

Bioestatística F

Variável Aleatória Normal Faixas de Referência

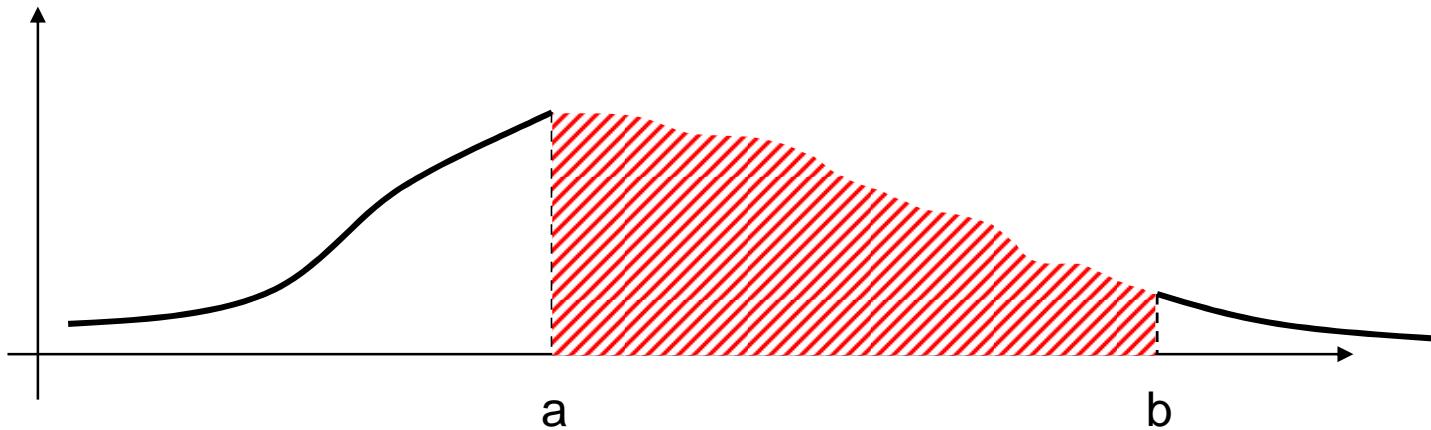
Enrico A. Colosimo
Dept. Estatística – UFMG
<http://www.est.ufmg.br/~enricoc/>

Variáveis Aleatórias Contínuas

- A probabilidade, no caso contínuo é caracterizada a partir de uma função positiva denominada densidade de probabilidade
“A densidade não é uma probabilidade, mas uma função matemática”
- Definição: $f(x)$ é uma função contínua de probabilidade ou função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X , se:
 - $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \{-\infty; +\infty\}$
 - A área definida por $f(x)$ é igual a 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
 - O cálculo de probabilidade é definido como:

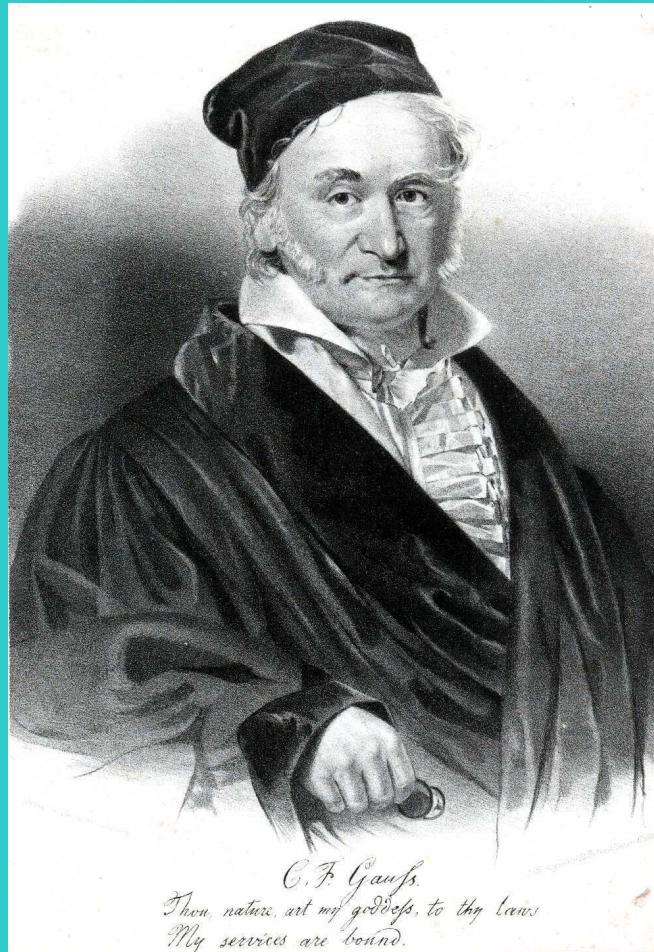
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{onde } a < b.$$

Cálculo de Probabilidade



- A probabilidade é definida como a área entre os pontos a e b .

