



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
PÓS-GRADUAÇÃO

TESTES DE DEGRAÇÃO SOB O ENFOQUE BAYESIANO

Belo Horizonte, Novembro 2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
PÓS-GRADUAÇÃO

TESTES DE DEGRAÇÃO SOB O ENFOQUE BAYESIANO

Aluno: Thiago Rezende dos Santos.
Profs.: Enrico Colosimo e Marta Freitas.
Disciplina: Métodos Estatísticos em Confiabilidade e Manutenção.

Belo Horizonte, Novembro 2007

Resumo

Os testes de degradação são uma abordagem alternativa aos testes de tempo de vida e aos testes de vida acelerados em estudos de confiabilidade. A principal vantagem desses testes sobre os outros é que a análise pode ser feita, ainda que não tenha ocorrido uma única falha. Neste trabalho, usamos métodos de inferência bayesiana para estimar os parâmetros de um simples modelo de degradação. Para tanto, utilizamos o software WinBUGS (Spiegelhalter et al.,2000), para obtermos uma amostra da distribuição *a posteriori* via Gibbs Sampler. Replicamos o exemplo apresentado por Hamada (2005) e, também, mostramos um exemplo do desgaste das rodas dos trens . Os resultados foram satisfatórios.

Palavras-chave: Testes de degradação, Inferência bayesiana, Gibbs Sampler, WINBUGS

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO.....	4
2. ESTATÍSTICA BAYESIANA.....	4
2.1 Estimação Pontual.....	6
2.2 Métodos de Simulação Monte Carlo Via Cadeia de Markov (MCMC).....	7
2.2.1 Gibbs Sampler.....	6
3. TESTES DE DEGRADAÇÃO.....	8
3.1. Um Modelo Simples de Degradação.....	8
Exemplo 1: degradação de um laser (Hamada, 2005).....	9
Exemplo 2: dados de desgaste das rodas de trens.....	11
4. CONCLUSÃO.....	14
APÊNDICE I.....	15
APÊNDICE II.....	16
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	17

1. INTRODUÇÃO

Os testes de degradação são uma abordagem alternativa aos testes de tempo de vida e aos testes de vida acelerados em estudos de confiabilidade. Nos testes de degradação, a resposta de interesse não é o tempo de falha, mas uma medida de alguma característica de qualidade do produto de interesse (Oliveira & Colosimo, 2004). A principal vantagem desses testes sobre os outros é que a análise pode ser feita, ainda que não tenha ocorrido uma única falha.

Métodos de estimação clássica podem ser usados para obter a distribuição do tempo de falha, tais como analítico, numérico e aproximado (ver Oliveira & Colosimo, 2004).

Entretanto, neste trabalho, o nosso objetivo é usar e estudar métodos bayesianos para estimar os parâmetros de um modelo simples de degradação e, assim, obter a distribuição do tempo de falha. No artigo de Hamada (2005), métodos bayesianos são utilizados para se fazer a estimação, logo tomaremos esse artigo como base deste trabalho. Tentaremos, também, replicar o exemplo de Hamada (2005) e analisaremos os dados do desgaste das rodas de trens.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Na Seção 2, métodos bayesianos, na Seção 3, testes de degradação, exemplos e análise e, finalmente, a conclusão.

2. ESTATÍSTICA BAYESIANA

Os componentes básicos da Estatística Bayesiana são: informação a priori, resumida através da distribuição a priori; a informação trazida pela amostra de dados, que é resumida utilizando a função de verossimilhança; a distribuição a posteriori, que é uma atualização da distribuição a priori pelos dados, e, em alguns casos, o cálculo da distribuição de futuras observações. O problema pode ser colocado da seguinte forma:

Seja $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ uma quantidade desconhecida (portanto aleatória) com possíveis valores em um conjunto Θ . Admita que desejamos inferir sobre θ . A informação inicial H (que varia de pessoa a pessoa) sobre θ é resumida probabilisticamente em termos de uma função de densidade:

$$\pi(\theta | H), \theta \in \Theta, \quad (1)$$

que é a informação disponível sobre θ . Esta distribuição é denominada distribuição a priori de θ . Com o propósito de atualizar esta informação sobre θ , uma amostra de n valores de um vetor aleatório $X = (X_1, \dots, X_n)$ relacionado com θ , será observado. Antes de observarmos a amostra, descreveremos a incerteza sobre x , dado θ , através da função:

$$p(x | H, \theta), x \in X, \theta \in \Theta \quad (2)$$

Note que a dependência de θ é fundamental. A informação em $X = (X_1, \dots, X_n)$ é resumida pela Função de Verossimilhança com respeito a θ , que é uma função que associa a cada θ o valor $p(x | H, \theta)$. Para um valor fixado de θ , a Função de Verossimilhança fornece a probabilidade de ser observado x quando θ é o verdadeiro estado de natureza.

