

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA**

**PAULO CÉSAR GOMES DA SILVA**

**PRECIFICAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE USANDO A  
TRANSFORMADA DE WANG**

**BELO HORIZONTE**

**2021**

PAULO CÉSAR GOMES DA  
SILVA

**PRECIFICAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE USANDO A  
TRANSFORMADA DE WANG**

Monografia apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Ciências Atuariais.

Nome do Orientador: Adrian Pablo Hinojosa Luna

BELO HORIZONTE

2021

## RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso teve como objetivo analisar uma alternativa a um dos riscos inerentes às Entidades Fechadas de Previdência Complementar – EFPC, também denominadas Fundos de Pensão, a saber, o risco de longevidade.

Inicialmente apresenta-se um panorama do sistema previdenciário brasileiro, sempre enfatizando as EFPCs. E define-se o risco de longevidade, bem como seu potencial de severidade.

Após, alude-se aos métodos que serão usados para o cálculo. A projeção de mortalidade proposta por Lee-Carter, os métodos de simulação via Monte Carlo, as perturbações de variáveis aleatórias usando a transformada de Wang.

Por fim, com a conjugação de todas as técnicas supracitadas, apresenta-se os resultados e a conclusão deste trabalho técnico.

Figura 1 – Sobrevivência para  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 0,1$

Figura 2 – Sobrevivência para  $\lambda=0,2$  e  $\lambda=0,3$

Figura 3 –  $k_t$  para  $\lambda=0$  e  $\lambda=0,1$

Figura 4 –  $k_t$  para  $\lambda=0,2$  e  $\lambda=0,3$

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Quantidade e Percentual de EFPC por Patrocínio

Tabela 2 – Parâmetros estimados de  $k_t$

SUMÁRIO

|     |   |
|-----|---|
| 1   | 6   |
| 2   | 8   |
| 2.1 | 8   |
| 2.2 | 9   |
| 2.3 | 12  |
| 2.4 | 14  |
| 2.5 | 16  |
| 18  |   |
| 3   | 22  |
| 4   | 26  |
| 5   | 27  |
| 5.1 | 27  |
| 5.2 | 28  |
| 6   | 30  |
| 30  |   |
| 6.2 | Distribuições Simuladas do Nível de Mortalidade <i>kt31</i> |
| 7   | 34  |
| 8   | 35  |

## 1 INTRODUÇÃO

As Entidades Fechadas de Previdência Complementar – EFPC, também denominadas Fundos de Pensão, são destinadas a oferecer planos previdenciários em caráter complementar à aposentadoria pública.

Tem-se que segundo o Relatório de Estabilidade da Previdência Complementar emitido pela Superintendência Nacional de Previdência Complementar (Previc), em julho de 2020, o total de ativos destas Entidades aproximou-se de R\$ 1 trilhão, cerca de 13,7% do PIB nacional. Daí vê-se o papel fundamental no desempenho econômico do país assumido pelas EFPCs.

Desse modo, faz-se necessário um olhar sensível e acurado às variáveis que influenciam a situação financeira e atuarial dos planos de benefícios oferecido por tais Entidades, organizados no regime de capitalização. Este trabalho se debruça sobre a variável mortalidade, ou seja, no perfil da mortalidade ao longo do tempo que impacta diretamente na definição do valor das contribuições e no cálculo das reservas necessárias para que essas entidades possam arcar com os compromissos futuros dos planos de benefícios.

Assim, é necessário verificar se premissa de mortalidade adotada é observada pelo plano ao longo do tempo devido à natureza longínqua das obrigações futuras.

A comparação das premissas atuariais com a realidade do plano é fundamental para garantir seu equilíbrio atuarial e financeiro, e assim, a manutenção dos benefícios de longo prazo. Portanto, o estudo dos riscos relacionados a mortalidade é fundamental para o planejamento das reservas matemáticas e consequente sustentabilidade dos planos de pensão do tipo Benefício Definido, evitando situações de *déficits*.

Atualmente o sistema da previdência social brasileiro opera sob duas vertentes: uma obrigatória, através do Regime Geral de Previdência Social (RGPS), responsável pela previdência de trabalhadores do setor privado e do Regime

Próprio de Previdência Social (RPPS), regime próprio dos servidores públicos; e outra facultativa, composta pelas Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC) e as Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) (BRASIL MPS, 2008).

As EAPCs são entidades com fins lucrativos, com planos de previdência destinados a quaisquer pessoas físicas e/ou empresas. Já as EFPCs, também conhecidas como Fundos de Pensão, não possuem fins lucrativos, e os planos são destinados àqueles que possuem vínculo do tipo empregatício, planos Patrocinados, ou do tipo associativo, planos Instituídos.

Como entidades investidores institucionais qualificados, as EFPCs, estão suscetíveis a todo e qualquer risco inerente às atividades por elas exercidas. Como operadores do Sistema Financeiro Nacional (SFN) estão expostas aos seguintes riscos:

- risco de crédito;
- risco de câmbio;
- risco de liquidez;
- risco de mercado.

Além da exposição aos riscos operacionais e legais que qualquer CNPJ está sujeito.

Ademais, dentro os riscos que envolvem a gerencia de uma EFPC, doravante denominado fundo de pensão, o de longevidade, risco de a expectativa de vida real dos pensionistas ser maior que a expectativa de vida esperada (BOYER; STENTOFT, 2013), talvez seja o de maior severidade. O processo de envelhecimento da população tornou os desafios inerentes a esse risco ainda maiores e torna-se necessário alternativas para o gerenciamento e mitigação desses riscos.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

### **2.1 Sistema Previdenciário Brasileiro**

O conceito de Previdência aparece pela primeira vez no Brasil em 1923, através do Decreto nº 4.682, conhecido como Lei Eloy Chaves e a criação da primeira Caixa de Aposentadoria e Pensões – CAP, que oferecia aposentadoria, pensão, assistência médica e auxílio farmacêutico para os empregados das empresas de estrada de ferro do país. Mais tarde, durante a década de 30, o Decreto nº 22.872, criou o primeiro Instituto de Aposentadoria e Pensões - IAP, que possuía gestão própria de contribuições e benefícios, com destinação exclusiva a trabalhadores urbanos (BRASIL MPS, 2008).

Em 1942 entrou em funcionamento a Legião Brasileira de Assistência (LBA), órgão assistencial que ofereceu auxílio às famílias dos soldados enviados à 2ª Guerra Mundial, e que com o fim da guerra, continuou a existir para ajudar famílias carentes na proteção à maternidade e à infância, no amparo aos velhos e desvalidos (BRASIL MPS, 2008).

Na década de 60, com o avanço da industrialização e, conseqüente, urbanização do país os Institutos de Aposentadoria e Pensões foram unificados e formaram o Instituto Nacional de Previdência Social (INPS) através da Lei Orgânica da Previdência Social (LOPS).

Nos anos 70 foram criados o Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária (INCRA); o Programa de Assistência ao Trabalhador Rural (FUNRURAL), que concedia ao trabalhador rural os benefícios de aposentadoria, pensão por morte auxílio-funeral, serviços de saúde e serviço social e o Sistema Nacional de Previdência e Assistência Social (SINPAS) integrado pelas seguintes entidades: Instituto Nacional de Assistência Médica da Previdência Social (INAMPS), Instituto Nacional de Previdência Social (INPS), Instituto de Administração Financeira da Previdência e Assistência Social (IAPAS), Central de Medicamentos (CEME), Empresa de Processamento de Dados da Previdência Social (DATAPREV), Fundação Nacional do Bem-

Estar do Menor (FUNABEM) e Fundação Legião Brasileira de Assistência (LBA) (BRASIL MPS, 2008).

Em 1988, com a nova Constituição Federal, surgiu o conceito de seguridade social, que abrange três pilares: Previdência Social, Saúde e Assistência Social. A Constituição definiu a seguridade social como universal, estendendo a todos os brasileiros o acesso à cobertura previdenciária, saúde e assistência social, independente de contribuição (SANTOS, 2009).