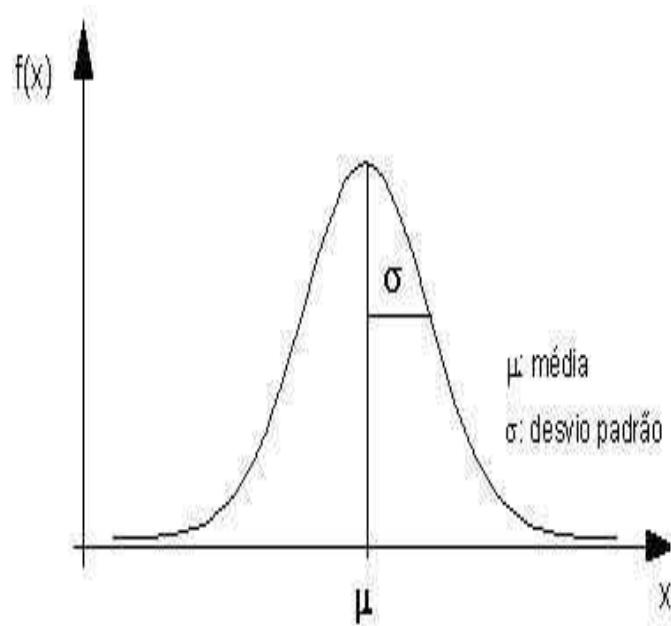
Modelo Normal ou Curva de Gauss



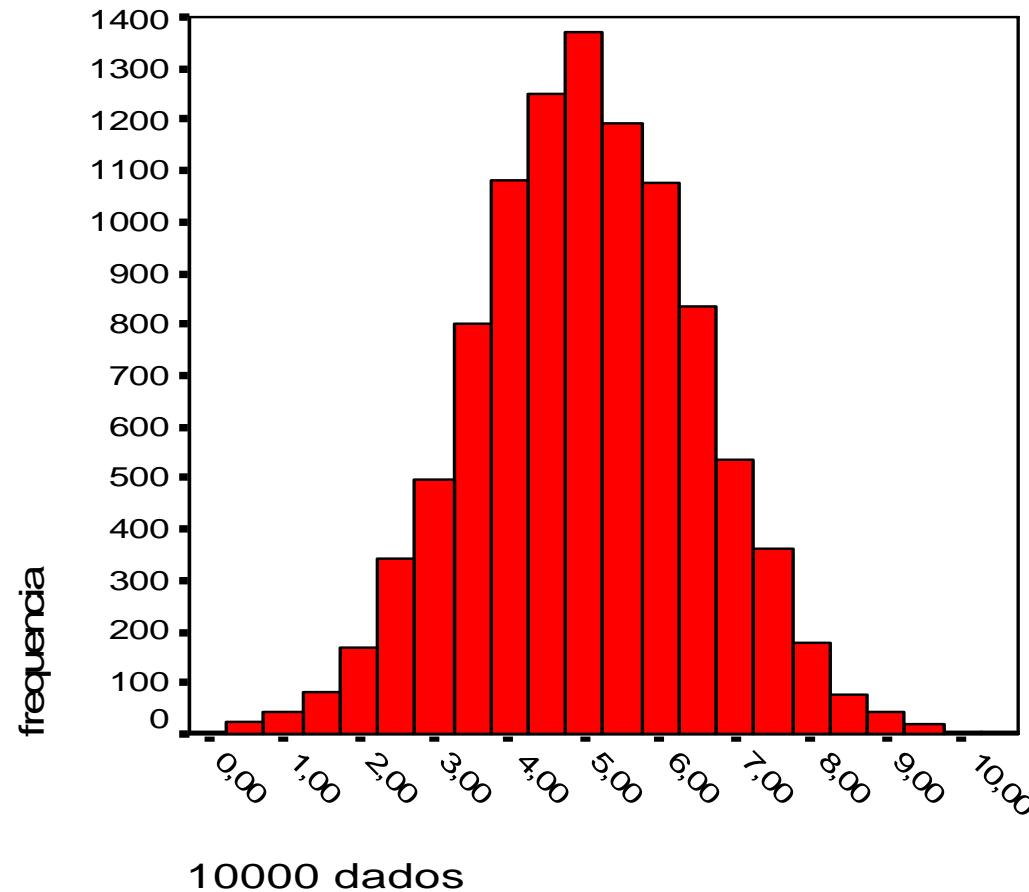
K.F. Gauss (Alemanha, 1777-1855)

Distribuição normal ou curva de Gauss

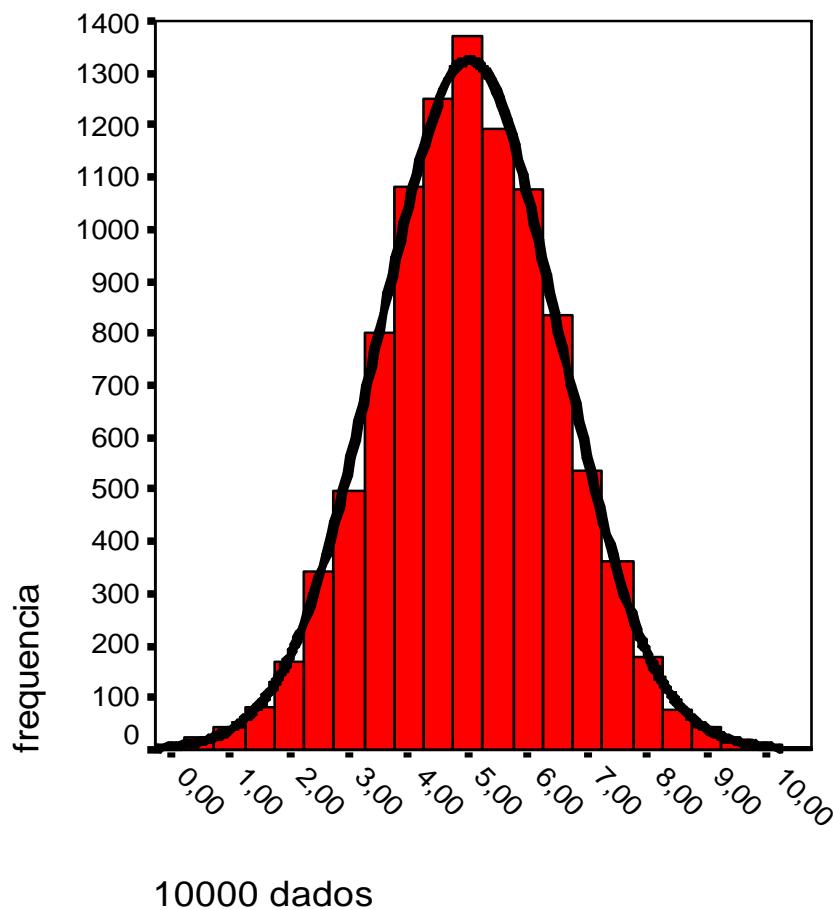
- Definida por dois parâmetros: a média e o desvio padrão
- Simétrica em torno da média
- Largura, ou amplitude, da curva determinada pelo desvio padrão



Histograma



Histograma suavizado

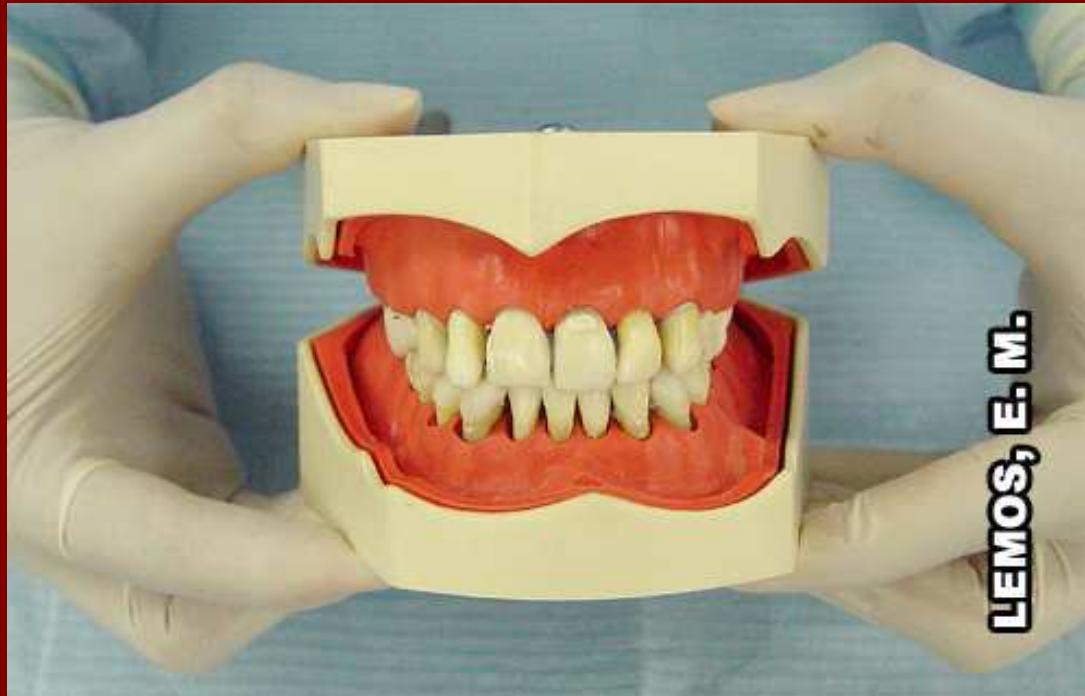


- A área sob a curva é igual à soma das áreas dos retângulos do histograma.
- Isto é, a área sob a curva compreende 100% dos dados.

Exemplos

- Estatura de adultos
- Peso de nascimento
- Comprimento da raiz do dente
- Perímetrocefálico
- Distância
- Tempo de efeito de um anestésico tópico
- Segundo sexo
- Segundo sexo
- Segundo raça
- Segundo princípio ativo

Modelo



L'EMOS, E. M.

Função matemática que gera a distribuição Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Modelo

- Flexível → Possibilita adaptações.
- Mínimo → Economia de parâmetros:
- Simétrico em torno da origem → Facilidade de leitura e de interpretação.

Distribuição normal ou curva de Gauss

- Definida por dois parâmetros:
A média e o desvio padrão.
- É simétrica em torno da média,
seu ponto central.
- Largura (amplitude) da curva
determinada pelo desvio
padrão.

Felizmente,



- Existe uma
tabela pronta
para ser
consultada.

