

# Modelos Estatísticos para Manutenção Baseada na Condição

Maxstaley Leninyuri Neves

[maxneves@ufmg.br](mailto:maxneves@ufmg.br)

Métodos Estatísticos em Confiabilidade e Manutenção – 2007/2

Professores: Marta A. Freitas e Enrico A. Colosimo

Programas de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Estatística

Universidade Federal de Minas Gerais

19 de Novembro de 2007

## Resumo

O foco deste trabalho é a definição de políticas ótimas de manutenção preventiva em função da condição dos equipamentos. Por política ótima, entendemos um conjunto de regras de apoio à decisão de intervir em um determinado equipamento. O objetivo é minimizar o custo total de operação do equipamento ao longo do tempo (horizonte infinito).

Consideramos o tempo discreto e, para cada período  $k$ , é estimado o estado do equipamento (e.g. via inspeção) para decidir se cabe mantê-lo em funcionamento (ação de continuar) ou efetuar sua manutenção preventiva (ação de parar). Utilizaremos como ferramenta de análise a programação dinâmica estocástica, uma vez que esta nos permite captar as incertezas inerentes ao problema e fornecer um conjunto de decisões contingenciadas na observação do equipamento. Uma das características do nosso modelo é que captamos o fato de a observação do equipamento poder não refletir o estado real do mesmo. Em outras palavras, ilustramos o fato de os decisores poderem estar agindo em função de uma informação imprecisa.

Para adequar os parâmetros do modelo para analisar um problema específico, utilizamos uma técnica baseada nos Modelos de Markov Ocultos. Isto permite que ajustemos os parâmetros a partir das bases de dados existentes em sistemas de automação industrial encontrados nas indústrias. Validaremos nossa metodologia com alguns dados numéricos experimentais.

**Palavras-chave:** política de manutenção preventiva, decisão sob incerteza, Programação Dinâmica-Estocástica, Controle Ótimo, Modelos de Markov Ocultos.

## 1 Introdução

As atividades ligadas à manutenção de equipamentos fabris são fortemente responsáveis, senão essenciais, ao bom funcionamento de uma indústria. Dentre essas atividades destacam-se os programas de manutenção preventiva que visam otimizar o uso e a operação dos equipamentos através da realização de intervenções planejadas. O objetivo destas intervenções é reparar os equipamentos antes que os mesmos falhem, garantindo, portanto, o funcionamento regular e permanente da produção. Se por um lado a necessidade da manutenção preventiva é clara, por outro a programação de tais intervenções não é tão evidente. Uma grande dificuldade reside na elaboração de um planejamento que determine quando realizar a manutenção preventiva.

Por sua importância prática, este problema vem motivando estudos tanto por parte do setor produtivo, em função da demanda existente, quanto da academia, interessada na construção de ferramentas para lidar com estes problemas. De maneira geral, o planejamento da manutenção preventiva é feito com base:

- No tempo (manutenção preventiva programada), sendo realizada em intervalos de tempos pré-estabelecidos (para detalhes ver, por exemplo, [Smith, 1993, Gertsbakh, 2000, Moubray, 1993, Sellitto, 2005]); ou
- Na condição do equipamento (manutenção preventiva preditiva), onde procura-se acompanhar o desgaste dos equipamentos, através da análise de sintomas e/ou de uma estimativa do estado de degradação, visando determinar o momento adequado de realizar a intervenção (para detalhes ver, por exemplo, [Chen et al., 2003, Chiang and Yuan, 2001, Gertsbakh, 2000, Chen and Trivedi, 2005]).

É importante salientar que estes enfoques são complementares e não concorrentes. Como veremos na próxima seção, cada enfoque apresenta certas vantagens e desvantagens para lidar com peculiaridades de algumas situações reais.

Neste trabalho, propomos uma metodologia para formular políticas de manutenção preventiva em equipamentos cuja condição pode ser estimada. Esta estimação pode ser ruidosa (não perfeita), já que a hipótese de conhecimento da condição real do equipamento quase sempre não é factível. Uma política dita a forma com que as ações devem ser escolhidas ao longo do tempo em função das informações coletadas. Estas políticas são ótimas sob o ponto de vista do custo de operação do equipamento (em geral inversamente proporcional à degradação) e ao risco de não operação (lucro cessante) decorrente da interrupção do mesmo, em caso de falha<sup>1</sup>. Em sistemas onde pode-se observar a situação do equipamento antes decidir sobre a ação a ser tomada, acreditamos que o uso desta informação pode propiciar uma abordagem mais robusta e eficiente para a decisão de intervir ou não no mesmo.

## 2 Descrição e delimitação do problema

Políticas em manutenção preventiva podem ser classificadas em duas classes [Chen et al., 2003]: a 1º classe lida com sistemas onde não é feita uma inspeção dos equipamentos. Assim, esta classe diz respeito a equipamentos onde são possíveis apenas dois estados: “falhado” / “não-falhado”. Como exemplo desta política, destaca-se a determinação da periodicidade de manutenção preventiva baseada na confiabilidade dos equipamentos. Na 2º classe, uma inspeção sobre o estado do equipamento é possível, de forma não intrusiva, e esta informação pode ser utilizada na formulação da decisão de intervir ou não no equipamento. Vários autores entendem esta 2º classe como manutenção preditiva (ver, e.g., [Smith, 1993, Pinto and Xavier, 2001]). A seguir detalharemos melhor estas duas classes.

<sup>1</sup>Entendemos como falha a incapacidade do equipamento de executar as operações as quais lhe foram designadas. Alguns trabalhos referenciam esta falha como “falha operacional”.

## 2.1 Políticas de manutenção preventiva baseadas no tempo (programada)

Neste enfoque busca-se definir, para um dado equipamento, a frequência na qual se deve realizar a manutenção preventiva no mesmo, visando geralmente atingir um nível mínimo de confiabilidade desejado. Em outros casos, visa-se minimizar o custo total de operação ao longo tempo. Neste caso, este custo diz respeito ao lucro cessante decorrente da não operação do equipamento, em caso de falha. Note que os intervalos entre as intervenções não precisam necessariamente iguais. Como exemplo desta abordagem, podemos citar os trabalhos de [Sellitto, 2005, Motta, 1999, Ulysséa, 2002].