Depois de atribuídas as funções de probabilidade em (1) e (2), é de interesse encontrar uma maneira de atualizar a opinião inicial com respeito a θ , utilizando a informação contida na amostra. A técnica utilizada para realizar tal operação é o Teorema de Bayes, isto é, a distribuição a posteriori de θ é dada por:

$$p(\theta | x) = \frac{p(x, \theta)}{p(x)} = \frac{p(x | \theta) \pi(\theta)}{p(x)}, \theta \in \Theta \quad (3)$$

Se utilizarmos a notação $\pi(\theta | x)$ em lugar de $p(\theta | x)$ para enfatizar o fato de que $\pi(\theta | x)$ é uma atualização de $\pi(\theta)$, temos:

$$\pi(\theta | x) = \frac{p(x, \theta)}{p(x)} = \frac{p(x | \theta) \pi(\theta)}{p(x)}, \theta \in \Theta \quad (4)$$

Note que

$$p(x) = \int p(x | \theta) \pi(\theta) d\theta \quad (5)$$

corresponde a densidade marginal de x , que é denominada distribuição preditiva. Para uma explicação mais detalhada ver, por exemplo, Zuazola et al. (1996).

2.1 Estimação Pontual

A distribuição a posteriori é toda a informação disponível sobre θ após observarmos os dados. Apesar disto, muitas vezes precisamos resumí-la em um único número. Este número é o estimador de Bayes.

Seja $\alpha(\delta, \theta) = (\theta - \delta)^2$ a perda esperada, onde θ é o valor real e δ são possíveis estimativas de θ . O estimador de Bayes para θ é o valor δ que torna mínima a perda esperada, a posteriori, isto é:

$$\hat{\theta}_B = \min_{\delta} E(L(\theta, \delta) | x) = \min_{\delta} \int L(\theta, \delta) \pi(\theta | x) d\theta \quad (6)$$

Considerando a função de perda $L(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2$ quadrada, temos $\delta = E(\theta | x)$ - que é a média *a posteriori*.

Devemos ressaltar que diferentes funções de perda geram diferentes estimadores de Bayes e devemos frisar que a escolha da função de perda é completamente subjetiva, a moda *a posteriori* é o estimador de Bayes quando a função de perda é a 0-1 e a mediana *a posteriori* é o estimador de Bayes quando a função de perda escolhida é a absoluta (Migon & Gamerman, 1999).

Como os cálculos para encontrarmos a distribuição *a posteriori* podem ser muito complicados dependendo da distribuição dos dados e da distribuição *a priori* especificada pelo pesquisador, há muito tempo o método utilizado para contornar esse problema é especificar uma *priori* conveniente que tenha o mesmo núcleo da função verossimilhança, que é conhecido como análise conjugada. Por exemplo, seja $X = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra i.i.d. com distribuição Poisson(λ), logo *a priori* conjugada da distribuição da amostra X é a família de distribuição Gama(α, β), $\alpha, \beta > 0$.

Entretanto, esse problema foi resolvido com a introdução dos métodos de simulação MCMC (Markov Chain Monte Carlo) que nos permitem obter uma amostra da distribuição *a posteriori*, amostrando de uma distribuição de referência ou da própria distribuição condicional completa (conhecida), sem conhecermos a forma fechada da distribuição *a posteriori*. Introduziremos esse método na próxima subseção.

2.2. Métodos de Simulação Monte Carlo Via Cadeia de Markov (MCMC)

Idéia Central: Construir uma Cadeia de Markov, da qual é fácil de se gerar uma amostra e que tem distribuição de equilíbrio $h(\theta)$ dada pela distribuição de interesse.

- Seja $\theta_1, \dots, \theta_p \sim p(\theta)$ com $p(\theta_1, \dots, \theta_p)$ definida em $\Theta \subset \mathbb{R}^p$.
- Suponhamos uma Cadeia de Markov homogênea, irreduzível e aperiódica com espaço de estado Θ e cuja distribuição de equilíbrio, $p(\theta)$ possa ser construída, ou seja, podemos construir uma Cadeia de Markov com probabilidade de transição invariante no tempo, onde cada estado pode ser visitado de qualquer outro com um número finito de interações e sem estado absorvente cuja distribuição estacionária seja $p(\theta)$.
- Deve ser fácil gerar amostras das probabilidades de transição.

A metodologia utilizada no software WinBugs (que utilizaremos neste trabalho) é a do Gibbs Sampler.

2.2.1 Gibbs Sampler

O Gibbs Sampler ou amostrador de Gibbs é uma técnica usada para gerar variáveis aleatórias de uma distribuição marginal indiretamente, sem precisarmos calcular a densidade. Sua idéia inicial foi apresentada por Geman & Geman (1984), mas a forma como o conhecemos hoje foi descrita por Gelfand & Smith (1990). É importante lembrar que o Gibbs Sampler (GS) é um caso particular do algoritmo Metropolis-Hastings, que usa métodos de simulação Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) em sua essência. O Gibbs Sampler é essencialmente simples de se implementar e sua metodologia tem causado grande impacto em problemas paramétricos, principalmente no uso de modelos Bayesianos. Ele é baseado nas propriedades elementares das Cadeias de Markov, sendo que a essência desse método, em um sentido assintótico, nos permite extrair uma amostra diretamente da densidade $h(\theta)$ tal que:

$$h(\theta) = f(\theta) / \int f(\theta) d\theta, \quad (7)$$

sem a necessidade de resolvemos a integral. O Gibbs Sampler é restrito a problemas onde as distribuições condicionais *a posteriori* são disponíveis, ou seja, a geração de variáveis aleatórias destas distribuições é possível. Quando não estão disponíveis essas condicionais, normalmente utilizamos o algoritmo Metropolis-Hastings, resolvendo a questão. O método Gibbs Sampler é muito útil em situações multidimensionais e quando temos mais de um parâmetro, por exemplo, na distribuição normal. Não descreveremos aqui detalhes sobre o método usado no GS. Maiores detalhes podem ser obtidos em Casella & George (1992).

A convergência da cadeia para uma distribuição estacionária é um tópico delicado e um tanto quanto controverso na literatura. Aqui apenas lançaremos mão de técnicas informais gráficas para a verificação da cadeia, porém há várias técnicas formais de diagnóstico da convergência da cadeia tais como Geweke (1992) e Raftery(1992), que não serão abordados neste trabalho.

Para detectar o período de *burn-in*, usamos gráficos como a média ergódica e funções de autocorrelação. No gráfico da média ergódica, quando não houver variabilidade significativa, houve convergência. Já no gráfico de autocorrelações, quando não houver autocorrelações significativas, houve a convergência. Além disso, construímos histogramas e a densidade de Kernel para amostra obtida distribuição *a posteriori*. Esses gráficos estão disponíveis no software WinBugs.

3. TESTES DE DEGRADAÇÃO

Como foi dito anteriormente, os testes de degradação são uma abordagem alternativa aos testes de tempo de vida e aos testes de vida acelerados em estudos de confiabilidade. Nos testes de degradação, a resposta de interesse é alguma medida de performance do produto ou componente (resistência à tração, oxidação), obtida ao longo do tempo (Freitas & Colosimo, 1997). O objetivo aqui é estudar a degradação da performance do produto ao longo do tempo e utilizar esta informação para estimar a distribuição do tempo de vida do produto (componente).

3.1. Um Modelo Simples de Degradação

Considere o seguinte modelo para a curva de degradação linear começando do valor 0 (Hamada, 2005). Suponha que nós temos dados sobre n observações. Para a i -ésima unidade, o valor verdadeiro da degradação é dado por $D_i(t) = (1/\theta_i)t$; onde o intercepto é zero e inclinação $1/\theta_i$.

Uma unidade é considerada falha quando a degradação atinge o valor D_f . Considerando $D_i(t) = D_f$, o tempo de vida T_i para a i -ésima unidade é D_f/θ_i .

Para as unidades terem diferentes tempos de vida, θ_i precisa variar de unidade para unidade. Isto é, θ_i é uma variável aleatória. Para o tempo de vida de uma unidade seguir uma distribuição Weibull, é necessário que $\{\theta_i\}$ siga uma distribuição Weibull a inclinação. Para tanto, note que se $\{\theta_i\}$ segue uma distribuição $Weibull(\beta, \lambda)$, os tempos de vida seguem uma distribuição $Weibull(\beta, \lambda / D_f \beta)$, ou seja, o parâmetro de forma é β e o de escala é $\lambda / D_f \beta$.

Na prática, os dados de degradação são obtidos pela amostragem da curva de degradação sobre o tempo e eles estão sujeitos a um erro de medida. Então, o valor verdadeiro da degradação no tempo t_{ij} ($D_i(t_{ij})$) é observado com ε_{ij} . Isso resulta no seguinte modelo aditivo da degradação observada y_{ij} :

$$y_{ij} = D_i(t_{ij}) + \varepsilon_{ij} = (1/\theta_i)t_{ij} + \varepsilon_{ij}; \quad (8)$$

onde $\varepsilon_{ij} \stackrel{ind.}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\theta_i \sim weibull(\beta, \lambda)$, $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, m_i$.

Note que os dados de degradação para i -ésima unidade provêm informação sobre θ_i e σ_i^2 . Com os dados de degradação para uma amostra de unidades, é preciso obter informação sobre (β, λ) , os parâmetros da distribuição Weibull de θ_i .

A função de confiabilidade para o modelo em (8) é dada por:

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp[-(\lambda / D_f^\beta)t^\beta]; \quad (9)$$

onde $F(t)$ é a distribuição acumulada de uma v. a. $T \sim Weibull(\beta; \lambda / D_f^\beta)$.

Nós, também, podemos fazer inferência sobre o quantil α da distribuição do tempo de vida que possui, para o modelo em (8), a seguinte forma:

$$t_{\alpha} = [-(D_f^{\beta} / \lambda) \ln(1 - \alpha)]^{1/\beta} \quad (10)$$

Para encontrarmos o quantil α , usamos o fato dos tempos de vida ter distribuição Weibull novamente.

Hamada(2005) não mostra a forma do tempo de vida médio, mas se fizermos algumas álgebras, obteremos a seguinte forma para o tempo médio de vida:

$$MTTF = \Gamma(1 + \beta^{-1}) / (\lambda / D_f^{\beta})^{1/\beta} \quad (11)$$

Exemplo 1: degradação de um laser (Hamada, 2005)

No estudo, são consideradas 15 unidades as quais são observadas de 250 em 250 horas de 0 até 4000 horas, totalizando 16 medições por unidade. A variável de degradação considerada é o percentual de degradação da intensidade de luminosidade do laser, sendo que uma unidade é considerada como falha quando o nível $D_f = 10\%$ (valor crítico estabelecido) é atingido.

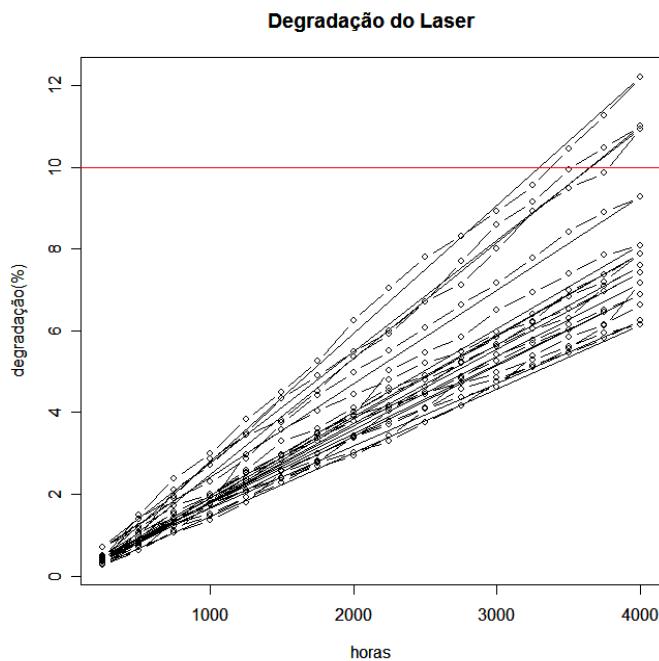


Figura 1: Gráfico do percentual da degradação do laser versus tempo

Tentaremos, também, replicar o exemplo de Hamada (2005) que considera o seguinte modelo para os dados de degradação de um laser: $y_{ij} = D_i(t_{ij}) + \varepsilon_{ij} = (1/\theta_i)t_{ij} + \varepsilon_{ij}$; onde $\varepsilon_{ij} \stackrel{ind.}{\sim} N(0, \sigma_i^2)$ e $\theta_i \sim \text{weibull}(\beta, \lambda)$, logo, $y_{ij} | \theta = \theta_i \sim N((1/\theta_i)t_{ij}, \sigma_i^2)$ para $i = 1, \dots, 15$ e $j = 1, \dots, 16$. As seguintes distribuições a priori foram consideradas:

$$\beta \sim \text{Gama}(0,01;0,01)$$

$$\lambda \sim \text{Gama}(0,01;0,01)$$

$$\sigma^2 \sim \text{GamaInvertida}(0,01;0,01)$$

Segundo Hamada (2005), a distribuição *a posteriori* de $(\beta, \lambda, \sigma^2)$ é dada por $\pi(\eta | y) = f(y | \eta)\pi(\eta) / \int f(y | \gamma)\pi(\gamma) d\gamma$; onde $\eta = (\lambda, \beta, \sigma^2)$, que é obtida por MCMC (Gibbs Sampler), considerando 10.500 amostras e burn-in=500.

Tabela 1: Resumos da dist. *a posteriori* do laser (replicação)

Parâmetro	Média	DP	Q 2,5%	Q 50%	Q 97,5%
λ	4,50E-10	1,56E-08	9,45E-25	1,28E-14	5,08E-10
β	5,63	1,53	3,40	5,08	8,74
σ	0,21	0,01	0,19	0,21	0,23
R(4500)	0,70	0,11	0,49	0,70	0,89
$t_{0,1}$	3585,00	399,40	2681,69	3556,00	4423,92

Note que a probabilidade de alguma unidade sobreviver mais de 4500 horas é de 0,70 e que o tempo para que 10% das unidades estejam fora de operação é de 3585 horas. Um intervalo empírico de credibilidade de 95% para R(4500) e $t_{0,1}$ é dado por [0,70;0,89] e [3556 horas;4424 horas], respectivamente.

Tabela 2: Resumos da dist. *a posteriori* do laser (resultados do artigo de Hamada (2005))

Parâmetro	Média	DP	Q 2,5%	Q 50%	Q 97,5%
λ	6,63E-11	1,35E-09	2,59E-20	1,63E-16	8,53E-11
β	5,69	0,95	3,69	5,77	7,14
σ	0,21	0,01	0,19	0,21	0,23
R(4500)	0,71	0,08	0,52	0,72	0,85
$t_{0,1}$	3650,00	348,60	2852,00	3699,00	4206,00

Os resultados que obtivemos (Tabela 1) são bem similares aos obtidos no artigo (Tabela 2). Os resultados não são exatamente os mesmos, porque Hamada (2005) não especificou a semente aleatória utilizada na simulação.

Abaixo apresentamos o histograma de R(4500) e $t_{0,1}$.

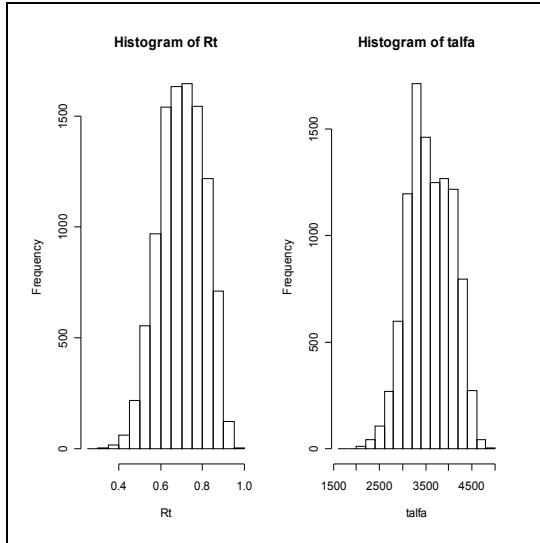


Figura 2. Histograma de $R(4500)$ e $t_{0,1}$

É fundamental a verificação da convergência da cadeia para garantirmos uma inferência correta sobre os parâmetros do modelo. Neste trabalho, não abordaremos nenhum método formal de verificação de convergência apenas métodos informais (gráficos). A seguir apresentamos os gráficos de verificação informal da convergência da cadeia para a distribuição estacionária dos parâmetros *a posteriori*.

Quanto aos gráficos, não temos muito que comentar, já que o nosso intuito é replicar o exemplo. Observe, nos gráficos do Apêndice I, que a amostra da distribuição *a posteriori* de β é um pouco instável e possui altas autocorrelações se comparado com os outros parâmetros. Infelizmente, Hamada (2005) não apresenta nenhum gráfico de verificação da convergência da cadeia para que pudéssemos compará-los.

Exemplo 2: dados de desgaste das rodas de trens

Esse conjunto de dados é referente ao desgaste de rodas de trens. Cada trem 4 tem quatro vagões – 1 vagão máquina que puxa os outros três. Cada vagão tem 4 eixos com duas rodas cada, totalizando 8 rodas por vagão.

14 trens foram selecionados aleatoriamente e o acompanhamento foi feito a cada 50 mil KM. Medimos o diâmetro da roda do vagão máquina – que possui um diâmetro inicial de 966 mm. O diâmetro mínimo tolerável é de 889 mm.

Por conveniência, trabalharemos com a variável desgaste, portanto o desgaste da i -ésima no j -ésimo instante de medição é dado por $y_{ij} = 966 - Diametro_{ij}$. Neste caso, $D_f = 77mm$.

Resumindo, são consideradas 14 unidades (trens) as quais são observadas de 50 mil KM em 50 mil KM de 0 até 600 mil KM. Nas unidades 11, 12 e 14 foram feitas 8, 6 e 11 medições, respectivamente, e nas demais 12 medições. A variável de degradação de interesse é o desgaste das rodas dos trens, sendo que uma unidade é considerada como falha quando o nível $D_f = 77mm$ (valor crítico estabelecido) é atingido. A seguir, para o trabalho não ficar muito extenso, mostraremos o ajuste do modelo de degradação apenas para a roda MA11, mas poderíamos analisar as outras rodas também.

Consideraremos o mesmo modelo utilizado por Hamada (2005) para os dados de degradação das rodas dos trens: $y_{ij} = D_i(t_{ij}) + \varepsilon_{ij} = (1/\theta_i)t_{ij} + \varepsilon_{ij}$; onde $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_i^2)$ e $\theta_i \sim \text{weibull}(\beta, \lambda)$, logo, $y_{ij} | \theta = \theta_i \sim N((1/\theta_i)t_{ij}, \sigma_i^2)$ para $i = 1, \dots, 14$ e $j = 1, \dots, 12$. As seguintes distribuições a priori foram consideradas:

$$\beta \sim \text{Gama}(0,01;0,01)$$

$$\lambda \sim \text{Gama}(0,01;0,01)$$

$$\sigma^2 \sim \text{GamaInvertida}(0,01;0,01)$$

Consideramos uma amostra de 102.000 das quais retiramos as 2.000 primeiras (*burn-in*). As retiradas são feitas de 500 em 500 amostras.

Na Figura 3, mostramos os dados do desgaste das rodas dos trens versus a quilometragem. Observe que poucas unidades falharam.

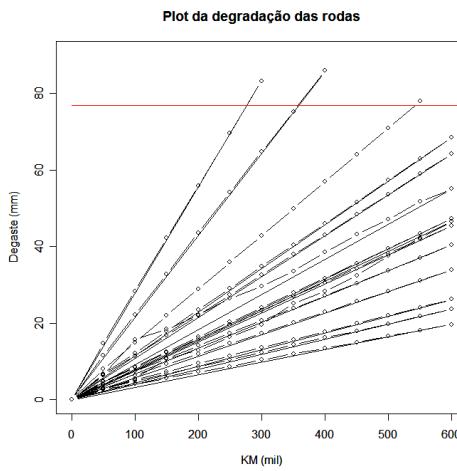


Figura 3. Gráfico da degradação das rodas de trens.

Na Tabela 3, note que a probabilidade de uma roda MA11 (unidade) sobreviver mais de 300 mil KM é de 0,92 e que a quilometragem necessária para que 10% das rodas MA11 estejam fora de operação é aproximadamente 382,80 mil KM. Um intervalo empírico de credibilidade de 95% para $R(300)$ e $t_{0,1}$ é dado por $[0,80;0,98]$ e $[163,65 \text{ mil Km}; 624,66 \text{ mil KM}]$, respectivamente.

Tabela 3: Resumos da dist. *a posteriori* degradação das rodas dos trens

Parâmetro	Média	DP	Q 2,5%	Q 50%	Q 97,5%
λ	8,84E-03	0,012	3,6E-04	4,87E-03	0,041
β	1,95	0,41	1,22	1,93	2,80
σ	0,99	0,06	0,88	0,99	1,11
$R(300^*)$	0,92	0,05	0,80	0,93	0,98
$t_{0,1}$	382,80	118,785	163,65	378,90	624,66
$t_{0,5}$	1011	170,75	688,85	1006	1361
MTTF	1097	172,13	800,84	1083	1473,13

Nota: * 300 mil KM.

Abaixo apresentamos o histograma de $R(300)$ e $t_{0,1}$. A distribuição de $R(300)$ é bem assimétrica.

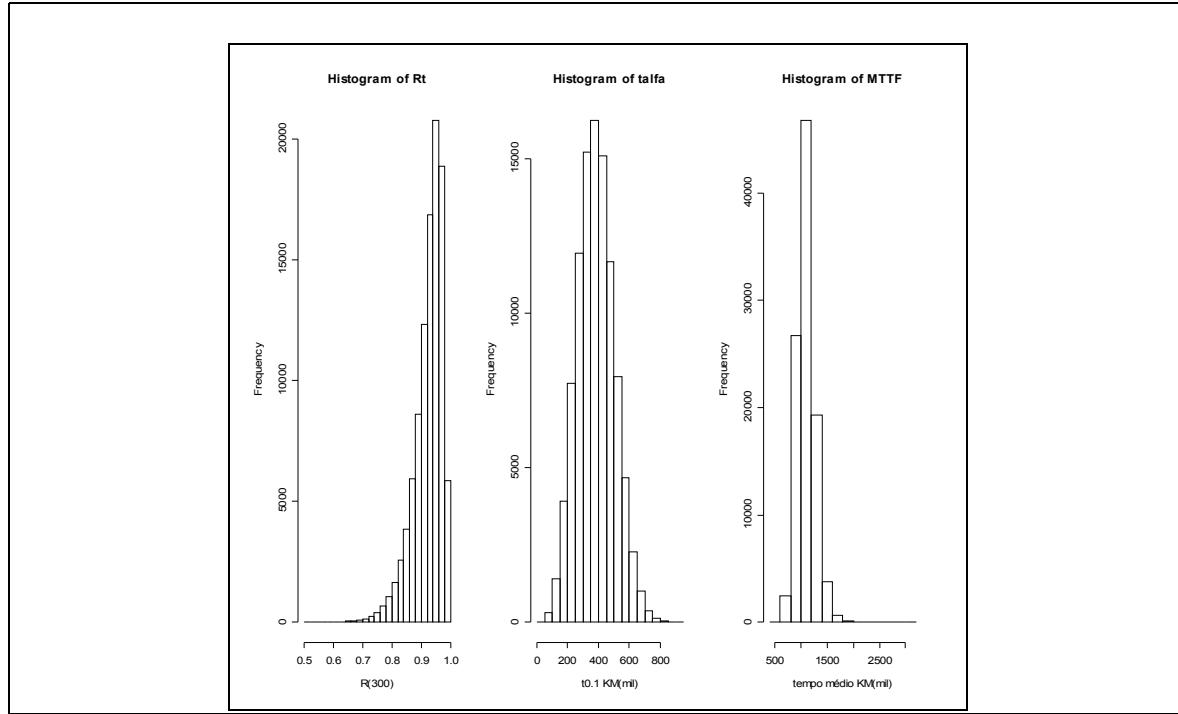


Figura 4. Histograma de $R(300)$ e $t_{0,1}$ e Tempo Médio do exemplo 2

Observe, nos gráficos no Apêndice II, que a distribuição *a posteriori* de β , λ e σ não possui altas autocorrelações e convergiram para um determinado valor.

CONCLUSÃO

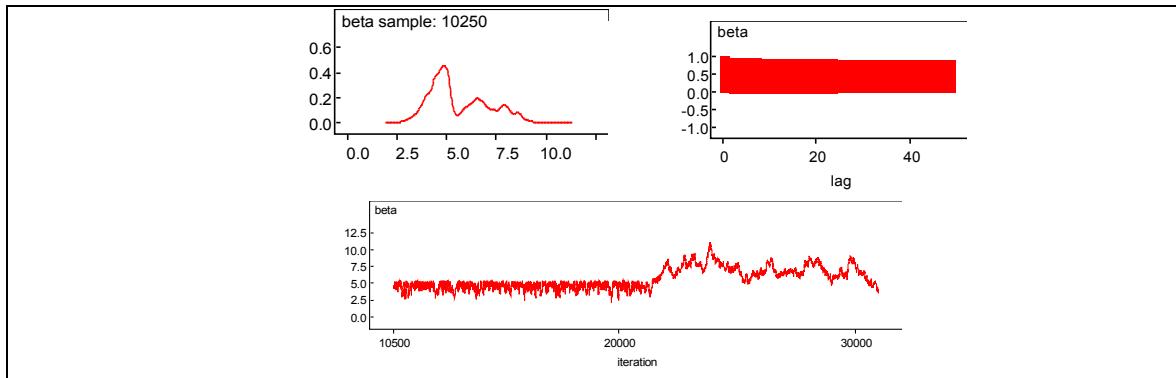
Como já havíamos dito, os testes de degradação são uma abordagem alternativa aos testes de tempo de vida e aos testes de vida acelerados em estudos de confiabilidade. A principal vantagem desses testes sobre os outros é que a análise pode ser feita, ainda que não tenha ocorrido uma única falha.

Fazer inferência bayesiana sobre os parâmetros de um simples modelo de degradação foi o objetivo principal do trabalho. Por isso, lançamos mão do trabalho de Hamada (2005), replicando o seu exemplo (degradação do laser) e utilizando, também, o *software* WINBUGS. Conseguimos obter as mesmas estimativas dos parâmetros do simples modelo de degradação de Hamada (2005). Utilizamos o mesmo modelo para analisar os dados do desgaste de rodas de trens de metrô. O teste de degradação se encaixou perfeitamente para esses dados, haja vista que tínhamos poucas falhas. Por uma questão de tempo, fizemos apenas a análise da roda MA11 e os resultados foram muito satisfatórios.

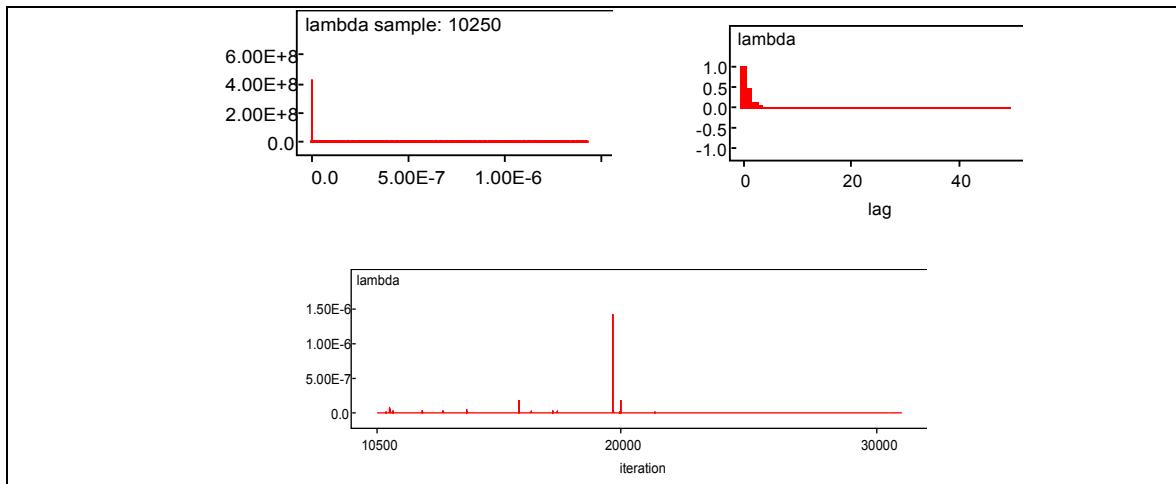
Para um trabalho futuro, poderíamos analisar os dados das outras rodas da degradação das rodas dos trens e também comparar os testes de degradação com os outros métodos. Fazer inferência bayesiana utilizando outro modelo de degradação, por exemplo, de regressão linear – que segundo Hamada (2005), não é uma tarefa trivial.

