $\text{Var}[X] = np(1-p) = 5(3/5)(2/5) = 6/5$.

Exemplo 2.3: No processo de fabricação de uma peça, admite-se que no máximo 5% sejam produzidas com defeito. Todos os dias, cerca de 15 unidades são selecionadas para inspeção. Se uma ou mais peças defeituosas são encontradas nesta amostra, o processo de produção é paralisado. Calcule a probabilidade de o processo ser paralisado quando:

- (a) Cinco por cento das peças inspecionadas são produzidas com defeito.
- (b) Sete por cento das peças inspecionadas são produzidas com defeito.

Solução: O número de (X) tem distribuição Binomial com $n=15$ e p igual à proporção de peças defeituosas produzidas. A função de probabilidade de X é dada por

$$P[X = x] = \binom{15}{x} p^x (1-p)^{15-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, 15.$$

(a) Se $p=0,05$, a probabilidade de o processo ser paralisado é dada por

$$\begin{aligned} P[X \geq 1] &= 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{15}{0} (0,05)^0 (1-0,05)^{15-0} \\ &= 1 - (1 \cdot (0,95)^{15}) \approx 1 - 0,46 = 0,54. \end{aligned}$$

(b) Se $p=0,07$, a probabilidade de do processo ser paralisado é dada por

$$\begin{aligned} P[X \geq 1] &= 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{15}{0} (0,07)^0 (1-0,07)^{15-0} \\ &= 1 - (1 \cdot (0,93)^{15}) \approx 1 - 0,37 = 0,63 \end{aligned}$$

Note que, quanto maior a probabilidade de uma peça do lote ser defeituosa, maior é a probabilidade de se encontrar uma ou mais peças defeituosas na amostra de 15 peças inspecionadas e, assim, maior é a probabilidade de o processo ser paralisado.

3. MODELO HIPERGEOMÉTRICO

3.1. Exemplo Inicial

Suponha que uma caixa contenha 10 bolas, das quais 4 são azuis e 6 são vermelhas. Três bolas serão retiradas em sequência desta caixa e não serão devolvidas. Considere a variável aleatória X , que conta o número de bolas azuis nesta amostra de três bolas retiradas. Os valores possíveis de X são $x = 0, 1, 2$ e 3 . Como podemos calcular a probabilidade de que X assumira cada um destes valores?

Primeiro, vamos determinar o tamanho do espaço amostral deste experimento. De quantas maneiras podemos retirar 3 bolas de uma caixa que contém 10 bolas? A resposta é

$$\binom{10}{3} = 120.$$

Das 4 bolas azuis que estão na caixa, de quantas maneiras podemos retirar uma quantidade x ($x=0,1,2,3$)? A resposta é

$$\binom{4}{x}.$$

Simultaneamente, das 6 bolas vermelhas da caixa, uma quantidade igual a

$$\binom{6}{3-x}$$

serão selecionadas. Assim, o número de maneiras possíveis de se selecionar x bolas azuis e $3-x$ bolas vermelhas na amostra é

$$\binom{4}{x} \binom{6}{3-x}.$$

Logo, a probabilidade de x bolas azuis serem selecionadas na amostra de 3 bolas é dada por

$$P[X=x] = \frac{\binom{4}{x} \binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}}, \quad x=0, 1, 2 \text{ e } 3.$$

A função de probabilidade da variável X desse exemplo pode ser definida pelo **Modelo Hipergeométrico**.

3.2. Definições

<p>Variável Aleatória Hipergeométrica</p> <p>$X \sim H(N, n, k)$</p>	<p>Seja X o número de sucessos em uma amostra aleatória de tamanho n selecionada, sem reposição, de N itens, dos quais k são sucessos. A função de probabilidade de X é dada por¹</p> $P[X = x] = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad a \leq x \leq b, \quad \text{com } \begin{matrix} x_a = \max\{0, n-(N-k)\} \\ \text{e } x_b = \min\{n, k\}. \end{matrix}$
--	---

Exemplo 3.1 (continuação): No exemplo inicial, a variável aleatória X , o número de bolas azuis em uma amostra de $n=3$ bolas retiradas de uma caixa com $N=10$ bolas das quais $k=4$ são azuis (e $N-k=10-4=6$ bolas são vermelhas) tem probabilidades calculadas como

$$P[X = x] = \frac{\binom{4}{x} \binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}}, \quad x = 0, 1, 2 \text{ e } 3.$$

Temos, assim,

$$P[X=0] = \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{(1)(20)}{120} = \frac{20}{120} \approx 0,17$$

$$P[X=1] = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{(4)(15)}{120} = \frac{60}{120} = 0,50$$

$$P[X=2] = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{(6)(6)}{120} = \frac{36}{120} = 0,30$$

$$P[X=3] = \frac{\binom{4}{3} \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{(4)(1)}{120} = \frac{4}{120} \approx 0,03.$$

Os experimentos aleatórios nos quais aplica-se o modelo Hipergeométrico são muito parecidos com aqueles que definem o modelo Binomial: conta-se o número de sucessos (bolas azuis) em um número (N) predefinido de realizações de um experimento (retirada de uma bola da caixa). Entretanto, no modelo hipergeométrico, a probabilidade de sucesso não é constante nem há independência entre as realizações do experimento.