Esta abordagem geralmente é baseada em modelos de confiabilidade, partindo da análise do tempo de operação até a falha (também conhecido como tempo de vida), modelando-os segundo uma distribuição de probabilidade apropriada, caracterizando desta forma a confiabilidade do equipamento. Portanto, a teoria da confiabilidade classifica um dado equipamento como “bom” / “ruim” (i.e. “não-falhado” / “falhado”), não admitindo estados intermediários. De posse do modelo, parte-se então para a definição da periodicidade das intervenções segundo um nível mínimo de confiabilidade requerido, que é a entrada da análise, de forma iterativa:

1. Fixa-se uma periodicidade arbitrária;
2. Avalia-se a probabilidade de falha do equipamento;
3. Caso o nível de confiabilidade encontrado seja diferente daquele desejado, retorna-se a (2) diminuindo ou aumentando o intervalo entre as intervenções.

Em muitas situações práticas é impossível, ou economicamente inviável, estimar o estado de degradação do equipamento. Neste caso, classificamos-o apenas como “não-falhado” / “falhado”. Em tais situações, esta abordagem apresenta-se como a mais adequada, pois ela possui como parâmetros apenas os tempos de operação até a falha, dados que são normalmente coletados e armazenados nas empresas. Entretanto, em alguns contextos, pode-se observar o estado de degradação dos equipamentos de maneira não intrusiva (i.e. sem interferir na sua condição). Neste caso, esta informação, mesmo incerta, pode ser utilizada na tomada de decisão sobre a ação que deve ser escolhida.

## 2.2 Políticas de manutenção preventiva baseadas na condição (preditiva)

Esta classe de políticas busca explorar o fato de que a maior parte das falhas desenvolve-se ao longo do tempo, não ocorrendo instantaneamente, mas sim decorrente de um processo de envelhecimento que evolui lentamente, em estágios, no qual o equipamento vai se deteriorando e, consequentemente, alterando suas características até alcançar o estado de falha. Assim, a inclusão de estados intermediários de degradação é mais facilmente implementável através desta técnica.

[Smith, 1993] salienta que a manutenção preventiva-preditiva permite um aproveitamento melhor do período de vida útil dos equipamentos, tendo em vista que procura-se realizar as ações mais próximo da ocorrência da falha funcional dos mesmos. De fato, uma diferença entre a abordagem baseada na condição e daquela baseada no tempo é que na segunda realiza-se a intervenção independentemente das condições do equipamento.

A partir da estimação da condição do equipamento, busca-se portanto determinar se deve-se ou não realizar a manutenção no mesmo. Tem-se portanto a situação apresentada abaixo (figura 1). Note que esta figura enfatiza a ideia que a condição percebida de um equipamento *pode* ser diferente da real.

A leitura sobre a condição do equipamento pode ser feita periodicamente, por exemplo, no momento da tomada de decisão de intervir ou não. Observe ambas abordagens (programada e preditiva) não contemplam a descoberta de falhas ocultas, que segundo [Smith, 1993], faz parte de outro objeto de estudo: a manutenção detectiva (e.g. testes nos equipamentos).

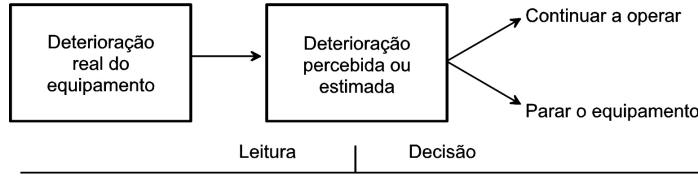


Figura 1: O processo de decisão sobre a intervenção.

### 2.3 O problema estudado

Nosso problema consiste em definir políticas de manutenção preventiva baseadas na condição dos equipamentos que minimizem o seu custo total de operação no horizonte de tempo considerado. Este custo é composto por:

- Custo de operação: representa estritamente o custo de operação do equipamento. Geralmente este custo é função do estado de degradação real do equipamento: assim, quanto mais degradado estiver o equipamento, maior será seu custo de operação;
- Custo de falha: este custo quantifica o lucro cessante incorrido pela não operação do equipamento.

O tempo é discreto (amostrado) e, a cada instante, obtém-se uma estimativa do estado de deterioração do equipamento. Esta estimativa pode ser obtida, por exemplo, através de um parâmetro de controle (e.g. nível de vibração) e assume-se que o mesmo é diretamente relacionado com o modo de falha em estudo. Uma política é composta por diversas regras, onde cada regra dita a forma com que as ações devem ser escolhidas ao longo do tempo, estabelecendo portanto uma política de controle que define, a partir das leituras da condição, quando intervir no equipamento.

## 3 Modelo matemático

Considere um equipamento que possui múltiplos estágios de deterioração  $1, 2, \dots, L$ , ordenados do estado perfeito (1) até o estado completamente deteriorado ( $L$ ). A evolução ao longo do tempo da condição do equipamento segue um processo estocástico. Sob a hipótese de que o estado futuro depende apenas do estado presente (i.e., o passado encontra-se “embutido” no presente), esta evolução caracteriza um processo estocástico markoviano. Assim, assume-se que o próximo estado de deterioração do equipamento ( $k+1$ ) depende apenas do seu estado presente ( $k$ ).

Seja  $\{x_k\}$  uma cadeia de Markov<sup>2</sup>, onde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Utiliza-se aqui  $x_k$  para denotar o estado do equipamento (ou seja: a condição real do mesmo) no período  $k$ , e  $\{x_k\}$  para modelar o deterioramento do equipamento ao longo do tempo. Assim, o espaço de estado de  $x_k$  é  $S = 1, 2, \dots, L$ , com a probabilidade associada de transição  $p_{ij}$  definida como:  $p_{ij} = \Pr[x_{k+1} = j | x_k = i] = \Pr[x_1 = j | x_0 = i]$ , pois consideramos que a cadeia é estacionária.