Distribuição Normal Z (0, 1) , padrão ou reduzida

Variável Normal Padronizada

- Seja uma variável aleatória X normal, com média μ e desvio padrão σ .

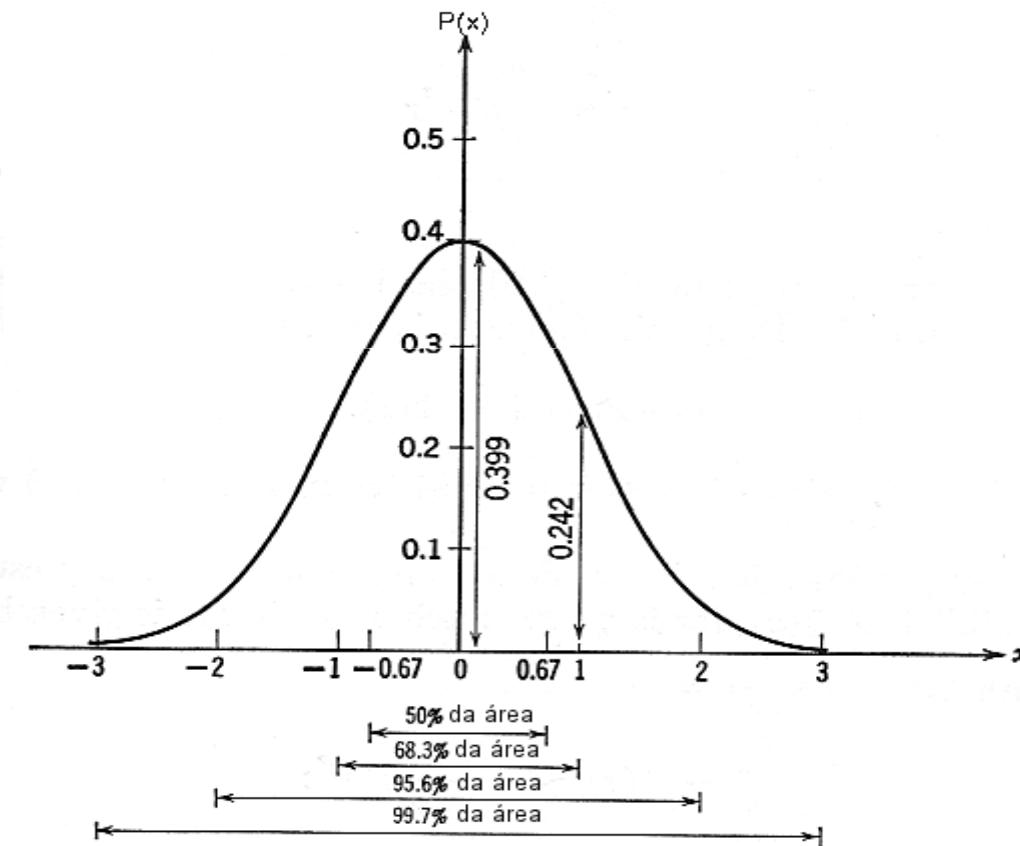
$$\frac{X - \mu}{\sigma} = Z \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$$

- A **Transformação Inversa** é:

$$X = Z \cdot \sigma + \mu$$

O comportamento de um grande conjunto de variáveis reais pode ser modelado por uma variável aleatória Normal.

Variável contínua com média e desvio-padrão



Função de Distribuição Normal

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441

Leitura da tabela

- 1^a. Coluna – inteiro e a primeira decimal.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
L.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
L.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
L.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
L.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
L.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319

