Processos de Ramificação

Professor Gregorio Saravia Atuncar

Departamento de Estatística

Universidade Federal de Minas Gerais

2015

1 Introdução

Apresentamos neste capítulo, uma introdução aos Processos de ramificação. Não temos a intenção de fazer uma apresentação detalhada de tais processos. Falaremos apenas do Processo de Ramificação Simples (PRS), algumas vezes chamado Processo de Galton-Watson-Bienaymé. Nesse modelo, assume-se que um elemento (geração inicial), no final da vida gera um número de "filhos", Z_1, com função de probabilidade

$$p_k = P(Z_1 = k), \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Esses "filhos" formam a primeira geração. Assume-se também que esses filhos agem independentemente entre eles e no final da vida, geram um número de filhos de acordo à mesma função de probabilidade. O processo $Z = \{1, Z_1, Z_2, Z_3, ...\}$ é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P(Z_n = j \mid Z_{n-1} = i) \\ &= P(Z_{n,1} + Z_{n,2} + ... + Z_{n,i} = j \mid Z_{n-1} = i). \end{aligned}$$

Nessa expressão, Z_n é o tamanho da n-ésima geração e $Z_{n,k}$, para $k = 1, 2, ..., i$ é o número de filhos gerados pelo k-ésimo elemento da geração (n-1).

Assume-se, por simplicidade, que o tempo de vida é o mesmo para todos os elementos. Não abordamos o caso em que o tempo de vida é uma variável aleatória contínua. O leitor interessado nesse caso pode consultar, por exemplo, Karlin e Taylor (1975, 1981).

Seguem alguns exemplos simples,

Exemplo 1. Infeção hospitalar. Com certa frequência ouvimos falar desse problema. Em um determinado hospital aparece um foco de infeção (geração inicial). Se esse foco não é eliminado em tempo hábil, pode gerar pelo menos mais um foco (primeira geração). Cada foco da primeira geração pode gerar outros focos que constituirão a segunda geração e assim sucessivamente. Naturalmente é de interesse controlar esse processo, caso contrário, o hospital todo pode ser contaminado e/ou a infeção se espalhar para outros hospitais ou outros ambientes.

Exemplo 2 Vírus HNI (gripe suína.) Há um tempo ouvimos falar desse vírus. Nesse exemplo, em um determinado lugar do planeta, é descoberto um portador desse vírus. Essa primeira pessoa contaminada constitui a geração inicial. Se essa pessoa não for curada a tempo, pode contaminar outras pessoas que passam a formar a primeira geração. Cada elemento da primeira geração pode contaminar outras pessoas que passam a ser a segunda geração. Se a doença não for controlada, existe um risco de extinção da população.

Exemplos similares a esse são estudados em Epidemiologia. O interesse nesse caso, naturalmente é controlar a epidemia.

Exemplo 3. Propagação de boatos. Uma pessoa (geração inicial) lança um boato para um número aleatório de amigos (primeira geração). Cada um desses amigos passa o boato para outros amigos . . .

Exemplo 4. Sobrevivência de genes mutantes. Cada gene individual tem chance de gerar k novos genes da mesma classe. Mas, cada gene tem chance de se transformar em gene de um outro tipo(gene mutante). Esse novo gene passa a ser a geração inicial.

Exempo 5. Ampliação de uma corrente eletrônica. Um elétron (geração inicial) ao incidir sobre uma primeira placa, gera um número aleatório de novos elétrons (primeira geração) que por sua vez incidem sobre uma segunda placa e assim sucessivamente.

Naturalmente existem muitos outros exemplos que podem ser abordados usando técnicas de Processos de ramificação. Um problema de filas, por exemplo, pode ser abordado usando técnicas de Processos de Ramificação da seguinte maneira: se um sistema de serviço possui um único servidor e esse servidor inicia dando atendimento a um freguês, os fregueses que chegam enquanto esse freguês está sendo atendido podem ser considerados "filhos" desse primeiro freguês. Um problema de interesse nesse caso é determinar a probabilidade de que o servidor possa ter um intervalo para descanso. Observe que nesse caso, o processo se regenera. Depois de um ciclo de atendimento, um novo freguês chegará ao sistema de serviço.