Admitindo que o equipamento só pode ter sua condição melhorada mediante uma intervenção, podemos escrever as probabilidades de transição como:

$$p_{ij} = \begin{cases} \Pr[x_{k+1} = j | x_k = i] & \text{se } j \geq i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

Esta transição (equação 1) reflete o fato de que, uma vez degradado, o equipamento *não* pode ter sua condição melhorada ao longo do tempo (envelhecimento). Naturalmente,  $\sum_{j=i}^L \Pr[x_{k+1} = j | x_k = i]$  deve ser igual a 1, para todo  $i$ . Além disso é, necessário o conhecimento da distribuição

<sup>2</sup>Por conveniência usaremos  $\{x_k\}$  minúsculo no lugar do maiúsculo, como comumente utilizado.

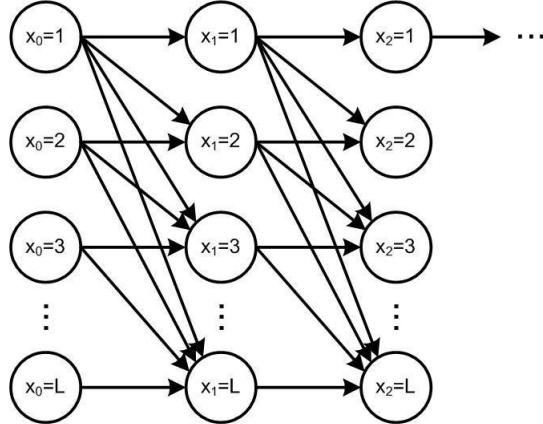


Figura 2: O processo de evolução da condição do equipamento. As probabilidades de transição foram omitidas por simplificação.

de probabilidade dos estados no estágio inicial, ou seja  $x_0$ . Vamos denotar a distribuição probabilidades do estado inicial do equipamento por  $\omega$ . De posse destas informações, podemos estruturar a evolução da condição real do equipamento ao longo do tempo, como ilustrado na figura 2.

Como assumimos que não possuímos informação completa sobre a condição do equipamento, a cada estágio, devemos fazer a estimativa da mesma. Assim, construímos a medida da condição  $z_k$ , onde  $z_k$  possui sua distribuição de probabilidades condicionada a  $x_k$  (estado atual). Denotaremos o espaço de estados de  $z_k$  por  $Z = \{\hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{L}\}$ , representando o conjunto de leituras possíveis. A distribuição de probabilidades da leitura da condição é denotada por  $b_{x_k}(z_k)$ , representando a probabilidade de ler-se  $z_k$  dado que a condição real é  $x_k$ . A figura abaixo ilustra este fato.

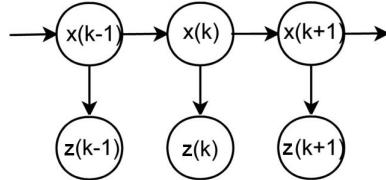


Figura 3: O processo de evolução da condição real do equipamento ( $x_k$ ) e estimativa dessa condição ( $z_k$ ).

Define-se o vetor de informações  $I_k$  para cada estágio  $k$ . Este vetor representa todas as leituras até o instante  $k$  e é definido recursivamente pela equação abaixo:

$$\begin{cases} I_0 = z_0 \\ I_k = (I_{k-1}, z_k) & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2)$$

---

Exemplo: suponha que  $x_k$  pode assumir dois valores: bom(B) ou ruim(R). Assim,  $z_k$  também assumirá dois valores: Aparentemente bom(AB) e aparentemente ruim(AR). Assim, a distribuição de  $z_k$  pode ser caracterizada com as probabilidades:  $\Pr[z_k = AB|x_k = B]$ ,  $\Pr[z_k = AB|x_k = R]$  (“falso positivo”),  $\Pr[z_k = AR|x_k = B]$  (“falso negativo”) e  $\Pr[z_k = AR|x_k = R]$ .

---

Pode-se portanto caracterizar o modelo do equipamento por  $\lambda = (A, B, \omega)$ , onde:

- A: probabilidades de transição  $p_{ij}$ ;
- B: probabilidades de leitura  $b_x(z)$ ;

- $\omega$ : distribuição de probabilidades do estado inicial  $x_0$ .

### 3.1 Considerações iniciais

Sob estas hipóteses vamos construir um procedimento de apoio à decisão, utilizando a programação dinâmica estocástica como ferramenta de análise, com o objetivo de captar as incertezas inerentes ao problema e fornecer um conjunto de decisões contingenciadas na observação da condição do equipamento. Considera-se duas possíveis ações gerenciais tomadas em cada instante  $k$  (denotadas por  $u_k$ ): continuar a operar o equipamento ou parar e efetuar a manutenção preventiva.

Este procedimento consiste nos passos a seguir.

#### 3.1.1 Discretização e classificação da condição do equipamento

Deve-se determinar, com base na situação analisada<sup>3</sup>, o número de possíveis estados do equipamento ( $L$ ), as correspondentes leituras, bem como sua classificação a ser feita a partir da observação do parâmetro de controle, caso este seja contínuo.

---

Exemplo: classificou-se um equipamento em 4 possíveis estados  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ , indo de “tão bom quanto novo” a “completamente falhado”. O parâmetro de controle foi classificado como segue:

Parâmetro de controle observado	$z_k$	Significado denotado
$0 \leq \theta_k < 0.3$	$\hat{1}$	Deter. mínima percebida
$0.3 \leq \theta_k < 0.7$	$\hat{2}$	Deter. razoável percebida
$0.7 \leq \theta_k < 1$	$\hat{3}$	Grande deter. percebida
$\theta_k \geq 1$	$\hat{4}$	Equipamento falhado

Tabela 1: Exemplo de classificação das observações.

---

#### 3.1.2 Definição de uma função de custo do equipamento por período

Como já mencionado, consideramos uma função de custo composta pelo custo de operação e de falha. Ela é calculada em função da condição do equipamento ( $x_k$ ) e da ação tomada ( $u_k$ ):

- Para  $x_k \in 1, \dots, L - 1$ :
  - Para  $u_k = I$  (interromper a operação):  $g(x_k, u_k)$  representa o custo de manutenção preventiva (incluindo o lucro cessante decorrente da não operação do equipamento durante a manutenção), que pode ser escrito em função da condição real do sistema ( $x_k$ ): normalmente, quanto mais deteriorado, maior será o custo da intervenção;
  - Para  $u_k = P$  (continuar a operação):  $g(x_k, u_k)$  representa o custo de operação do equipamento, que também pode ser escrito em função da condição real do sistema ( $x_k$ ): novamente, quanto mais deteriorado, geralmente maior será o custo da operação;
- Para  $x_k = L$  (falhado):
  - Para  $u_k = I$  (interromper a operação):  $g(x_k, u_k)$  representa o custo de manutenção corretiva do equipamento (incluindo o lucro cessante decorrente da não operação do equipamento durante a manutenção);

---

<sup>3</sup>Uma metodologia para tal classificação fará objeto de estudos futuros.

