

# Testes de Degradação e Testes de Degradação Acelerados

Magda Carvalho Pires

UFMG – Departamento de Estatística

Métodos Estatísticos em Confiabilidade e Manutenção

12 de Novembro de 2007

## Resumo

Testes de degradação são uma alternativa aos testes de vida nos casos em que a falha está associada a alguma medida de degradação do produto. Quando a degradação é muito lenta, variáveis de estresse são incorporadas para acelerar a degradação e, conseqüentemente, a falha. Esse trabalho faz uma revisão dos métodos de análise desses testes, que pode ser realizada mesmo na ausência de falhas. Uma aplicação do desgaste da roda de trem é apresentada.

## 1 Testes de Degradação

Em alguns estudos de confiabilidade, a falha do produto ocorre como conseqüência da degradação de alguma(s) característica(s) e o tempo de falha  $T$  é o tempo em que essa característica atinge um nível crítico  $D_f$ . Nesses casos, vários produtos são acompanhados ao longo do tempo ( $t$ ) e as medidas de degradação ( $y$ ) de cada um deles são tomadas. Esse tipo de estudo é conhecido como Teste de Degradação. A análise dos dados obtidos fornece uma estimativa da distribuição do tempo de falha do produto e, assim, as figuras de mérito de interesse podem ser obtidas.

Os testes de degradação apresentam algumas vantagens em relação aos testes de vida acelerados usualmente utilizados em estudo de confiabilidade:

- A análise dos dados pode ser realizada mesmo que nenhum item tenha falhado, o que implica em redução do período de teste.
- Quando o número de falhas é pequeno nos testes de vida, os dados provenientes do acompanhamento da queda da performance do produto ao longo do tempo serão muito mais informativos, produzindo estimativas mais acuradas.
- Por meio dos testes de degradação, é possível conhecer a trajetória do produto até a falha. Esta informação nos auxiliará na adoção de medidas de melhoria que prolonguem a vida do produto. Desta forma, os testes de degradação refinam o conhecimento que o pesquisador possui sobre o modelo de falha do produto.

Entretanto, os testes de degradação apresentam algumas desvantagens:

- Para alguns produtos e materiais já foram propostas possíveis variáveis de performance e tipo de falha, como revisa Nelson (1990). Porém, em muitas aplicações, relações de engenharia para descrever a degradação ainda não foram desenvolvidas.
- Quando as relações de engenharia estão bem definidas, o planejamento do teste e a análise não são simples e demandam rotinas computacionais que não estão implementadas na maioria dos *softwares* comerciais.

## 1.1 Modelo de Degradação

Suponha que  $n$  unidades dos produtos sejam acompanhadas ao longo do tempo. Seja  $y_{ij}$  a medida da degradação da unidade  $i$  no tempo  $j$ . Os tempos de medição  $t_1, t_2, \dots, t_s$  não são necessariamente os mesmos para todas as unidades, nem são necessariamente equidistantes. O tempo  $t$  pode ser o tempo real (cronológico), o tempo de operação ou outra medida como o número de quilômetros, número de ciclos etc.

Durante o tempo de acompanhamento, a falha pode ou não ocorrer. Nos casos em que a falha ocorre em  $t < t_s$ , não são realizadas medições após  $t$ . Dessa forma, seja  $m_i < s$  o número de inspeções possíveis em casa unidade  $i$ .

O modelo para explicar a degradação do produto pode ser assim definido:

$$y_{ij} = D_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m_i$$

em que  $D_{ij} = (t_{ij}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{ik})$  é o padrão de degradação da  $i$ -ésima unidade no tempo  $t_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  é o erro aleatório associado à  $i$ -ésima unidade no instante  $t_{ij}$ . A forma de  $D_{ij}$  deve ser baseada em modelos da literatura, modelos físico/químicos apropriados ou em análise empírica. O vetor  $(\beta_{i1}, \dots, \beta_{ik})$  possui  $k$  parâmetros desconhecidos para cada unidade  $i$ , que podem ser aleatórios (variar de unidade para unidade segundo uma distribuição de probabilidade) ou fixos (comuns a todas as unidades). Em geral,  $k = 1, 2, 3$  ou 4.

Visando estimar os parâmetros do modelo, consideremos que o vetor de parâmetros  $\beta$  segue uma distribuição normal multivariada, com vetor de médias  $\mu_\beta$  e matriz de variância-covariância  $\Sigma_\beta$ . Para os efeitos fixos de  $\beta$ , o valor respectivo da média  $\mu_\beta$  será igual ao próprio efeito e as respectivas variâncias e covariâncias que envolverem esses efeitos em  $\Sigma_\beta$  serão iguais a zero. Assim, a função de verossimilhança para o modelo  $y_{ij} = D_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m_i$  é

$$L(\mu_\beta, \Sigma_\beta, \sigma_\varepsilon | \text{dados}) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \Phi(\zeta_{ij}) \right] \times f_\beta(\beta_{i1}, \dots, \beta_{ik}; \mu_\beta, \Sigma_\beta) d\beta_{i1}, \dots, d\beta_{ik} \quad (1)$$

em que  $\zeta_{ij} = [y_{ij} - D(t_{ij}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{ik})] / \sigma_\varepsilon$  e  $f_\beta(\beta_{i1}, \dots, \beta_{ik}; \mu_\beta, \Sigma_\beta)$  é a função densidade de probabilidade normal multivariada (detalhes e explicações em Palmer *et al.*, 1991).

A maximização de  $L$  é extremamente difícil, principalmente nos casos em que  $D(t)$  não é uma função linear. Entretanto, já existem funções como a *lme* (linear mixed effects models) e *nlme* (nonlinear mixed effects models) implementadas em softwares como S-PLUS e R (Pinheiro e Bates, 2000).

## 1.2 Distribuição do tempo de falha

A distribuição dos tempos de falha  $F(t)$  pode ser definida a partir de  $D_{ij}$  e do nível crítico  $D_f$ , pois uma unidade do produto falha no tempo  $t$  se seu nível de degradação atinge  $D_f$ :

- $F(t) = P(T \leq t) = P(D(t, \beta_1, \dots, \beta_k) \geq D_f)$  se  $D(t)$  é crescente, ou seja, se as medidas de degradação crescem com o tempo;
- $F(t) = P(T \leq t) = P(D(t, \beta_1, \dots, \beta_k) \leq D_f)$  se  $D(t)$  é decrescente, ou seja, se as medidas de degradação decrescem com o tempo.

Segundo Meeker e Escobar (1998), a distribuição de  $T$  pode ser obtida através do Método da Aproximação ou do Método Numérico.

### 1.2.1 Método da Aproximação

Ajustamos o modelo  $Y = D(t) + \varepsilon$  para cada unidade da amostra pelo método de máxima verossimilhança ou mínimos quadrados, obtendo as estimativas do vetor  $(\beta_{i0}, \dots, \beta_{ik})$ .