O INPS e o IAPAS foram extintos dando lugar ao atual Instituto Nacional do Seguro Social (INSS), e as obrigações do INAMPS foram transferidas para o Sistema Único de Saúde (SUS).

Atualmente o sistema da previdência social brasileiro operara sob duas vertentes: uma obrigatória, através do RGPS, responsável pela previdência de trabalhadores do setor privado e do RPPS, regime próprio dos servidores públicos; e outra facultativa, composta pelas Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC) e as Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) (BRASIL MPS, 2008).

As EAPCs são entidades com fins lucrativos, com planos de previdência destinados a quaisquer pessoas físicas e/ou empresas. Já as EFPCs, também conhecidas como Fundos de Pensão, não possuem fins lucrativos, e os planos são destinados àqueles que possuem vínculo do tipo empregatício, planos Patrocinados, ou do tipo associativo, planos Instituídos. O presente estudo teve como foco as EFPCs.

## **2.2 Entidades Fechadas de Previdência Complementar**

As Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) são organizadas sob a forma de entidades civis sem fins lucrativos, destinados a um determinado grupo de trabalhadores, com vínculo empregatício ou de

representação por entidades de classe, setoriais ou profissionais (BRASIL, 2008).

Os segmentos de previdência complementar foram instituídos por meio da Lei 6.435 de 1977, que, tratando especificamente das Entidades de Previdência Complementar, trouxe maior racionalização do setor e segurança para os participantes.

Hoje, esse regime de previdência está previsto no art. 202 da Constituição Federal de 1988, derivada da Emenda Constitucional nº 20, de 15 de dezembro de 1988, conforme texto abaixo:

*“O regime de previdência privada, de caráter complementar e organizado de forma autônoma em relação ao regime geral de previdência social, será facultativo, baseado na constituição de reservas que garantam o benefício contratado, e regulado por lei complementar.”*

Com o objetivo de dar maior sustentação ao setor de previdência complementar foram criadas as Leis Complementares nº 109 e nº 108, ambas de 29 de maio de 2001. A LC nº 108/2001 traz normas específicas para as EFPC constituídas pela União, Estados, Distrito Federal, Municípios, suas autarquias, fundações, sociedades de economia mista e outras entidades públicas.

A Lei Complementar 109/2001 dispõe sobre o Regime de Previdência Complementar e enfatiza, em seu art. 1, a nova redação do art. 202 da CF dada pela EC nº 20. Até a publicação da LC 109/2001 os fundos de pensão eram criados somente por empregadores, pois era exigido o vínculo empregatício entre o patrocinador e os participantes.

Com a promulgação da Lei surgiu a possibilidade da criação de fundos por Instituidores. A Resolução CGPC nº 12 de 17 de setembro de 2002, regulamenta esse tipo de plano de benefícios e determina as pessoas jurídicas que podem ser instituidoras de fundos de pensão:

- I - os conselhos profissionais e entidades de classe nos quais seja necessário o registro para o exercício da profissão;
- II - os sindicatos, as centrais sindicais e as respectivas federações e confederações;
- III - as cooperativas que congreguem membros de categorias ou classes de profissões regulamentadas;
- IV - as associações profissionais, legalmente constituídas;
- V - outras pessoas jurídicas de caráter profissional, classista ou setorial, não previstas nos incisos anteriores, desde que autorizadas pelo órgão fiscalizador.

A maior parte das EFPC no Brasil são do tipo Patrocinada. De acordo com o Informativo Mensal da Subsecretaria do Regime de Previdência Complementar de julho de 2020, esse percentual é de 93% das EFPC. Dentre as Entidades Patrocinadas, aproximadamente 29% são de Patrocínio Público. Essas informações podem ser verificadas na Tabela 1.

Tabela 1 Quantidade e Percentual de EFPC por Patrocínio

R\$ bilhões

| Patrocínio Predominante      | Dezembro/2018 |             | Dezembro/2019 |             |
|------------------------------|---------------|-------------|---------------|-------------|
|                              | Quantidade*   | Ativo Total | Quantidade*   | Ativo Total |
| Público Federal              | 36            | 474         | 36            | 521         |
| Público Municipal e Estadual | 52            | 82          | 52            | 89          |
| Privado                      | 193           | 340         | 188           | 375         |
| Instituidores                | 21            | 9           | 22            | 10          |
| <b>Total</b>                 | <b>302</b>    | <b>904</b>  | <b>298</b>    | <b>995</b>  |

\* Seis EFPC apresentavam pendências para efetivação do cancelamento

Fonte: Informativo Mensal da Subsecretaria do Regime de Previdência Complementar, julho de 2020.

O Regime de Previdência Complementar desempenha um importante papel na economia, sendo as EFPC as principais investidoras institucionais do país.

## 2.3 Tipos de Planos

Os planos previdenciários dos fundos de pensão podem ser estruturados em três diferentes modalidades: Benefício Definido (BD), onde o benefício futuro a ser recebido pelo participante é definido previamente e as contribuições são calculadas de forma a assegurar o pagamento destes benefícios; Contribuição Definida (CD), onde o valor do benefício é calculado com base no montante acumulado por cada participante; e Contribuição Variável (CV), que são planos que misturam características das modalidades BD e CD.

A Resolução CGPC nº 16, de 22 de novembro de 2005, normatizou os planos de benefícios nessas modalidades. De acordo com essa Resolução:

*Art. 2º Entende-se por plano de benefício de caráter previdenciário na modalidade de benefício definido aquele cujos benefícios programados têm seu valor ou nível previamente estabelecidos, sendo o custeio determinado atuarialmente, de forma a assegurar sua concessão e manutenção.*

*Parágrafo único: Não será considerado para fins da classificação de que trata o caput o benefício adicional ou acréscimo do valor de benefício decorrente de contribuições eventuais ou facultativas.*

*Art. 3º Entende-se por plano de benefícios de caráter previdenciário na modalidade de contribuição definida aquele cujos benefícios programados têm seu valor permanentemente ajustado ao saldo de conta mantido em favor do participante, inclusive na fase de percepção de benefícios, considerando o resultado líquido de sua aplicação, os valores aportados e os benefícios pagos.*

*Art. 4º Entende-se por plano de benefícios de caráter previdenciário na modalidade de contribuição variável aquele cujos benefícios programados apresentem a conjugação das características das modalidades de contribuição definida e benefício definido.*

Conforme o artigo 2º da Resolução, os planos de benefícios na modalidade BD são aqueles em que os benefícios são estabelecidos

previamente por uma fórmula ou com base em valores prefixados, ambos previstos em regulamento, no momento da adesão do participante ao plano.

As contribuições aos planos dessa modalidade geralmente são calculadas de forma agregada por meio de avaliação atuarial. Devem ser feitas revisões periódicas para garantir o equilíbrio atuarial do plano (LIMA; RODRIGUES, 2014).

O mutualismo é uma característica fundamental para esse tipo de plano de benefício, tanto na fase de acumulação de reservas, como na fase de pagamento de benefícios. Os cálculos são feitos considerando a coletividade do plano, ou seja, o risco é coletivo. Assim, em caso de superávit ou déficit do plano, todos os participantes, contribuintes e beneficiários, são responsáveis pelo resultado do plano, pois a conta é coletiva.

Nos planos CD o valor do benefício de aposentadoria é baseado no saldo de conta individual acumulado do participante, e, portanto, só é conhecido no momento da concessão. De acordo com Lima e Rodrigues (2014) o benefício depende basicamente de duas variáveis: capacidade de acumulação do participante e da rentabilidade dos investimentos.

Os planos CV são uma conjugação das características dos planos nas modalidades CD e BD. A fase de formação de poupança é CD e a fase de concessão de benefícios é BD. Assim, ativos e passivos são variáveis dependentes na fase de acumulação e independentes durante a fase de pagamento de benefícios.

O art. 21 da LC 109/2001 determina que eventuais *déficits* dos planos, que forem decorrentes de riscos atuariais e financeiros, devem ser cobertos por participantes, assistidos e patrocinadores, na proporção que lhes cabe no custeio do plano.