- Para  $u_k = P$  (continuar a operação):  $g(x_k, u_k)$  representa o custo de não operação do equipamento, ou seja: o lucro cessante. Note que, geralmente, espera-se que esta decisão não seja ótima, pois ela implica em não mais operar o equipamento;

### 3.1.3 Dinâmica da tomada de decisão

A tomada de decisão é feita no início de cada período e pode ser resumida nas etapas abaixo:

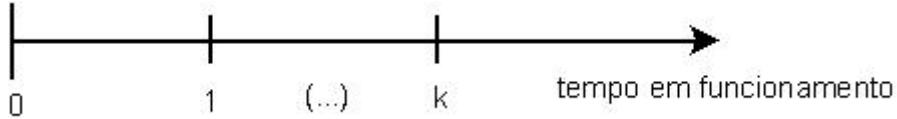


Figura 4: Dinâmica da tomada de decisão.

- No instante 0 o equipamento começa a funcionar com estado inicial  $x_0$  (que, como descrito, pode ser aleatório), efetua-se a leitura da sua condição  $z_0$  e decide-se a continuar a operação do mesmo (ação  $u_0$ );
- No instante 1 o equipamento encontra-se no estado  $x_1$ , efetua-se a leitura da sua condição  $z_1$  e decide-se a continuar a operação do mesmo (ação  $u_1$ );
- No instante  $k$  o equipamento encontra-se no estado  $x_k$ , efetua-se a leitura da sua condição  $z_k$  e decide-se a parar o equipamento e efetuar a manutenção (ação  $u_k$ ). Após a intervenção, o equipamento retorna ao estado inicial  $x_0$ . Ou seja, o equipamento retorna ao instante 0 e reinicia-se sua operação.

Estamos portanto interessados determinar o nível máximo que a condição estimada ( $z_k$ ) pode atingir (*threshold*). A partir deste nível, torna-se mais interessante economicamente interromper a operação e efetuar a manutenção.

## 3.2 Métodos computacionais

Representando o custo total equipamento ao longo do tempo por  $J$ , deseja-se encontrar uma política  $\pi$  tal que  $J^*(x_0) = \min J_\pi(x_0)$ , sendo  $J_\pi(x_0)$  (custo da política  $\pi$  a partir do estado inicial  $x_0$ ) igual a

$$J_\pi(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{k=0}^N g(x_k, u_k) \right]. \quad (3)$$

Uma política (ou lei de controle) consiste na seqüência de funções  $\mu_k$  que fazem o mapeamento da informação disponível ( $I_k$ ) e a decisão a ser tomada, ou seja:  $\mu_k : I_k \mapsto u_k$ .

Problemas em programação dinâmica-estocástica em horizonte finito são resolvidos pela lógica retroativa (*backward*) [Bertsekas, 1995, Puterman, 1994, Stern, 2006]: parte-se do estágio terminal (denotado por  $N$ ) em direção ao estágio inicial. A cada estágio  $k$  e para cada cenário possível  $I_k$ , coleta-se qual a decisão ótima  $u_k$  a ser tomada, obtendo-se  $\mu_k$ . Ao aplicar este procedimento em todos os estágios, obtém-se uma política  $\pi$  que é composta pelo conjunto de regras de decisão  $\mu_0, \dots, \mu_{N-1}, \mu_N$  (ver equação 4):

$$\begin{aligned} J_N(I_N) &= \min_{u_N} \{E[g(x_N, u_N)|I_N, u_N]\}, \quad \forall I_N, \\ J_k(I_k) &= \min_{u_k} \{E[g(x_k, u_k)|I_k, u_k] + E[J_{k+1}(I_{k+1}, z_{k+1})|I_k, u_k]\}, \quad \forall I_k, \quad k = N-1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Apesar de simples, geralmente este procedimento apresenta um elevado custo computacional, sobretudo quando  $N$  é grande (o que é conhecido como “maldição da dimensionalidade”). Entretanto, esta abordagem não é aplicável a problemas de horizonte infinito ( $N \rightarrow \infty$ ) como este. Neste caso, é necessário recorrer a algoritmos mais sofisticados. Neste trabalho vamos utilizar a técnica de iteração de valor (*value iteration*).

### 3.2.1 Algoritmo de iteração de valor

A iteração de valor deriva do princípio de otimalidade de Bellman (para mais detalhes ver [Sutton and Barto, 1998, Bertsekas, 1995, Puterman, 1994]). Seu objetivo é obter, para cada possível estado  $x$ , uma aproximação para o menor custo total de operação do equipamento ao longo do tempo. Formalmente, a iteração de valor requer um número infinito de iterações para convergir. Na prática, entretanto, sob algumas hipóteses, o método pode ser truncado em tempo finito obtendo um valor muito próximo. Caso estas hipóteses não forem satisfeitas, o método retornará  $J^*(x_0) = \infty$ ,  $\forall x_0 \in S$ .

**Proposição 1** (Convergência do algoritmo de iteração de valor). *O algoritmo de iteração de valor converge se as seguintes hipóteses forem satisfeitas:*

- com probabilidade 1 a ação  $u_k = I$  será tomada com  $k$  finito,
- após a ação  $u_k = I$  ser tomada, o sistema retorna ao estado inicial:  $x_{k+1} = x_0$ .