Para  $D(t) = \beta_0 + \beta_1 t$ , por exemplo, os pseudo tempos de falhas são dados por

$$\hat{t}_i = \frac{D_f - \hat{\beta}_{i0}}{\hat{\beta}_{i1}}, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e, juntos, podem ser utilizados para estimar } F(t) \text{ utilizando os}$$

métodos usuais de confiabilidade.

Apesar de ser relativamente simples, esse método só é adequado quando a forma de  $D(t)$  for relativamente simples (de preferência linear), o modelo ajustado for aproximadamente correto, o volume de dados coletados for suficiente para estimar o vetor  $\beta_i$  com precisão, a magnitude dos erros for pequena, e o tempo de falha estimado não for muito além do tempo de encerramento do teste (Meeker e Escobar, 1998).

Além disso, o método da aproximação apresenta algumas desvantagens: ignora os erros de predição dos pseudo tempos de falhas e não considera os erros envolvidos nas medidas de degradação observadas, a distribuição dos pseudo tempos de falha em geral não correspondem à distribuição induzida pelo modelo de degradação e, em algumas aplicações, a amostra não contém informação suficiente para estimar todos os parâmetros, sendo necessário ajustar diferentes modelos para diferentes unidades para prever o tempo da falha (Meeker e Escobar, 1998).

### 1.2.2 Método Numérico

Estimando  $\mu_\beta$ ,  $\Sigma_\beta$  e  $\sigma_\epsilon^2$ , podemos estimar  $F(t)$  numericamente usando simulação de Monte Carlo, de acordo com o procedimento abaixo:

- Gere  $N$  ( $N=10^5$ , por exemplo) realizações  $(b_1, \dots, b_k)$  de  $(\beta_1, \dots, \beta_k)$  a partir de uma distribuição normal multivariada de média  $\mu_\beta$  e matriz de variância-covariância  $\Sigma_\beta$ .

- Calcular os  $N$  tempos de falhas correspondentes às  $N$  realizações de  $(\beta_{i1}, \dots, \beta_{ik})$  substituindo os valores  $(b_1, \dots, b_k)$  em  $D(t)$  e encontrando o tempo em que a trajetória atinge o nível crítico (falha). Nos casos em que  $D(t) = \beta_0 + \beta_1 t$ , por exemplo, o tempo de

falha de cada realização  $i$  pode ser encontrado por  $t_i = \frac{D_f - b_{0i}}{b_{1i}}$ .

- A distribuição dos tempos de falha  $F(t)$  pode ser então estimada por:

$$\hat{F}(t) = \frac{\text{Número de trajetórias cujo tempo até } D_f \leq t}{N}.$$

### 1.2.3 Intervalos de Confiança Bootstrap

Como não há método simples para o cálculo do erro padrão de  $\hat{F}(t)$ , a obtenção de intervalos de confiança para os percentis de interesse é possível através da utilização do método Bootstrap (Efron, 1985), de acordo com o procedimento descrito a seguir (Meeker e Escobar, 1998):

1. Utilize os dados de degradação das  $n$  unidades testadas para encontrar  $\hat{\mu}_\beta, \hat{\Sigma}_\beta$  e  $\hat{\sigma}_\varepsilon$ .
2. Realize uma simulação Monte Carlo de  $\beta$  utilizando  $\hat{\mu}_\beta$  e  $\hat{\Sigma}_\beta$  e calcule  $\hat{F}(t)$  para valores desejados de  $t$ .
3. Gere um número  $B$  grande de amostras ( $B=4000$ , por exemplo) de amostras bootstrap e estimativas bootstraps  $\hat{F}^*(t)$  correspondentes como a seguir:
  - Gere uma reamostra de  $n$  realizações do parâmetro aleatório  $\beta_i^*, i=1, \dots, n$ , cada um com distribuição normal multivariada com parâmetros  $\hat{\mu}_\beta$  e  $\hat{\Sigma}_\beta$ .
  - Calcule  $n$  trajetórias de  $y_{ij}^* = D(t_{ij}, \beta_i^*) + \varepsilon_{ij}^*$  além do tempo final do estudo, onde os erros são independentes simulados de uma distribuição  $N(0, \hat{\sigma}_\varepsilon^2)$ .
  - Utilize as  $n$  trajetórias para obter as estimativas bootstrap  $\hat{\mu}_\beta^*$  e  $\hat{\Sigma}_\beta^*$ .
  - Realize simulação Monte Carlo para obter  $\hat{F}^*(t)$  a partir de  $\hat{\mu}_\beta^*$  e  $\hat{\Sigma}_\beta^*$ .
4. Para cada valor desejado de  $t$ , o intervalo de confiança é obtido como a seguir:

- Ordene em ordem crescente as estimativas bootstrap  $\hat{F}^*(t)_1, \dots, \hat{F}^*(t)_B$  obtendo  $\hat{F}^*(t)_{(1)}, \dots, \hat{F}^*(t)_{(B)}$ .
- De acordo com Efron e Tibshirani (1993), os limites inferior e superior de um intervalo de  $100(1-\alpha)\%$  de confiança são

$$\left[ \hat{F}^*(t)_l; \hat{F}^*(t)_u \right]$$

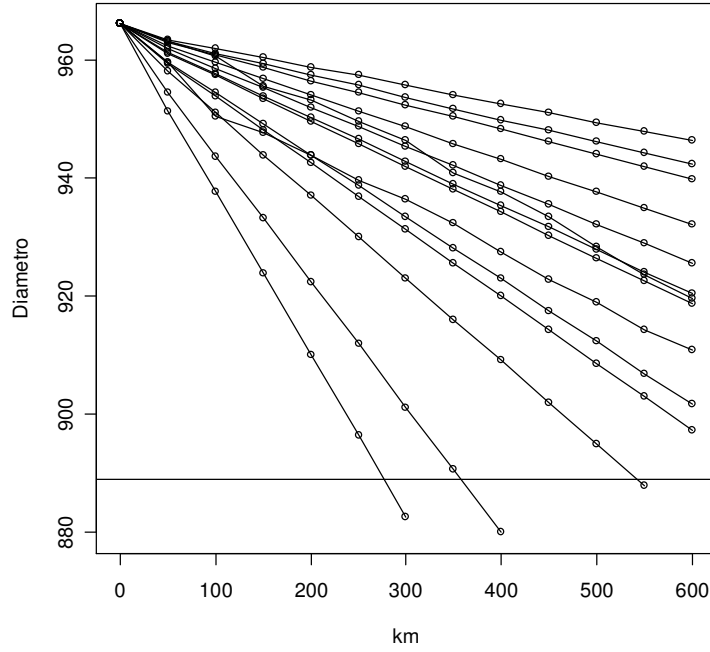
em que  $l = B \times \Phi \left[ 2\Phi^{-1}(q) + \Phi^{-1}(\alpha/2) \right]$ ,  $u = B \times \Phi \left[ 2\Phi^{-1}(q) + \Phi^{-1}(1-\alpha/2) \right]$  e  $q$  é a proporção dos  $B$  valores de  $\hat{F}^*(t)$  que são menores que  $\hat{F}(t)$ . Usar  $q=0,5$  equivale a usar o método do percentil bootstrap.