A tendência de mudança de planos BD para CD pode ser explicada pelo risco do plano BD para o empregador, que devido ao mutualismo dos planos, as

insuficiências de recursos recaem sobre o plano e devem ser cobertas pelos participantes e patrocinadores, enquanto que em um plano tipo CD o risco é todo do participante.

## 2.4 Risco de Longevidade

Segundo WINKLEVOSS (1993), as variáveis, a seguir, influenciam a situação financeira e atuarial de qualquer plano de benefícios oferecido pelos fundos de pensão, organizados no regime de capitalização, e podem ser classificadas da seguinte maneira:

### ✚ Variáveis Econômicas:

- i taxa de juros;
- ii rentabilidade dos investimentos;
- iii salários (incluindo escala de mérito e ganhos de produtividade);
- iv valor do benefício da previdência social; e
- v inflação.

### ✚ Variáveis Demográficas:

- i mortalidade (de válidos e inválidos);
- ii entrada em invalidez;
- iii geração futura de novos entrados;
- iv rotatividade; e
- v composição familiar.

### ✚ Outras Variáveis:

- i idade de aposentadoria;
- ii idade de entrada no emprego; e
- iii taxa de contribuição.

A variável demográfica mortalidade é utilizada para mensurar o valor presente dos benefícios futuros cujo evento gerador pode ser a morte, produzindo o benefício de pensão por morte, como também pode ser a

sobrevivência, ocasionando o benefício de aposentadoria por tempo de contribuição ou idade.

Tem-se numa EFPC a hipótese de mortalidade é muito sensível e tem uma relação direta com o valor presente dos benefícios futuros. Nesse cenário e, com o eminente processo de envelhecimento populacional, um risco inerente a esta variável se destaca, o risco de longevidade.

Este é conceituado como a probabilidade de que os recursos destinados para o pagamento das aposentadorias acabem antes do final da vida do indivíduo. Em outras palavras, o risco de longevidade surge quando a expectativa de vida real dos beneficiários é maior do que sua expectativa de vida esperada, calculada pelos fundos de pensão (BOYER; STENTOFT, 2013).

Noutras palavras, o risco de longevidade é a probabilidade das expectativas de vida dos participantes de um plano de benefícios excederem as premissas previamente estabelecidas, gerando um maior volume de pagamento de benefícios, majorando as provisões matemáticas e corroendo o índice de solvência.

Financeiramente, o risco agregado de longevidade é principalmente negativo, uma vez que os sistemas de aposentadoria contam com previsões de taxa de mortalidade agregada para calcular os benefícios de aposentadoria de um indivíduo até sua morte (sem mencionar todos os outros custos associados à velhice, como assistência médica e benefícios por invalidez).

Quando a expectativa de vida de uma coorte de aposentados excede as previsões, o fundo deve pagar a essa coorte uma renda que excede o nível inicialmente projetado e acumulado. Assim, corre-se o risco de não ter capital necessário para cumprir os seus compromissos financeiros.

O problema é semelhante para indivíduos que estão acumulando riqueza na expectativa de converter toda essa riqueza em anuidades após a aposentadoria (LEVHARI e MIRMAN, 1977, e DAVIES, 1981); um aumento

imprevisto na longevidade levará à acumulação insuficiente de riqueza por parte de um indivíduo, que precisará reduzir o consumo mais do que o previsto ou adiar totalmente a aposentadoria (COCCO e GOMES, 2012).

Considerando o tamanho da exposição ao risco, uma maneira de gerenciar, potencialmente, o risco de longevidade é, sem dúvida, aproveitando a riqueza de todo o mercado de capitais.

O argumento é essencialmente que, embora as perdas, potenciais, devido ao risco de longevidade sejam maiores do que qualquer seguradora ou grupo de seguradoras pode assumir, tal exposição a perdas não é incomum para os mercados de capitais.

Em outras palavras, o que é um risco sistêmico para o mercado de seguro de vida é um risco idiossincrático para todo o mercado de capitais. A capacidade do mercado de capitais de absorver maiores quantidades de risco do que o mercado de resseguro de vida decorre de dois fatores:

- os mercados de capitais são vastos e muito maiores do que a capitalização de mercado e o excedente da indústria de seguros; e
- não há virtualmente nenhuma correlação entre o risco de longevidade e o risco de mercado.

O benefício para os participantes do mercado de capitais em assumir esse tipo de risco é ter acesso a uma nova classe de ativos. Devido à correlação insignificante entre os ativos de risco de longevidade e o portfólio de ativos financeiros deste mercado, a exposição ao risco de longevidade pode diminuir a volatilidade de toda a carteira de negócios (BOYER; STENTOFT, 2013).

## **2.5 Derivativos de Longevidade**

Os mercados de capitais começaram a desenvolver produtos que permitem às instituições financeiras investir em mortalidade e longevidade. O

principal exemplo de tal produto é o *swap* de mortalidade em que uma parte pagará um prêmio condicionado à mortalidade esperada e em troca receberá terá um seguro com cuja importância seja diferença entre a mortalidade esperada e experiência real da mortalidade (BOYER; STENTOFT, 2013).

No contexto brasileiro, a Superintendência de Seguros Privados (Susep) publicou a Resolução CNSP nº 385, de 09/06/2020, que atualiza as regras de contratação de seguros pelos planos geridos pelas EFPCs.

Nesse ambiente de compartilhamento de riscos há basicamente quatro operações: invalidez de participante, morte de participante e assistido, sobrevivência de assistido e desvio de hipótese biométrica. As duas primeiras já são feitas de forma bastante corriqueira pelas entidades, que intermediam o acesso, pelo participante, a uma apólice coletiva de seguro.

No que se refere ao seguro de desvio de hipótese biométrica, que inclui os, já citados, *swaps* de longevidade, só é possível securitizar a tábua de mortalidade, além da tábua de entrada em invalidez, entre outras hipóteses. Não é autorizada a securitização de taxa de juros e outros componentes financeiros dos planos. A Lei Complementar nº 109, em seu Artigo 33º, Parágrafo 1º, também veda a transferência de participante e assistidos e das reservas constituídas a seguradoras na aposentadoria (os chamados *buyouts*, populares no exterior), embora esteja prevista uma eventual autorização da Previc para operações dessa natureza.

Em vigor desde 1º de julho de 2020, a nova norma do Conselho Nacional de Seguros Privados, alinhada ao Decreto nº 10.139/2019 da Presidência da República, que dispõe sobre a revisão e consolidação de atos normativos, a Resolução do CNSP sinaliza, sobretudo, que o governo brasileiro está atento ao desenvolvimento do mercado de compartilhamento dos riscos atuariais dos fundos de pensão.

Entretanto, uma das razões pelas quais os mercados de capitais têm sido relativamente lentos no desenvolvimento de produtos de longevidade é que

calcular seu valor justo levanta muitos desafios. Em primeiro lugar, a mortalidade, ao contrário dos ativos financeiros, não é um ativo comercializado e, portanto, os produtos de longevidade não podem ser avaliados simplesmente pela ausência de arbitragem (sob a medida de risco neutro), uma vez que nenhum portfólio de replicação pode ser construído.

Faz-se necessário, portanto, a utilização de métodos de avaliação de mercado incompletos que impliquem a existência de prêmio de risco de mercado, que somente pode ser avaliado a partir de dados de mercado.

Em segundo lugar, dado que os fluxos de caixa desses produtos estão diretamente ligados às taxas de mortalidade ou sobrevivência, sua avaliação requer a capacidade de prever essas taxas com precisão.

### **2.5.1 Exemplos de derivativos de longevidade**

Nos mercados financeiros existem vários produtos que permitem aos investidores transferir o risco. Um exemplo clássico é o uso de *forwards*, *contratos a termo futuros*, *sobre índices de ações para proteger a exposição aos mercados de ações ou para especular na direção futura do mercado*. Também existem contratos de futuros sobre títulos e outros produtos de taxas de juros. Os contratos de *swap* também são extremamente importantes nos mercados de taxas de juros e moedas estrangeiras.