*Demonstração.* Uma demonstração formal foge ao escopo deste trabalho e fará objeto de trabalhos futuros. Entretanto, pode-se verificar que estas condições são satisfeitas sempre que

1.  $g(x_k = L, u_k = P) > g(x_k \neq L, u_k = P)$ ,
2. o estado  $L$  é alcançável e  $p_{LL} = 1$ ,

for válido (como neste caso). □

A iteração de valor consiste a calcular uma aproximação de  $J^*(x_0)$  através das equações recursivas

$$\begin{aligned} J_{k+1}(x) &= \min_u \mathbb{E}[g(x_{k+1}, u) + J_k(x_{k+1}) | x_k = x, u_k = u] \\ &= \min_u \sum_{x'} p_{xx'}(u)(g(x', u) + J_k(x')), \end{aligned} \tag{5}$$

para todo  $x \in S$ . A medida que  $k$  cresce,  $|J_{k+1}(x) - J_k(x)| \rightarrow 0$ ,  $\forall x \in S$  (veja ilustração na figura 5). A partir da equação 5, propõe-se o algoritmo 1.

A política  $\pi$  representa uma política estacionária ( $\pi = \{\mu\}$ ) e determinística (para um dado  $x$ , deve-se tomar uma decisão  $u$ ). Através do algoritmo de iteração de valor, obtém-se o *threshold* da condição real do equipamento, ou seja: o valor limite que a condição real do equipamento pode atingir com a ação de continuar a operação ( $u_k = P$ ). Logo, a partir de tal valor, é mais interessante interromper a operação e efetuar a manutenção (ação  $u_k = I$ ).

Entretanto, a função  $\mu$  obtida faz o mapeamento entre o  $x$  e  $u$ . Para estimar o estado real a partir das informações coletadas, pode-se utilizar

$$\Pr[x_k = x | I_k] = \frac{\Pr[x_k = x, I_k]}{\Pr[I_k]}. \tag{6}$$

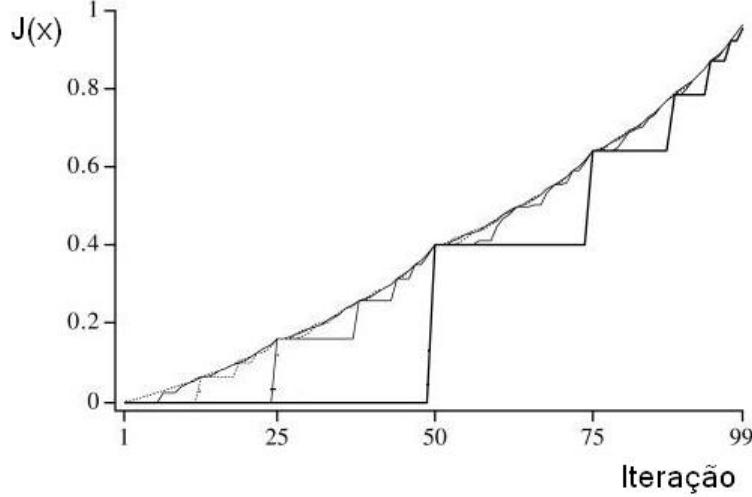


Figura 5: Ilustração da iteração de valor.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo de iteração de valor

---

```

1:  $J(x) \leftarrow 0, \quad \forall x \in S$                                 ▷ início com  $J$  arbitrário
2: repita
3:    $\Delta \leftarrow 0$ 
4:   para todo  $x \in S$  faz                                ▷ para todo estado
5:      $v \leftarrow J(x)$ 
6:      $J(x) \leftarrow \min_{u_k} \sum_{x' \in S} p_{xx'}(u)(g(x', u) + J_k(x'))$ 
7:    $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - J(x)|)$ 
8: enquanto  $\Delta < \theta$                                 ▷ precisão desejada
9: retorne  $\mu(x) = \arg \min_{u_k} \sum_{x' \in S} p_{xx'}(u)(g(x', u) + J(x'))$ 

```

---

### 3.3 Exemplo numérico

Visando validar nossa metodologia, vamos aplicar a técnica proposta no seguinte problema<sup>4</sup>: deseja-se monitorar um equipamento que está sujeito à vibração. Através do sistema de informação obtém-se, a cada hora, medidas da vibração do equipamento. Sabe-se que a condição do equipamento é diretamente proporcional à vibração submetida e deseja-se monitorar a vibração para determinar quando efetuar a manutenção no equipamento.

A equipe de engenharia propõe que a condição seja dividida em quatro estados:

Parâmetro de controle observado	$z_k$
$0 \leq \theta_k < 0.3$	$\hat{1}$
$0.3 \leq \theta_k < 0.7$	$\hat{2}$
$0.7 \leq \theta_k < 1$	$\hat{3}$
$\theta_k \geq 1$	$\hat{4}$ (aparentemente falhado)

Tabela 2: Exemplo numérico: classificação do parâmetro de controle.

O estado inicial do equipamento é  $x_0 = 1$  e as probabilidades de transição da condição  $p_{ij}$  e de estimativa da condição  $b_x(z)$  são as seguintes:

<sup>4</sup>Os experimentos foram feitos em um computador com processador Intel® Pentium® 4 3.06GHz e 2 GB de memória RAM, utilizando Windows® XP SP2. O algoritmo foi implementado em MatLab®.

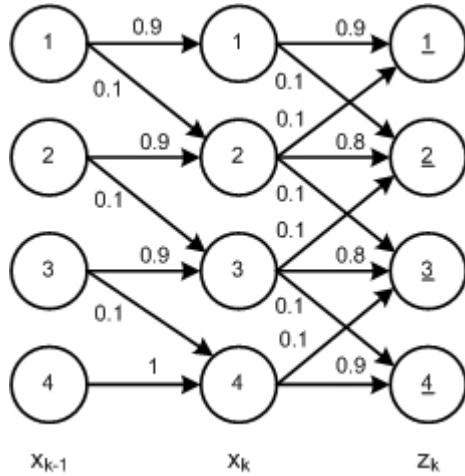


Figura 6: Exemplo numérico: probabilidades de transição e leitura.