Em todos os exemplos, a população inicial é formada por um indivíduo. Esse indivíduo gera um número aleatório, Z_1, de filhos (primeira geração) com função de probabilidade $\{p_k = P(Z = k), k = 0, 1, 2...\}$. O i-ésimo filho(i=1,. . ., Z_1) gera um nuúmero aleatório, $Z_{i,j}$, de novos filhos com a mesma função de probabilidade; e assim sucessivamente .

O estudo dos Processos de Ramificação está baseado na função geradora de probabilidade.

Sendo assim, antes de continuarmos, faremos na próxima seção um resumo dos conceitos e resultados sobre essa função. Maiores detalhes podem ser vistos , por exemplo, em Resnick (1992). Na seção 3 descrevemos formalmente os Processos de Ramificação Simples e na seção 4 fazemos uma introdução a Inferência sobre os parámetros envolvidos em tais processos.

2 Função geradora de probabilidade

Definição. Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores inteiros não negativos e seja $\{p_k = P(X = k), k = 0, 1, 2, ...\}$ sua função de probabilidade. Assumimos que X é finita com probabilidade 1. A função geradora de probabilidade de X, avaliada em s, é definida por

$$P(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Observe que $P(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Para s tal que $-1 \leq s < 1$, temos que

$$\mid \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \mid \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mid s^k \mid \leq 1.$$

Veja, por exemplo, Rudin (1976).

Quer dizer então que $P(s)$ existe e é finita para todo $s \in [-1, 1]$. Além do mais, possui as derivadas de toda ordem.

Observe que, da definição, temos que

$P(0) = p_0,$

$\acute{P}(0) = p_1,$

$\ddot{P}(0) = 2p_2,$

...

...

...

$P^{(n)}(0) = \frac{dP^{(n)}(s)}{ds} \mid_{s=0} = n!p_n.$

Quer dizer então que a partir da função geradora de probabilidade, podemos encontrar a função de probabilidade de uma variável aleatória. O leitor encontra, nessa propriedade, a justificativa para o nome da função. Além do mais, tal função de probabilidade é única como é mostrado pela seguinte proposição.

Proposição. A função geradora de probabilidade determina em forma única a função de probabilidade.

Prova. Sejam $P(s)$ e $Q(s)$ funções geradoras de X e Y respectivamente.

Se $P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k$ para todo $s \in [-1, 1]$, então $p_k = q_k$ para todo $k = 0, 1, 2, ...$ Reciprocamente, se $p_k = q_k$ para todo $k = 0, 1, 2, ...$, segue que $P(s) = Q(s)$.

O resultado dessa proposição estabelece uma relação um a um entre funções geradoras de probabilidade e funções de probabilidade de uma variável aleatória inteira não negativa. Ou seja, a função geradora é uma outra forma de caracterizar uma distribuição.

Exemplo 6. Considere $X \sim b(n, p)$. Daí temos que

$$\begin{aligned} P(s) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (ps + 1 - p)^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Exemplo 7. Considere $X \sim P(\lambda)$. Então

$$\begin{aligned} P(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(s\lambda)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\lambda}e^{s\lambda} \\
&= e^{\lambda(s-1)}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

No Exemplo 6, $P(0) = (1-p)^n = P(X=0)$, $P'(s) = n(ps+1-p)^{n-1}$ e portanto, $P'(0) = n(1-p)^{n-1}p = P(X=1)$. Em forma análoga podemos encontrar todas as outras probabilidades. Deixamos como exercício para o leitor, calcular $P(X=2)$.

O leitor pode, no exemplo 7, obter a correspondente função de probabilidade. Isto é, se $P_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$, pode provar que $X \sim P(\lambda)$. Veja Exercício 6.

Os momentos de uma variável aleatória assumindo valores inteiros não negativos podem ser, também, obtidos a partir da função geradora de probabilidade. Vejamos a dedução dos dois primeiros momentos.

Da definição, pode ser provado que se existir $E(X^k)$ e for finita, a função geradora de probabilidade possui todas as derivadas até ordem k. Assumamos, para ilustração, que existe momento de segunda ordem.

$$P'(s) = \sum_{k=0}^{n} kp_k s^{k-1}$$

e

$$P''(s) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_k s^{k-2}.$$

A partir daí, obtemos

$$E(X) = P'(1),$$

e

$$E(X^2) = P''(1) + P'(1).$$

Portanto

$$V(X) = P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2.$$

Proposição. (Função geradora de probabilidade de uma soma de variáveis aleatórias independentes).