A maneira mais simples de diferenciar os modelos binomial e hipergeométrico é entender como as retiradas (amostragem) são feitas: *com* ou *sem reposição*. Se cada bola fosse retirada da caixa e repostada após a observação de sua cor (*amostragem com reposição*), teríamos, em todas as retiradas, 4 bolas azuis dentre a 10 bolas. Desse modo, a variável aleatória X (número de bolas azuis dentre as três selecionadas) teria função de probabilidade Binomial com $n=3$ e $p=4/10$. Se a amostragem é feita sem reposição das bolas selecionadas, a probabilidade de seleção de uma bola

¹ A definição do menor valor que X pode assumir (x_a) pode ser entendida da seguinte forma: se o número de bolas fracasso na urna ($N-k$) é menor que o número de bolas retiradas (n), então teremos na amostra no máximo ($N-k$) bolas fracasso, e o restante da amostra ($n-[N-k]$) será necessariamente completada com bolas sucesso (dá ter $x_a = n-[N-k]$); caso contrário, se $n > N-k$ (ou seja, $n-[N-k] > 0$), então podemos a situação de zero bolas sucesso na amostra (todas as n bolas serem fracasso). Veja o esquema a seguir:

$$N-k < n \Leftrightarrow n > N-k \Leftrightarrow n-(N-k) > 0 \Leftrightarrow \min\{0, n-(N-k)\} = n-(N-k) \Leftrightarrow x_a = n-(N-k);$$

$$N-k > n \Leftrightarrow n < N-k \Leftrightarrow n-(N-k) < 0 \Leftrightarrow \min\{0, n-(N-k)\} = 0 \Leftrightarrow x_a = 0.$$

Já o maior valor X poderá assumir (x_b) será o número total de sucessos na urna (k) apenas se $n \geq k$; no entanto, se $n < k$, ou seja, se o número de bolas retiradas (n) for menor que o número de bolas sucesso (k), poderemos ter na amostra no máximo n bolas sucesso.

azul em cada retirada não é constante, pois depende do resultado da seleção anterior, caracterizando a função de probabilidade Hipergeométrica.

Esperança e Variância da Hipergeométrica	Seja $X \sim H(N, n, k)$. A esperança e a variância de X são, respectivamente, $E[X] = n \frac{k}{N} \quad e \quad Var[X] = n \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \left(\frac{k}{N} \right) \left(1 - \frac{k}{N} \right).$
---	--

Exemplo 3.1 (continuação): A esperança e a variância do número de bolas azuis dentre as três retiradas da caixa são dadas, respectivamente, por

$$E[X] = 3 \left(\frac{4}{10} \right) = 1,2 \quad e \quad Var[X] = 3 \left(\frac{10-3}{10-1} \right) \left(\frac{4}{10} \right) \left(1 - \frac{4}{10} \right) = 0,56.$$

3.3. Outros Exemplos

Exemplo 3.2: Uma peça usada em motores de carros é vendida em lotes de 10 unidades. O comprador sabe que são produzidas algumas peças defeituosas, mas considera que um lote qualquer é **aceitável** se tiver, no máximo, uma peça defeituosa. A inspeção do lote pelo comprador consiste em escolher aleatoriamente 3 peças e testá-las; se nenhuma dessas 3 peças for defeituosa, o lote é considerado aceitável. Suponha que um lote a ser inspecionado tenha 2 peças defeituosas, ou seja, esse lote **não é aceitável**. Qual é a probabilidade da inspeção classificá-lo como **aceitável** ?

Solução: O número de peças defeituosas dentre as inspecionadas (X) tem distribuição Hipergeométrica com $N=10$, $n=3$ e $k=2$. A função de probabilidade de X é dada por

$$P[X=x] = \frac{\binom{2}{x} \binom{8}{3-x}}{\binom{10}{3}}, \quad x=0,1,2.$$

A probabilidade de o lote em análise ser considerado aceitável é

$$P[X=0] = \frac{\binom{2}{0} \binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{45} = 0,467,$$

uma probabilidade muito alta de aceitar um lote “ruim”.

Exemplo 3.3: Um biólogo, desejando estimar a quantidade N de peixes de certa espécie em um lago, resolve seguir o seguinte procedimento (chamado de **método da captura-recaptura**): num primeiro momento (etapa da **captura**), ele vai amostrar 10 peixes desta espécie no lago e marcá-los (com tinta indelével e atóxica) e devolvê-los vivos ao lago. Após algum tempo (etapa da **recaptura**), ele vai retirar 12 peixes do lago e contar quantos deles estão marcados.

O número de peixes marcados na recaptura é a variável aleatória X, que tem distribuição Hipergeométrica com N desconhecido, $n=12$ e $k=10$. A função de probabilidade de X é dada por

$$P[X = x] = \frac{\binom{10}{x} \binom{N-10}{12-x}}{\binom{N}{12}}, \quad x = 0, 1, \dots, 10.$$

Suponha que o valor observado de X seja $x=6$. Desse modo, a proporção de peixes marcados na amostra da recaptura é $x/n=6/12$. No lago todo, esta proporção é $k/N=10/N$. Então, uma estimativa de N pode ser obtida supondo que estas duas proporções são próximas: $x/n \approx k/N$, ou seja, $N \approx (nk)/x=(12)(10)/6 = 20$ peixes.