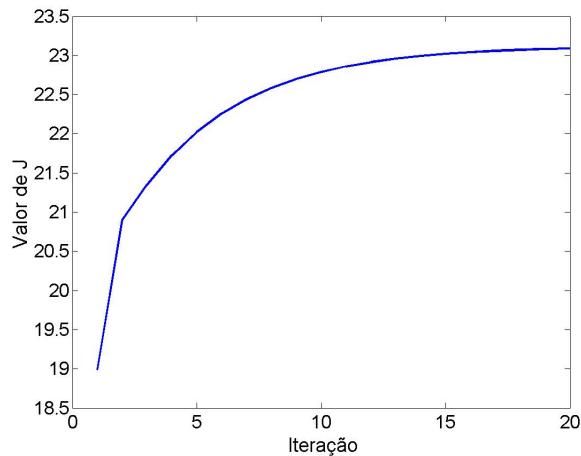
A função de custo  $g(x_k, u_k)$  considerada:

Estado real ( $x_k$ )	Ação ( $u_k$ )	
	Prosseguir	Interromper
1	1	5
2	1.1	5
3	1.21	5
4 (falhado)	20	10

Tabela 3: Exemplo numérico: classificação do parâmetro de controle.

Avaliamos a técnica nos seguintes cenários:

1.  $I_2 = (z_0, z_1, z_2) = (\hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$ : foram necessárias 20 iterações até o algoritmo de iteração de valor convergir (utilizando  $\theta = 0.01$ , tempo computacional desprezível):



Obteve-se as seguintes condições limites de operação:

Estado real ( $x$ )	Decisão ótima ( $u$ )	Custo esperado até a interrupção da operação
1	Prosseguir	23.5711
2	Prosseguir	25.9251
3	Interromper	27.3264
4	Interromper	42.3264

A partir do vetor de informações, estima-se a condição atual do equipamento (usando 6) e, combinando com a tabela anterior, obtém-se a “esperança” do custo esperado:

Estado real ( $x$ )	Probabilidade	Custo esperado	Decisão ótima
1	0.986468	23.2483	Prosseguir
2	0.013532	0.3551	Prosseguir
3	0.000000	0.0000	Interromper
4	0.000000	0.0000	Interromper

Deve-se escolher a decisão que está relacionada ao maior custo esperado. Portanto, a ação ótima  $u_2$  é prosseguir a operação.

2.  $I_5 = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (\hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{2}, \hat{2})$ : as condições limites de operação são as mesmas do exemplo anterior, pois as probabilidades de transição e de leitura bem como os custos são os mesmos. Entretanto a estimativa da condição atual do equipamento muda, pois o vetor de informações é diferente. Assim, conclui-se que a ação ótima  $u_5$  é continuar a operação.

Estado real ( $x$ )	Probabilidade	Custo esperado	Decisão ótima
1	0.001706	0.0402	Prosseguir
2	0.982791	25.4790	Prosseguir
3	0.015503	0.4236	Interromper
4	0.000000	0.0000	Interromper

3. Considere o mesmo  $I_5$ , mas que o custo de manutenção preventiva é de 2 (e não mais 5), ou seja:  $g(x_k, u_k = I) = 2, \quad \forall x_k \neq L$ . Nesta caso, como esperado, as condições limites de operação são diferentes:

Estado real ( $x$ )	Decisão ótima ( $u$ )	Custo esperado até a interrupção da operação
1	Prosseguir	14.9948
2	Interromper	15.8947
3	Interromper	15.8947
4	Interromper	33.8947

O que implica, a partir do vetor de informações, na seguinte estimativa:

Estado real ( $x$ )	Probabilidade	Custo esperado	Decisão ótima
1	0.001706	0.0256	Prosseguir
2	0.982791	15.6212	Interromper
3	0.015503	0.2464	Interromper
4	0.000000	0.0000	Interromper

Assim, conclui-se que a ação ótima  $u_5$  é interromper a operação. Gerencialmente, este cenário ilustra que, quanto menor for o custo de manutenção preventiva ( $g(x_k, u_k = I)$ ,  $\forall x_k \neq L$ ), maior será a tendência de parar o equipamento.

## 4 Inferência dos parâmetros do modelo

Até o momento admitimos o conhecimento dos parâmetros de entrada  $\lambda = (A, B, \omega)$  do modelo. Entretanto, estes parâmetros não são conhecidos na prática. Embora em alguns casos estes parâmetros possam ser determinados via ensaios de engenharia, o mais interessante é estimá-los com dados de campo, que geralmente são coletados pelas indústrias (principalmente as de processo, através de sistemas PIMS - Sistemas de Gerenciamento de Informações de Planta). A estimação de  $\lambda$  pode ser vista como um Modelo de Markov Oculto<sup>5</sup> do terceiro tipo: a escolha de tais parâmetros pode ser considerada um problema de otimização, onde busca-se estimar os parâmetros que proporcionam as observações mais próximas das observações coletadas.

Seja  $O$  um grupo de  $N$  conjuntos de observações<sup>6</sup>, ou seja:  $O = \{O_1, O_2, \dots, O_N\}$ . Cada conjunto  $O_n$  é composto por  $K + 1$  observações da condição do equipamento, sempre iniciando do instante que o equipamento iniciou a operar ( $k=0$ ) e terminando quando a ação escolhida for interromper a operação, ou seja:  $O_n = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_K\}$ . Assim,  $O$  representa todo o histórico de dados disponível para ser usado para construir estimadores das quantidades de interesse. Um exemplo deste histórico é apresentado na tabela 4.

$O$	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	$z_{10}$	$z_{11}$
$O_1$	1	1	1	2	1	2	3	3	3	4		
$O_2$	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	
$O_3$	1	1	1	2	2	2	3	3	3			
$O_4$	1	1	1	1	2	2	2	3	2	3	3	4

Tabela 4: Exemplo de observações coletadas.

Portanto, ajustar o modelo em função dos dados significa maximizar  $\Pr[O|\lambda]$ . O padrão de escolha de  $\lambda$  comumente utilizado é o de máxima verossimilhança. Logo, busca-se encontrar os valores dos parâmetros que maximizam a probabilidade de se observar os dados coletados. Foi proposto na literatura algoritmo conhecido como Baum-Welch<sup>7</sup> que lida com este problema.

### 4.1 Algoritmo de Baum-Welch

Formalmente, o Baum-Welch é um algoritmo do tipo *generalized expectation-maximization (GEM)*. Ele é capaz de calcular as estimativas de máxima verossimilhança a partir apenas dos dados  $O$  (conhecidos como dados de treinamento) e de um valor *a priori* dos parâmetros de interesse (e.g. estimadas pela engenharia) como, por exemplo, foi apresentado na seção 3.3.