Sejam X e Y, duas variáveis aleatórias independentes assumindo valores inteiros não negativos. A função geradora de probabilidade da variável aleatória $T = X + Y$ é dada pelo produto $P(s)Q(s)$, sendo P e Q as funções geradoras de X e Y respectivamente.

Prova. Seja $P_T(s)$ a função geradora de probabilidade de T. Por definição e levando em conta a independencia entre X e Y, temos

$$P_T(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X)E(s^Y) = P(s)Q(s).$$

Essa propriedade pode ser estendida a mais de duas variáveis aleatórias independentes. Isto é: se X_1, X_2, . . ., X_k são variáveis aleatórias independentes, deixamos como exercicio para o leitor, provar que a função geradora da soma $T = X_1 + X_2 + ... + X_k$ é o produto das funções geradoras de probabilidades. Veja Exercício 1.

Essa propriedade e a propriedade de caracterização podem ser usadas para provar, por exemplo, que a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição binomial (com a mesma probabilidade de sucesso p) tem também distribuição binomial. Veja Exercício 4.

Proposição. (Função geradora de uma soma aleatória de variáveis aleatórias independentes).
Seja N uma variável aleatória assumindo valores inteiros não negativos e sejam X_1, X_2, . . . variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas assumindo valores inteiros não negativos. Sejam $P_N(s)$ e $P(s)$ as funções geradoras de probabilidade de N e X_1 respectivamente. Então a função geradora de $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ é dada por

$$P_Z(s) = P_N(P(s)).$$

Prova. Seja $P_Z(s)$ a função geradora de probabilidade de Z. Segue que

$$\begin{aligned}
P_Z(s) &= E(s^Z) \\
&= E(s^{X_1+X_2+...X_N}) \\
&= E(E(s^{X_1+X_2+...X_N} \mid N)) \\
&= E(P(s)^N) \\
&= P_N(P(s)).
\end{aligned}$$

Exemplo 8. Suponha que o número de vôos que chegam a um aeroporto durante uma hora tem distribuição de Poisson com média $\lambda = 10$. O número de passageiros em cada vôo é uma variável aleatória binomial com parâmetros $n = 80$ e $p = 0,7$. Qual a função geradora de probabilidade da variável aleatória Z: número de passageiros que chegam por hora ao aeroporto.

Solução. Nesse exemplo, N tem distribuição de Poisson com média $\lambda = 10$, então $P_N(s) = e^{10(s-1)}$ e X_1 tem distribuição binomial com $n = 80$ e $p = 0,7$.

Então $P(s) = (0,7s + 0,3)^{80}$. Temos, então que

$$P_Z(s) = e^{10[(0,7s+0,3)^{80}-1]}.$$

Observe que

$$P'_Z(s) \quad = \quad 10(80)(0,7)(0,7s + 0,3)^{79} e^{10[(0,7s+0,3)^{80}-1]}.$$

Portanto $P'(1) = 560$. Isto é, o número médio de passageiros que chegam por hora no aeroporto é igual a 560. O leitor pode usar propriedades de esperança condicional e obter, também dessa forma $E(Z) = 560$.

3 Processos de Ramificação Simples

Definamos formalmente um Processo de Ramificação Simples. Seja $\{Z_{n,j}, n \geq 1, j \geq 1\}$ um arranjo de variáveis aleatórias inteiras não negativas, independentes e identicamente distribuídas, cada uma tendo função de probabilidade $\{p_k, k = 0, 1, ...\}$. Isto é,

para cada k inteiro não negativo, $n \geq 1$ e $j \geq 1$, $P(Z_{n,j} = k) = p_k$.

Um processo de ramificação simples, $Z = \{1, Z_1, Z_2, ...\}$ é definido por :

$Z_0 = 1$
$Z_1 = Z_{1,1}$
$Z_2 = Z_{2,1} + Z_{2,2} + ... + Z_{2,Z_1} = \sum_{j=1}^{Z_1} Z_{2,j}$
. . .
. . .
. . .
$Z_n = Z_{n,1} + Z_{n,2} + ... + Z_{n,Z_{n-1}} = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} Z_{n,j}$

Nessa definição, Z_i é o tamanho da i-ésima geração e $Z_{i,j}$ é o número de filhos gerados pelo j-ésimo elemento da geração i-1.