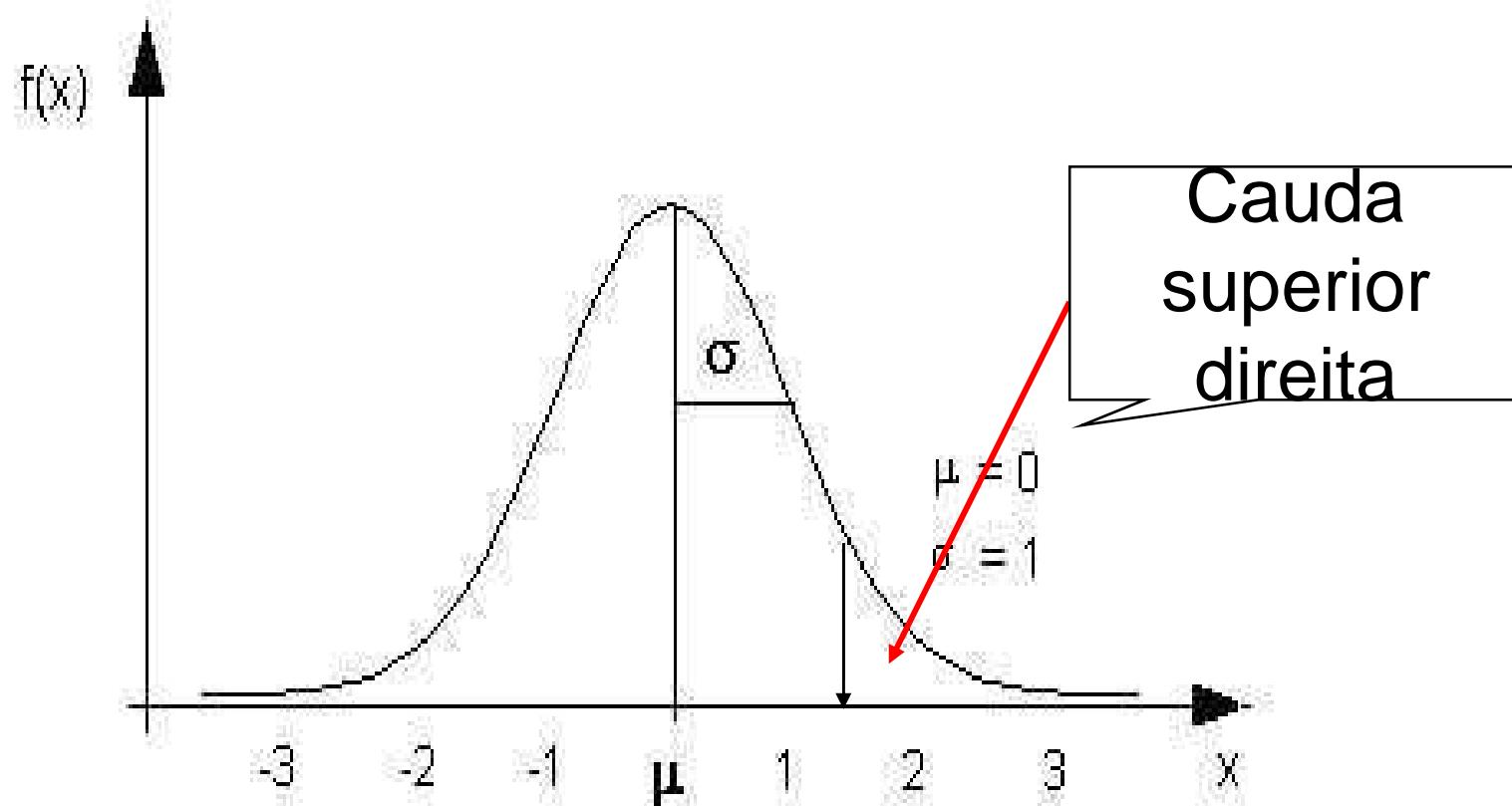


Leitura da tabela

- Cabeçalho das colunas – segunda decimal

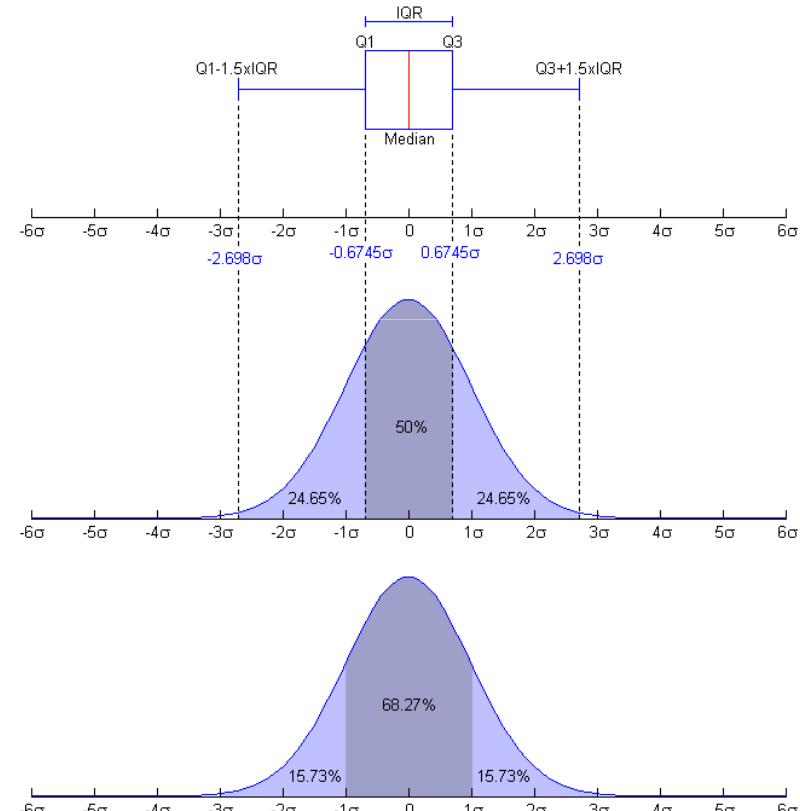
x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
L.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
L.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
L.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
L.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
L.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319

Corpo da tabela – probabilidade da cauda superior direita



Distribuição Normal

- Regularidade
- Distribuição simétrica em torno da média
- Distâncias medidas em desvios padrão.
- Acima da média
 \leftrightarrow Valores positivos
- Acima da média
 \leftrightarrow Valores negativos



Distribuição normal ou curva de Gauss

- Por se tratar de um modelo, permite também a avaliação do que se distancia ou se desvia deste modelo.

Aplicações do modelo de **Distribuição normal**

- - Determinação de faixas de valores de referência de medidas contínuas (*reference ranges*)

Aplicações do modelo de **Distribuição normal**

- - Definição de grupos e sub-grupos em escalas padronizadas

Aplicações do modelo de **Distribuição normal**

- - Distribuição amostral de médias – Teorema Central do Limite.
- - Modelo teórico para determinação de tamanhos de amostras

Exercício

- X: pressão sanguínea diastólica
- Distribuição Normal
- Média $\mu = 77$ mmHg
- Desvio padrão $\sigma = 11,6$ mm Hg

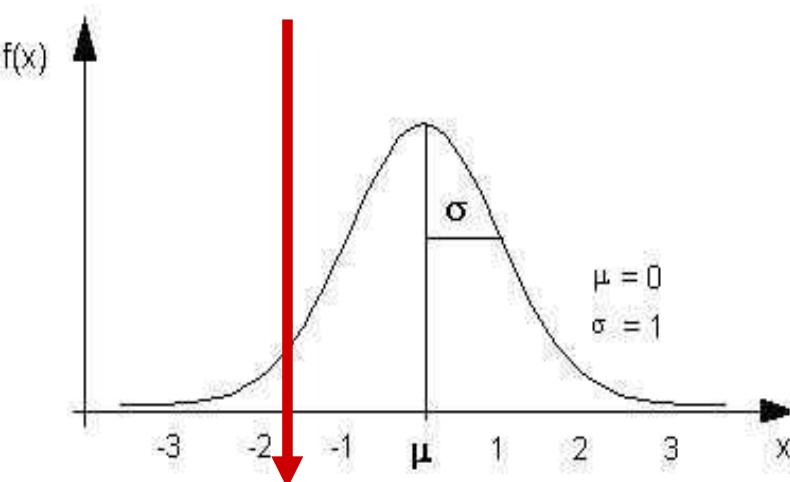
Exercício a) Probabilidade da pressão ser inferior a 60 mmHg

Temos que:

$$\diamond 60 - 77 = -17$$

$$\diamond -17 / 11,6 = -1,46$$

- Então,
- $\Pr(Z < -1,46) = 0,0721$



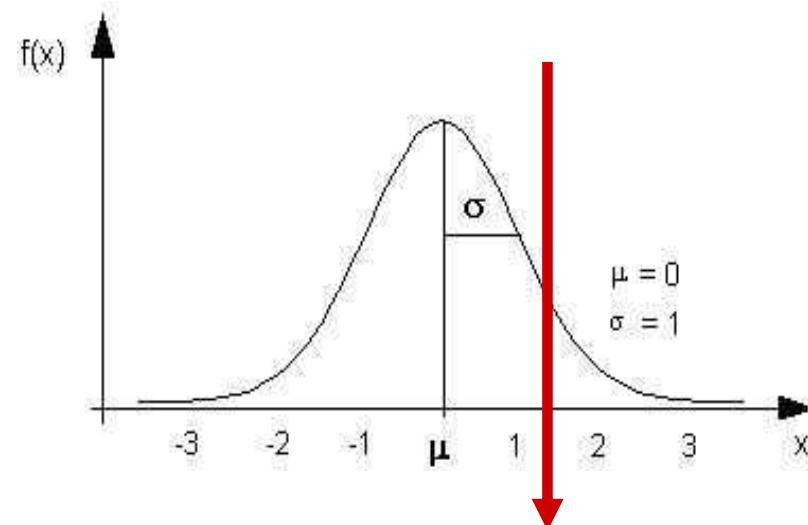
Exercício 18 b)

Temos que:

$$\diamond 90 - 77 = 13$$

$$\diamond 13 / 11,6 = 1,12$$

- Então,
- $\Pr(Z > 1,12) = 0,1314$

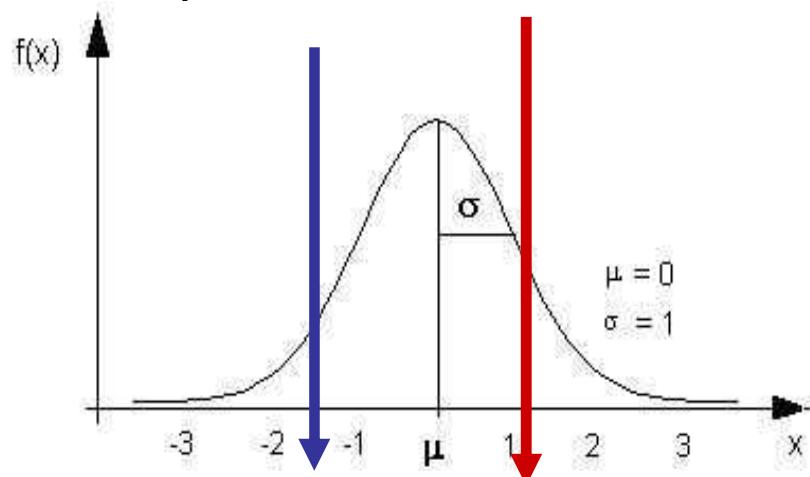


Exercício 18 c)

Temos que:

- ❖ $\Pr(Z < 90) = 0,8686$
- ❖ $\Pr(Z < 60) = 0,0721$

- Então,
- $\Pr(60 < X < 90) =$
- $0,8686 - 0,0721 =$
- $0,7965$





E, por hoje, é só.