### 1.3 Aplicação – Desgaste das rodas de trem

Foi realizado um estudo para determinar o tempo médio de vida (em mil km) das rodas de um trem. Cada trem analisado possui quatro vagões – 1 vagão máquina que empurra ou puxa e outros 3 que são puxados ou empurrados. Cada vagão tem 4 eixos com 2 rodas cada (8 rodas por vagão).

O diâmetro inicial das rodas é de 966 mm e o diâmetro mínimo aceitável é 889mm, ou seja, as rodas que chegam a 889mm são substituídas por novas.

Foram selecionados 14 trens aleatoriamente e o acompanhamento do desgaste das rodas do vagão máquina foi realizado a cada 50mil km, até 600 mil km rodados. A Figura 1 apresenta os resultados observados em uma roda.



*Figura 1: Diâmetro da roda de 14 trens*

A figura demonstra que, aparentemente, a degradação do diâmetro da roda dos trens ocorre linearmente.

### 1.3.1 Estimação de $F(t)$ utilizando o método da aproximação

Para cada um dos trens em estudo, ajustamos um modelo de degradação do tipo

$$y_{ij} = D_i(t) + \varepsilon_{ij} = \beta_{0i} + \beta_{1i}t + \varepsilon_{ij}.$$

A partir das estimativas dos parâmetros do modelo, podemos obter os pseudo tempos de falha (tempo que a roda se desgastaria até  $D_f = 889$  mm) de cada trem:

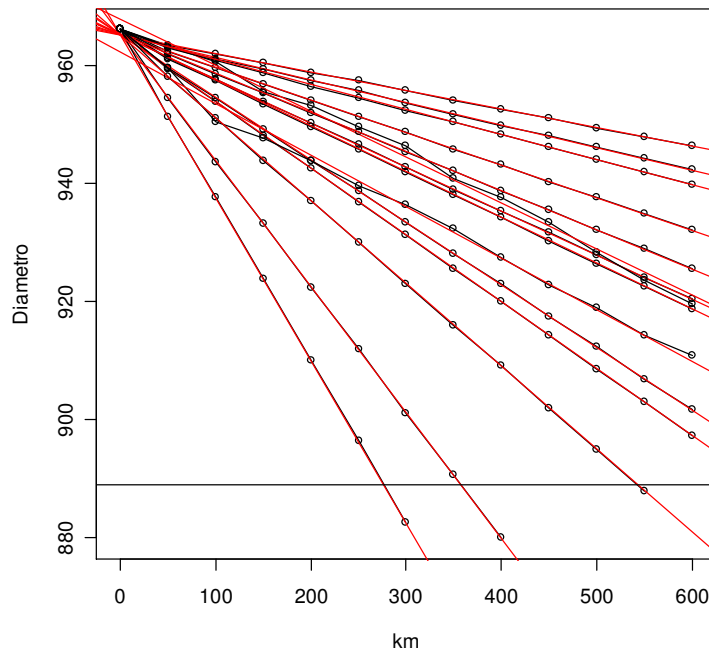
$$\hat{t}_i = \frac{D_f - \hat{\beta}_{1i}}{\hat{\beta}_{0i}}$$



A Tabela 1 apresenta as estimativas para os parâmetros  $\beta_0$  (intercepto) e  $\beta_1$  (inclinação) e dos pseudo tempos de falhas de cada trem, obtidos através do *software* R. O modelo ajustado de cada trem é apresentado na Figura 2.

*Tabela 1: Estimativas do intercepto, da inclinação e dos tempos de falha da roda dos 14 trens*

Trem	Intercepto	Inclinação	Pseudo tempo de falha
1	965,2	-0,0317	2406
2	965,2	-0,0384	1984
3	965,3	-0,0555	1375
4	965,3	-0,0749	1018
5	965,3	-0,1134	673
6	965,3	-0,0778	981
7	967,9	-0,0781	1010
8	965,2	-0,0426	1789
9	965,3	-0,1061	719
10	965,3	-0,0664	1150
11	965,4	-0,2138	357
12	965,5	-0,2766	276
13	962,4	-0,0876	838
14	965,3	-0,1407	542



*Figura 2: Modelo ajustado de cada trem*

Através dos pseudo tempos de falhas, podemos utilizar as ferramentas usuais para estimação de  $F(t)$ . O estimador não paramétrico de Kaplan-Meier foi utilizado através do *software* Minitab. O gráfico da função de confiabilidade  $R(t)=1-F(t)$  é apresentado na Figura 3.

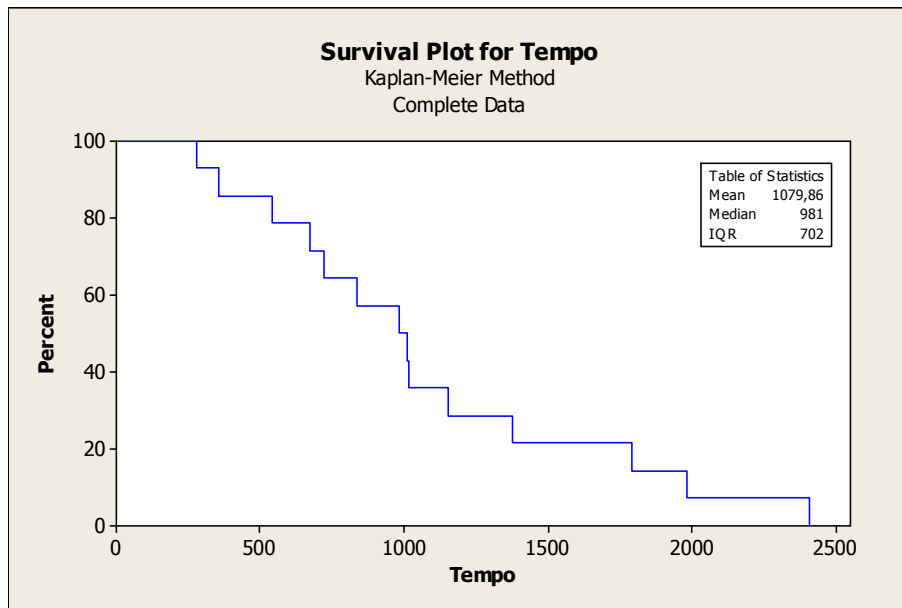


Figura 3: Função de confiabilidade utilizando os pseudo tempos de falha

Para uma análise paramétrica, papéis de probabilidade foram construídos e são apresentados na Figura 4, demonstrando que os melhores modelos para os pseudo tempos de falha são o Lognormal e o Weibull.