4. MODELO BINOMIAL NEGATIVO

4.1. Exemplo Inicial

Considere que, em uma feira, 20% dos abacaxis (dentre dezenas) estão estragados. Uma pessoa quer comprar dois abacaxis (não estragados, claro). Qual a probabilidade de que ela precise analisar cinco abacaxis para concluir sua compra? E qual a probabilidade de que ela precise analisar pelo menos quatro abacaxis?

4.2. Definições

A contagem do número de repetições de um experimento de Bernoulli até que se obtenham k sucessos define a variável aleatória Binomial Negativa.

Variável Aleatória Binomial Negativa	Seja X o número de repetições de um experimento $BN(k,p)$ até que ocorram k sucessos. A função de probabilidade de X é dada por
$X \sim BN(k,p)$	$P[X = x] = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad x = k, k+1, k+2, \dots$

Exemplo 4.1 (continuação): A variável aleatória X é o número de abacaxis inspecionados (repetições do experimento) até que se encontre dois ($k=2$) em bom estado (sucesso); a probabilidade de um abacaxi qualquer selecionado estar em bom estado (probabilidade de sucesso) é $p=0,8$. Assim, a probabilidade de que a pessoa precise analisar 5 abacaxis para conseguir dois em bom estado é, pelo modelo Binomial Negativo ($k=2, p=0,8$),

$$P[X = 5] = \binom{5-1}{2-1} 0,8^2 (1-0,8)^{5-2} = \binom{4}{1} 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 4 \cdot (0,64)(0,008) = 0,02048.$$

A probabilidade de que a pessoa precise analisar pelo menos 4 abacaxis é

$$P[X \geq 4] = \sum_{x=4}^{\infty} P[X = x] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - (P[X = 2] + P[X = 3]) = 1 - (0,64 + 0,256) = 1 - 0,896 = 0,104.$$

Qual seria o “número esperado de abacaxis analisados”?

Esperança e Variância da Binomial Negativa	Seja $X \sim BN(k, p)$. A esperança e a variância de X são, respectivamente, $E[X] = \frac{k}{p} \quad e \quad Var[X] = \frac{k(1-p)}{p^2}.$
---	--

Exemplo 4.1 (continuação): A esperança e a variância do número de abacaxis analisados é

$$E[X] = \frac{2}{0,8} = 2,5 \quad e \quad Var[X] = \frac{2(1-0,8)}{0,8^2} = 0,625.$$

Espera-se analisar entre 2 e 3 abacaxis até encontrar dois que não estejam estragados.

4.3. Outros Exemplos

Exemplo 4.2: Um cientista inocula os germes de certa doença em ratos até que dois contraíam a doença. Se probabilidade de um rato contrair a doença em cada inoculação é de 1/6, calcule a probabilidade de que oito ratos sejam necessários.

Solução: Podemos assumir que a variável aleatória

X: o número de ratos inoculados até que dois contraíam a doença, segue o modelo Binomial Negativo com $k=2$ e $p=1/6$. Assim, a função de probabilidade de X seria dada por

$$P[X = x] = \binom{x-1}{2-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{x-2}, \quad x = 2, 3, \dots$$

O número esperado de ratos a serem inoculados até que dois contraíam a doença é de $k/p = 2/(1/6) = 12$.

A probabilidade requerida é

$$P[X = 8] = \binom{8-1}{2-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{8-2} = \binom{7}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,065.$$

Pensando no planejamento do experimento, talvez a questão mais interessante fosse do tipo: qual é a probabilidade de que mais de oito ratos sejam necessários?

$$\begin{aligned} P[X > 8] &= 1 - P[X \leq 8] = 1 - \{P[X = 2] + P[X = 3] + \dots + P[X = 8]\} \\ &= 1 - \{0,028 + 0,046 + \dots + 0,065\} = 0,605 \end{aligned}$$

Ou seja, a probabilidade de que sejam necessários mais do que oito ratos é grande.

Exemplo 4.3: Sabe-se que, em certo aeroporto, cerca de 25% dos passageiros inspecionados têm objetos proibidos em sua bagagem. Qual é a probabilidade de que, em uma fila, 10 passageiros tenham que ser revistados até que seja encontrada uma bagagem com objetos proibidos?

Solução: Seja X o número de passageiros que passam na inspeção até que seja encontrada uma bagagem com objetos proibidos. Se pudermos supor que a probabilidade de trazer objetos proibidos é a mesma para todos os passageiros e que os passageiros cometem essa infração de forma independente uns dos outros, a variável aleatória X segue o modelo Binomial Negativo com $k=1$ e $p=0,25$. Assim, a função de probabilidade de X é dada por

$$P[X=x]=\binom{x-1}{1-1}(0,25)^1(0,75)^{x-1}, \quad x=1,2,3, \dots$$

A probabilidade de que 10 passageiros sejam inspecionados até que seja encontrada uma bagagem com objetos proibidos é

$$P[X=10]=\binom{10-1}{0}(0,25)^1(0,75)^{10-1}=1 \cdot (0,25)^1 \cdot (0,75)^9 \approx 0,02.$$

A Figura 4.1 mostra a função de probabilidade do número de passageiros que passam na inspeção até que seja encontrada uma bagagem com objetos proibidos, quando a probabilidade de que um passageiro tenha objetos escondidos seja de 0,25.