Observe que se $Z_n = 0$ para algum n , então $Z_{n+k} = 0$ para todo $k \geq 1$, isto é, o estado 0 é absorvente. Assumimos que para cada $i = 0, 1, 2, ...$, $\{Z_{i,j}, j = 1, 2, ...\}$ é independente de Z_{i-1}, o tamanho da geração i-1. Isto é, o número de filhos gerados por cada elemento da (i-1)-ésima geração é independente do tamanho dessa geração.

Para cada inteiro $n \geq 0$, defina $P_n(s) = E(s^{Z_n})$, a função geradora de probabilidade de Z_n.

Isto é

$$P_0(s) = s,$$

$$P_1(s) = E(s^{Z_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Desde que Z_n é a soma de um número aleatório de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, temos que

$$\begin{aligned} P_n(s) &= E(s^{Z_n}) \\ &= E(s^{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Z_{n,i}}) \\ &= P_{n-1}(P(s)). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} P_2(s) &= P(P(s)), \\ P_3(s) &= P_2(P(s)) \\ &= P(P_2(s)). \end{aligned}$$

Recursivamente podemos estabelecer

$$P_n(s) = P_{n-1}(P(s)) = ... = P(P_{n-1}(s)).$$

A partir dessa relação podemos obter a média e variância de Z_n.

$$
\begin{aligned}
P_n'(s) &= P'(P_{n-1}(s))P_{n-1}'(s).
\end{aligned}
$$

Fazendo $s = 1$, temos

$$
\begin{aligned}
P_n'(1) &= P'(1)P_{n-1}'(1) \\
&= mE(Z_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Nessa última expressão, $m = E(Z_1)$. Veja Exercício 8.

Recursivamente obtemos

$$E(Z_n) = mE(Z_{n-1}) = m^2E(Z_{n-2}) = ... = m^n.$$

Sabemos que

$$
\begin{aligned}
P_n''(1) &= E(Z_n^2) - E(Z_n) \\
&= V(Z_n) + m^{2n} - m^n. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

A segunda derivada de P_n avaliada em $s = 1$, resulta ser

$$
\begin{aligned}
P_n''(1) &= E(Z_n^2) - E(Z_n) \\
&= E(Z_n^2) - m^n \\
&= P''(P_{n-1}(1))[P_{n-1}'(1)]^2 + P_{n-1}''(1)P'(P_{n-1}(1)) \\
&= P''(1)[E(Z_{n-1})]^2 + [E(Z_{n-1}^2) - E(Z_{n-1}))]m \\
&= [m^2 + \sigma^2 - m][m^{2(n-1)}] + [E(Z_{n-1}^2) - m^{n-1}]m \\
&= m^{2n} + \sigma^2 m^{2(n-1)} - m^{2n-1} + m[V(Z_{n-1}) + m^{2(n-1)} - m^{n-1}]. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

De (3) e (4) obtemos

$$V(Z_n) = \sigma^2 m^{2(n-1)} - m^{2n-1} + mV(Z_{n-1}) + m^{2n-1}.$$

Recursivamente, para $m = 1$, obtemos

$$V(Z_n) = n\sigma^2,$$

e se $m \neq 1$,

$$V(Z_n) = \sigma^2 m^{n-1} \frac{(1-m^n)}{(1-m)}.$$

Observe que se $m < 1$, $V(Z_n) \to 0$ e se $m \geq 1$, $V(Z_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$.

A seguir, abordaremos o problema de calcular a probabilidade de extinção. Naturalmente esse é um problema de interesse no controle de infeção hospitalar por exemplo ou no controle em Epidemiologia. Em outros casos, o maior problema de interesse pode ser a evolução do processo no decorrer do tempo. Por exemplo, se temos a intenção de incursionar na pecuária e iniciarmos com uma vaca leitera numa fazenda, gostaríamos de saber se teremos sucesso e o nível desse sucesso ao incursionar nessa área.

Para calcular a probabilidade de extinção, defina

$$A_j = [Z_j = 0].$$

O evento

$$A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$$

define o evento **população extinta.**

Seja $\pi_j = P(A_j)$.