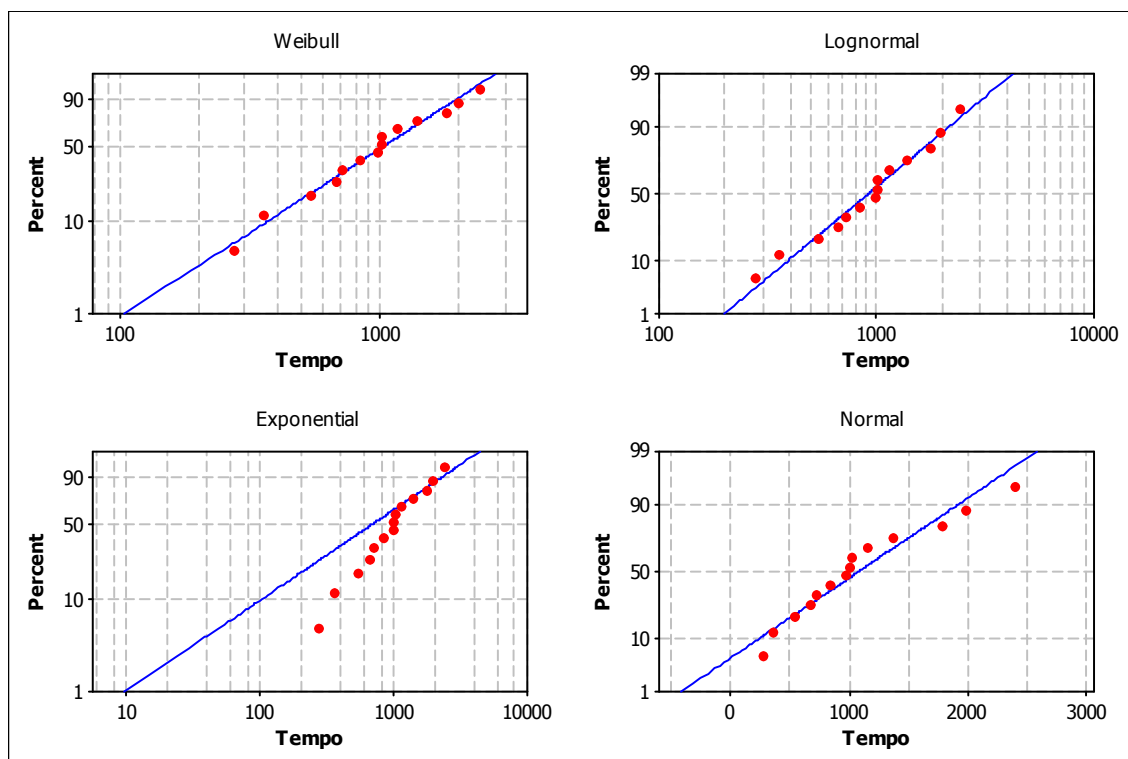


Figura 4: Papéis de probabilidade para os pseudo tempos de falha

Apresentamos na Tabela 2 as estimativas de  $R(t)$  obtidas pelo método não paramétrico (KM) e pelos modelos paramétricos Lognormal e Weibull.

Tabela 2: Estimativas de  $R(t)$  utilizando os métodos paramétrico e não paramétricos

Tempo	KM	Lognormal	Weibull
276	0,929	0,966	0,940
357	0,857	0,925	0,904
542	0,786	0,788	0,803
673	0,714	0,681	0,720
719	0,643	0,644	0,689
838	0,571	0,554	0,609
981	0,500	0,459	0,514
1010	0,429	0,441	0,495
1018	0,357	0,436	0,490
1150	0,286	0,365	0,409
1375	0,214	0,268	0,287
1789	0,143	0,154	0,130
1984	0,071	0,120	0,084
2406	0,000	0,071	0,029

Gráficos comparativos das estimativas de  $R(t)$  são apresentados na Figura 5:

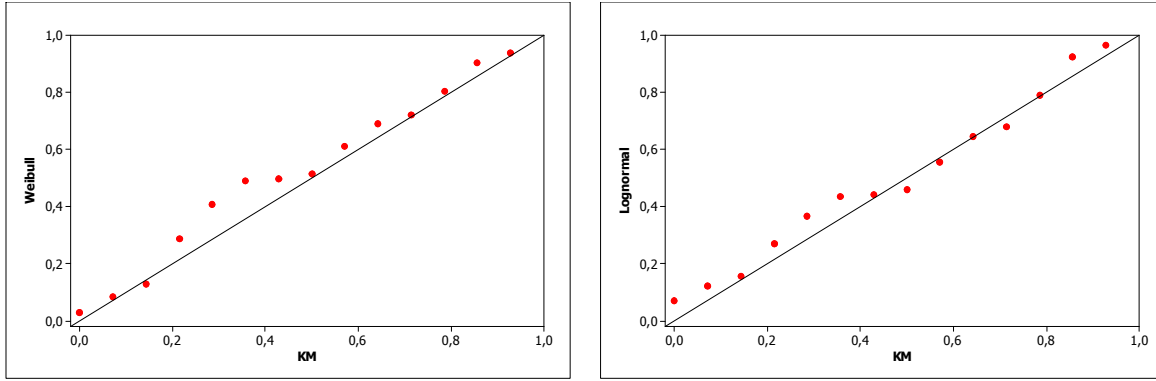


Figura 5: Comparação das estimativas de  $R(t)$  obtidas pelos métodos paramétrico e não paramétricos

Os modelos Lognormal e Weibull têm desempenhos parecidos.

A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos pelos modelos Weibull e Lognormal na estimação do tempo médio de vida da roda (MTTF), de  $R(300)$  e dos percentis 10 e 50.

Tabela 3: Estimativas de MTTF,  $R(300)$  e percentis obtidas pelos modelos Weibull e Lognormal

	Weibull			Lognormal		
	Estimativa	IC 95%		Estimativa	IC 95%	
		LI	LS		LI	LS
MTTF	1083,46	809,19	1450,68	1136,84	769,11	1680,41
$t_{10}$	365,72	189,16	707,09	395,15	239,77	651,23
$t_{50}$	1002,82	720,15	1396,45	916,48	649,81	1292,60
$R(300)$	0,93	0,75	0,98	0,96	0,79	1,00

### 1.3.2 Estimação de $F(t)$ utilizando o Método Numérico

Supondo que o vetor  $\beta$  tem distribuição normal bivariada com parâmetros  $\mu_\beta$  e  $\Sigma_\beta$  e os resíduos têm distribuição Normal com média zero e variância  $\sigma_\epsilon^2$ , utilizamos a função lme do *software* R para estimar esses parâmetros. Nesse estudo,  $\beta_0$  é fixo (a roda de todos os trens tem diâmetro inicial de 966 mm) e  $\beta_1$  é aleatório. As estimativas obtidas são:

$$\hat{\mu}_\beta = \begin{pmatrix} 965,2636 \\ -0,1002 \end{pmatrix}; \hat{\Sigma}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,0692 \end{pmatrix}; \hat{\sigma}_\epsilon = 0,85097$$

Os resíduos obtidos são mostrados na Figura 6:

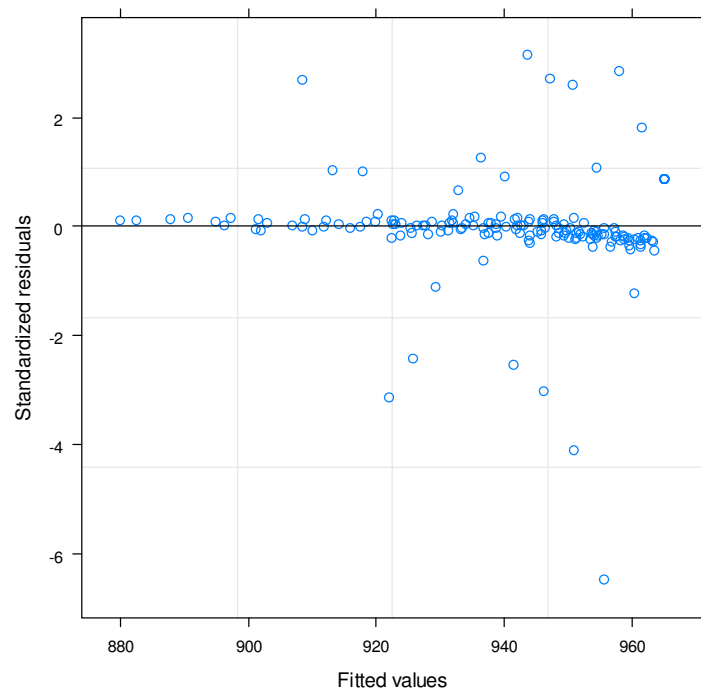


Figura 6: Resíduos obtidos no ajuste do modelo linear de efeitos mistos

Conhecidas as estimativas de  $\mu_\beta$  e  $\Sigma_\beta$ ,  $F(t)$  pode ser numericamente estimada usando simulação Monte Carlo. Foi utilizado o *software* R para gerar a amostra com  $N=100.000$  e o Minitab para construir o gráfico de  $F(t)$ .

Dos tempos de falha simulados, 7,54% são negativos, o que é inconsistente. Com isso, a estimativa do tempo médio foi negativa (-2808,016 mil km). Os demais resultados são mostrados na Tabela 4. Excluindo-se os tempos de falha negativos, refizemos os cálculos e apresentamos os resultados também na Tabela 4.

Tabela 4: Estimativas de MTTF,  $R(300)$  e percentis utilizando método numérico

	Todos os tempos de falha	Apenas tempos de falha não negativos
MTTF	-	2254,8930
$t_{10}$	321,3378	397,3244
$t_{50}$	674,9676	716,9036
$R(300)$	0,91084	0,98515

A função  $F(t)$  estimada é apresentada na Figura 7:

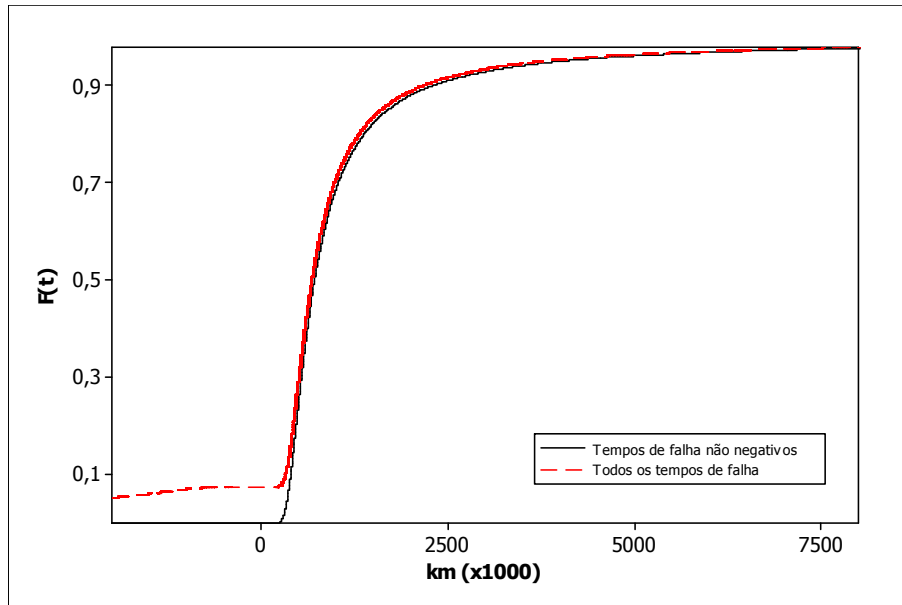


Figura 7:  $F(t)$  estimada pelo método numérico

A Tabela 5 compara os resultados obtidos nesse estudo com aqueles obtidos por Santos (2007) ao utilizar uma abordagem bayesiana para analisar os dados sobre o desgaste das rodas dos trens.

Tabela 5: Comparação das estimativas Clássicas e Bayesianas

	Abordagem Clássica				Abordagem Bayesiana
	Método da Aproximação		Método Numérico		
	Weibull	Lognormal	Todos os tempos de falha	Tempos de falha não negativos	
MTTF	1083,5	1136,8	-	2254,9	1097
t <sub>10</sub>	365,7	395,2	321,3	397,3	382,8
t <sub>50</sub>	1002,8	916,5	674,9	716,9	1011
R(300)	0,93	0,96	0,91	0,98	0,92

Considerações:

- Como esperado, as menores estimativas foram obtidas pelo método numérico quando utilizamos todos os tempos de falha.

- As estimativas clássicas que mais se aproximam das bayesianas são aquelas obtidas pelo método da aproximação quando utilizamos a distribuição de Weibull para explicar os pseudo tempos de falha.
- O método numérico com os tempos de falha não negativos forneceu as maiores estimativas para MTTF,  $t_{10}$  e  $R(300)$ .
- Todas as estimativas obtidas na abordagem bayesiana se encontram dentro dos intervalos de confiança construídos no método clássico da aproximação.

## 2 Testes de Degradação Acelerados

Muitas vezes a taxa de degradação de um produto em suas condições normais é muito baixa, exigindo que o período de realização do teste seja grande o suficiente para permitir a observação de uma quantidade considerável de degradação. Os testes de degradação acelerados são uma alternativa nesses casos, pois eles diminuem o período do teste garantindo a observação de uma quantidade de degradação.

Nesse tipo de teste, o processo de degradação é acelerado introduzindo variáveis de estresse, como temperatura, umidade, voltagem, pressão etc. Nesse estudo abordaremos apenas os casos em que a aplicação do estresse é realizada de forma constante.

Como nos testes de vida acelerados, os dados obtidos nos testes de degradação acelerados podem ser utilizados para avaliar a confiabilidade do produto nas suas condições reais de uso.