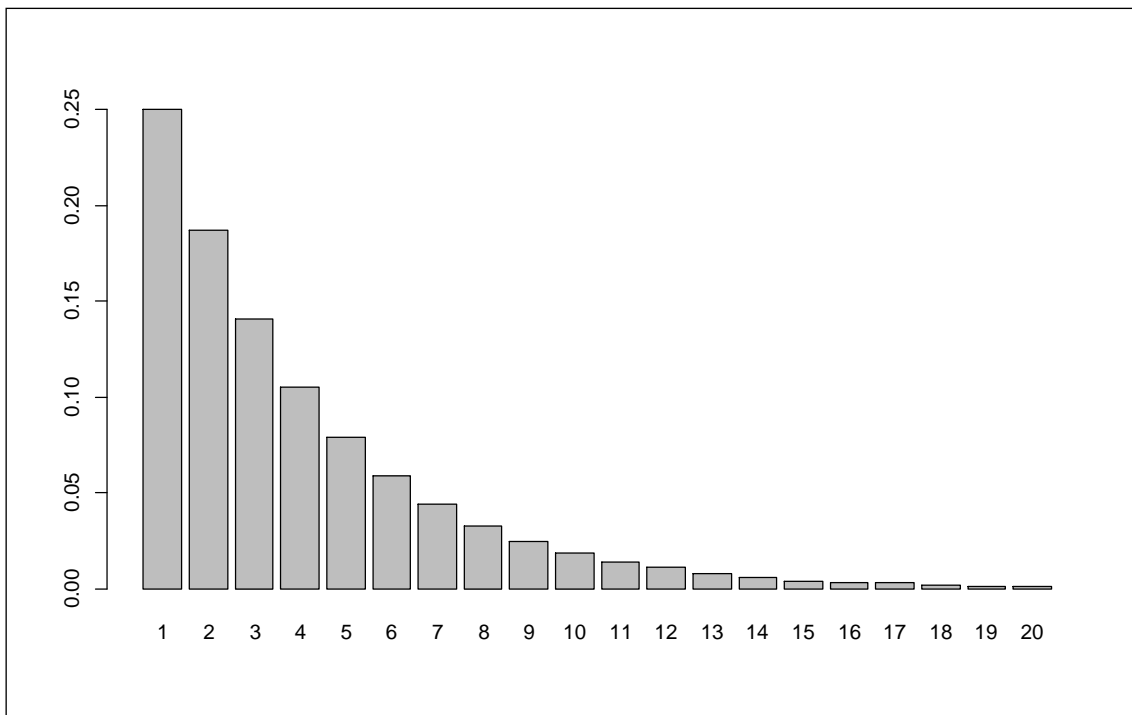


Figura 4.1: Função de Probabilidades da Binomial Negativa $k=1$ e $p=0.25$ (x variando de 1 a 20).

4.4. Caso Especial: O Modelo Geométrico

A variável aleatória Binomial Negativa com $k=1$ é mais conhecida como Geométrica.

Variável Aleatória Geométrica $X \sim G(p)$	Seja X o número de repetições de um experimento $Be(p)$ até que ocorra um sucesso. A função de probabilidade de X é dada por $P[X=x]=p(1-p)^{x-1}, \quad x=1, 2, 3, \dots$
---	--

Esperança e Variância da Geométrica	Seja $X \sim BN(k,p)$. A esperança e a variância de X são, respectivamente, $E[X]=\frac{1}{p} \quad e \quad Var[X]=\frac{1-p}{p^2}.$
--	---

Note que, quanto menor a probabilidade de sucesso, maior será o número esperado de tentativas até que se obtenha o primeiro sucesso (Figura 4.2). A variância de X também decresce rapidamente com o aumento de p .

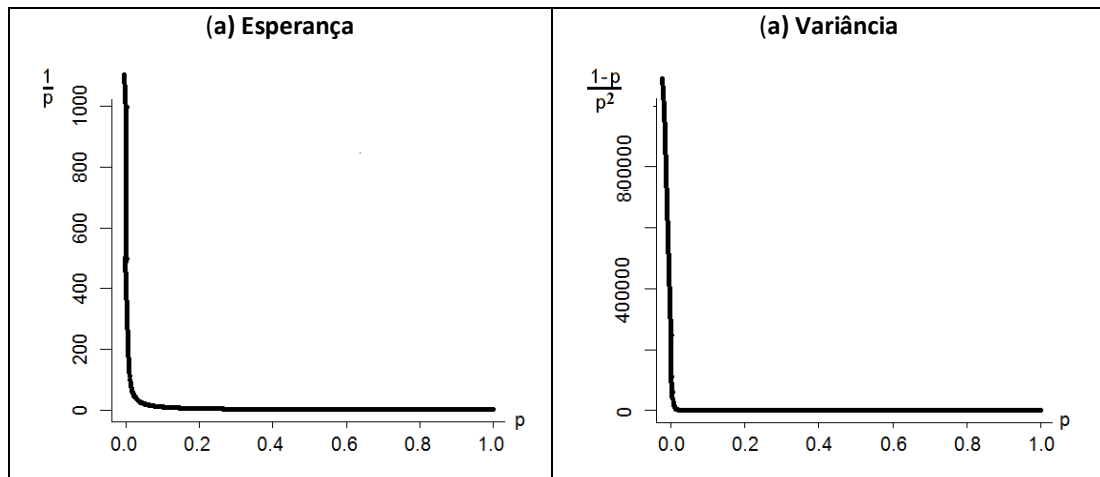


Figura 4.2: Ilustração dos valores de esperança (a) e variância (b) da variável aleatória Geométrica em função da probabilidade de sucesso p .