Bioestatística F

Variável Aleatória Normal Faixas de Referência

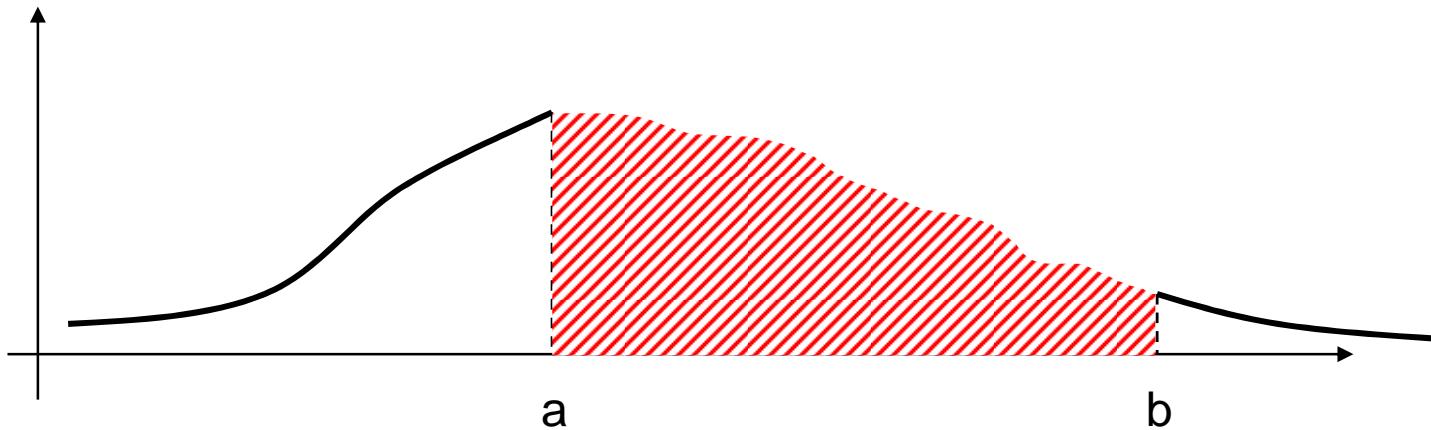
Enrico A. Colosimo
Dept. Estatística – UFMG
<http://www.est.ufmg.br/~enricoc/>

Variáveis Aleatórias Contínuas

- A probabilidade, no caso contínuo é caracterizada a partir de uma função positiva denominada densidade de probabilidade
“A densidade não é uma probabilidade, mas uma função matemática”
- Definição: $f(x)$ é uma função contínua de probabilidade ou função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X , se:
 - $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \{-\infty; +\infty\}$
 - A área definida por $f(x)$ é igual a 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
 - O cálculo de probabilidade é definido como:

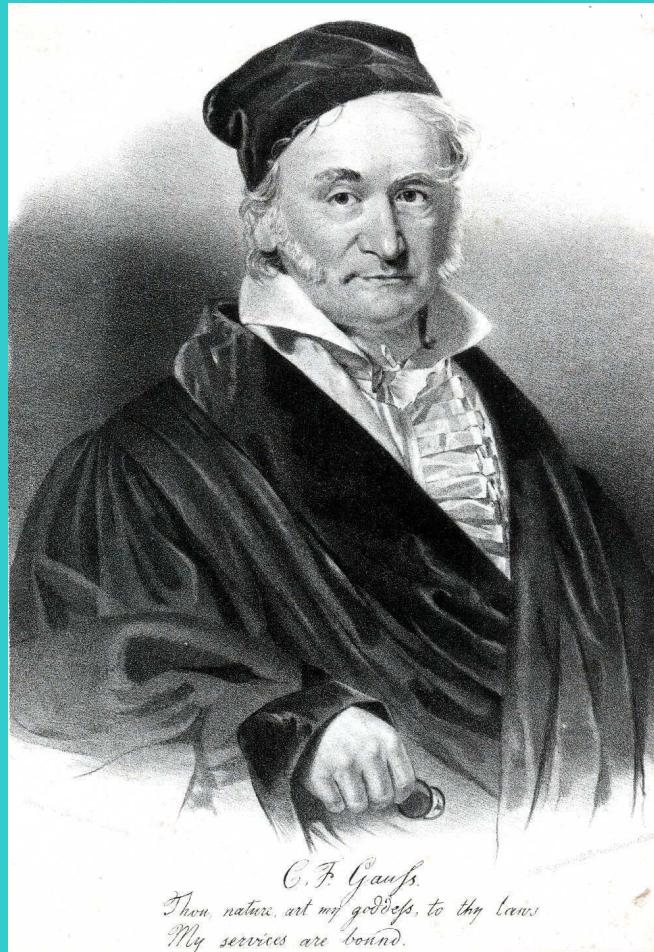
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{onde } a < b.$$

Cálculo de Probabilidade



- A probabilidade é definida como a área entre os pontos a e b .

Modelo Normal ou Curva de Gauss



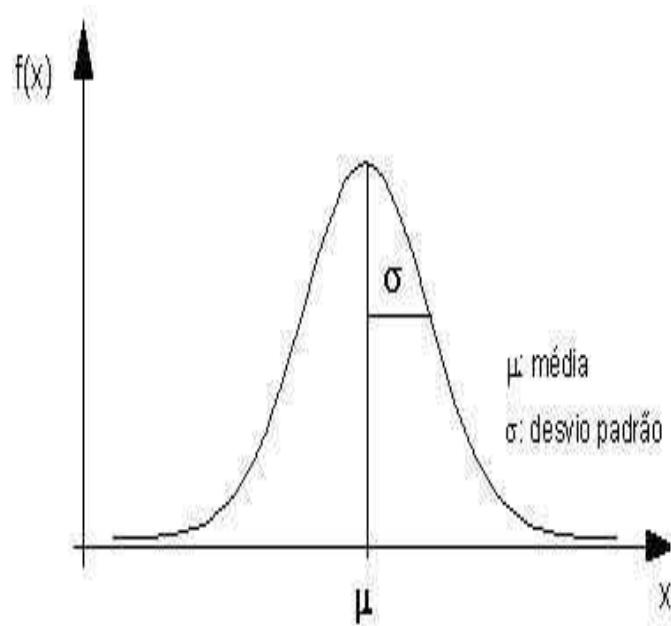
C. F. Gauss.

Thou, nature, art my goddes, to thy laws
My services are bound.