## 2.1 Modelo de Degradação

O modelo de degradação dos testes acelerados continua sendo aquele apresentado anteriormente:

$$y_{ij} = D_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m_i$$

Entretanto, o termo  $D_{ij}$  que indica a trajetória da  $i$ -ésima unidade no instante  $t_{ij}$  incorpora um componente devido ao efeito da variável de estresse utilizada:

$$D_{ij} = D(t_{ij}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{ik}, \text{estresse}).$$

Em geral, nos testes em que a variável de estresse é a temperatura, o componente  $D(t, \text{estresse})$  será baseado na relação de Arrhenius. De acordo com essa lei, a taxa de uma reação química simples depende da temperatura, segundo a expressão:

$$R(temp) = \gamma_0 \exp \left[ \frac{-E_a}{K_B \times (temp + 273,16)} \right] = \gamma_0 \exp \left[ \frac{-E_a \times 11,605}{temp + 273,16} \right]$$

em que  $temp$  é a temperatura em °C e  $K_B$  é a constante de Boltzmann (1/11,605 elétron-volts por °C). A constante  $\gamma_0$  e a energia de ativação  $E_a$  em elétron-volts são características do produto.

A razão das taxas de reação nas temperaturas  $temp$  e  $temp_U$  (temperatura de uso) é:

$$\begin{aligned} AF(temp) &= AF(temp, temp_U, E_a) = \frac{R(temp)}{R(temp_U)} = \\ &= \exp \left[ E_a \left( \frac{11,605}{temp_U + 273,16} - \frac{11,605}{temp + 273,16} \right) \right] \end{aligned}$$

Para processos de degradação dirigidos por uma reação química simples com taxa de reação  $k_I$  (Meeker e Lu Valle, 1995) temos que a trajetória  $D(t)$  é dada por:



$$D(t) = D_{\infty} [1 - \exp(-k_1 t)]; D_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} D(t)$$

Se a taxa de reação é estabelecida pela Lei de Arrhenius, temos:

$$D(t, temp) = D_{\infty} [1 - \exp(-R(temp_U) \times AF(temp) \times t)] \quad (1)$$

em que  $R(temp_U)$  é a taxa de reação na temperatura de uso,  $R(temp_U) \times AF(temp)$  é a taxa de reação na temperatura  $temp$ . Quando a degradação é medida em uma escala decrescendo a partir de zero, então  $D_{\infty} < 0$  e dizemos que a falha ocorre no menor  $t$  tal que  $D(t) < D_f$ .

Fazendo  $D(t, temp) = D_f$  e resolvendo para  $T$ , obtemos o tempo de falha na temperatura  $temp$  como:

$$T(temp) = \frac{-\frac{1}{R(temp_U)} \log\left(1 - \frac{D_f}{D_{\infty}}\right)}{AF(temp)} = \frac{T(temp_U)}{AF(temp)}$$

em que  $T(temp_U)$  é o tempo de falha nas condições de uso.

O lado direito da equação mostra que o modelo induzido por esse processo de degradação simples e pelo modelo de aceleração de Arrhenius resulta em um modelo de tempo de falha de escala acelerada (Scale Accelerated Failure Time – SAFT) sob o qual a trajetória de degradação de uma unidade em qualquer temperatura pode ser usada para determinar a trajetória que a mesma unidade teria em qualquer outra temperatura, simplesmente reescalando o eixo do tempo pelo fator de aceleração  $AF(temp)$ .

Por exemplo, se o tempo de falha nas condições de uso  $T(temp_U) \sim Weibull(\alpha_U, \beta)$ , então  $T(temp) \sim Weibull(\alpha_U / AF(temp), \beta)$ . Da mesma forma, se  $T(temp_U) \sim LOGNOR(\mu_U, \sigma)$ , então  $T(temp) \sim LOGNOR(\mu_U - \log(AF(temp)), \sigma)$ .

Finalmente, o modelo de degradação é dado por

$$y_{ij} = D_{ij}(t, temp) + \varepsilon_{ij} = D_{\infty} \left[ 1 - \exp \left( -R(temp_U) \times AF(temp) \times t \right) \right] + \varepsilon_{ij}.$$

A estimação dos parâmetros desse modelo é realizada maximizando-se a função de verossimilhança do modelo de degradação. As funções *lme* e *nlme* também são utilizadas nesses casos de testes de degradação acelerados. Para melhorar a estabilidade e a robustez do algoritmo, é importante reduzir a correlação entre a estimativa de  $E_a$  e os parâmetros relacionados à taxa de reação  $R$ . Para isso, é preferível estimar  $R$  em algum nível médio de temperatura utilizado no teste do que na temperatura de uso.

**Exemplo** (Meeker, Escobar e Lu, 1998). Desejamos estimar a probabilidade de falha de um tipo de circuito integrado, denominado componente-B, em suas condições normais de uso, em 15 anos de operação. Sabe-se que a falha desse circuito é caracterizada pela queda de 0,5 decibéis de sua potência inicial. Porém, nas condições normais de uso em que a temperatura é de 80°C, a degradação da potência é muito lenta. Então, para realizar esse estudo, uma amostra de 34 circuitos foi submetida a um teste de degradação acelerado durante um período máximo de 6 meses. Para acelerar a degradação do circuito e conseqüentemente a ocorrência da falha, foram definidos três níveis de temperatura (150°C, 195°C e 273°C) como níveis de estresse.

Os pesquisadores acreditam que a geração de potência do componente-B é dirigida por uma reação química simples com taxa de reação estabelecida pela Lei de Arrhenius. Então, temos que:

$$y_{ij} = D_{ij}(t, temp) + \varepsilon_{ij} = D_{\infty} \left[ 1 - \exp \left( -R(temp_U) \times AF(temp) \times t \right) \right] + \varepsilon_{ij}$$

ou

$$\log(y_{ij}) = \log(D_{ij}(t, temp)) + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m_i$$

O vetor de coeficientes  $\beta$  do modelo é dado por  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = [\log(R(temp_U)), \log(-D_\infty), E_a]$  em que a energia de ativação  $E_a$  é um parâmetro fixo (depende apenas de propriedades do material),  $\log(R(temp_U))$  e  $\log(-D_\infty)$  são efeitos aleatórios (variam com a temperatura e de unidade para unidade do produto).

A estimação dos parâmetros do modelo foi realizada através da função *nlme* do S-PLUS, utilizando a temperatura de 195°C de forma que  $\beta_1 = \log(R(195))$ ,  $\beta_2 = \log(-D_\infty)$ ,  $\beta_3 = E_a$ . O modelo assume que  $(\beta_1, \beta_2)$  seguem uma distribuição normal bivariada. As

estimativas são:  $\hat{\mu}_\beta = \begin{pmatrix} -7,572 \\ 0,3510 \\ 0,670 \end{pmatrix}; \hat{\Sigma}_\beta = \begin{pmatrix} 0,15021 & -0,02918 & 0 \\ -0,02918 & 0,01809 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \hat{\sigma}_\varepsilon = 0,0233$ . A

Figura 8 apresenta as medidas de degradação observadas e a curva de degradação encontrada para cada unidade.