Exemplo 4.4: No horário de pico, uma central telefônica está muito próxima de sua capacidade máxima e o usuário tem dificuldade para completar sua chamada. De fato, apenas 10% das chamadas são completadas neste horário. É interessante conhecer a distribuição de probabilidade do número de tentativas até que o usuário consiga completar sua chamada. Qual é a probabilidade de que sejam necessárias cinco tentativas para se conseguir completar uma chamada?

Solução: O número de tentativas até a chamada (X) tem distribuição Geométrica com $p=0,10$. A função de probabilidade de X é dada por

$$P[X=x]=\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{x-1}, \quad x=1, 2, 3, \dots$$

A probabilidade de que sejam necessárias cinco tentativas para completar uma chamada é

$$P[X=5]=\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^4=0,06561.$$

5. MODELO POISSON

5.1. Exemplo Inicial

Considere as seguintes variáveis definidas por uma contagem de certos tipos de evento:

- número de carros que passam por um pedágio por minuto;
- número de buracos por m² de um telhado;
- número de bactérias por litro de leite;
- número de multas por veículo;
- número de filhotes em uma ninhada.

Cada uma destas contagens pode assumir valores de zero até um valor máximo indeterminado (0,1,2,3,4,...). Essa “limitação” é definida por uma unidade de tempo (minuto), área (m²), volume (litro) ou elemento (veículo/ninhada).

Para o estudo da distribuição de probabilidade deste tipo de variável aleatória, um modelo muito utilizado é o Modelo de Poisson.

5.2. Definições

Variável Aleatória Poisson $X \sim P(\lambda)$	Se X , o número de eventos ocorridos em uma unidade de tempo (espaço, volume, etc.), segue o modelo Poisson com parâmetro λ , a função de probabilidade de X é dada por $P[X=x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x=0, 1, 2, \dots$
--	---

Esperança e Variância da Poisson	Seja $X \sim P(\lambda)$. A esperança e a variância de X são, respectivamente, $E[X] = \lambda \quad e \quad Var[X] = \lambda$
---	--

A Figura 5.1 mostra que a função de probabilidade da Poisson torna-se mais dispersa entre os valores de X à medida que se aumenta o λ . Note que, também, que o gráfico se torna cada vez mais simétrico à medida que λ aumenta².

Exemplo 5.2: Suponha que se possa assumir que o número de navios petroleiros que chegam por dia a um porto tenha distribuição de probabilidade de Poisson com média igual a 10 navios-dia. As instalações do porto podem suportar até 15 navios por dia. Qual é a probabilidade de que, em um certo dia, os navios que chegarem não consigam aportar?

Solução: A função de probabilidade do número de navios petroleiros que chegam por dia ao porto (X) é dada por

$$P[X=x] = \frac{e^{-10} 10^x}{x!}, \quad x=0, 1, 2, 3, \dots$$

A probabilidade de que cheguem mais de 15 navios em um dia é

²A distribuição Poisson se aproxima da distribuição Normal (Gaussiana) à medida que λ cresce.

$$P[X > 15] = 1 - P[X \leq 15] = 1 - \sum_{x=0}^{15} P[X = x] = 1 - \sum_{x=0}^{15} \frac{e^{-10} 10^x}{x!} = 1 - 0,9513 = 0,0487.$$