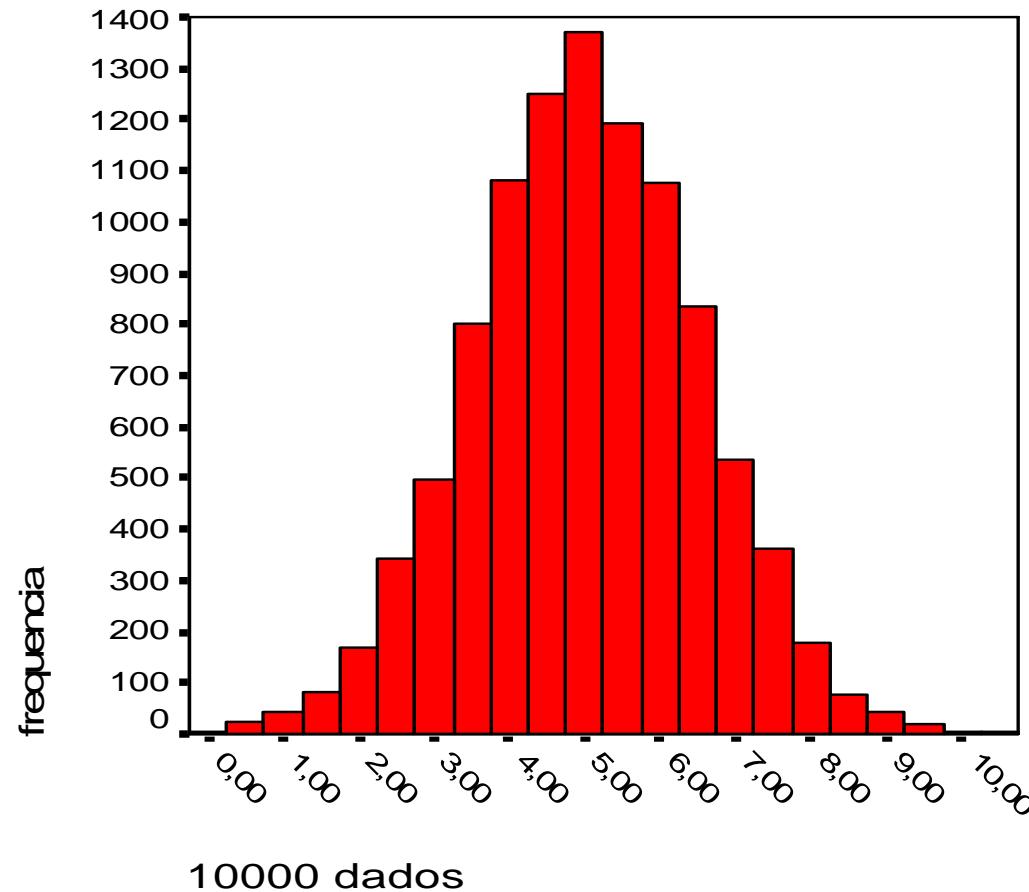
K.F. Gauss (Alemanha, 1777-1855)

Distribuição normal ou curva de Gauss

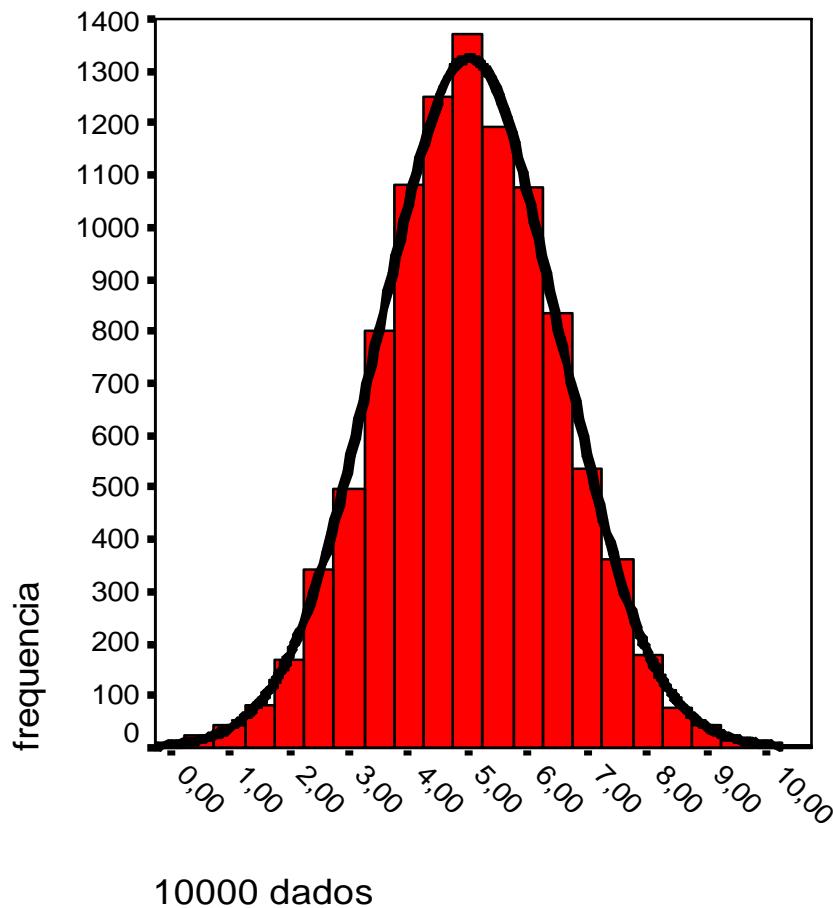
- Definida por dois parâmetros: a média e o desvio padrão
- Simétrica em torno da média
- Largura, ou amplitude, da curva determinada pelo desvio padrão



Histograma



Histograma suavizado

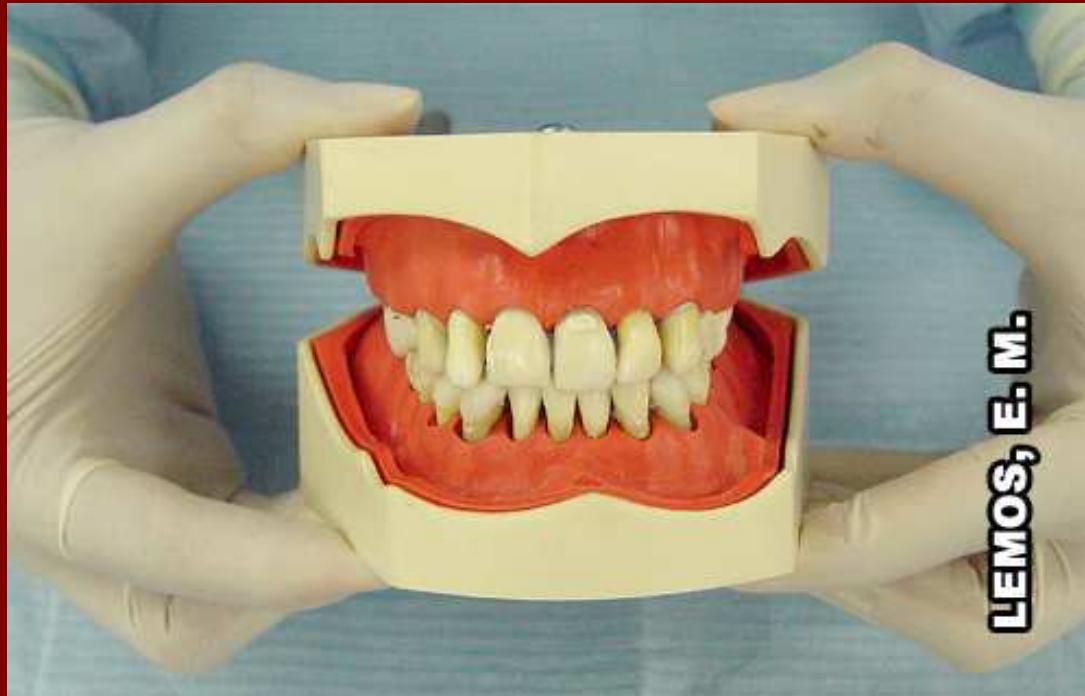


- A área sob a curva é igual à soma das áreas dos retângulos do histograma.
- Isto é, a área sob a curva compreende 100% dos dados.

Exemplos

- Estatura de adultos
- Peso de nascimento
- Comprimento da raiz do dente
- Perímetrocefálico
- Distância
- Tempo de efeito de um anestésico tópico
- Segundo sexo
- Segundo sexo
- Segundo raça
- Segundo princípio ativo

Modelo



L'EMOS, E. M.

Função matemática que gera a distribuição Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Modelo

- Flexível → Possibilita adaptações.
- Mínimo → Economia de parâmetros:
- Simétrico em torno da origem → Facilidade de leitura e de interpretação.

Distribuição normal ou curva de Gauss

- Definida por dois parâmetros:
A média e o desvio padrão.
- É simétrica em torno da média,
seu ponto central.
- Largura (amplitude) da curva
determinada pelo desvio
padrão.

Felizmente,



- Existe uma
tabela pronta
para ser
consultada.

Distribuição Normal Z (0, 1) , padrão ou reduzida

Variável Normal Padronizada

- Seja uma variável aleatória X normal, com média μ e desvio padrão σ .

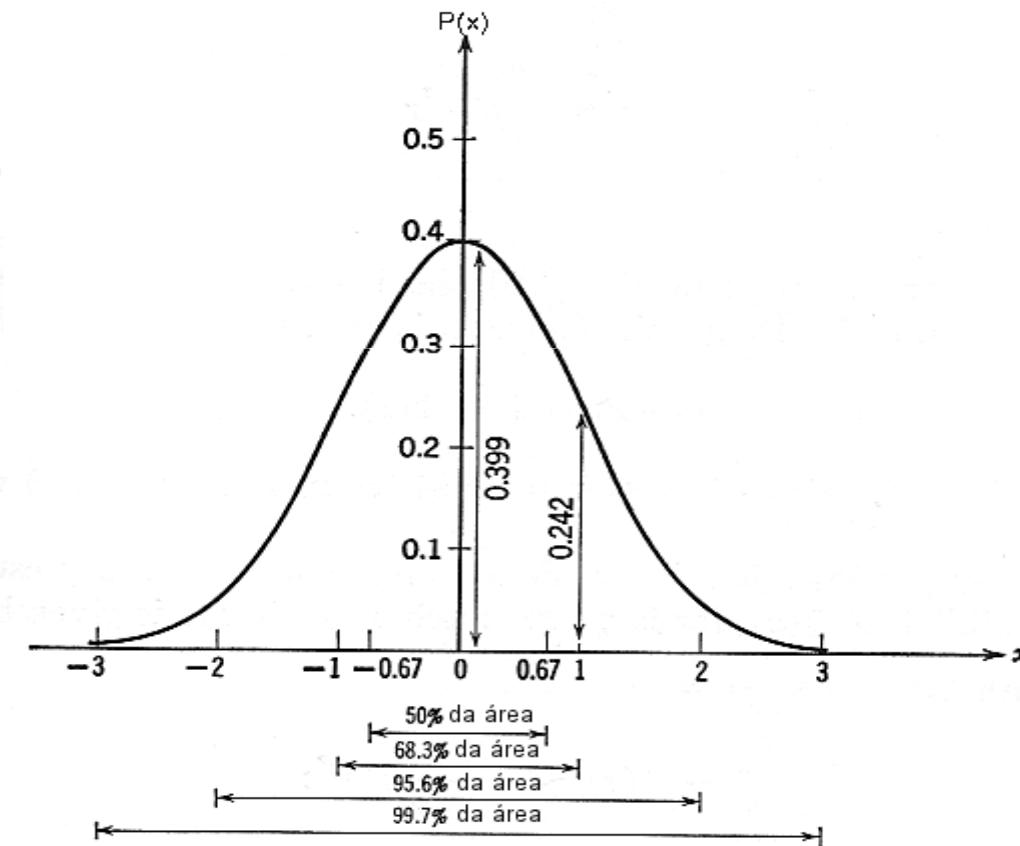
$$\frac{X - \mu}{\sigma} = Z \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$$

- A **Transformação Inversa** é:

$$X = Z \cdot \sigma + \mu$$

O comportamento de um grande conjunto de variáveis reais pode ser modelado por uma variável aleatória Normal.

Variável contínua com média e desvio-padrão



Função de Distribuição Normal

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441

Leitura da tabela

- 1^a. Coluna – inteiro e a primeira decimal.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
L.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
L.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
L.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
L.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
L.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319