Desde que $A_n = [Z_n = 0] \subseteq [Z_{n+1} = 0] = A_{n+1}$,temos que $A_n \uparrow A$. Portanto, pela propriedade de continuidade de probabilidade, $P(A_n) \uparrow P(A)$. Isto é

$$\begin{aligned}
\pi &= P(extinc\acute{a}o) \\
&= P(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\cup_{j=1}^{n} A_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) \\
&= \lim_{n\to\infty} P_n(0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_n. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Resta calcular o valor de π.

Assumamos que $0 < p_0 < 1$. Deixamos como exercício para o leitor provar que Se $p_0 = 0$, então $\pi = 0$, e se $p_0 = 1$, $\pi = 1$.

A seguir, calculamos o valor de π. Antes de formular o resultado, salientamos que a partir da definição, a segunda derivada de $P(s)$ é não negativa no intervalo $[0, 1]$. Portanto ela é convexa sobre esse intervalo. Veja, por exemplo, Lima(1976).

Proposição. Se $m = E(Z_1) \leq 1$, então $\pi = 1$. Se $m > 1$,então $\pi < 1$ e é a única solução não negativa da equação

$$s = P(s).$$

Provemos, primeiro, que π é uma solução da equação $s = P(s)$:

Desde que $\pi_n \to \pi$ e $\pi_{n+1} = P_{n+1}(0) = P(P_n(0))$, temos que $\pi_{n+1} = P(\pi_n)$. Fazendo $n \to \infty$, concluímos que $\pi = P(\pi)$.

Logo, provemos que π é a menor solução da equação $s = P(s)$ em $[0, 1]$.

Suponhamos que α seja alguma solução de $s = P(s)$ tal que $0 \leq \alpha \leq 1$.
Como $0 \leq \alpha$, teremos que $\pi_1 = P(A_1) = P(Z_1 = 0) = p_0 = P(0) \leq P(\alpha) = \alpha$ e portanto $\pi_2 = P_2(0) = P(\pi_1) \leq P(\alpha) = \alpha$.

Iterativamente, provamos que $\pi_n \leq \alpha$ para todo n. Então $\pi = lim_{n\to\infty}\pi_n \leq \alpha$.
Isso mostra que $\pi \leq \alpha$.

Estamos assumindo que $p_0 > 0$. Dada a convexidade de $P(s)$ e $P(1) = 1$, os gráficos das funções $f(s) = s$ e $g(s) = P(s)$ têm no máximo dois pontos em comum no intervalo $[0, 1]$. Um deles é $s = 1$.

$P'(1) = m = lim_{s\to 1}\frac{P(1)-P(s)}{1-s}$. Se $m \leq 1$, então numa vizinhança à esquerda de 1, o gráfico de $g(s) = P(s)$ não pode ficar por baixo de$f(s) = s$ e pela convexidade de $P(s)$, o único ponto de intersecção é $s = 1$. Se $m > 1$, então numa vizinhança à esquerda de 1, o gráfico de $g(s) = P(s)$ fica por baixo do gráfico de $f(s) = s$, portanto existe mais um ponto de interseção à esquerda de 1.

Exemplo 9. Suponha $p_0 = 0.2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.5$. Nesse caso, $m = 1.3 > 1$. A equação $P(s) = 0.2 + 0.3s + 0.5s^2 = s$ tem soluções $s = 1$ e $s = 0.4$. Desde que $\pi < 1$, de acordo à Proposição anterior, $\pi = 0.4$.

Se no exemplo anterior, $p_0 = 0.5$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.2$, $m = 0.7$. Nesse caso $\pi = 1$, a população será extinta com probabilidade 1.

Exemplo 10. $Z \sim b(5; 0,4)$. A solução da equação $P(s) = (0,4s + 0,6)^5 = s$ é aproximadamente $\pi = 0,111$. Se $Z \sim b(3; 0,4)$, $\pi = 0,557$. Observe a relação entre $m = E(Z)$ igual a 2 no primeiro caso e 1,2 no segundo. Quanto maior o valor de m, menor será a probabilidade de extinção. Parece ser um resultado muito intuitivo.

Observar que se $m = E(Z) > 1$, a partir de $P_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k)s^k$, concluimos que quando $n \to \infty$, $P(Z_n = 0) \to \pi$ e $P(Z_n = k) \to 0$ para $k = 1, 2, 3, ...$ Isto é, a probabilidade de que a população seja extinta é igual a π e a probabilidade de que a população cresca indefinidamente é igual a $1 - \pi$.