*Um swap de taxa de juros fixa por flutuante, por exemplo, é um contrato em que uma contraparte faz pagamentos de taxas de juros fixas e, em troca, recebe pagamentos de taxas flutuantes sobre um determinado valor notional (BOYER; STENTOFT, 2013).*

#### **2.5.1.1 Survivor Forwards**

Um dos primeiros produtos padronizados em risco de longevidade e mortalidade, o *q-forward*, proposto pelo JPMorgan Pension Advisory Group (COUGHLAN, 2007), sendo um dos instrumentos de mercado de capitais mais

simples que podem ser usados para transferir risco de longevidade e mortalidade.

A estrutura desse produto envolve a troca da taxa de mortalidade realizada de uma população em alguma data futura por uma taxa de mortalidade fixa pactuada no momento da assinatura do contrato.

Para ilustrar como funciona um *survivor forwards*, seja  $s_{x,t}^e$  a probabilidade esperada de indivíduo  $x$  sobreviver do tempo  $t - 1$  para o tempo  $t$  dadas as informações atualmente disponíveis.

Da mesma forma, seja  $s_{x,t}^r$  a probabilidade efetivamente realizada de indivíduos com idade  $x$  que sobrevivem do tempo  $t - 1$  para o tempo  $t$ . O prêmio *forward* de hoje é então fixado na seguinte forma:

$$NPV(\text{esperado}) = NPV(\text{realizado})$$

Sendo NPV, o “*Notional Present Value*”, valor presente nocional.

Para tanto, definimos o fator de ajuste  $\Pi_t^f$  como solução para:

$$(1 + \Pi_t^f)NPV(s_{x,t}^e) = NPV(s_{x,t}^r)$$

Daí, tem-se que:

$$\Pi_t^f = \frac{NPV(s_{x,t}^r)}{NPV(s_{x,t}^e)} - 1$$

O resultado de  $\Pi_t^f$  é chamado de preço do *survivor forward*. Observe que, a qualquer momento, existem vários preços futuros para contratos com vencimentos diferentes (BOYER; STENTOFT, 2013).

Por exemplo, o prêmio *forward* sobre as taxas de sobrevivência do tempo  $t$  para  $t + 1$  é:

$$\Pi_{t+1}^f = \frac{NPV(s_{x,t+1}^r)}{NPV(s_{x,t+1}^e)} - 1$$

O pagamento líquido para uma posição longa em um *survivor forward* no vencimento  $t$  É dado por:

$$s_{x,t}^r - (1 + \Pi_t^f)NPV(s_{x,t}^e)$$

Ou seja, se a taxa de sobrevivência realizada  $s_{x,t}^r$ , for maior do que a taxa esperada,  $s_{x,t}^e$  multiplicado por  $(1 + \Pi_t^f)$ , a posição longa recebe dinheiro. Para um plano de previdência, esse tipo de produto pode ser usado para cobrir o risco associado ao aumento da longevidade.

Em particular, se o pagamento futuro das obrigações do plano corresponder a  $s_{x,t}^r$ , ao entrar em uma posição longa de um *survivor forward*, os pagamentos combinados do plano correspondem a  $(1 + \Pi_t^f)NPV(s_{x,t}^e)$ , ou seja, um pagamento fixo conhecido no momento  $t$ . Portanto, não há mais exposição ao risco de longevidade (BOYER; STENTOFT, 2013).

### 2.5.1.2 *Survivor Swaps*

O *survivor forward* é provavelmente o instrumento mais simples possível que pode ser usado para cobrir a exposição ao risco de longevidade em um determinado momento e, por extensão, uma carteira de tais *forwards* pode ser usada para cobrir esse risco durante um período de tempo.

Este tipo de arranjo é bem conhecido no mercado de risco de taxa de juros, onde a carteira combinada é negociada em conjunto como um *swap* de taxa de juros. De forma semelhante, *survivor swaps* é uma carteira de *survivor forwards*.

Por exemplo, pode-se considerar um *swap* taxas de sobrevivência de  $t - 1$  para  $t$ , a partir de  $t$  para  $t + 1$ , e de  $t + 1$  para  $t + 2$ . A generalização direta da

fórmula para o preço de um *survivor forwards* produz a seguinte solução para o preço de *survivor swaps*:

$$\Pi_{t,t+2}^s = \frac{NPV(s_{x,t}^r)}{NPV(s_{x,t}^e)} + \frac{NPV(s_{x,t+1}^r)}{NPV(s_{x,t+1}^e)} + \frac{NPV(s_{x,t+2}^r)}{NPV(s_{x,t+2}^e)} - 1$$

Observe que, por definição, segue-se que,  $\Pi_{t,t}^s = \Pi_t^f$ .

### 2.5.1.3 *Survivor Options*

Tem-se que os contratos de opções oferecem alternativas interessantes para fins de hedge e especulativos. Por exemplo, mercados muito líquidos para opções sobre índices de ações existem ao lado do mercado de contratos futuros.

Em alguns casos, isto é, no caso de ações individuais, só é possível negociar opções sobre as ações, uma vez que não existe mercado futuro. O exemplo mais simples possível desses instrumentos seria simplesmente o direito de comprar, uma opção de compra, ou vender, uma opção de venda, a exposição ao risco de longevidade a um determinado preço, o preço de exercício, em um determinado ponto em tempo, a maturidade.

Já que isso é um direito, e não uma obrigação como é o caso do contrato *forward* com maturidade semelhante, a opção terá um preço estritamente positivo. Esse preço deve ser igual ao valor presente do fluxo de caixa futuro esperado, que é limitado abaixo de zero (BOYER; STENTOFT, 2013).

Para manter um vínculo estreito com o contrato e a notação que foi usada anteriormente para *forwards* e *swaps*, propõe-se considerar opções com um determinado preço de exercício. Para ser mais específico, sugerimos que se deve usar a taxa de sobrevivência esperada como o preço de exercício. Assim, para uma opção de compra o preço será dado por

$$c = E[e^{-\tau T} \max(s_{x,t}^r - s_{x,t}^e, 0)]$$

Onde  $r$  é a taxa de juros livre de risco,  $T$  o vencimento do contrato, e  $E[.]$  denota o operador de valor esperado. De igual forma, o preço de uma opção de venda é dado por

$$p = E[e^{-\tau T} \max(s_{x,t}^e - s_{x,t}^r, 0)]$$

Por construção, há uma relação estreita entre os preços das opções e o prêmio *forward*, semelhante à paridade *put-call*. Em particular, uma carteira comprada em uma opção de compra e vendida em uma opção de venda com o mesmo vencimento tem um valor igual ao valor presente dos pagamentos *NPV(esperado)* do contrato a *forward* com vencimento ao mesmo tempo que as opções (BOYER; STENTOFT, 2013).

### 3 PROJEÇÃO DA MORTALIDADE: MODELO LEE-CARTER

Ronald Lee e Lawrence Carter apresentaram, em 1992, um novo modelo para prever a mortalidade. Esse método projeta tabelas de vida para cada coorte de nascimento (ano), combinando um modelo demográfico para idades específicas combinando um modelo de séries temporais, identificando um índice único que representa a variação do nível de mortalidade ao longo do tempo (SILVA, 2010, p. 131).

A projeção de mortalidade é importante para entender a dinâmica populacional e identificar as perspectivas de vida mais longa, e assim, melhorar os cálculos atuariais e quantificar o risco de longevidade para seguradoras e entidades públicas e privadas de previdência.

O modelo de Lee-Carter baseia-se em uma grande quantidade de dados que apresentam as tendências históricas do padrão de mortalidade para, a partir dessas informações, mostrar as tendências futuras através de intervalos de confiança, ou seja, trata-se de uma projeção probabilística.

O modelo Lee-Carter é dado por:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

Onde  $m(x,t)$  é a **taxa central de mortalidade** para a idade  $x$  no ano  $t$ ;  $a_x$  e  $b_x$  são parâmetros de ajuste etário e  $k_t$  é o **nível da mortalidade** específico de cada ano, estes são os parâmetros do modelo e  $\varepsilon_{x,t}$  é a variação aleatória do modelo com distribuição Normal com média 0 e variância  $\sigma^2$  e reflete as influências dos dados históricos que não são capturados pelo modelo.