Sejam  $\bar{\omega}_x$ ,  $\bar{p}_{ij}$  e  $\bar{b}_x(z)$  estimadores para  $\omega_x$ ,  $p_{ij}$  e  $b_x(z)$  respectivamente. Estes estimadores são baseados no princípio freqüentista, como segue:

- $\bar{\omega}_x$  = freqüência esperada no estado  $x$  no tempo 0
- $\bar{p}_{ij} = \frac{\text{número esperado de transições do estado } i \text{ para } j}{\text{número esperado de transiões partindo do estado } i}$
- $\bar{b}_x(z) = \frac{\text{número esperado de vezes no estado } x \text{ onde observou-se } z}{\text{número esperado de vezes no estado } x}$

Para cada conjunto de observações  $O_n$ , define-se as seguintes variáveis:

- $\alpha_k(x) = \Pr[z_0, z_1, z_2, \dots, z_k, x_k = x | \lambda]$

<sup>5</sup>Para mais detalhes sobre a teoria de Modelos de Markov Ocultos ver, e.g., [Dugad and Desai, 1996, Rabiner, 1989].

<sup>6</sup>Obs.: não confundir com o vetor de informações  $I_k$ .

<sup>7</sup>Baum, L. E., Petrie, T., Soules G., and Weiss, N. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 41.

- $\beta_k(x) = \Pr[z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_K, x_K = x | \lambda]$
- $\gamma_k(x) = \Pr[x_k = x | O_n, \lambda] = \frac{\Pr[x_k = x, O_n | \lambda]}{\Pr[O_n | \lambda]} = \frac{\alpha_k(x)\beta_k(x)}{\Pr[O_n | \lambda]}$
- $\xi_k(i, j) = \Pr[x_k = i, x_{k+1} = j | O_n, \lambda] = \frac{\Pr[x_k = i, x_{k+1} = j, O_n | \lambda]}{\Pr[O_n | \lambda]} = \frac{\alpha_k(i)p_{ij}\beta_{k+1}(j)}{\Pr[O_n | \lambda]}$

Pode-se demonstrar que:

- $\sum_{k=0}^{K-1} \gamma_k(x) = \text{número esperado de transições a partir de } x$
- $\sum_{k=0}^{K-1} \xi_k(i, j) = \text{número esperado de transições de } i \text{ para } j$

E, finalmente, a re-estimação de Baum-Welch é escrita como:

- $\bar{\omega}_x = \gamma_0(x)$
- $\bar{p}_{ij} = \sum_{k=0}^{K-1} \xi_k(i, j) / \sum_{k=0}^{K-1} \gamma_k(i)$
- $\bar{b}_x(z) = \sum_{\substack{k=0 \\ s.a. z_k=z}}^K \gamma_k(x) / \sum_{k=0}^K \gamma_k(x)$

A partir destas equações chegamos ao algoritmo seguinte:

---

### Algoritmo 2 Algoritmo de Baum-Welch

---

- 1:  $\lambda_0 \leftarrow (A, B, \omega)$  ▷ início com  $\lambda$  arbitrário (valores a priori)
  - 2: **para todo**  $n \in 1..N$  **faça** ▷ para cada conjunto de observações
  - 3:      $\bar{\omega}_x \leftarrow \gamma_0(x), \quad \forall x \in S$
  - 4:      $\bar{p}_{ij} \leftarrow \sum_{k=0}^{K-1} \xi_k(i, j) / \sum_{k=0}^{K-1} \gamma_k(i), \quad \forall i \in S, \forall j \in S$
  - 5:      $\bar{b}_x(z) \leftarrow \sum_{\substack{k=0 \\ s.a. z_k=z}}^K \gamma_k(x) / \sum_{k=0}^K \gamma_k(x), \quad \forall x \in S, \quad \forall z \in Z$
  - 6:      $\lambda_n \leftarrow (\bar{\omega}, \bar{p}_{ij}, \bar{b}_x(z))$
  - 7: **retorne**  $\lambda_N$
- 

## 4.2 Exemplo numérico

Visando ilustrar como a estimativa dos parâmetros, vamos aplicar a técnica no exemplo considerado na seção 3.3: a partir dos valores estimados pela engenharia (figura 6), deseja utilizar um banco de dados para melhorar as estimativas. Considere os seguintes cenários<sup>8</sup>:

1.

$O$	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	$z_{10}$	$z_{11}$	$z_{12}$	$z_{13}$	$z_{14}$	$z_{15}$	$z_{16}$	$z_{17}$
$O_1$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	
$O_2$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	
$O_3$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$							
$O_4$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$							

<sup>8</sup>Por simplificação, vamos considerar que os conjuntos de observações  $O_n$  possuem o mesmo tamanho.

A re-estimação gerada pelo Baum-Welch é a seguinte:

- Probabilidades de transição:

$x_k$	$x_{k+1}$			
	1	2	3	4
1	$p_{11} = 0.84738$	$p_{12} = 0.15262$	$p_{13} = 0$	$p_{14} = 0$
2	$p_{21} = 0$	$p_{22} = 0.83327$	$p_{23} = 0.16673$	$p_{24} = 0$
3	$p_{31} = 0$	$p_{32} = 0$	$p_{33} = 0.70808$	$p_{34} = 0.29192$
4	$p_{41} = 0$	$p_{42} = 0$	$p_{43} = 0$	$p_{44} = 1$

- Probabilidades de leitura:

$x_k$	$z_k$			
	1	2	3	4
1	$b_1(1) = 0.95118$	$b_1(2) = 0.048819$	$b_1(3) = 0$	$b_1(4) = 0$
2	$b_2(1) = 0.044653$	$b_2(2) = 0.90535$	$b_2(3) = 0.050002$	$b_2(4) = 0$
3	$b_3(1) = 0$	$b_3(2) = 0$	$b_3(3) = 0.99997$	$b_3(4) = 0,00003$
4	$b_4(1) = 0$	$b_4(2) = 0$	$b_4(3) = 0.6742$	$b_4(4) = 0.3258$

Pode-se dizer, neste caso, que os novos parâmetros  $\lambda$  não são tão discrepantes dos valores iniciais, apesar das estimativas de  $b_4(3)$  e  $b_4(4)$  serem bastante diferentes das iniciais.