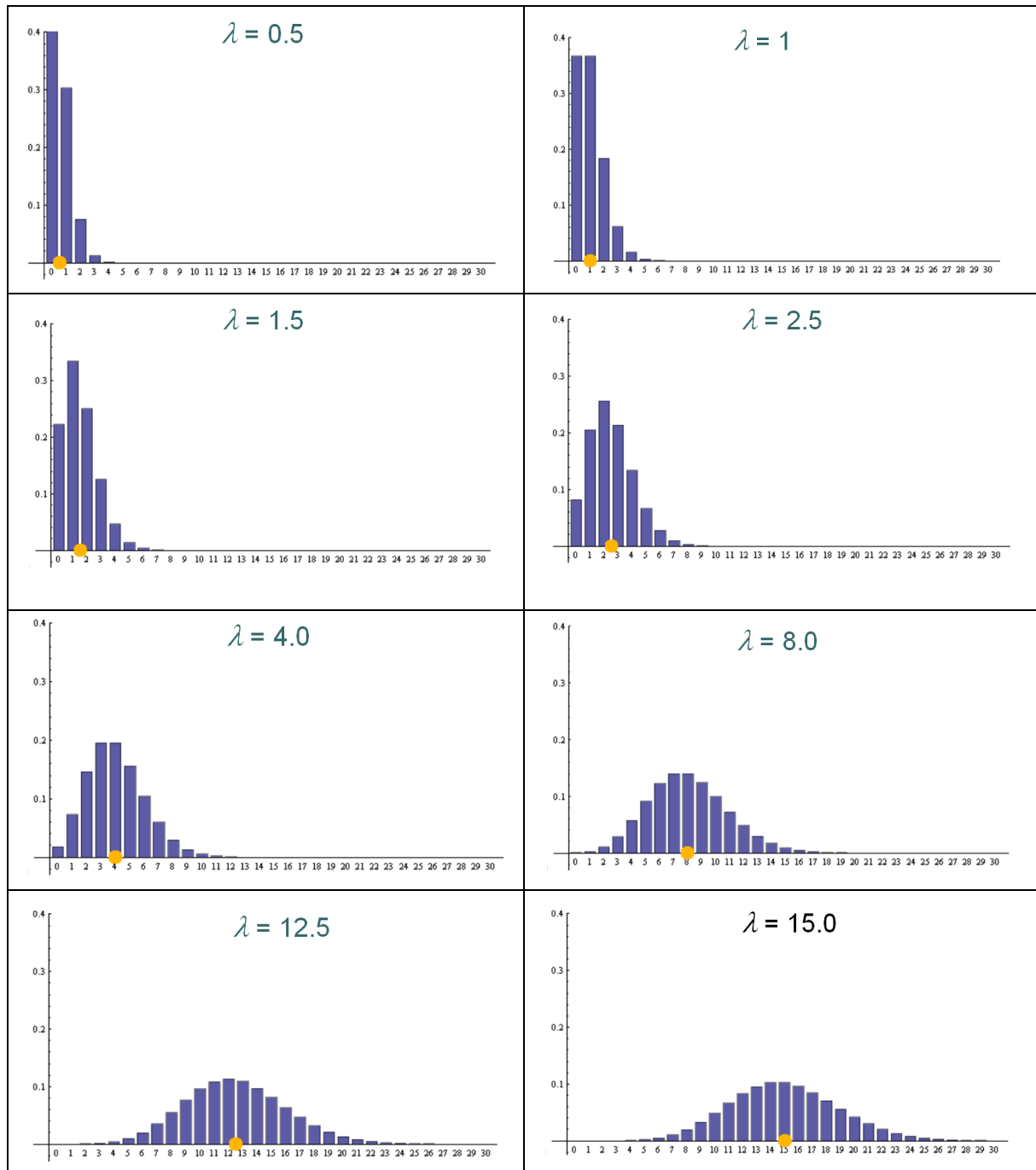


Figura 5.1: Função de Probabilidades de Poisson para vários valores de λ . Em amarelo, a média λ . Feito na plataforma WolframAlpha (www.wolframalpha.com).

5.3. Suposições do Modelo de Poisson

A definição da variável aleatória de Poisson decorre de um experimento aleatório que atende às duas seguintes suposições:

Suposição 1: Média constante	As condições do experimento permanecem constantes no decorrer do tempo (ou no espaço), isto é, a taxa média de ocorrência de eventos, λ , é constante ao longo do tempo (ou do espaço).
---	---

Suposição 2: Independência	Intervalos disjuntos, ou seja, sem interseção de tempo ou espaço, são independentes. Isto significa que o que ocorreu em um intervalo nada diz sobre o que vai ocorrer no outro intervalo.
---	--

Como consequência das suposições 1 e 2, temos que:

Propriedade 1	Se o número de eventos ocorrendo em uma unidade de tempo (ou espaço) tem distribuição de Poisson com média igual à λ , então o número de eventos ocorrendo em $t > 0$ unidades de tempo (ou espaço) tem distribuição de Poisson com média igual à λt .
----------------------	---

Por exemplo, se X_1 , o número de partículas emitidas por um material radioativo *por segundo*, tem distribuição Poisson com $\lambda_1=3$, então, X_2 , o número de partículas emitidas pelo material radioativo *em dois segundos* tem distribuição Poisson com $\lambda_2=2 \times 3=6$.

5.4. Outros Exemplos

Exemplo 5.3: O número de carros que passam por um posto policial em uma rodovia em um intervalo de um minuto tem distribuição de Poisson com média igual a 20. Supondo que essa média se mantenha constante ao longo de 10 minutos, qual é o número médio de carros que passam pelo posto policial em 10 minutos?

Solução: Sejam X_1 o número de carros que passam pelo posto policial em 1 minuto e X_2 o número de carros que passam em 10 minutos. Se $X_1 \sim P(20)$, então $X_2 \sim P(200)$, pela *Propriedade 1*. Logo, passam, em média, 200 carros pelo posto policial em 10 minutos.

Exemplo 5.4: Assuma que o número de raios que atingem uma região por mês possa ser descrito por um modelo de Poisson com média igual a 2. Supondo que essa média se mantenha constante ao longo do ano, qual é a probabilidade de que 12 raios atinjam esta região no próximo ano?

Solução: Sejam X_1 o número de raios que atingem a região por mês e X_2 o número de raios que atingem a região por ano (12 meses). Se $X_1 \sim P(2)$, então $X_2 \sim P(24)$, pela *Propriedade 1*. A função de probabilidade de X_2 é dada por

$$P[X_2 = x] = \frac{e^{-24}(24)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A probabilidade de que 12 raios atinjam esta região no próximo ano é

$$P[X = 12] = \frac{e^{-24}(24)^{12}}{12!} \approx 0,003.$$

5.5. Aproximação da Binomial pela Poisson

Apesar da definição das variáveis aleatórias Binomial e Poisson serem diferentes, as duas distribuições de probabilidade são muito semelhantes quando, na Binomial, n é muito grande e p é muito pequeno, e, na Poisson, toma-se $\lambda=np$.