$k_t$  é o índice do nível geral de mortalidade em cada instante de tempo. Os valores de  $k_t$  variam apenas com o ano  $t$ , sendo iguais para todas as idades  $x$ . Uma tendência de diminuição nos valores de  $k_t$  ao longo do tempo significa a redução das taxas de mortalidade (BOYER; STENTOFT, 2013).

O parâmetro  $b_x$  é a diferença entre os logaritmos das taxas de mortalidade entre os tempos  $t$  e  $t + 1$ . Segundo Silva (2010)  $b_x$  descreve o padrão de desvio da forma geral quando  $k_t$  varia. “Para uma idade  $x$ , quanto maior o valor de  $b_x$ , mais impacto terá uma variação no  $k_t$ ” (BOYER; STENTOFT, 2013, p. 40).

Para estimação dos coeficientes  $a_x$ ,  $b_x$  e  $k_t$  extrai-se as taxas centrais de mortalidade para cada idade e ano,  $m(x, t)$ , do conjunto de tábuas de mortalidade que servirão de base histórica para a projeção.

Segundo BOYER e STENTOFT (2013) para prever as taxas de mortalidade futura os coeficientes  $a_x$  e  $b_x$  são presumidos fixos ao longo do tempo e são projetados os  $k_t$  futuros.

De acordo com Silva (2010, p. 136):

*“Para a modelagem do  $k_t$ , Lee e Carter utilizam a modelagem de séries temporais ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) de Box-Jenkins, que permite modelar e prever uma*

*série tomando por base apenas seus valores presentes e passados mais um termo de erro estocástico”.*

Os parâmetros do modelo ARIMA são (p,d,q) e representam respectivamente os componentes Autorregressivo– AR; Filtro de Integração –I; e Médias Móveis – MA.

Para modelar a série  $k_t$  é preciso identificar quais os parâmetros (p,d,q) que melhor descrevem a série. Usando um modelo simples, autorregressivo de ordem 1 (AR (1)), o modelo é escrito como:

$$k_t = \theta + \phi k_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  e onde  $\phi < 1$  para assumir que, após diferenciação de ordem 1, ele é estacionário.

BOYER e STENTOFT (2013) explicam que assumindo essas premissas, os valores de  $\theta$  e  $\phi$  podem ser estimados pelo método de Regressão Linear e calculada a variação dos valores residuais de  $\varepsilon_t$ .

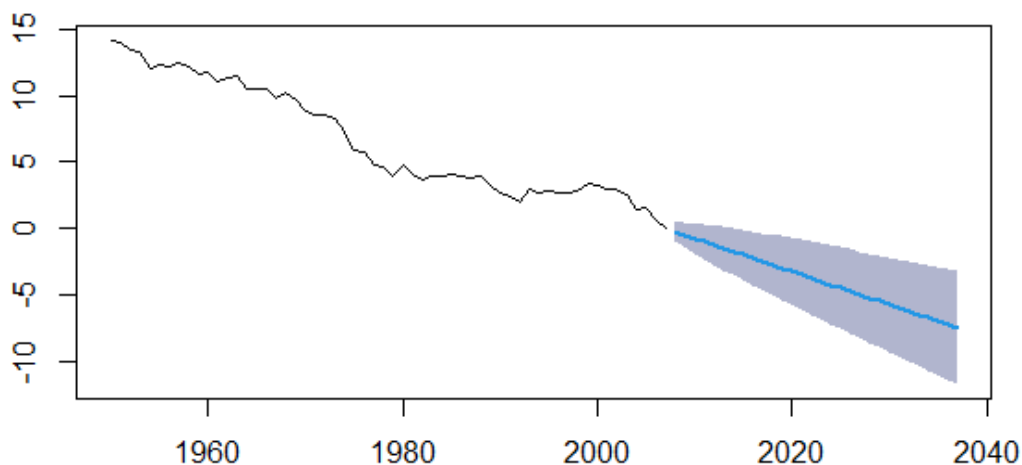
Para gerenciamento do risco de longevidade é necessário estudar a tendência do padrão de mortalidade da população, assim devem-se utilizar métodos de projeção que apresentem esses resultados, como é o caso do Método de Lee-Carter.

Como o modelo de Lee-Carter necessita de uma grande base de dados históricos e como os fundos de pensão geralmente não possuem uma série longa de dados, nesse trabalho, os dados usados para projeção da mortalidade são das mulheres americanas e usamos dados de 1950 a 2007, disponibilizados pelo HUMAN MORTALITY DATABASE (HMD), que refletem a experiência histórica da evolução da mortalidade feminina dos EUA no período.

O gráfico, a seguir, mostra a variação no nível geral de mortalidade ao longo do tempo para mulheres dos EUA de acordo com o método de ajuste do

desvio para  $k_t$ , a partir do ano de 2007. Verifica-se a tendência de decrescimento ao longo do tempo, o que indica redução nas taxas de mortalidade para todas as idades.

Gráfico 1 Nível de Mortalidade ( $k_t$ ) com Previsões e Intervalos de Confiança



Fonte: Elaborado a partir de projeção Lee-Carter no R-Studio

A Tabela 2 mostra os resultados da estimação dos coeficientes  $\theta$  e  $\phi$ , e o desvio padrão do  $k_t$ .

Tabela 2 – Parâmetros estimados de  $k_t$

| $\theta$   | $\phi$    | $\sigma$  |
|------------|-----------|-----------|
| -0.2471133 | 0.9855144 | 0.4913454 |

Fonte: Elaborado a partir de projeção Lee-Carter no R-Studio

A partir dos coeficientes do modelo estimados é possível gerar as tábuas de mortalidade projetadas ao longo do tempo, e a partir das probabilidades de sobrevivências dessas tábuas em cada idade, pode-se projetar as reservas necessárias para garantir o pagamento dos benefícios.

#### 4 PERTURBAÇÕES DAS DISTRIBUIÇÕES DO TIPO WANG

Wang (2000) citado por Boyer e Stentoft (2013) propôs um método de avaliação de ativos financeiros distorcendo ou perturbando a distribuição acumulada da variável  $X$ , o que gera uma nova distribuição acumulada ajustada ao risco conforme abaixo:

$$\tilde{F}(x) = \Phi [\Phi^{-1}(F(x)) - \lambda]$$

onde  $F(x)$  é a função de distribuição acumulada da variável  $X$ ,  $\Phi$  é a distribuição acumulada Normal e  $\lambda$  é um prêmio de risco.

Segundo Boyer e Stentoft (2013) esse é um caso particular dos dois parâmetros da Transformação de Esscher-Girsanov que, em um cenário estático pode coincidir apesar de não serem equivalentes, mas isso fica mais aparente em um cenário dinâmico.

*“A metodologia de transformação de Wang tem várias vantagens. Primeira de todas, é um método universal de avaliação que pode ser aplicado a qualquer tipo de função de distribuição  $F(x)$ . Em segundo lugar, a transformação pode ser facilmente ajustada para levar em conta a incerteza que envolve os parâmetros da distribuição. Finalmente, a distribuição mantém as distribuições Normal e Log-Normal: se  $X$  segue uma distribuição Normal com  $N(\mu, \sigma^2)$ , então a variável transformada  $\tilde{X}$  também segue uma distribuição Normal com  $N(\mu - \lambda\sigma^2, \sigma^2)$ ; se  $X$  segue uma distribuição Log-Normal com  $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então a variável transformada  $\tilde{X}$  também segue uma distribuição Log-Normal com  $\ln(\tilde{X}) \sim N(\mu - \lambda\sigma^2, \sigma^2)$  (Boyer e Stentoft, 2013, p. 38).*

De acordo com Boyer e Stentoft (2013) a incerteza sobre as taxas de mortalidade que serão observadas decorre dos valores de  $k_t$  futuros, e os  $k_t$ 's dependem dos erros aleatórios  $\varepsilon_t$ 's. Para o cálculo das reservas de um fundo de pensão, o impacto desses erros precisa ser conhecido para se neutralizar o risco.