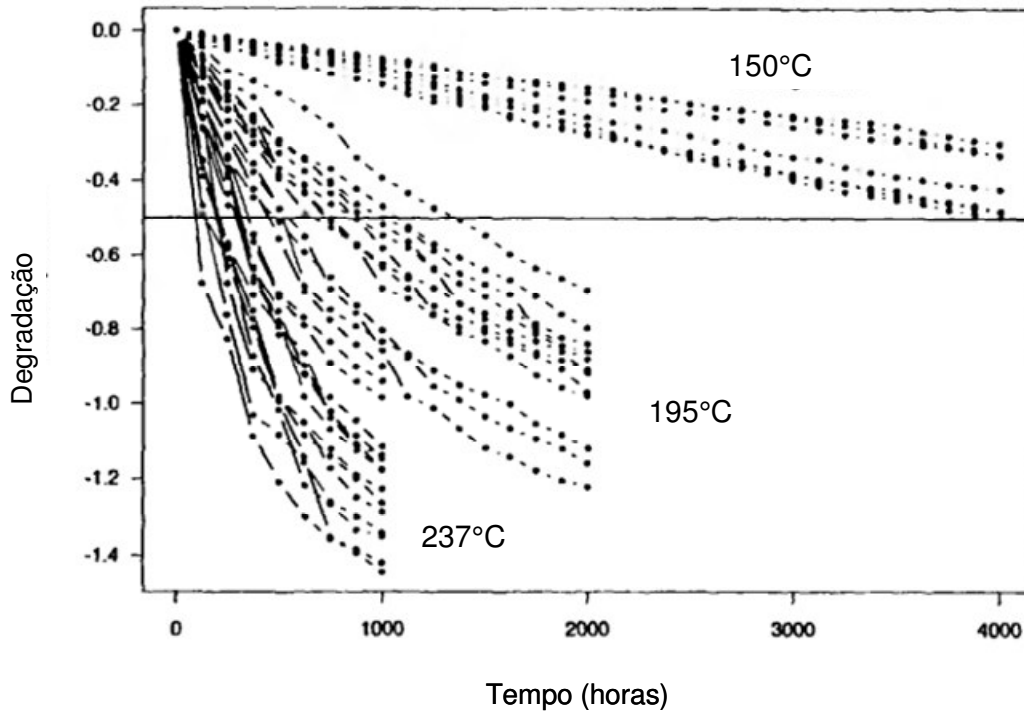


Figura 8: Curva de degradação para as unidades testadas nos três níveis de temperatura

A Figura 9 apresenta as estimativas de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  para as 34 unidades, indicando que a distribuição normal bivariada é razoável para esse modelo.

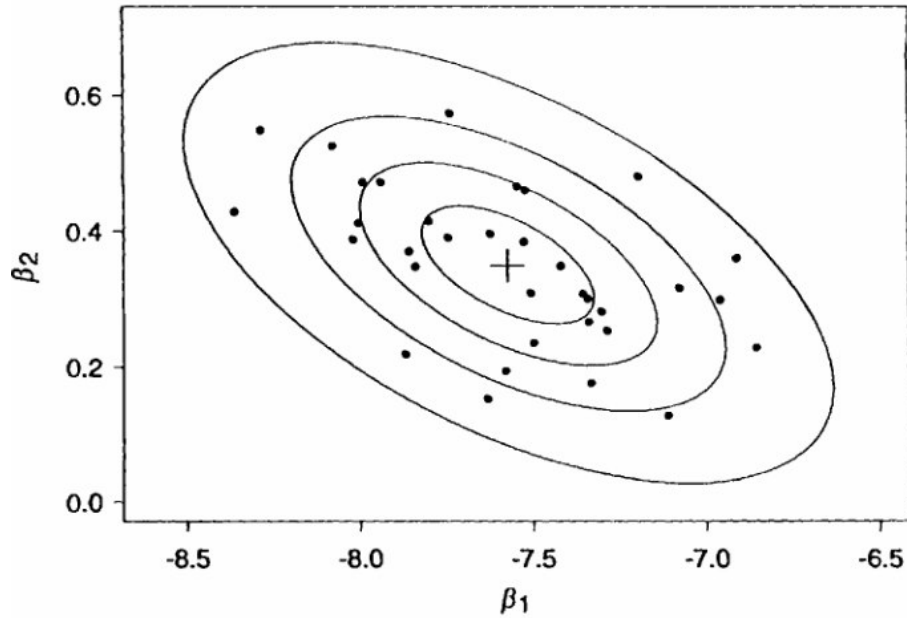


Figura 9: Estimativas dos parâmetros obtidas pela função nlme

## 2.2 Estimação de $F(t)$

Assim como nos testes de degradação, a distribuição do tempo de falha pode ser definida a partir de  $D_{ij}$  e do nível crítico  $D_f$  constante, ou seja, uma unidade falha no tempo  $t$  se o nível de degradação atinge  $D_f$  nesse tempo  $t$ . Se  $D(t)$  é decrescente (as medidas de degradação decrescem com o tempo), então  $F(t) = P(T \leq t) = P(D(t, \beta_1, \dots, \beta_k) \leq D_f)$ .

Meeker, Escobar e Lu (1998) apresentam quatro métodos de obtenção de  $F(t)$ : método analítico, método numérico, simulação Monte Carlo e estimação direta fazendo  $\hat{F}(t) = F(t; \hat{\mu}_\beta, \hat{\Sigma}_\beta)$  nos casos em que  $F(t)$  é expressa de forma fechada.

O método do percentil bootstrap com correção do viés descrito na seção 1.2.3 pode ser utilizado para obter intervalos de confiança para  $F(t)$  numa determinada temperatura.

**Exemplo** (continuação): A Figura 10 apresenta  $\hat{F}(t)$  para 80°C, 100°C, 150°C e 195°C obtidas pelo método numérico no caso em que  $D_f = -0,5$ .