Mais claramente, se $X \sim B(n;p)$, a distribuição de probabilidade de X aproxima-se da distribuição de Poisson com média $\lambda=np$ à medida que n cresce e p decresce. Isso quer dizer que os valores de

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{e} \quad P[X = x] = \frac{e^{-np} (np)^x}{x!}$$

ficam cada vez mais próximos à medida que n cresce e p decresce.

Como exemplo, considerando $n=100$ e $p=0,01$, note que a probabilidade do valor $x=0$ calculada na Binomial(100;0.01) é

$$P[X = 0] = \binom{100}{0} (0,01)^0 (0,99)^{100} \approx 0,3660323,$$

e, na Poisson(100[0,01]=1), é

$$P[X = 0] = \frac{e^{-1} 1^0}{0!} \approx 0,3678794.$$

Os dois valores a partir da terceira casa decimal. Tomando n ainda maior ($n=1000$) e p ainda menor ($p=0.001$), as probabilidades calculadas na Binomial(1000;0,001) e na Poisson(1000[0,001]=1), respectivamente,

$$P[X = 0] = \binom{1000}{0} (0,001)^0 (0,999)^{1000} \approx 0,3676954 \quad \text{e} \quad P[X = 0] = \frac{e^{-1} 1^0}{0!} \approx 0,3678794,$$

diferem a partir da quarta casa decimal.

A Figura 5.2 mostra a aproximação entre as distribuições de probabilidade dos modelos Binomial e Poisson para diversas combinações de n e p .

Exemplo 5.5: O fabricante um uma bicicleta infantil recebeu diversas reclamações de um defeito no freio. Teste preliminares haviam determinado que este tipo de defeito ocorreria em 1 a cada 10 mil produtos, ou seja, com probabilidade igual a 0,0001. Decidiu-se retirar uma amostra aleatória de 200 bicicletas da produção, encontrando-se 5 delas com defeito no freio. Comente a afirmação do fabricante de que tal defeito ocorre “em 1 a cada 10 mil” usando um argumento probabilístico. Use a aproximação da Binomial pela Poisson.