O erro  $\varepsilon_t$  tem distribuição Normal, e assim, pode-se mudar o erro usando-se sorteios aleatórios de uma Normal com média diferente de zero,  $\varepsilon_t \sim N(-\lambda\sigma^2, \sigma^2)$ , conforme a transformada de Wang.

Ainda segundo Boyer e Stentoft (2013) uma simulação consiste em um grande número de possíveis trajetórias para o nível de mortalidade  $k_t$  gerados para cada ano da projeção. Assim, os autores utilizam três valores diferentes de  $\lambda$  para transformar a distribuição dos  $k_t$ 's,  $\lambda = 0.1$ ,  $\lambda = 0.2$  e  $\lambda = 0.3$ .

Assim, foram feitas projeções Lee-Carter utilizando as três perturbações do  $k_t$ 's acima e geradas as funções de sobrevivência até o ano de 2012. O objetivo é a utilização dessas funções com perturbações para a precificação do risco de longevidade.

## 5 METODOLOGIA

### 5.1 Simulação Monte Carlo

O Método de Monte Carlo pode ser descrito com método de simulação estatística que utiliza sequências de números aleatórios, repetindo sucessivas simulações um grande número de vezes para calcular probabilidades, sendo utilizado em diversas áreas de conhecimento.

Trata-se, portanto, de uma aplicação da Lei dos Grandes Números que diz que *“a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1, para a média daquela distribuição”* (ROSS, 2010, p. 472).

Assim, uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d),  $X_1, X_2, \dots$ , cada uma com média  $\mu = E[X_i]$ , com probabilidade 1:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Se  $E[g(x_1)] < \infty$ , então

$$\overline{g(x)} = \frac{g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_n)}{n} \approx E[g(x_1)]$$

O método de Monte Carlo produz resultados aproximados e a precisão depende do número de valores  $N$  que se usa para a média.

## 5.2 Implementação

Neste trabalho, o desafio consiste em concatenar as técnicas de distribuição de risco neutro usadas por Wang com as técnicas de projeção de mortalidade usadas por Lee-Carter e utilizá-las para precificar o risco de longevidade. E, transformar este risco em um ativo financeiro.

O objetivo é encontrar um prêmio para o risco de longevidade, usando o contrato *survivor options*.

Foi utilizado o pacote “demography” de onde retirou-se o banco de dados usados para o cálculo, a saber, dados de mortalidade das mulheres dos EUA compreendidos entre 1950 e 2007. Inicialmente foi extraído os dados das idades de interesse, de 65 a 85 anos.

Então, aplicou-se o modelo de Lee-Carter para prever as taxas de mortalidade futuras. Sendo necessário a projeção dos valores futuros de  $k_t$ . Afinal, os coeficientes  $a_x$  e  $b_x$  são presumivelmente fixos ao longo do tempo e variam apenas com a idade.

No modelo de Lee-Carter, a incerteza sobre as taxas de mortalidade futuras deriva da incerteza sobre os valores futuros de  $k_t$  pois isso depende das inovações  $\varepsilon_t$ . Portanto, para fins de precificação, são essas inovações que precisam ser neutralizadas pelo risco. Como explicado anteriormente, em um ambiente Normal, isso pode ser alcançado mudando as inovações.

Assim, em vez de se usar uma variação aleatória com distribuição  $N(0, \sigma^2)$  para o nível de mortalidade, usa-se uma perturbação de Wang desta distribuição  $N(-\lambda\sigma, \sigma^2)$ . Uma vez que os derivativos que estão sendo considerados estão vinculados as probabilidades de sobrevivência, transformamos os valores simulados dos níveis de mortalidade  $k_t$  em taxas de mortalidade previstas usando a seguinte equação:

$$m_{x,t} = e^{a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}}$$

a partir da qual as probabilidades de sobrevivência simuladas podem ser obtidas:

$$s_{x,t} = 1 - m_{x,t}$$

Com os valores simulados sob a distribuição de risco neutro, pode-se precificar qualquer um dos derivativos de risco de longevidade mencionados acima.

Tem-se que, no caso de contratos a termo e de swap, o valor do prêmio depende apenas da média dessa distribuição.

Embora existam vários métodos para o cálculo, as técnicas de simulação são um dos métodos mais flexíveis. O uso de simulações é bem conhecido em finanças e remonta pelo menos a Boyle (1977). A técnica parte da intuição de que os valores esperados podem ser estimados por meio de amostragem e isso torna o método imediatamente aplicável quando o objetivo é precificar *forwards* e *swaps*. Afinal, o preço do *forward* ou *swap* está intimamente relacionado ao valor esperado do ativo subjacente (a taxa de sobrevivência no nosso caso).

Assim, considera-se o contrato com uma determinada probabilidade de sobrevivência  $s_{x,t}^r$ , amadurecendo no tempo  $T$ . Com base em uma amostra de  $N$  simulações da probabilidade de sobrevivência adequadamente com risco neutralizado, o preço pode ser aproximado por:

$$p^N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E[e^{-\tau T} \max(s_{x,t}^e - s_{x,t}^r(n), 0)]$$

Onde  $s_{x,t}^r(n)$  é o valor da probabilidade ao longo do número do caminho  $n$

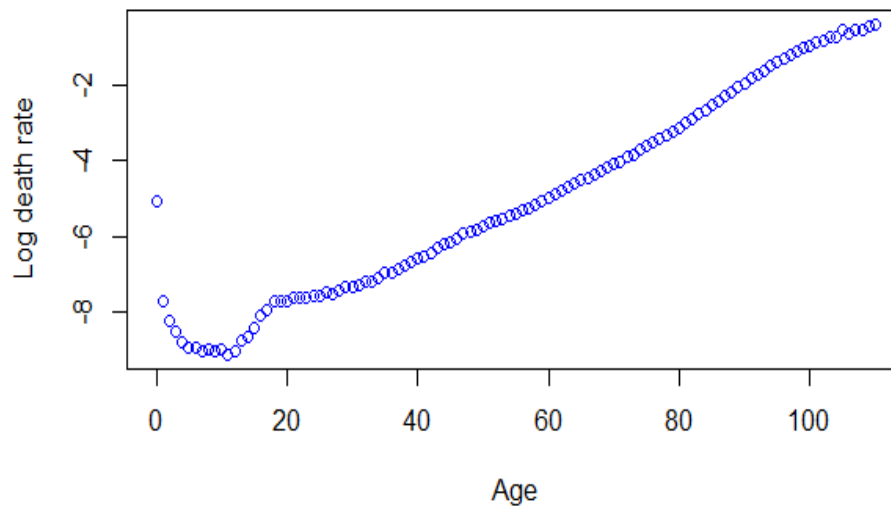
## 6 RESULTADOS

Esta seção será dividida nos seguintes tópicos para facilidade nas análises:

### 6.1 Perfil do Banco de Dados

Os dados utilizados foram os das mulheres, com idade 65 a 85 anos, dos EUA e se referem aos anos 1950 a 2007. Após breve análise do banco chega-se as seguintes métricas