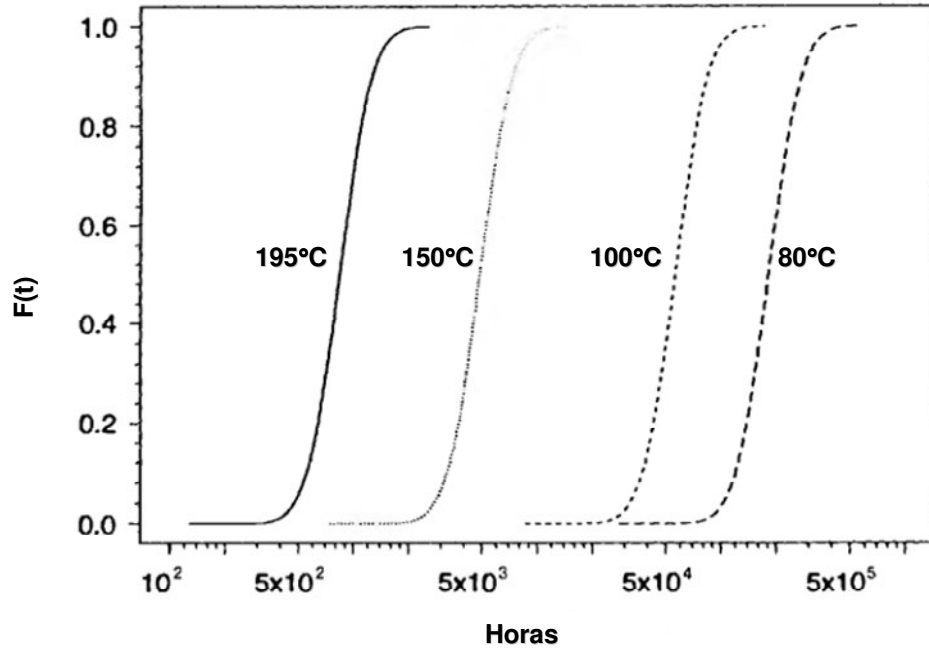
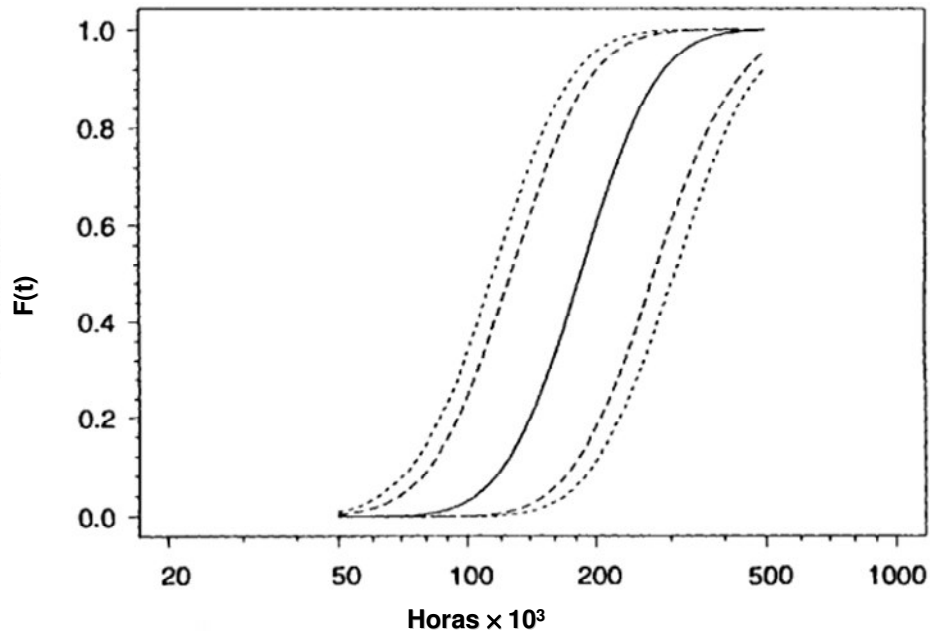


Figura 10: Estimativas de  $F(t)$  para quatro níveis de temperatura obtidas pelo método numérico

A Figura 11 apresenta os intervalos de 80% e 90% de confiança para  $F(t)$  na temperatura de 80°C. Especificamente, a estimativa pontual para  $F(t)$  em 130.000 horas é 0,14 e o intervalo de confiança de 90% é [0,005; 0,64]. A amplitude desse intervalo é grande devido ao pequeno número de unidades testadas na temperatura de 150°C e à grande extrapolação exigida para estimar  $F(t)$  em 80°C.



*Figura 11: Intervalos de 80% e 90% de confiança para  $F(t)$  na temperatura de 80 °C*

O método da aproximação descrito na seção 1.2.1 também pode ser utilizado nos testes de degradação acelerados, com os pseudo tempos de falha obtidos sendo analisados de acordo com as técnicas de testes de vida acelerados. Meeker e Escobar (1998) apresentam um exemplo que analisa o desgaste de uma liga de metal utilizando peso como variável de estresse.

Escobar e Meeker (2006) apresentam vários exemplos ilustrativos: relação de Eyring para descrever o efeito da temperatura na taxa de reação, modelo de degradação com duas reações separadas contribuindo com a falha, onde o modelo de Arrhenius não é apropriado, umidade e voltagem como variável de estresse, modelos fotodegradação. Em outra linha de pesquisa, Shiau e Lin (1999) propõem a análise de dados de testes de degradação acelerados através de regressão não paramétrica.

## Conclusão e Discussões

Este trabalho apresentou os principais métodos de análise de dados obtidos em testes de degradação tradicional e acelerado. Uma aplicação utilizando um banco de dados real foi realizada e, a partir daí, demonstramos algumas dificuldades e pontos a serem estudados com mais rigor.

Como exemplo, citamos o fato do método numérico de estimação de  $F(t)$  ter produzido estimativas negativas para o tempo de falha em função da distribuição do parâmetro aleatório do modelo. Essa situação foi ainda mais grave ao obter estimativas bootstrap para  $F(t)$  e construir intervalos de confiança (motivo pelo qual não apresentamos os resultados nesse texto).

Além disso, apesar da trajetória de degradação ser aparentemente linear, o modelo ajustado pela função *lme* não parece ser adequado quando analisamos os resíduos produzidos por esse modelo. Talvez um modelo não linear (*nlme*) seja mais apropriado, mas ele não foi avaliado aqui por restrições de tempo e conhecimento no *software* utilizado.

Apesar das dificuldades encontradas, esse trabalho foi muito produtivo no sentido de conhecer os testes de degradação, tão importantes em estudo de confiabilidade, explorar os *softwares* e levantar possíveis focos de pesquisas futuras.

## Referências

- Efron, B. (1985) Bootstrap Confidence Intervals for a Class of Parametric Problems. *Biometrika*, 72, 45-58.
- Efron, B. and Tibshirani, R. (1993) *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall, New York, London.

- Escobar, L. A., Meeker, W. Q. (2006) A Review of Accelerated Test Models. *Statistical Science*, 21, 552-577.
- Meeker, W. Q. Escobar, L. A. *Statistical Methods for Reliability Data*. New York, John Wiley & Sons, 1998.
- Meeker, W. Q., Escobar, L. A., and Lu, C. J. (1998) Accelerated degradation tests: modeling and analysis. *Technometrics*, 40, 89-99.
- Meeker, W. Q., LuValle, M. J. (1995) An accelerated life test model based on reliability kinetics. *Technometrics*, 37, 133-146.
- Nelson, W. (1990) *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*. New York: John Wiley & Sons.
- Santos, T. R. (2007) *Testes de Degradação sob o Enfoque Bayesiano*. Belo Horizonte: Departamento de Estatística – UFMG.
- Palmer, M. J., Phillips, B. F, Smith, G. T. (1991) Application of Nonlinear Models with Random Coefficients to Growth Data. *Biometrics*, 47, 623-635.
- Pinheiro, J.C., Bates, D.M. (2000) *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*. New York: Springer.
- Shiau, J.J.H., Lin, H.H. Analyzing Accelerated Degradation Data by Nonparametric Regression. *IEEE Transactions on Reliability*, 48, 2, 149-158.