Encontrar a solução de $P(s) = s$, nem sempre é uma tarefa fácil, mas em geral podem ser usados mé todos iterativos (o método de Newton-Raphson, por exemplo).

4 Inferência

Naturalmente temos muitos problemas de interesse ao analisar um processo de ramificação. Possivelmente o de maior interesse seja estimar a probabilidade de extinção. Em Epidemiologia, por exemplo, as entidades de saúde pública precisam saber o nível de gravidade de uma certa doença contagiosa. Nesse caso é de esperar que a probabilidade de extinção seja alta e se for pequena, tem que se tomar algumas medidas para aumentar essa probabilidade. Em outras situações, pode ser desejável que a probabilidade seja pequena.

Estimação da função de probabilidade $\{p_k : k = 0, 1, 2, ...\}$

Seja $z_0 = 1$, $z_{0,1} = z_1$

$z_1,\ z_{1,1},\ z_{1,2},\ .\ .\ .,\ z_{1,z_1},\ z_2 = \sum_{i=1}^{z_1} z_{1,i}$

$z_2,\ z_{2,1},\ z_{2,2},\ .\ .\ .z_{2,z_2},\ z_3 = \sum_{i=1}^{z_2} z_{2,i}$

$z_3,\ z_{3,1},\ z_{3,2},\ .\ .\ .z_{3,z_3},\ z_4 = \sum_{i=1}^{z_3} z_{3,i}$

. . . .
$z_{n-1},\ z_{n,1},\ z_{n,2},\ .\ .\ .z_{n,z_n},\ z_n = \sum_{i=1}^{z_{n-1}} z_{n,i}$

a amostra obtida até o instante n :$\{z_{i,j} : i = 0, ..., n; j = 1, ..., z_i\}$.

Defina $z_i(k) = \sum_{j=1}^{z_{i-1}} I(z_{i,j} = k)$ e $z(k) = \sum_{i=o}^{n} \sum_{j=1}^{z_{i-1}} I(z_{i,j} = k)$. Nessa definição, $z(k)$ é o número de pais, até a geração n, que geraram k filhos.

A função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L_n(p) &= L(p_0, p_1, .../\{z_{i,j} : i = 1, ..., n; j = 1, ..., z_i\}) \\ &= \Pi_{k=0}^{\infty} p_k^{z_k} \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} l_n(p) &= ln(L(p)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z(k) ln(p_k) \end{aligned}$$

O estimador de máxima verossimilhança de $p = (p_0, p_1, ...)$ é a solução de

$$max \sum_{k=0}^{\infty} z(k) ln(p_k)$$

sujeito à restrição $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$ e $p_k \geq 0.$

Para usar Multiplicadores de Lagrange, definamos a função objetivo

$$\sum_{k=0}^{\infty} z(k) ln(p_k) + \lambda(1 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k).$$

Derivando com respeito a p_k e igualando a zero obtemos $z(k) = \lambda p_k$ para $k = 0, 1, 2,.$

Somando temos $\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} z(k)$. Portanto o estimador de p_k é dado por

$$\begin{aligned} \hat{p}_k &= \frac{z_k}{\lambda} \\ &= \frac{z_k}{\sum_{j=0}^{\infty} z(j)} \end{aligned}$$

O estimador de máxima verossimilhança, $\hat{p}_k$, de p_k parece ser muito natural. É simplesmente a proporção de pais que tiveram k filhos com respeito ao número total de pais até a geração n.

Exemplo 11. Um processo de ramificação simples foi observado até a quarta geração. Seguem os dados obtidos. Encontremos o estimador de máxima verossimilhança da função de probabilidade do número de filhos gerados por pai.

i-1	z_{i-1}	$z_{i,j}$
0	1	3
1	3	2 3 1
2	6	1 0 3 2 1 3
3	10	3 2 1 0 2 1 3 4 1 2
4	19	1 3 2 0 1 4 2 1 3 1 2 3 2 3 0 1 3 2 4

Até a geração observada, temos um total de 39 pais, dos quais 4 tiveram 0 filhos, 11 tiveram 1 filho, 10, dois filhos, 10 tiveram 3 filhos e 3, 4 filhos. Então

$$\hat{p}_0 = \frac{4}{39} \qquad \hat{p}_1 = \frac{11}{39} \qquad \hat{p}_2 = \frac{10}{39} \qquad \hat{p}_3 = \frac{11}{39} \qquad \hat{p}_4 = \frac{3}{39}.$$

Também podemos obter o estimador de $m = E(Z)$ que resulta ser

$$\hat{m} = \sum_{k=0}^{4} k\hat{p}_k = 1.9487$$

A função geradora de probabilidade é estimada por

$$\hat{P}(s) = \frac{4}{39} + \frac{11}{39}s + \frac{10}{39}s^2 + \frac{11}{39}s^3 + \frac{3}{39}s^4.$$

A solução de $\hat{P}(s) = s$, que define a probabilidade de extinção é aproximadamente igual a $\pi = 0,153$.