2.

$O$	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	$z_{10}$	$z_{11}$	$z_{12}$	$z_{13}$	$z_{14}$	$z_{15}$
$O_1$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$
$O_2$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$
$O_3$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$O_4$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$

A re-estimação gerada pelo Baum-Welch é a seguinte:

- Probabilidades de transição:

$x_k$	$x_{k+1}$			
	1	2	3	4
1	$p_{11} = 0.79435$	$p_{12} = 0.20565$	$p_{13} = 0$	$p_{14} = 0$
2	$p_{21} = 0$	$p_{22} = 0.74851$	$p_{23} = 0.25149$	$p_{24} = 0$
3	$p_{31} = 0$	$p_{32} = 0$	$p_{33} = 0.76721$	$p_{34} = 0.23279$
4	$p_{41} = 0$	$p_{42} = 0$	$p_{43} = 0$	$p_{44} = 1$

- Probabilidades de leitura:

$x_k$	$z_k$			
	1	2	3	4
1	$b_1(1) = 0.92234$	$b_1(2) = 0.07766$	$b_1(3) = 0$	$b_1(4) = 0$
2	$b_2(1) = 0.066624$	$b_2(2) = 0.84812$	$b_2(3) = 0.085252$	$b_2(4) = 0$
3	$b_3(1) = 0$	$b_3(2) = 0$	$b_3(3) = 0.99998$	$b_3(4) = 0,00002$
4	$b_4(1) = 0$	$b_4(2) = 0$	$b_4(3) = 0.21477$	$b_4(4) = 0.78523$

Acreditamos que neste caso que os novos parâmetros  $\lambda$  estão mais distantes daqueles obtidos anteriormente, indicando que estes dados denodam uma deterioração mais elevada.

## 5 Conclusões e futuros trabalhos

Neste trabalho discutimos a formulação de políticas de manutenção preventiva baseada na condição dos equipamentos. A idéia central foi construir um conjunto de regras de apoio à decisão de intervir (ou não) em um determinado equipamento com o objetivo de minimizar o custo total de operação do equipamento no horizonte de tempo considerado. A motivação para esta abordagem está relacionada a utilização da informação, mesmo que incompleta ou parcial, a respeito da condição do equipamento – o que reflete a realidade encontrada pelos gestores responsáveis pela tomada de decisão. Um ponto que acreditamos relevante neste trabalho é que apresentamos técnicas para a estimação dos parâmetros do modelo proposto a partir de dados de campo.

Pretende-se continuar esta pesquisa em duas frentes. A primeira será o refinamento da técnica de resolução do modelo proposto (algoritmos para programação dinâmica-estocástica em horizonte infinito). A segunda, ainda como passos futuros desta pesquisa, pretendemos realizar uma comparação entre esta técnica e aquelas baseadas na Teoria da Confiabilidade, com o intuito de inferir a respeito do ganho em usar ou não a informação sobre a condição do equipamento na decisão de intervir ou não.

## Referências

- [Bertsekas, 1995] Bertsekas, D. P. (1995). *Dynamic Programming and Optimal Control*, volume 1. Athena Scientific: Belmont (EUA).
- [Chen et al., 2003] Chen, C. T., Chen, Y. W., and Yuan, J. (2003). On a dynamic preventive maintenance policy for a system under inspection. *Reliability Engineering and System Safety*, 80:41–47.
- [Chen and Trivedi, 2005] Chen, D. and Trivedi, S. K. (2005). Optimization for condition-based maintenance with semi-markov decision process. *Reliability Engineering and System Safety*, 90:25–29.
- [Chiang and Yuan, 2001] Chiang, J. H. and Yuan, J. (2001). Optimal maintenance policy for a markovian system under periodic. *Reliability Engineering and System Safety*, 71:165–172.
- [Dugad and Desai, 1996] Dugad, R. and Desai, U. B. (1996). *A tutorial on Hidden Markov Models*. Technical Report n°. SPANN-96.1, Indian Institute of Technology - Bombay.
- [Gertsbakh, 2000] Gertsbakh, I. (2000). *Reliability Theory - with Applications to Preventive Maintenance*. Springer-Verlag: New York (EUA).
- [Motta, 1999] Motta, S. B. (1999). *Periodicidade de manutenções preventivas em dispositivos de proteção de sistemas elétricos de potência. Aplicação de técnicas quantitativas de confiabilidade à engenharia de manutenção*. Dissertação de mestrado em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Minas Gerais.
- [Moubray, 1993] Moubray, J. (1993). *Reliability-Centered Maintenance*. Industrial Press: New York (EUA).
- [Pinto and Xavier, 2001] Pinto, A. K. and Xavier, J. A. N. (2001). *Manutenção - Função Estratégica*. Qualitymark: Rio de Janeiro.
- [Puterman, 1994] Puterman, M. L. (1994). *Markov Decision Processes*. John Wiley & Sons: New York (EUA).

- [Rabiner, 1989] Rabiner, L. R. (1989). A tutorial on hidden markov models and selected applications in speech recognition. In *Proceedings of the IEEE*, volume 77, pages 257–286.
- [Sellitto, 2005] Sellitto, M. A. (2005). Formulação estratégica da manutenção industrial com base na confiabilidade dos equipamentos. *Revista Produção*, 15:44–59.
- [Smith, 1993] Smith, A. M. (1993). *Reliability-Centered Maintenance*. Mac Graw-Hill: New York (EUA).
- [Stern, 2006] Stern, J. M. et al. (2006). *Otimização e processos estocásticos aplicados à economia e finanças*. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~jstern/download/publicacoes/otifin.pdf>.
- [Sutton and Barto, 1998] Sutton, R. S. and Barto, A. G. (1998). *Reinforcement Learning: An Introduction*. The MIT Press: Cambridge (EUA).
- [Ulysséa, 2002] Ulysséa, M. S. (2002). *Definição da periodicidade ótima da manutenção preventiva de relés de proteção*. Dissertação de mestrado em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina.