

*Universidade Federal de Minas Gerais*

*Instituto de Ciências Exatas (ICEEx)*

*Departamento de Estatística*

# **Teste de tendência para mais de um sistema reparável**

---

*Gabriel Vinícius Araújo Fonseca*

*Novembro de 2007*

## 1. Introdução

Um importante assunto a ser abordado em processos os quais possuem mais de um sistema reparável é a tendência dos tempos entre falhas. Uma empresa busca as melhores políticas de manutenção através de análises gráficas e testes estatísticos. Este último aparece com dois importantes testes: os combinados e os de base-TTT (Tempo Total sobre Teste).

Existem na literatura para um único sistema, dois nomes para testes de tendência em manutenção, sendo eles os de Laplace e de Military Handbook, cada um com suas propriedades. Com isso, Kvalfy e Lindqvist (1998) generalizam ambos os testes para mais de um sistema reparável. Apresentaremos também um teste para os parâmetros de forma, supondo sistemas idênticos e a estimativa dos parâmetros de escala para sistemas não idênticos, ambos para processos de lei de potência, encontrados em Rigdon e Basu (2000).

Para demonstrar a aplicabilidade dos testes, iremos exemplificar com um conjunto de dados retirado do livro de Rigdon e Basu (2000), onde se tem válvulas de 41 motores a diesel. Outro exemplo é de uma fábrica de cimento, a qual buscava informação sobre o desempenho de um programa de manutenção preventiva, retirado do trabalho entre Colosimo e Pontel (2005).

## 2. Metodologia

### 2.1. Notação

Primeiramente suponha que temos um processo com  $k$  sistemas ( $k > 1$ ) independentes. Para cada sistema  $i$ , são observados  $n_i$  falhas durante o intervalo de tempo  $(a_i, b_i]$ , em muitos casos, são considerados como  $[0, T_i]$ . Assim temos os tempos de falhas  $t_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $j = 1, 2, \dots, n_i$ . O número total de falhas do processo é dado por  $N = \sum_{i=1}^k n_i$ . Assumimos que  $n_i$  é aleatório quando os tempos de falha são truncados por tempo e assumimos que os  $b_i$ 's são aleatórios e  $n_i$  fixo, quando os tempos de falha são truncados por falha.

Se para um dado processo todos os tempos entre falhas  $t_{ij} - t_{i,j-1}$ , não são igualmente distribuídos, dizemos que existe tendência nesse sistema. Se o número esperado de tempos entre falhas tem um aumento ou diminuição monotônico ao passar do tempo, correspondem respectivamente a melhora e deterioração do sistema.

### 2.2. Processo de Poisson Não Homogêneo

Seja  $N(t)$  o número de falhas ocorridas em um processo no intervalo de tempo  $[0, t]$ . A contagem do processo  $\{N(t), t \geq 0\}$  é chamado de um Processo de Poisson Não Homogêneo (PPNH), com função de intensidade  $\lambda(t)$ , se (1)  $N(0) = 0$ , (2) o número de falhas nos intervalos disjuntos, são estocasticamente independentes, (3)  $P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$  com  $\Delta t \rightarrow 0$ , e (4)  $P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$  com  $\Delta t \rightarrow 0$ .

No modelo PPNH assumimos que temos reparos mínimos. Nós consideramos duas diferentes parametrizações para  $\lambda(t)$ , a Lei de Potência:

$$\lambda(t) = \beta t^{\beta-1}/\alpha^\beta, \quad \alpha, \beta > 0, \quad t \geq 0$$

E a log-linear:

$$\lambda(t) = \alpha e^{\beta t}, \quad \alpha > 0, -\infty < \beta < \infty, \quad t \geq 0.$$

Em ambas as funções de intensidade,  $\alpha$  é chamado de parâmetro de escala e  $\beta$  o parâmetro de forma. Quando a função de intensidade é constante (sem tendência), temos um Processo de Poisson Homogêneo (PPH).

### 2.3. Teste de igualdade dos parâmetros de forma do processo de lei de potência

Nessa seção apresentaremos o teste para os parâmetros de forma de  $k$  sistemas reparáveis, onde a hipótese nula seria:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k$$

contra a alternativa de que pelo menos dois dos  $k$  parâmetros sejam diferentes. Para um  $k > 2$ , usa-se uma aproximação pela distribuição qui-quadrado, mas para  $k = 2$ , temos a distribuição exata, neste caso a de Fisher.

O teste para a situação de  $k$  sistemas, é o da razão de verossimilhança, dado por:

$$LR = M \log \beta^* - \sum_{i=1}^k m_i \log \tilde{\beta}_i,$$

onde o  $\tilde{\beta}_i$  é o estimador de máxima verossimilhança (EMV) condicional para o  $i$ -ésimo sistema dado por:

$$\tilde{\beta}_i = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^{n_i} \log(T_j/t_{ij})}.$$

Já  $\beta^*$  é a média harmônica ponderada dos  $\tilde{\beta}_i$ 's dada por:

$$\beta^* = \frac{\frac{M}{\sum_{i=1}^k \frac{m_i}{\tilde{\beta}_i}}}{\sum_{i=1}^k \frac{m_i}{\tilde{\beta}_i}},$$

onde  $m_i = n_i$  se os tempos são truncados pelo tempo e  $m_i = n_i - 1$  se são truncados por falha e  $M = \sum_{i=1}^k m_i$ .

Usando a aproximação de Bartlett (1937), nós teremos que:

$$-\frac{2 \times LR}{a} \sim \chi^2_{(k-1)},$$

onde

$$a = 1 + \frac{1}{6(k+1)} \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i} - \frac{1}{M} \right).$$

Assim rejeitamos  $H_0$  quando  $-2 \times LR/a > \chi^2_\alpha(k-1)$ , com o tamanho do teste aproximadamente igual a  $\alpha$ .

### 2.4. Estimação dos parâmetros de escala para sistemas não idênticos

Se as cópias de um sistema são consideradas diferentes, com diferentes  $\beta$ 's e  $\alpha$ 's, então uma análise separada para cada sistema deve ser feita. Às vezes, assumimos que todos os sistemas possuem o mesmo parâmetro de forma, mas com parâmetros de escala diferentes,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Assim a função de verossimilhança, supondo o processo de lei de potência, é dada por:

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \beta) = \prod_{i=1}^k \left\{ \left[ \prod_{j=1}^{n_i} \frac{\beta}{\alpha_i} \left( \frac{t_{ij}}{\alpha_i} \right)^{\beta-1} \right] \exp \left[ - \left( T_i / \alpha_i \right)^\beta \right] \right\}.$$

Tomando-se o logaritmo natural e derivando com relação aos parâmetros de interesse, temos os seguintes estimadores de máxima verossimilhança para  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\beta$ :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{T_i}{n_i^{1/\beta}}$$

$$\hat{\beta} = \frac{N}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log(T_i/t_{ij})}$$

Perceba que para a estimação dos  $\alpha_i$ 's, devemos substituir  $\beta$  por  $\hat{\beta}$ . O EMV condicional de  $\beta$  é dado por:

$$\tilde{\beta} = \frac{M}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log(T_i/t_{ij})'}$$

sendo  $M = \sum_{i=1}^k m_i$ . O estimador  $\tilde{\beta}$  tem uma propriedade dada por  $2N\beta/\tilde{\beta} \sim \chi^2(2M)$ , onde resulta em um intervalo de confiança  $100 \times (1 - \alpha)\%$  dado por:

$$\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2M)\tilde{\beta}}{2M} < \beta < \frac{\chi^2_{\alpha/2}(2M)\tilde{\beta}}{2M}.$$

O interesse em encontrar diferentes valores para o parâmetro de escala é fazer um gráfico com as diferentes funções de intensidade e perceber quais os sistemas possuem melhor ou pior intensidade ao longo do tempo.

### 2.5. Transformação TTT para sistemas reparáveis

A transformação TTT (Tempo Total sobre Teste) para sistemas reparáveis foi introduzida por Barlow e Davis (1977). Seja  $S_r$  o r-ésimo tempo de falha no processo obtido pela sobreposição das observações de cada sistema. Assim temos  $0 < S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_N \leq S$ , onde  $S = \max_{i \in \{1, \dots, k\}} b_i$ . Seja  $p(u)$  o número de sistemas que estão em observação até o tempo u. Então  $\mathfrak{J}(t) = \int_0^t p(u)du$  é o tempo total sobre teste de 0 até o tempo t, e a escala estatística do tempo total sobre teste é:

$$\frac{\mathfrak{J}(S_r)}{\mathfrak{J}(S)} = \frac{\int_0^{S_r} p(u)du}{\int_0^S p(u)du}$$

### 2.6. Testes de tendência

As versões de teste de tendência mencionados na introdução, combinado e base-TTT, serão apresentadas a seguir. O teste estatístico para os testes combinados são uma combinação de testes estatísticos para sistemas simples, enquanto que os base-TTT usam a estatística de tempo total sobre teste. A hipótese nula para os testes combinados são dados da forma  $H_0$ :

PPHs com possibilidades de diferentes intensidades, enquanto que os testes de base-TTT tem a seguinte forma  $H_0$ : PPHs com intensidades idênticas. A hipótese alternativa é em geral “não  $H_0$ ”, mas o teste de Laplace é ótimo para a alternativa de um PPNH com função intensidade dada pela log-linear e o teste Military Handbook é ótimo para a alternativa com função intensidade dada por lei da potência.

### 2.6.1. Teste de Laplace

Seja  $m_i = n_i$  se o i-ésimo sistema for truncado pelo tempo e  $m_i = n_i - 1$  se o i-ésimo sistema for truncado pela falha. Então sob a hipótese nula de que temos PPHs com possibilidades de intensidades diferentes, a estatística seria:

$$L_C = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} t_{ij} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} m_i (b_i + a_i)}{\sqrt{\frac{1}{12} \sum_{i=1}^k m_i (b_i - a_i)^2}},$$

chamado de teste combinado de Laplace que é aproximadamente uma distribuição normal padrão.

Seja  $Q = N$  se o processo for truncado por tempo e  $Q = N - 1$  se o processo for truncado por falha. Então se assumimos que todas as funções de intensidades são idênticas e PPHs teremos a seguinte estatística:

$$L_T = \frac{\sum_{r=1}^Q \frac{\Im(S_r)}{\Im(S)} - \frac{1}{2} Q}{\sqrt{\frac{1}{12} Q}},$$

chamado de teste base-TTT de Laplace que é aproximadamente uma distribuição normal padrão.

Os valores de  $L_C$  ou  $L_T$  indicam a direção da tendência. Se  $L_C$  ou  $L_T$  são negativos, isso indica que a tendência decresce e se são positivos a tendência cresce.

### 2.6.2. Teste de Military Handbook

A estatística de teste para o teste combinado de Military Handbook é:

$$M_C = 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \ln \left( \frac{b_i - a_i}{t_{ij} - a_i} \right),$$

com distribuição exata  $\chi_{2M}^2$ , onde  $M = \sum_{i=1}^k m_i$ , sobe a hipótese nula com PPHs para as possíveis diferentes intensidades.

Sobrassumirmos que as intensidades são PPHs idênticas, a estatística de teste seria:

$$M_T = 2 \sum_{r=1}^Q \ln \left( \frac{\Im(S)}{\Im(S_r)} \right),$$

com distribuição  $\chi_{2Q}^2$ , e chamamos esse teste de base-TTT de Military Handbook.

Se  $M_C$  ou  $M_T$  é grande, isso é indicativo de uma tendência decrescente, enquanto valores pequenos indicam um aumento de tendência.

### 3. Aplicação

#### 3.1. Válvulas de motores a diesel

Neste primeiro exemplo temos 41 motores a diesel que representará o nosso processo. Cada motor será um sistema e representará falha quando há a substituição de uma válvula do motor, o qual possui 16 válvulas cada um. Assim foram observados os tempos de falha de cada motor e foi assumido um processo de lei de potência com intensidades idênticas.

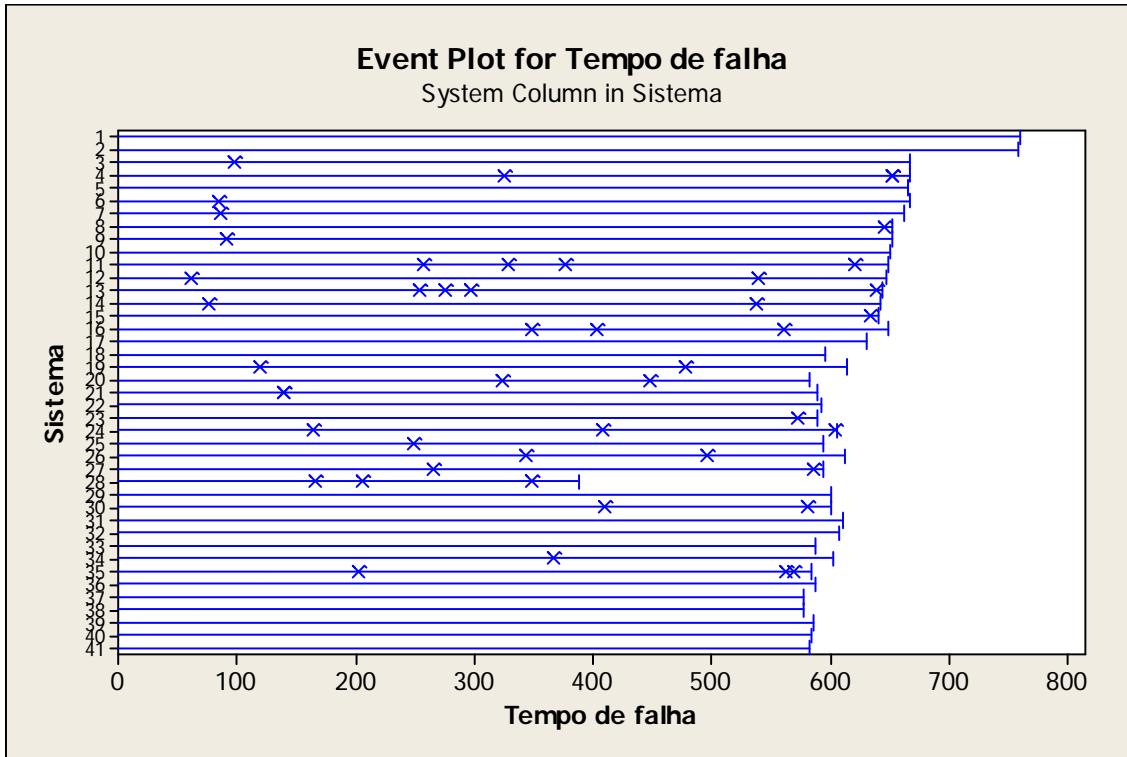


Figura 1. Gráfico dos tempos de falha dos motores a diesel.

Na figura 1 temos os tempos de falha para cada um dos motores e todos são truncados pelo tempo, o qual foi realizado a manutenção do mesmo. A estimativa para o parâmetro de forma foi de 1,41 com erro padrão de 0,201 e seu intervalo de confiança com 95% foi de [1,06; 1,86]. Como o valor 1 não está contido dentro do intervalo, dizemos que o processo é não homogêneo e que o processo está deteriorando. Para o parâmetro de escala, foi encontrado o valor de 377,28 com desvio padrão de 47,234 e intervalo com 95% de confiança igual a [295,19; 482,20]. Perceba que 24 dos 41 motores apresentaram falhas até a manutenção e são esses 24 motores que foram usados para os cálculos dos parâmetros de forma e escala.

O valor do teste da razão de verossimilhança, realizado para os parâmetros de forma, foi de 31,7 com um p-valor de 0,107 com 23 graus de liberdade, sendo favorável a hipótese nula. Assim dizemos que os 24 motores possuem os mesmos valores do parâmetro de forma. Nas figuras 2 e 3 temos os gráficos MCF e TTT os quais percebemos uma ligeira concavidade para cima, no caso da MCF e para baixa, no caso do TTT, demonstrando que o processo está se deteriorando. Isso é percebido pela tabela 1 onde temos os valores das estatísticas de Laplace e Military Handbook, pois ambas, seja combinado ou de base-TTT, rejeitam a hipótese nula e

nos dizem que há uma tendência no processo e que podemos ter os parâmetros de escala diferentes.

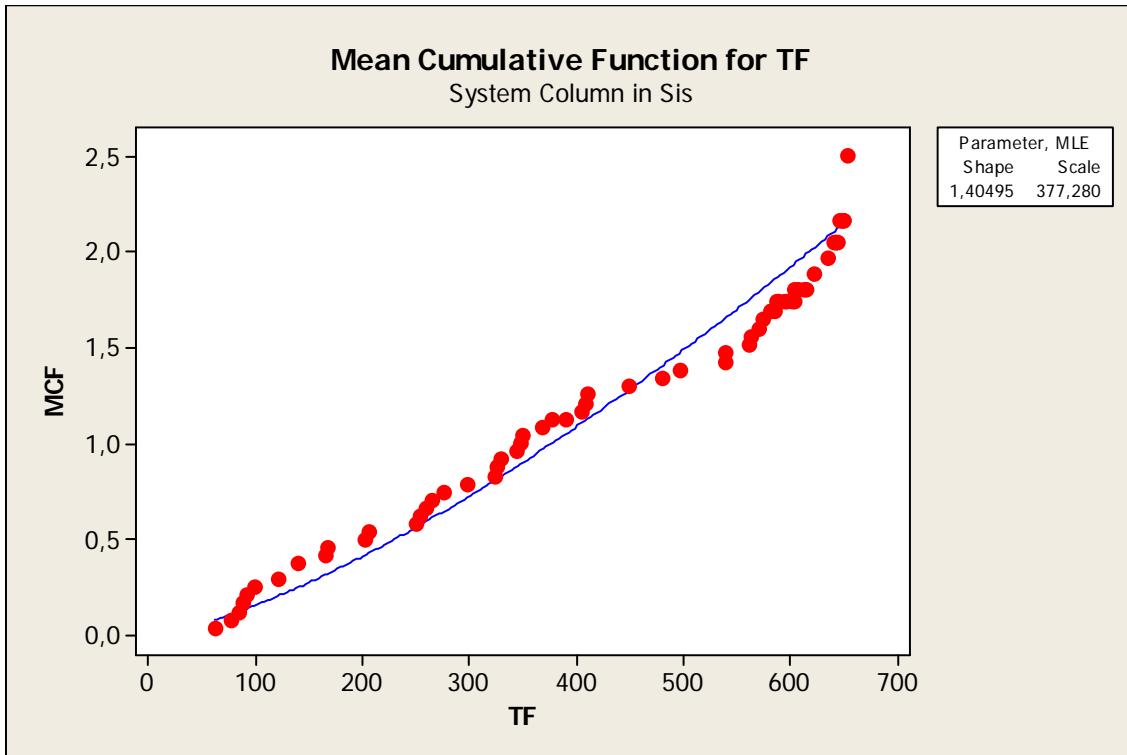


Figura 2. Gráfico para a função de média acumulativa (MCF).

Tabela 1. Tabela de testes de tendência (motores a diesel)

Teste	Valor da estatística	p-valor	Graus de Liberdade
$L_c$	2,38	0,017	-
$L_T$	2,05	0,040	-
$M_c$	66,15	0,017	96
$M_T$	68,51	0,031	96

Na figura 3 temos a função intensidade para os 24 motores com os parâmetros de escala diferentes para cada um e um único parâmetro de forma igual a 2.17, com intervalo de confiança de 95% igual a [1,77; 2.62]. O motor que apresentou a maior taxa foi a intensidade de número 21 que corresponde ao motor 28, como pode ser visto na figura 1 (falhou mais em menor tempo). Note também que esse é o único sistema que afasta mais dos demais sistemas.

Logo concluímos que o processo tem uma tendência leve e crescente, ou seja, o processo está deteriorando.

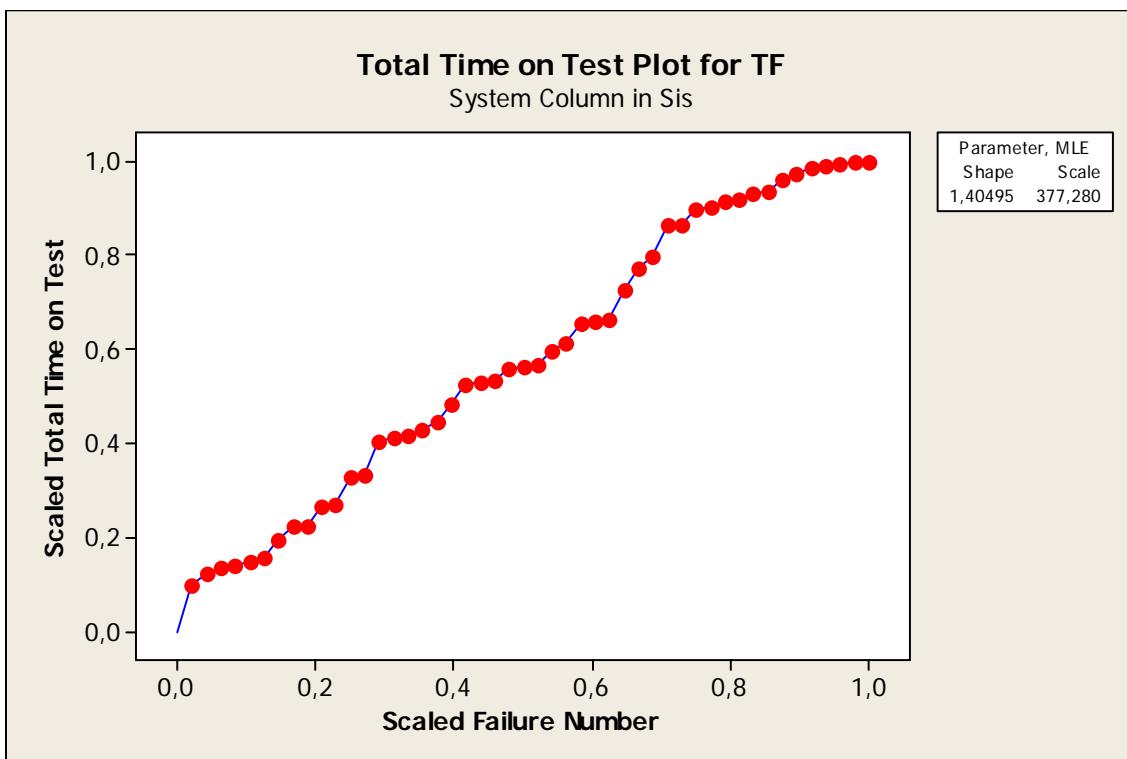


Figura 3. Gráfico TTT.

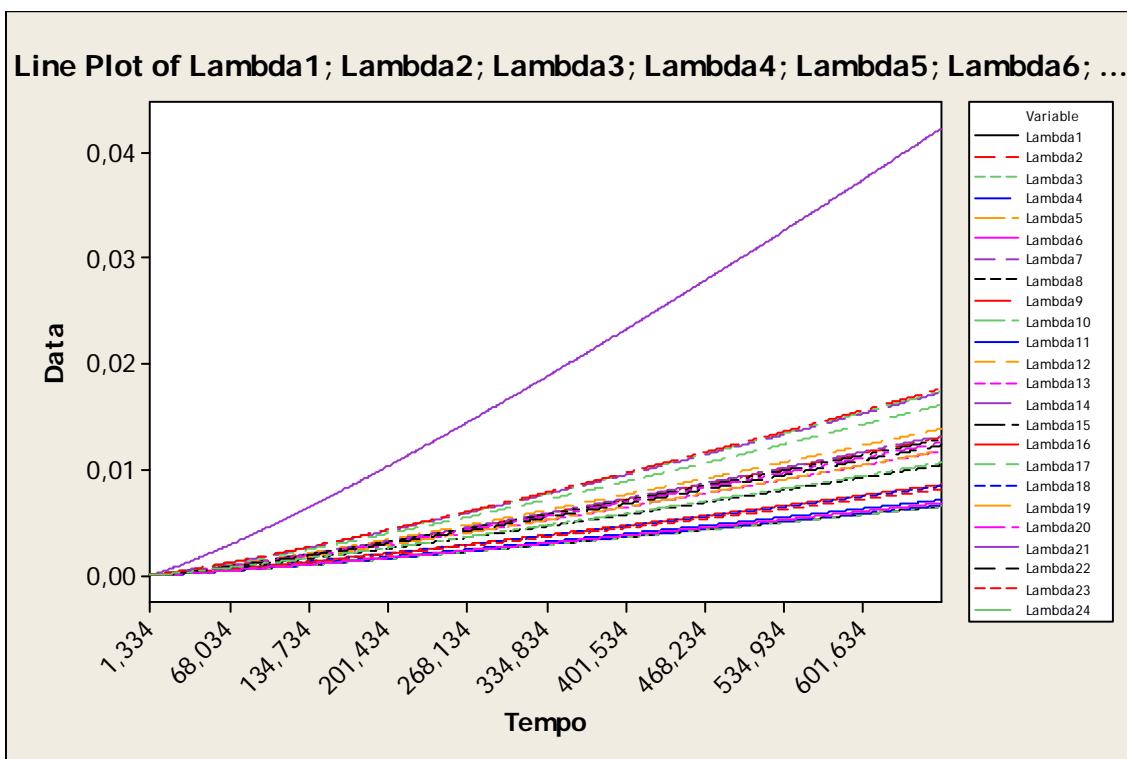


Figura 4. Gráfico das funções intensidades para 24 motores, assumindo um único  $\beta$ .

### 3.2. Fábrica de cimento

#### 3.2.1. Análise do primeiro período

Neste exemplo iremos analisar um processo de moagem de pedras de calcário de uma fábrica de cimento. Os dados foram divididos em dois períodos, antes e depois de terem implementado o programa de manutenção, chamado de Confiabilidade Centrada em Manutenção (CCM). O período das observações foi de julho de 1999 a dezembro de 2001 no primeiro período e de janeiro de 2002 a novembro de 2003. O sistema é um único componente, mas foi considerado que as manutenções preventivas resultavam em sistema tão bom quanto novo e a cada falha era feito um reparo mínimo.

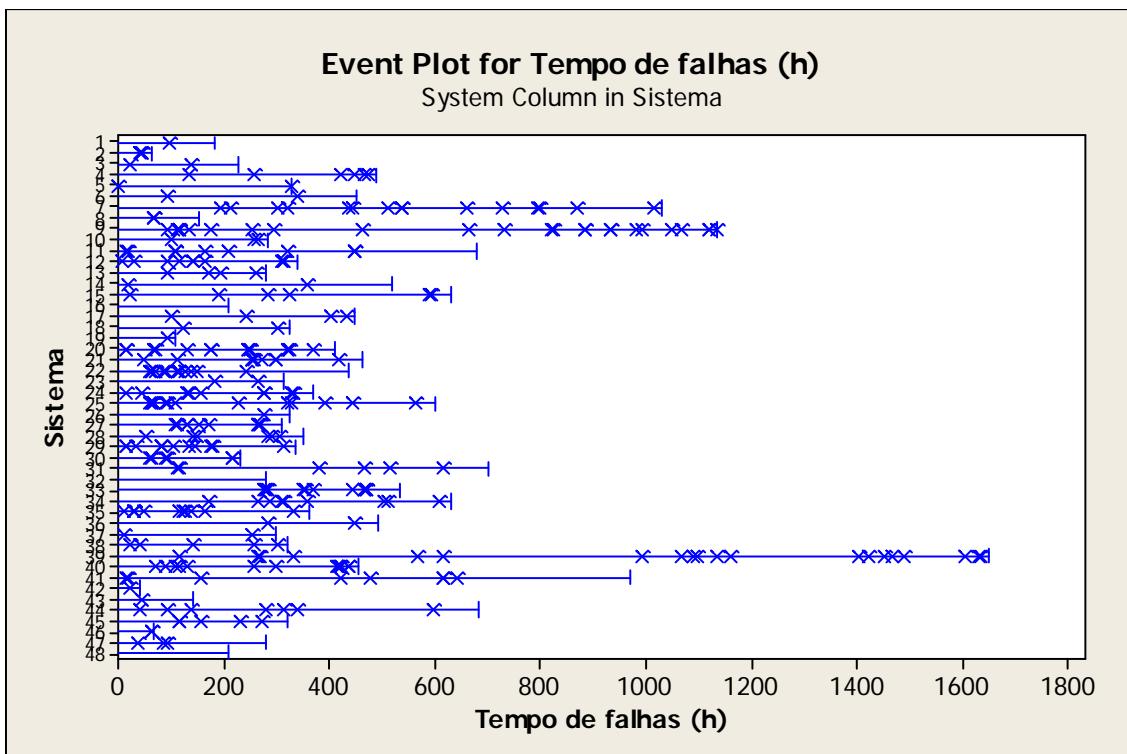


Figura 5. Gráfico dos tempos de falha para o período 1.

Na figura 1 temos os tempos de falha para o processo. No total foram realizadas 48 manutenções preventivas neste período, porém em três deles não foram observados falhas, sendo as mesmas retiradas para os cálculos. O valor do parâmetro de forma é igual a 0,98 com desvio padrão de 0,05, com intervalo de 95% de confiança igual a [0,89; 1,08]. Como o valor 1 pertence ao intervalo, podemos dizer que os sistemas podem ser modelados por um PPH. O parâmetro de escala foi estimado e igual a 61,69 com desvio de 7,41 e com intervalo de 95% de confiança igual a [48,75; 78,06].

No teste de igualdade dos parâmetros de forma, a hipótese nula foi rejeitada e a estatística de teste foi igual a 71,09 ( $p$ -valor = 0,006), com 44 graus de liberdade. Logo os testes que devemos observar na tabela 2 são os combinados, pois os sistemas são similares ou em último caso diferentes e assim uma análise separada para cada sistema deve ser feita.

Tabela 2. Tabela de testes de tendência (período 1)

Teste	Valor da estatística	p-valor	Graus de Liberdade
$L_c$	1,31	0,192	-
$L_T$	-1,02	0,306	-
$M_c$	596,70	0,553	618
$M_T$	631,72	0,685	618

Na tabela 2 podemos ver que a hipótese nula não é rejeitada (testes combinados) e assim afirmamos que não há uma tendência nas observações. Também observamos nos gráficos 6 e 7 que os pontos seguem uma linha diagonal central, confirmando o que os teste de Laplace e Military Handbook combinados apresentaram e que há estabilidade no processo.

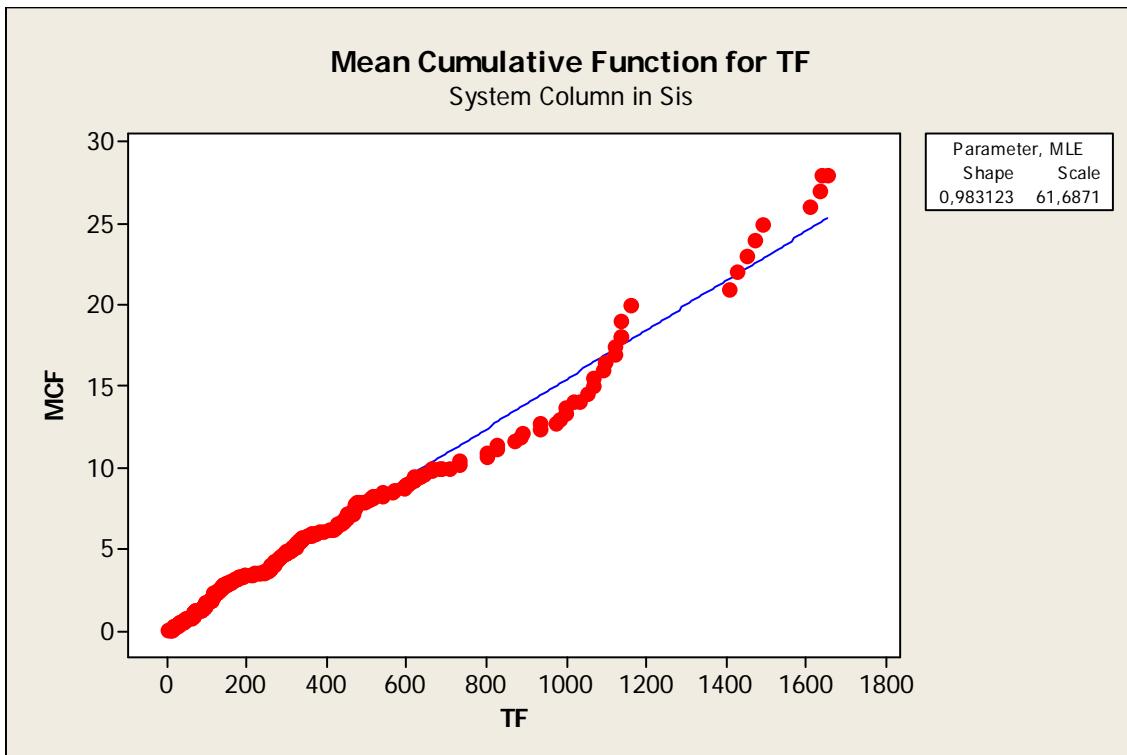


Figura 6. Gráfico para a função de média acumulativa (MCF).

Logo podemos concluir que no primeiro período, não apresenta uma tendência e que podemos supor um PPH, ou seja, funções intensidades constantes para cada sistema, já que o teste para igualdade dos parâmetros de forma rejeitou a hipótese nula, assumindo diferentes intensidades.

### 3.2.2. Análise do segundo período

No caso do período 2, temos 49 sistema no processo, porém para os cálculos dos parâmetros temos apenas 36, pois os demais não apresentaram falha até a manutenção preventiva. Na figura 8 temos os tempos de falha para o segundo período. O parâmetro de forma foi igual a 0,84 com desvio padrão de 0,07 e intervalo de 95% de confiança igual a [0,72; 0,99]. Veja que o limite superior ficou bem próximo de 1, mas assumimos que ele não pertence ao intervalo e que há uma melhoria no processo no segundo período, como observamos na figura 9.

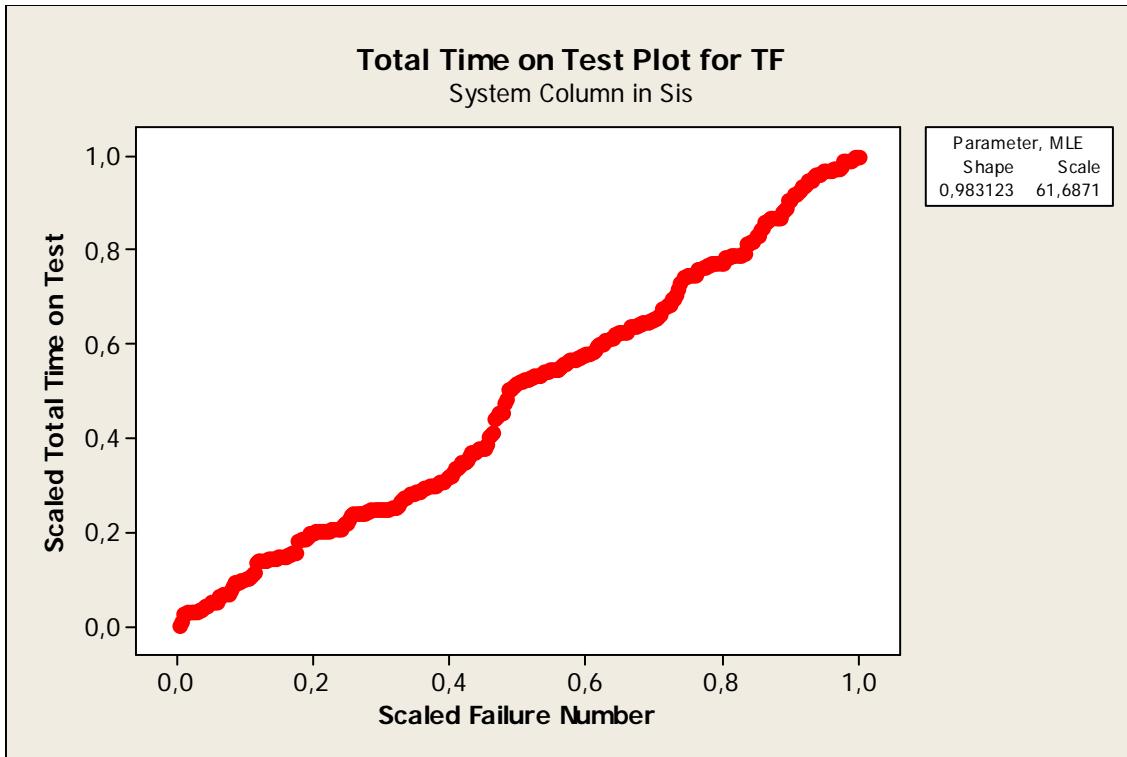


Figura 7. Gráfico TTT para primeiro período.

Para o parâmetro de escala, foi encontrado o valor de 92,63 com desvio padrão de 15,68 e um intervalo de [66,48; 129,06]. No teste de igualdade dos parâmetros de forma, o valor da estatística foi de 38,32 ( $p$ -valor = 0,321) com 35 graus de liberdade, assim podemos afirmar que os parâmetros de forma são iguais para os sistemas do processo. Na figura 10 temos o gráfico TTT, o qual apresenta nenhum tipo de tendência significativa, mas uma melhora no processo no final da curva.

Tabela 3. Tabela de testes de tendência (período 2)

Teste	Valor da estatística	p-valor	Graus de Liberdade
$L_c$	-2,00	0,045	-
$L_T$	-3,03	0,002	-
$M_c$	236,11	0,617	226
$M_T$	261,97	0,101	226

Na tabela 3 temos os valores das estatísticas para tendência. Como podemos ver, as estatísticas de Laplace rejeita a hipótese nula, mas como citado na seção 2.6, os testes de Laplace se comportam melhor para intensidade log-linear. Percebemos isso mais claramente quando olhamos para as estatísticas de Military Handbook, as quais não rejeitam a hipótese nula. Isto é também percebido no primeiro período. Outro fato que notamos é que a diferença entre os valores dos testes combinados e dos testes de base-TTT estão muito grandes. Como o valor-p do teste de igualdade dos parâmetros de forma não foi inferior a 0,05, acreditamos que os valores dos parâmetros de escala sejam diferentes. Na figura 11 temos as intensidades para os 36 sistemas e o valor para um único parâmetro de forma é igual a 1,26 com intervalo de 95% de confiança igual a [1,10; 1,44]. Neste caso, não encontramos uma melhora no processo e sim uma deterioração do processo.

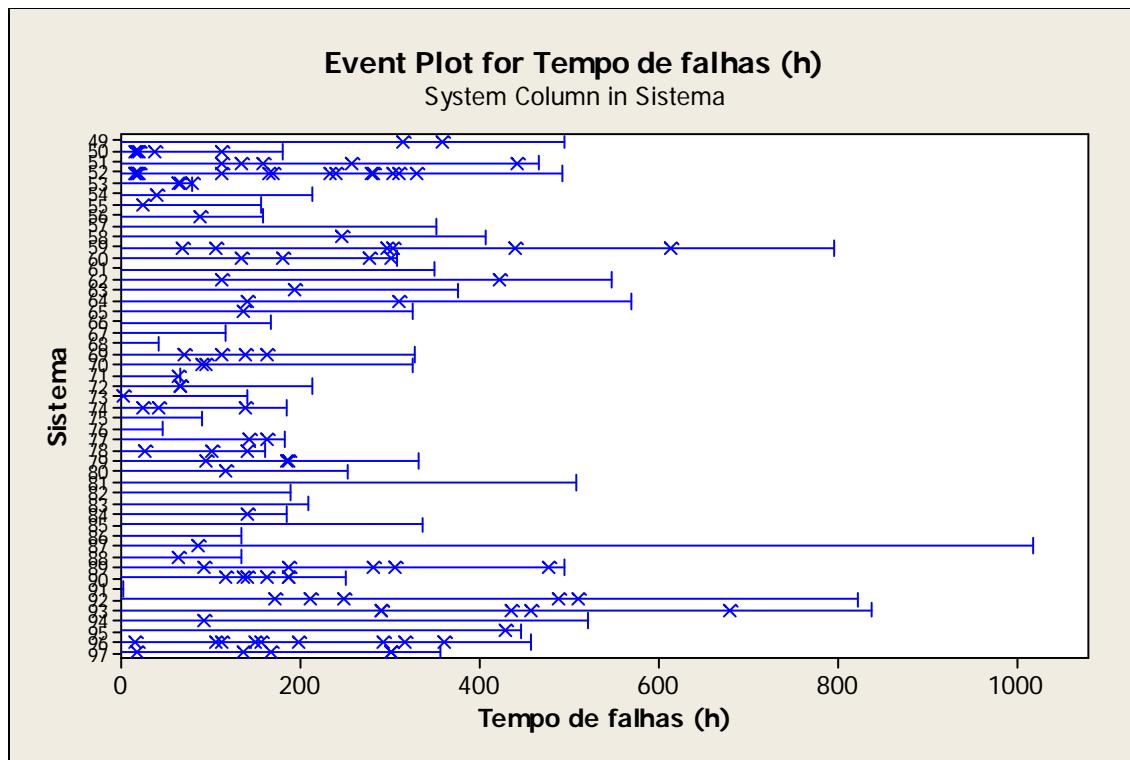


Figura 8. Tempos de falha para o segundo período.

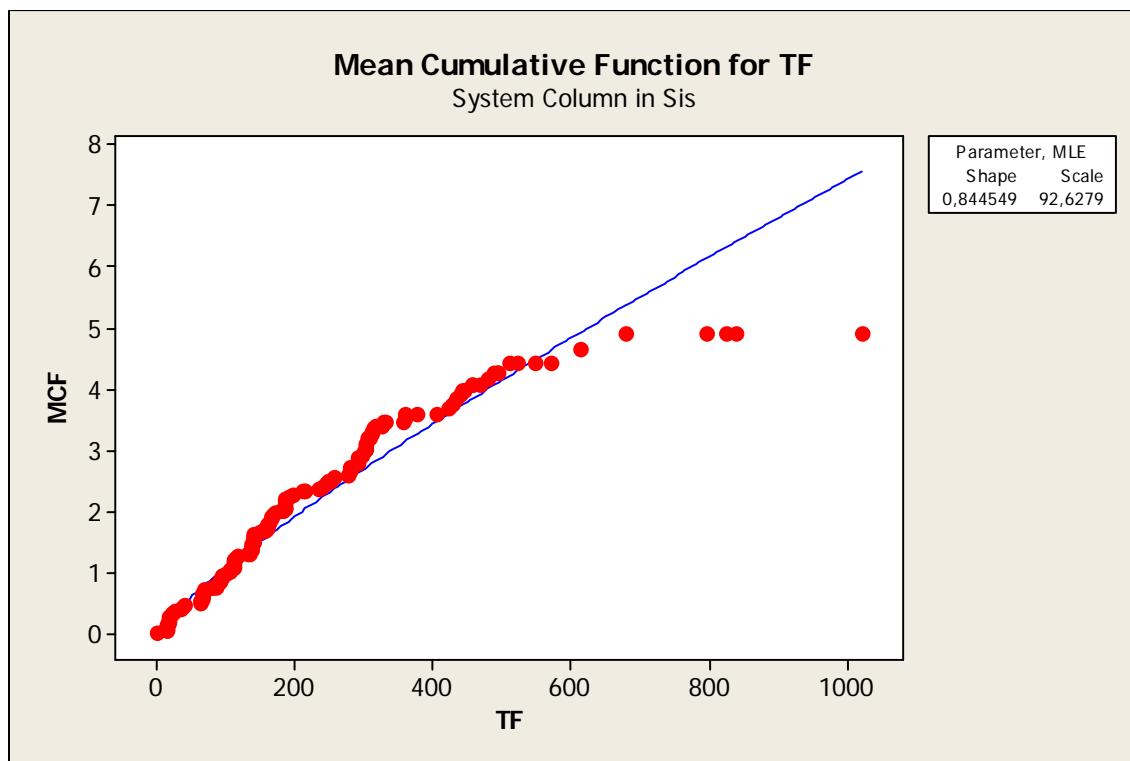


Figura 9. Gráfico para a função de média acumulativa (MCF).

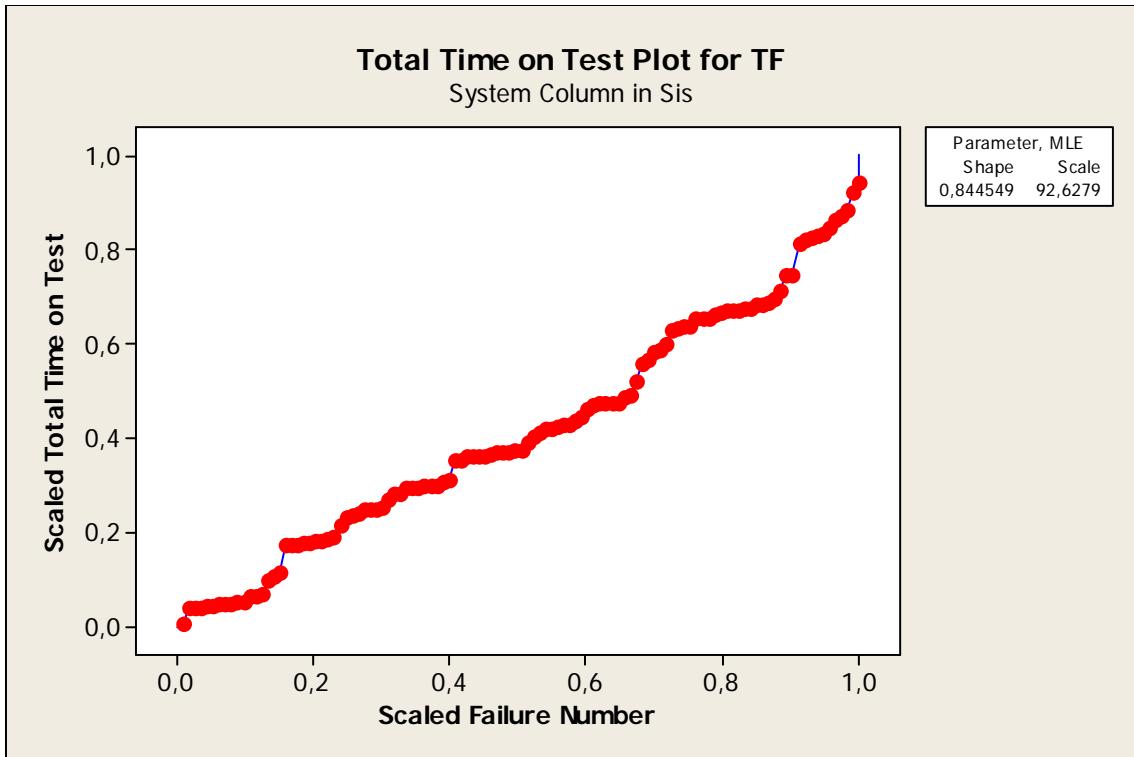


Figura 10. Gráfico TTT para o segundo período.

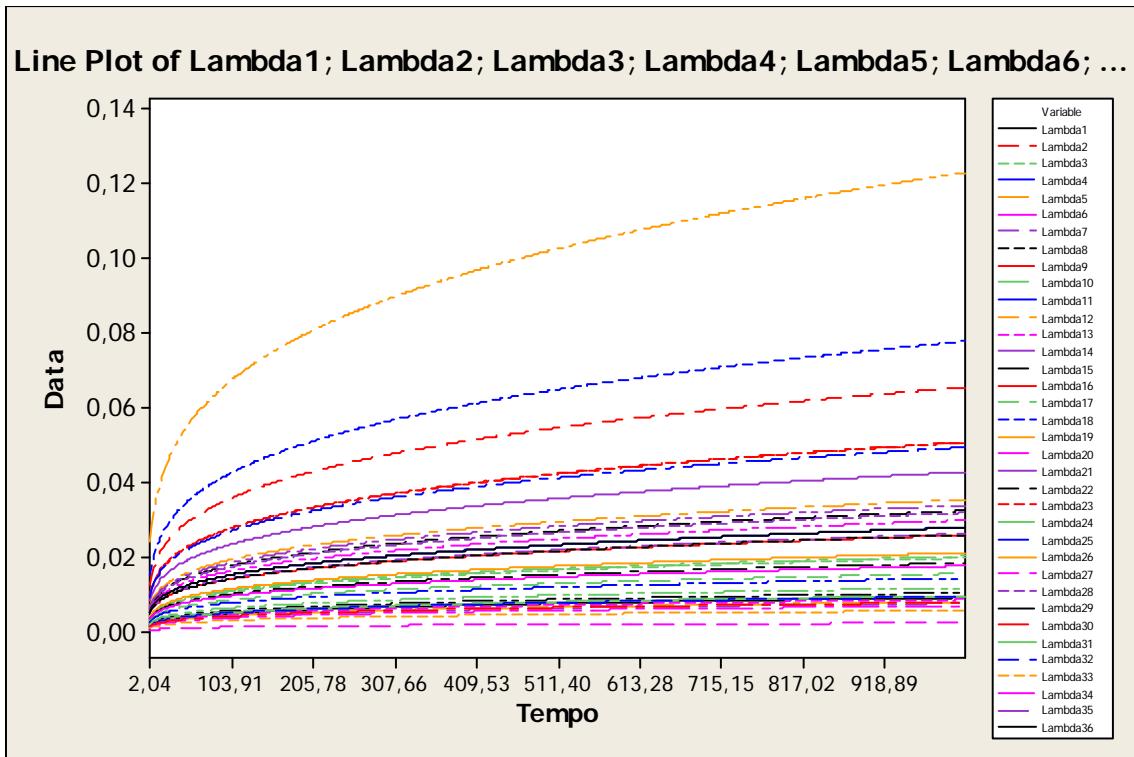


Figura 11. Gráfico das funções intensidades para os 36 sistemas do período 2.

#### 4. Conclusão

As técnicas estatísticas aqui apresentadas possuem grande importância em confiabilidade em sistemas reparáveis. A estatística de Laplace se comporta melhor para dados em que se consegue modelar a função intensidade através da função log-linear. Já o teste do Military Handbook se sobressai quando temos a função de lei de potência.

O uso dos testes de tendência para mais de um sistema reparável apresenta duas versões, as quais uma é para quando temos a suposição que os sistemas são idênticos, os de base-TTT, e para quando temos sistemas similares, neste caso os testes combinados. Tanto o teste de Laplace como o de Military possuem as duas versões.

Vimos que os comportamentos das estatísticas de testes nos exemplos, aqui mencionados, foram condizentes com o que se encontra na literatura. No primeiro exemplo, a hipótese de que temos um modelo PPH foi rejeitada por todos os testes. No segundo exemplo temos a não rejeição de um modelo PPH, mas estatísticas são diferentes para cada período. Isso acontece devido ao melhoramento do processo depois da implementação do programa CCM.

Logo concluímos que os testes são importantes na análise de tendência, já que a análise gráfica não é tão consistente, como comprovado na literatura. Em um artigo de Kvalfy (1998), sugere a criação de um novo teste chamado “duas etapas”. Consiste em verificar antes de aplicar os testes de tendência, se os sistemas são heterogêneos, através do teste da razão de verossimilhança, apresentado primeiramente por Lawless (1987). Esse teste em suas simulações se comporta melhor se considerarmos o nível de significância e o poder do teste.

#### 5. Referências

Barlow, R. E. e Davis, B., Analysis of Time Between Failures for Repairable Components (1977). *Nuclear Systems Reliability Engineering and Risk Assessment*, 543-561. Philadelphia: SIAM.

Bartlett, M. S., Properties of Sufficiency and Statistical Tests (1937). *Proceedings of the Royal Society of London A*, 160, pp. 268-282.

Colosimo, E. A. e Pontel, F. G., RCM Program Evaluation in Cement Company (2005).

Kvalfy, J. T., Test for trend in more than one repairable systems (1998). <http://citesser.ist.psu.edu/364962.html>.

Kvalfy, J. T. e Lindqvist, B. H., TTT-based tests for trend in repairable systems data (1998). *Reliability Engineering and System Safety*, 60: 13-28.

Lawless, J. F., Regression Methods for Poisson Process Data (1987). *Journal of the American Statistical Association*, 82:808-815.

Rigdon, S. E. e Basu, A. P., Statistical Methods for Reliability of Repairable Systems (2000). New York, NY: John Wiley.