5 Exercícios

1. Sejam X_1, X_2,. . . X_k variáveis aleatórias independentes, assumindo valores inteiros não negativos. Sejam $P_i(s)$ as funções geradora de probabilidade de X_i para $i = 1, 2, ..., k$. Então a função geradora de probabilidade de $T = X_1 + X_2 + ... + X_k$ é dada por

$$P_T(s) = \Pi_{i=1}^k P_i(s)$$

2. Considere $X_1 \sim b(10, p)$ e $Y \sim b(12, p)$. Se X e Y são independentes, use função geradora de probabilidade e encontre a distribuição de $W = X_1 + X_2$.

3. Resolva o Exercício 2 se X_1 e X_2 são i.i.d. de acordo a uma distribuição geométrica com parámetro p.

4. Resolva os exercícios 2 e 3, assumindo que X_1, X_2, . . . , X_k são independentes com as dsitribuições dadas pelos Ex 2 e 3 respectivamente.

5. Considere $N \sim G(p)$ e X_i $i = 0, 1, 2, ...$ independentes e identicamente distribuídas de acordo a uma binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0,4$. Defina $Y = \sum_{i=1}^N X_i$. Encontre a função geradora de probabildiade de Y. Encontre também a distribuição de probabilidade de Y.

6. Se a função geradora de probabilidade de uma variável aleatória é dada por $P(s) = e^{\lambda(s-1)}$ para $0 \leq s \leq 1$, prove que X tem distribuição de Poisson com média igual a λ.

7. Geração de um processo de ramificação até a sexta geração

Defina $Z_0 = 1$. Suponha $Z_1 \sim b(5, 0.3)$. Gere uma observação de Z_1, chame ela de z_1. Gere z_1 observações de uma distribuição binomial com parâmetros $n = 5$ e $p = 0.3$. Sejam $z_{2,1}$, $z_{2,2}$, . . ., z_{2,z_1} essas observações, defina $z_2 = \sum_{i=1}^{z_1} z_{i,j}$, gere z_2 observações de uma distribuição binomial com parâmetros $n = 5$ e $p = 0.3$. Continue até completar 6 gerações.

8. No processo de ramificac]{ao simples, prove que $P'(1) = E(Z_1)$

9. Um processo de ramificação simples foi observado até a quinta geração. Seguem os dados obtidos. Encontre o estimador de máxima verossimilhança da função de probabilidade do número de filhos gerados por pai.

i-1	z_{i-1}	$z_{i,j}$

0	1	3
1	3	2 3 2
2	7	1 0 3 2 1 3 2
3	12	3 2 1 0 2 1 3 4 1 2 0 1
4	20	1 3 2 0 1 4 2 1 3 1 2 3 2 3 0 1 3 2 4 0
5	38	3 3 3 1 2 3 2 1 1 1 1 2 0 2 1
		3 2 0 2 1 1 3 3 2 2 2 3 1 1 0 1 1 3 2 2 3 4 2

10. Com os dados do exercício anterior, estime a média do número de filhos gerados por pai e a probabilidade de extinção.

6 Referências

Bhattacharya, R. N. ; Waymire, E. C. Stochastic Processes with applications. J. Wiley. N. York. 1990.

Çinlar, E. Introduction to Stochastic Processes. Prentice Hall. N. Jersey. 1975.

Karlin, S.; Taylor, H. M. A first Course in Stochastic Processes. Academic Press. N. York. 1975.

Karlin, S. ; Taylor, H. M. A second course in Stochastic Processes. Academic Press. N. York. 1981.

Lima, E. L. Curso de Análise. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.1976

Resnick, S. Adventures in Stochastic Processes. Birkhauser, Boston, 1992.

Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis. Third edition.Mc Graw Hill, N. York, 1976.