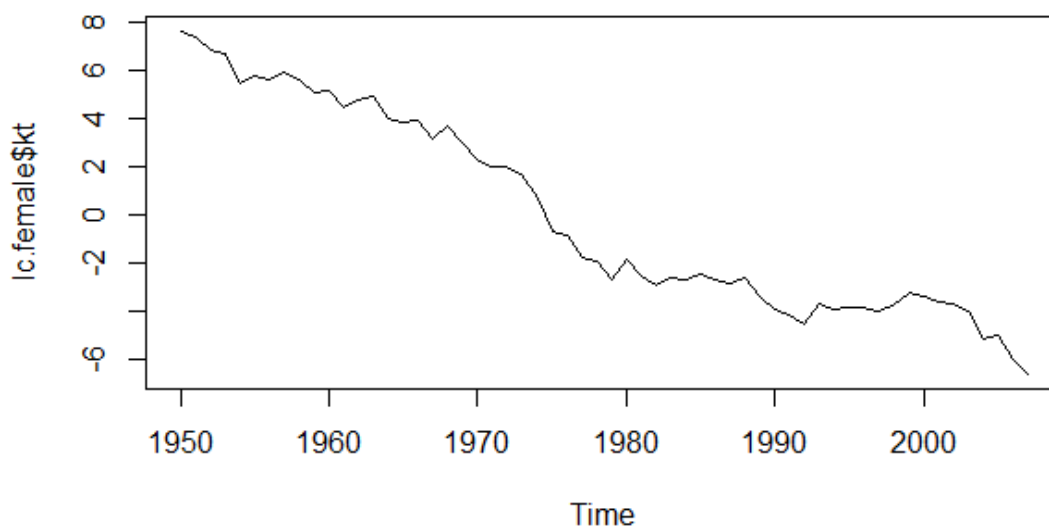
Gráfico 1 – Taxa de Mortalidade de Mulheres, EUA 2007



Fonte: Elaborado a partir do pacote *Demography* no R-Studio

Também é possível perceber o comportamento do  $k_t$  na série histórica:

Gráfico 2 – Comportamento do  $k_t$  ao longo da série histórica



Fonte: Elaborado a partir do pacote *Demography* no R-Studio

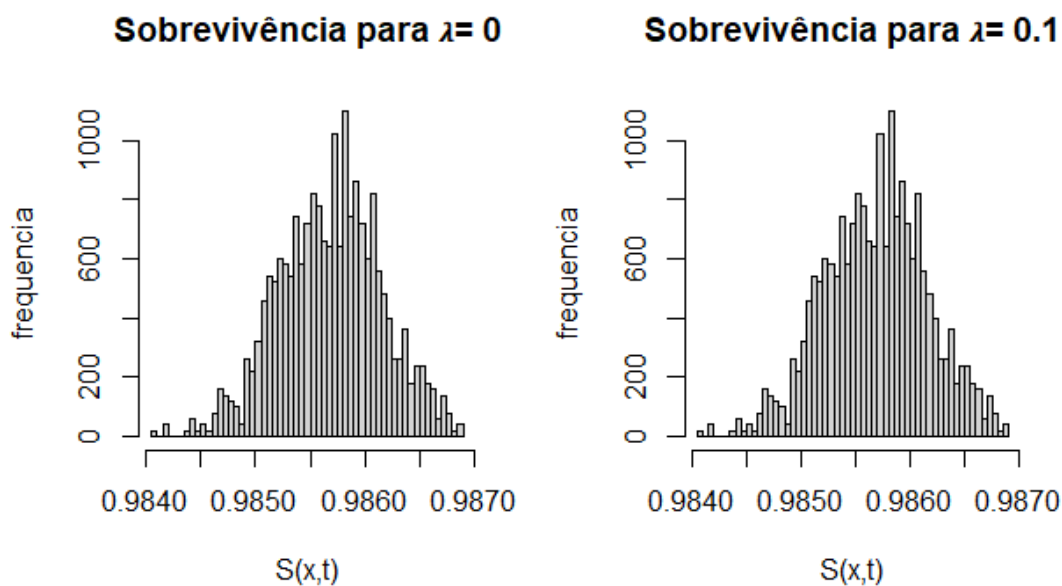
A série temporal resultante é mostrada no Gráfico 2. Que mostra claramente um padrão de tendência de queda, indicando que as taxas de mortalidade geral têm diminuído. Observa-se, porém, que esta diminuição não é determinística e em vez disso evolui aleatoriamente ao longo do tempo.

## 6.2 Distribuições Simuladas do Nível de Mortalidade $k_t$

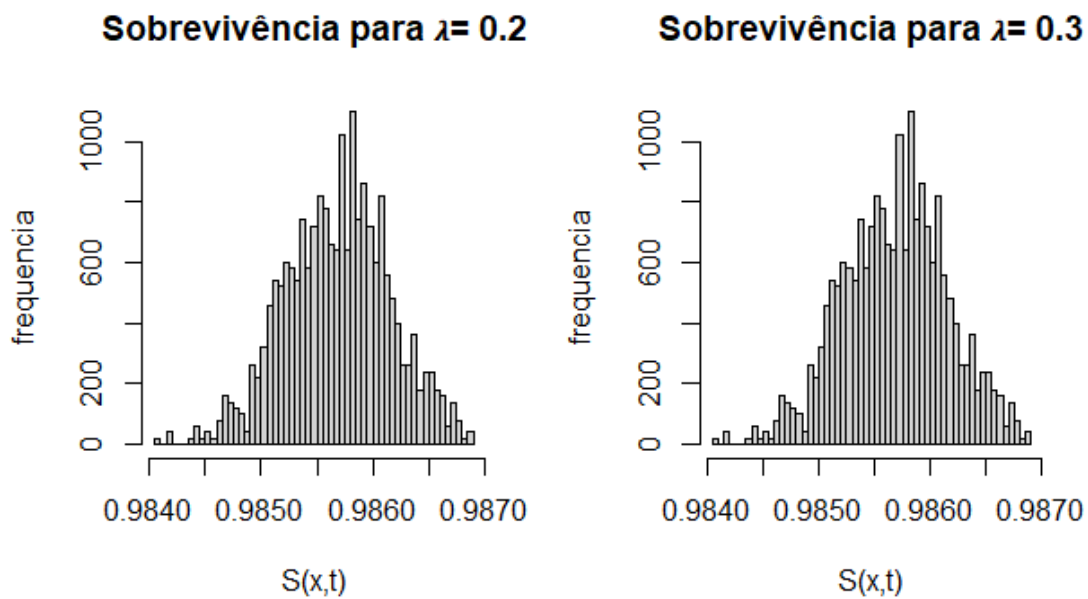
As simulações consistiram em mil trajetórias para os valores de  $k_t$ , que foram gerados recursivamente, um para cada ano da projeção, onde cada  $k_t$  é gerado com base nos parâmetros estimados e variação com distribuição normal. Na Figura abaixo, vê-se os histogramas das probabilidades de sobrevivência para os níveis de mortalidade projetados de 5 anos à frente para a coorte 65-85 para vários valores da perturbação de Wang para a variação aleatória do nível de mortalidade correspondente a  $\lambda$  entre 0,0 e 0,3.

Os valores das probabilidades de sobrevivência simuladas são baseados nos valores específicos de  $a_x$  e  $b_x$  da coorte de interesse e nas estimativas da dinâmica para o nível de mortalidade na Tabela 2. A figura mostra uma leve mudança a direita à medida que o valor da perturbação aumenta.

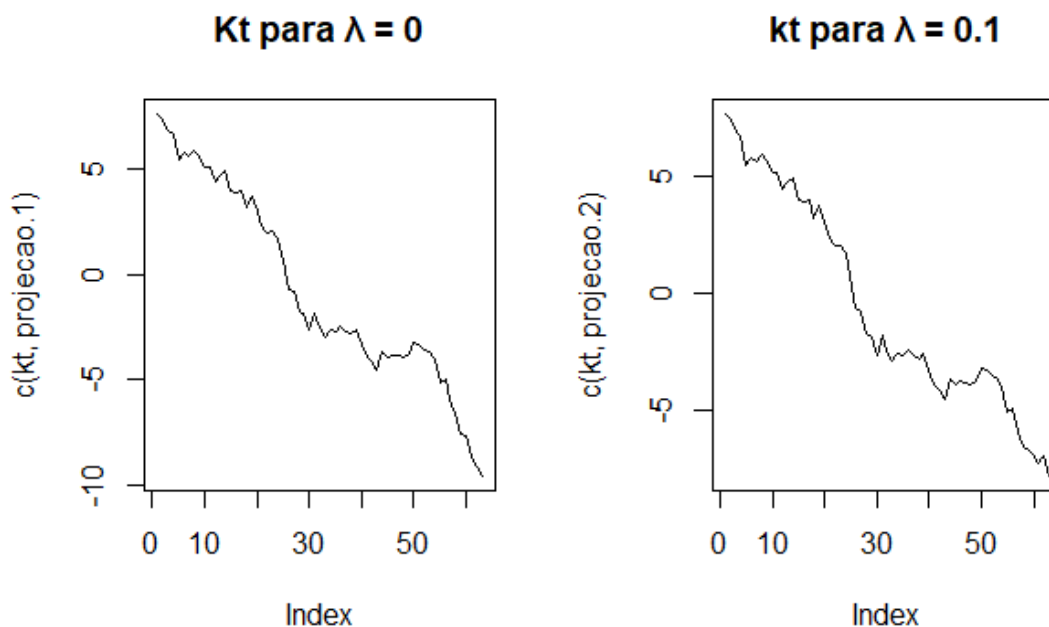
Figura 1 – Sobrevivência para  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 0,1$