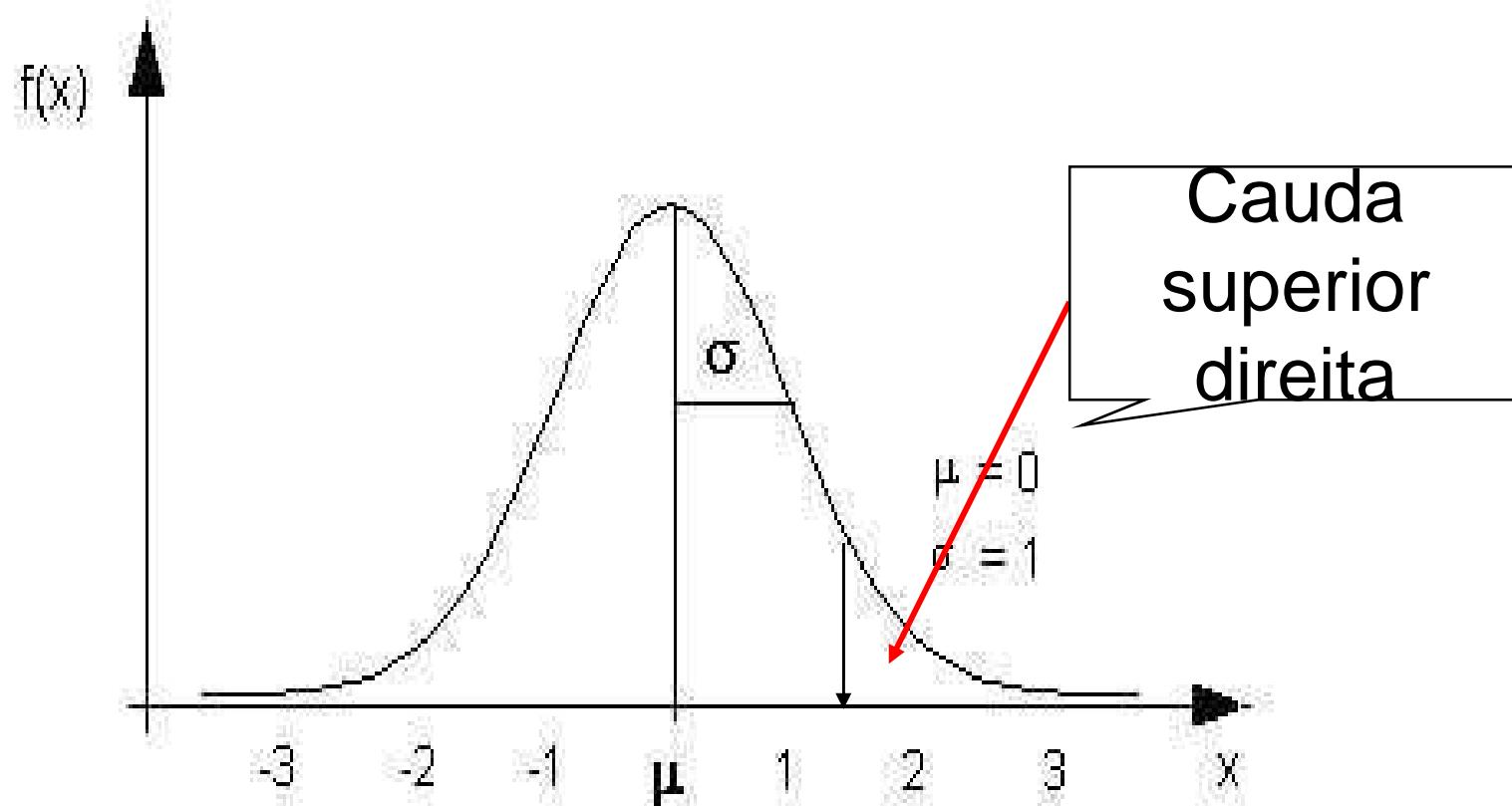


Leitura da tabela

- Cabeçalho das colunas – segunda decimal

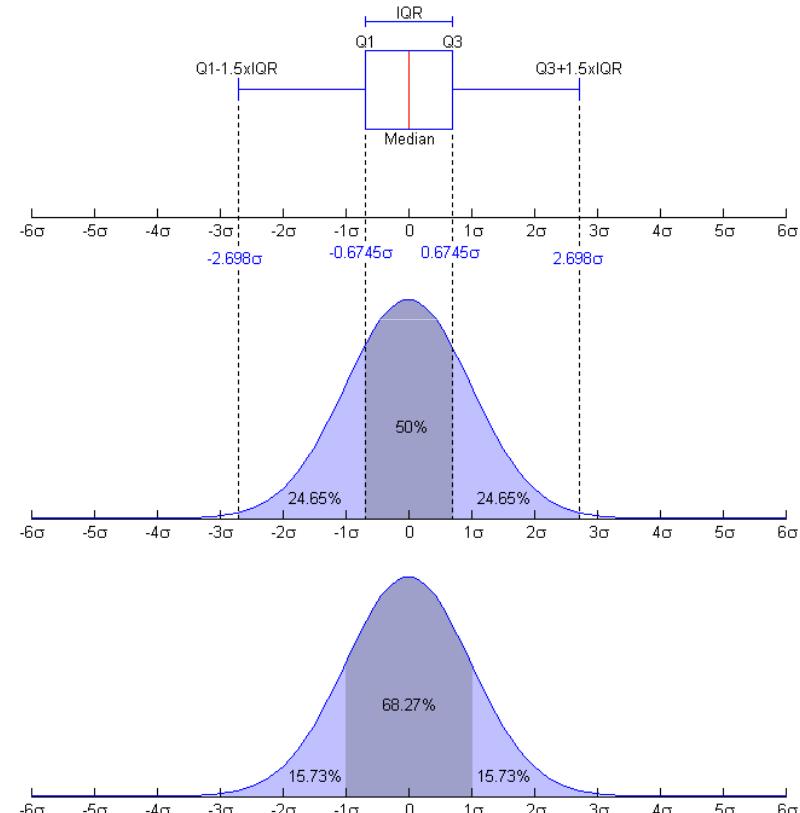
x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
L.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
L.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
L.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
L.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
L.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319

Corpo da tabela – probabilidade da cauda superior direita



Distribuição Normal

- Regularidade
- Distribuição simétrica em torno da média
- Distâncias medidas em desvios padrão.
- Acima da média
 \leftrightarrow Valores positivos
- Acima da média
 \leftrightarrow Valores negativos



Distribuição normal ou curva de Gauss

- Por se tratar de um modelo, permite também a avaliação do que se distancia ou se desvia deste modelo.

Aplicações do modelo de **Distribuição normal**

- - Determinação de faixas de valores de referência de medidas contínuas (*reference ranges*)

Aplicações do modelo de **Distribuição normal**

- - Definição de grupos e sub-grupos em escalas padronizadas

Aplicações do modelo de **Distribuição normal**

- - Distribuição amostral de médias – Teorema Central do Limite.
- - Modelo teórico para determinação de tamanhos de amostras

Exercício

- X: pressão sanguínea diastólica
- Distribuição Normal
- Média $\mu = 77$ mmHg
- Desvio padrão $\sigma = 11,6$ mm Hg

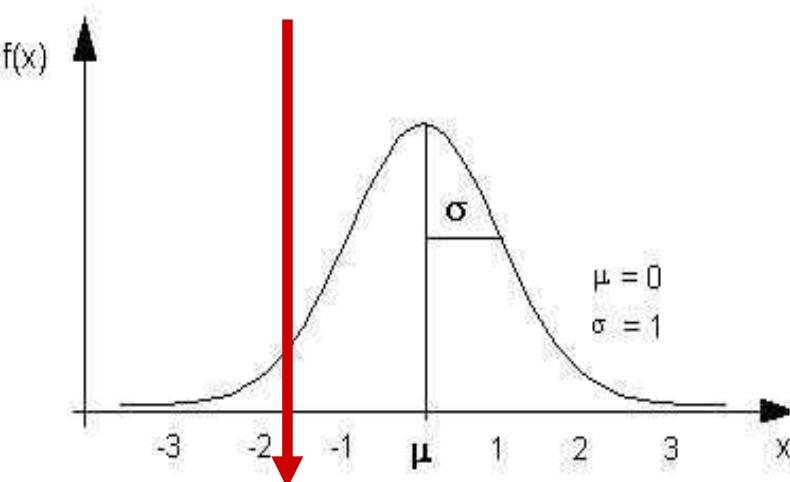
Exercício a) Probabilidade da pressão ser inferior a 60 mmHg

Temos que:

$$\diamond 60 - 77 = -17$$

$$\diamond -17 / 11,6 = -1,46$$

- Então,
- $\Pr(Z < -1,46) = 0,0721$



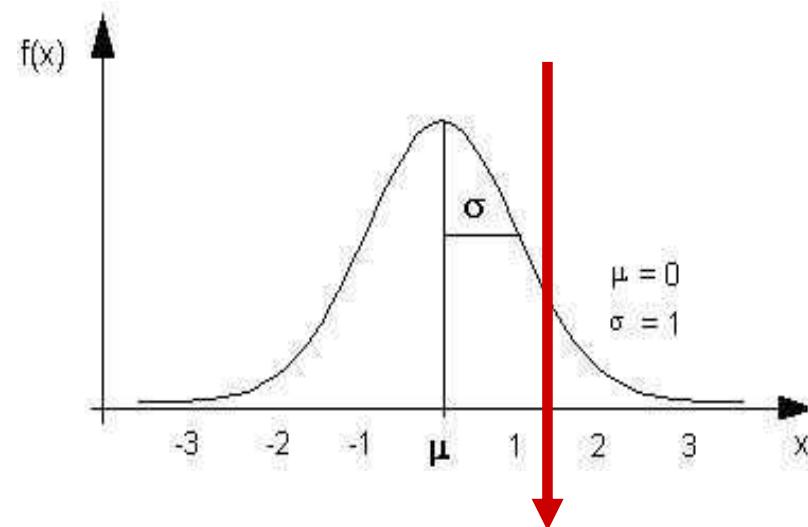
Exercício 18 b)

Temos que:

$$\diamond 90 - 77 = 13$$

$$\diamond 13 / 11,6 = 1,12$$

- Então,
- $\Pr(Z > 1,12) = 0,1314$

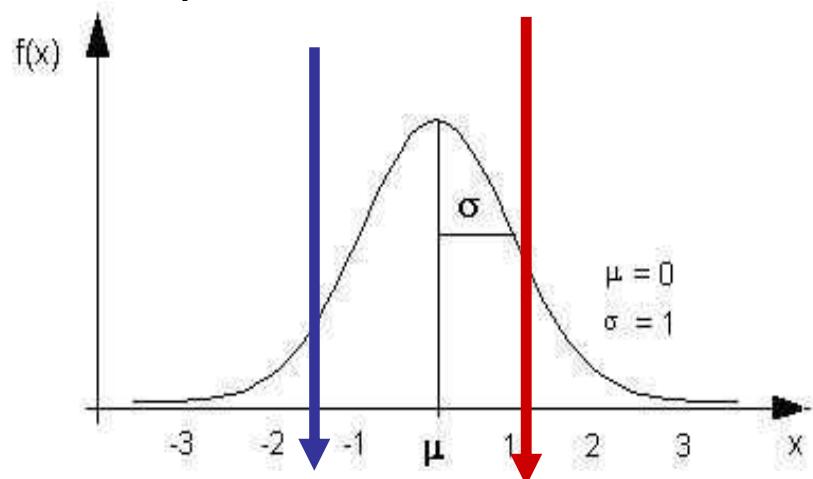


Exercício 18 c)

Temos que:

- ❖ $\Pr(Z < 90) = 0,8686$
- ❖ $\Pr(Z < 60) = 0,0721$

- Então,
- $\Pr(60 < X < 90) =$
- $0,8686 - 0,0721 =$
- $0,7965$





E, por hoje, é só.