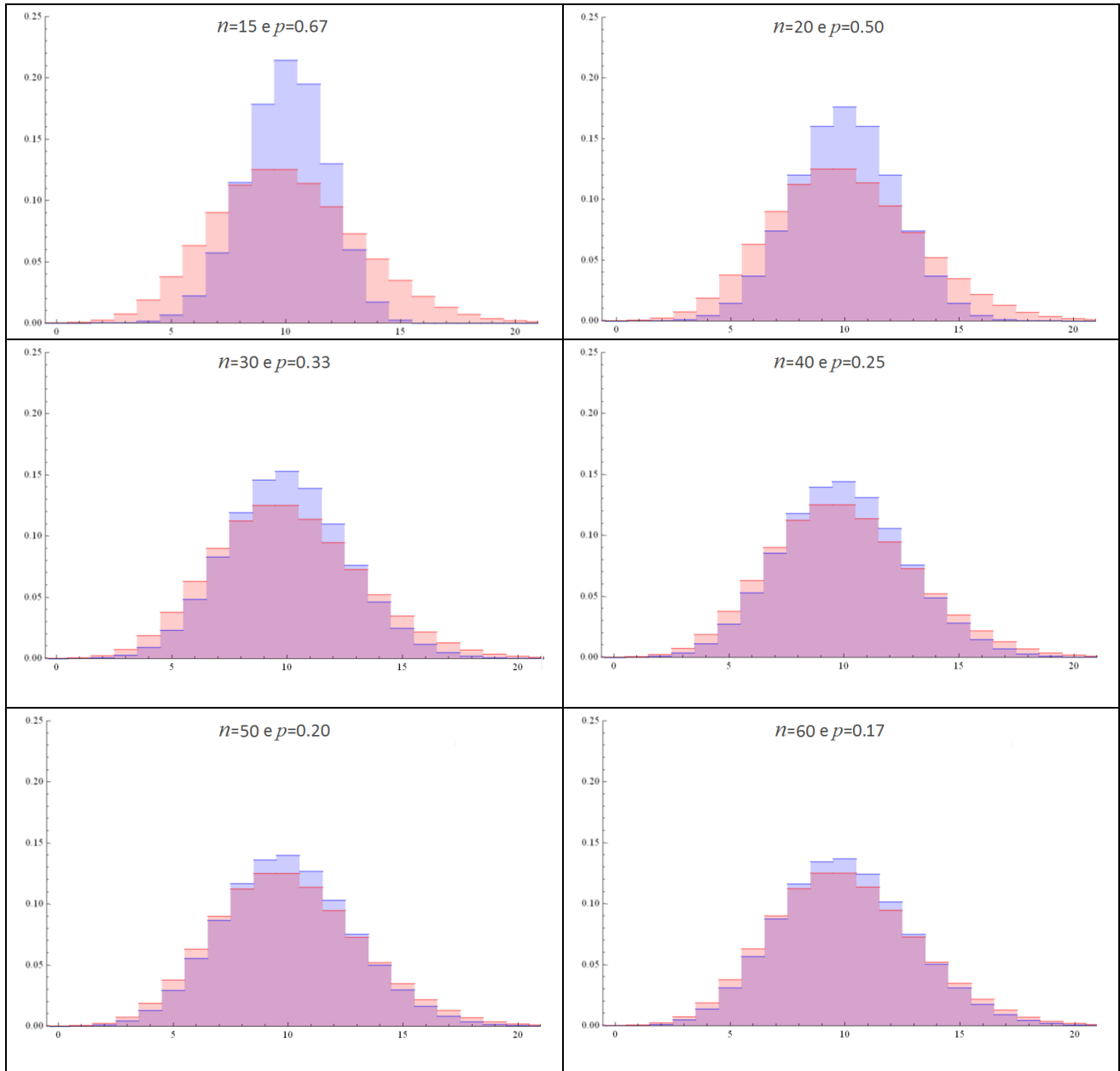


Figura 5.2: Representação gráfica da aproximação entre as funções de probabilidades Binomial(n,p), em azul, e Poisson(np), em rosa, para valores crescentes de n e decrescentes de p . Feito na plataforma WolframAlpha (www.wolframalpha.com).

Solução: Seja X a variável aleatória que representa o número de bicicletas com defeito dentre as 200 selecionadas. Se a alegação do fabricante está correta, X tem distribuição Binomial com $n=200$ e $p=0,0001$, que pode ser aproximada pelo modelo de Poisson com $\lambda=200(0,0001)=0,02$. Desse modo, a probabilidade de que 5 bicicletas com defeito no freio sejam encontradas em 200 bicicletas quando a probabilidade de defeito é de 1 em 10 mil é

$$P[X = 5] = \binom{200}{5} (0,0001)^5 (0,9999)^{195} \approx \frac{e^{-0,02} (0,02)^5}{5!} = 3 \times 10^{-11},$$

uma probabilidade muito baixa. Logo, a alegação do fabricante não parece estar certa. Além disso, o número esperado de bicicletas com defeito em um lote de 200 bicicletas, caso o proprietário estivesse certo, seria $200(0,0001) = 0,02$, o que está bem abaixo do número de bicicletas defeituosas realmente encontradas.

5.6. Verificação da Adequação do Modelo de Poisson

No caso dos modelos Binomial, Hipergeométrico e Binomial Negativo, a descrição do experimento e da variável aleatória já nos leva à definição do modelo. Entretanto, no modelo Poisson, fazemos as suposições 1 e 2, mas não sabemos ao certo de elas são cumpridas e, portanto, se o modelo Poisson descreve bem a função de probabilidade da variável aleatória. Neste caso, a adequação do modelo de Poisson para descrever a função de probabilidade de uma contagem deve ser checada por meio de uma amostra aleatória de observações da variável.

Exemplo 5.6: Estatísticos de uma companhia telefônica estudam se o modelo de Poisson com média igual a 4,5 pode ser ajustado ao número de chamadas interestaduais que chegam, por hora, à central telefônica, durante o período noturno. Para tanto, eles registraram o número de chamadas em 650 intervalos de uma hora. O número de intervalos de uma hora em que foram recebidas k chamadas ($k=0, 1, 2, \dots$) é mostrado no quadro a seguir.

No. de chamadas (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
Frequência observada na amostra	9	38	71	115	125	106	79	50	57

Se X , o número de chamadas interestaduais por hora, tivesse distribuição Poisson ($\lambda=4,5$), a probabilidade de chegarem k chamadas em uma hora, seria dada por:

$$P[X=k] = \frac{e^{-4,5}(4,5)^k}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \dots, 7,$$

$$P[X \geq 8] = 1 - P[X \leq 7] = 1 - (P[X=0] + P[X=1] + \dots + P[X=7]).$$

Os valores destas probabilidades são dados no quadro a seguir.

No. de chamadas (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
$P[X=k]$ se $X \sim P(4,5)$	0,011	0,050	0,112	0,169	0,190	0,171	0,128	0,082	0,087

A *frequência esperada* de k chamadas por hora ($k=0, 1, 2, \dots$), no modelo Poisson ($\lambda=4,5$), é obtida multiplicando a probabilidade de k chamadas pelo total $n=650$ intervalos de uma hora. Por exemplo, ao número esperado de intervalos de uma hora com $k=0$ chamadas é calculado como $nP[X=0] = 650(0,011) \approx 7$. Os demais valores são mostrados no quadro a seguir.

No. de chamadas (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
Frequência esperada no modelo Poisson(4,5)	7	33	73	110	124	111	83	53	56

As frequências esperadas e observadas são próximas, o que levou os engenheiros à conclusão de que o modelo de Poisson ($\lambda=4,5$) parece ser adequado para descrever o número de chamadas interestaduais que chegam, por hora, à central telefônica, durante o período noturno.

Esta verificação gráfica da adequação do modelo Poisson por meio de uma amostra é complementada por um procedimento de inferência estatística chamado **teste de aderência**, que não é abordado neste texto. Para maiores detalhes, ver Triola (2013).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Montgomery, D.C., Runger, G.C. (2012) *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros* (5ª edição). Editora LTC.
- Triola, M.F. (2013) *Introdução à Estatística* (11ª edição). Editora LTC.
- Walpole, R. E. e colegas (2009) *Probabilidade e Estatística* (8ª edição). Editora Pearson.