Fonte: Elaborado a partir do pacote *Demography* no R-Studio

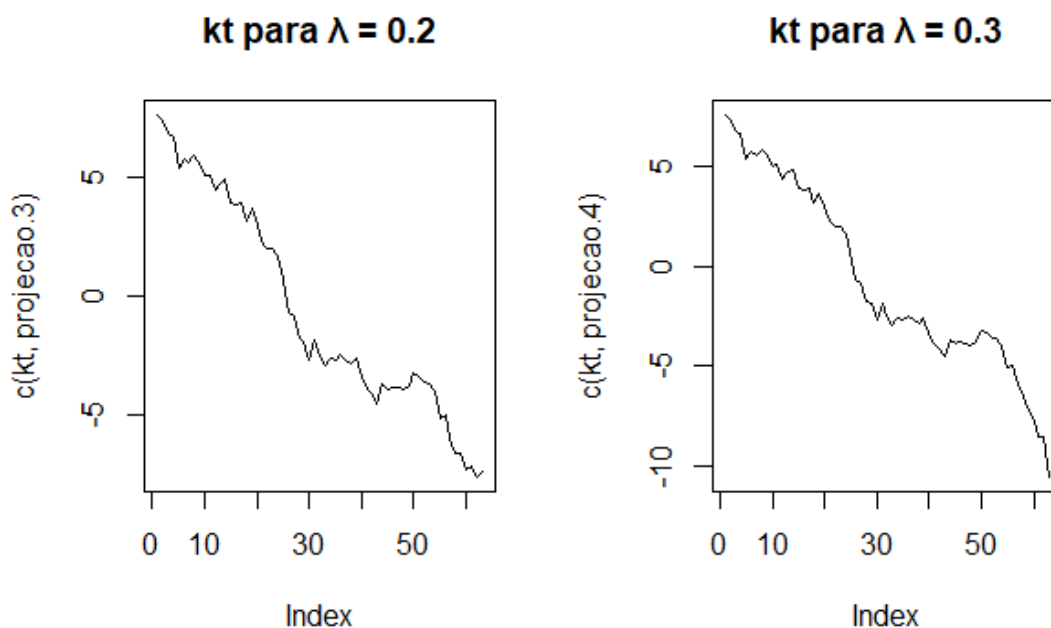
Figura 2 – Sobrevivência para  $\lambda = 0,2$  e  $\lambda = 0,3$ 

Fonte: Elaborado a partir do pacote *Demography* no R-Studio

Figura 3 –  $-k_t$  para  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 0,1$ 

Fonte: Elaborado a partir do pacote *Demography* no R-Studio

Figura 4 –  $-k_t$  para  $\lambda = 0,2$  e  $\lambda = 0,3$



Fonte: Elaborado a partir do pacote *Demography* no R-Studio

Nas figuras acima percebe-se que os valores de  $k_t$  vão ficando menores a medida de  $\lambda$  mostrando que a distribuição de risco neutro aumenta em algum nível da taxa de mortalidade de uma dada coorte.

## 7 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi estudar uma das opções existentes no mercado de capitais para mitigar o risco de longevidade. Aliada ao conceito de distribuições de risco neutro esta técnica pode ser uma grande aliada na mitigação em um dos riscos mais onerosos a uma EFPC.

A partir da simulação da experiência da mortalidade das mulheres dos EUA, foram observados, após 1000 (mil) simulações, alguns resultados para a diferença entre mortalidade normal e com distribuição de risco neutro.

Veja-se que após os cálculos obteve-se os seguintes valores para *putt option* e *call option*, respectivamente 0.0001323992 e 5.348531e-07.

## 8 BIBLIOGRAFIA

Ambegaokar, V.; Troyer, M. **Estimating errors reliably in Monte Carlo simulations of the Ehrenfest model**. Am. J. Phys., Vol. 78, nº. 2, February 2010

BOYER, M.M.; STENTOFT, L. **If we can simulate it, we can insure it: An application to longevity risk management**. Insurance: Mathematics and Economics 52 (2013) 35–45.

BRASIL. **Resolução MPS/CGPC nº 16 de 22 de Novembro de 2005**. Normatiza os planos de benefícios de carácter previdenciário nas modalidades de benefício definido, contribuição definida e contribuição variável, e dá outras providências.

BRASIL. **Emenda Constitucional nº 20 de 15 de dezembro de 1998**. Modifica o sistema de previdência social, estabelece normas de transição e dá outras providências.

BRASIL. **Lei Complementar nº 108 de 29 de maio de 2001**. Dispõe sobre a relação entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, suas autarquias, fundações, sociedades de economia mista e outras entidades públicas e suas respectivas entidades fechadas de previdência complementar, e dá outras providências.

BRASIL. **Lei Complementar nº 109 de 29 de maio de 2001**. Dispõe sobre o Regime de Previdência Complementar e dá outras providências.

DENG, Y.; BROCKETT, P. L.; **Longevity/Mortality Risk Modeling and Securities Pricing**. The Journal of Risk and Insurance, 2012, Vol. 79, No. 3, 697-721.

DICKSON, D. C. M., HARDY, M. R., & WATERS, H. R. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. (International Series on Actuarial Science). Cambridge University Press, 2009.

GAILLE, S.A.; PENAS, M.C.; OLIVARES, H.G. **Longevity Risk in Notional Defined Contribution Pension Schemes: A Solution**. The Geneva Papers, 2016, 41, (24–52).

GAJEK, L.; OSTASZEWSKI, K.M. **Financial Risk Management for Pension Plans**. Elsevier, 2004.

LABUSCHAGNE, C.C.A., OFFWOOD, T.M., 2010. **A note on the connection between the Esscher–Girsanov transform and the Wang transform**. Insurance: Mathematics and Economics 47, 385–390.

OECD (2011), **Pensions at a Glance 2011: Retirement-income Systems in OECD and G20 Countries**, OECD Publishing.

PIKETTY, T; tradução de Mônica Baumgarten de Bolle. Um Estado Social para o Século XXI. In:\_\_\_\_. **O Capital no Século XXI**. 1ª Ed. – Rio de Janeiro:Intrínseca, 2014, cap. 13, p.459-479.

RODRIGUES, J. A. **Gestão de previdência com estudos atuariais**. 2002. Dissertação (Mestrado em Economia Empresarial) – Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro.

RODRIGUES, J. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.

SILVA, Fabiana Lopes da. **Impacto do risco de longevidade em planos de previdência complementar**. Tese de Doutorado apresentada à Universidade de São Paulo, 2010.

ROSS, Sheldon. **Probabilidade: Um Curso Moderno com Aplicações**. 8<sup>a</sup> ed. 2010.

SPEDICATO, G. A.; CLEMENTE, G.P. **Mortality projection with demography and Lifecontingencies packages.** [https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/vignettes/mortality\\_projection.pdf](https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/vignettes/mortality_projection.pdf)

WANG, S.S., 2000. **A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks.** The Journal of Risk and Insurance 67 (1), 15–36.

Wang, S.. (2007). **Normalized Exponential Tilting: Pricing and Measuring Multivariate Risks.** North American Actuarial Journal. 11. 89-99.