APÊNDICE I

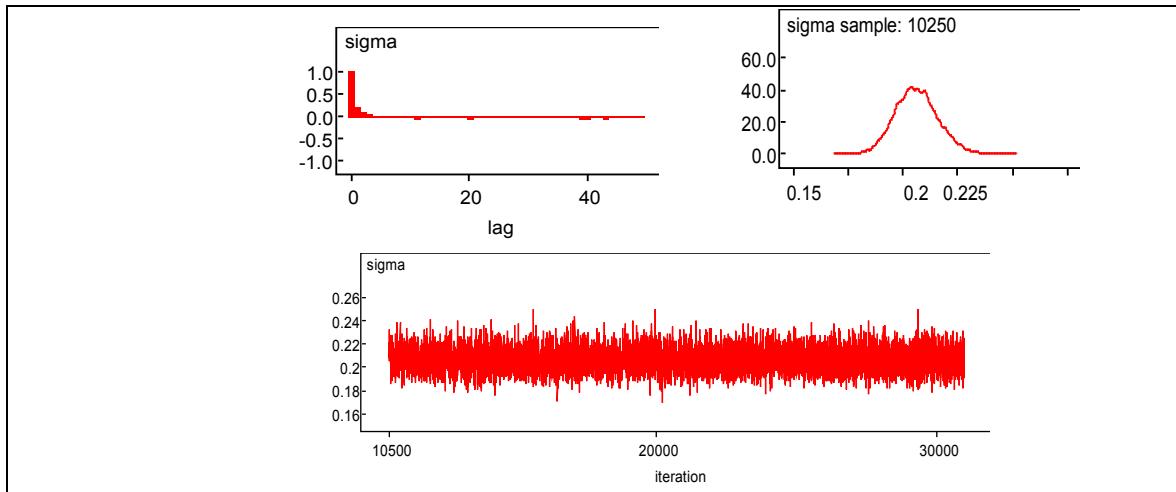
Exemplo 1:



Gráficos de verificação da convergência da cadeia para a dist. a posteriori de β



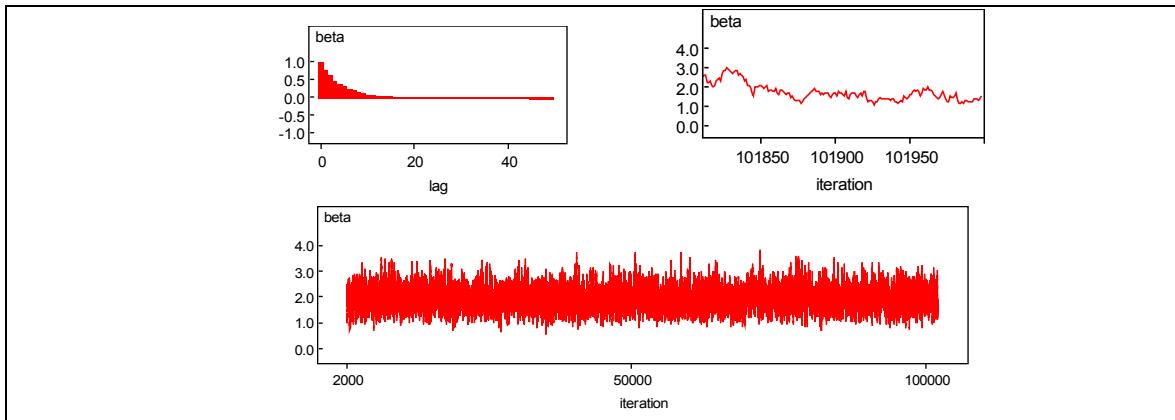
Gráficos de verificação da convergência da cadeia para a dist. a posteriori de λ



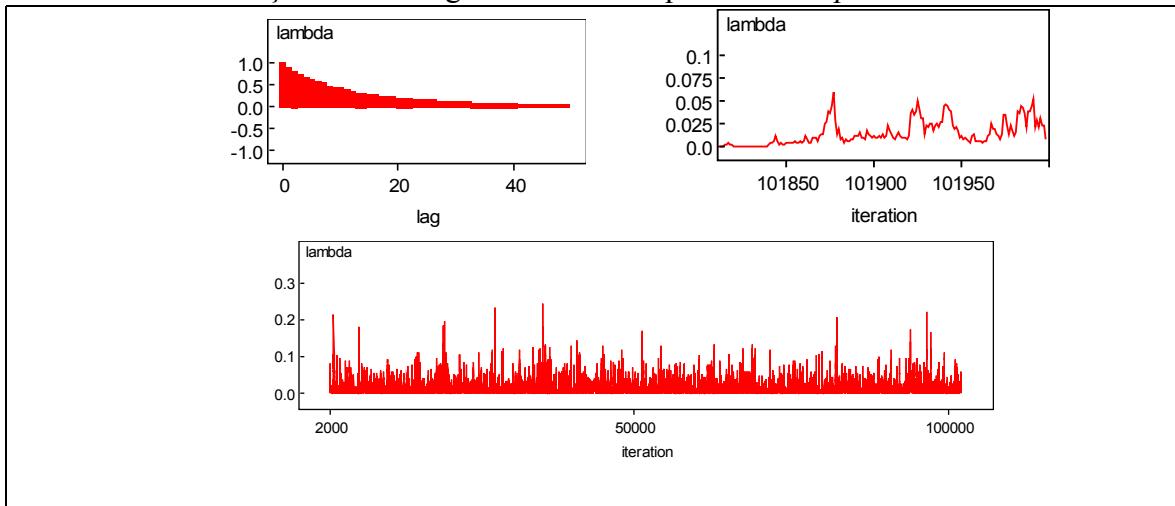
Gráficos de verificação da convergência da cadeia para a dist. a posteriori de σ

APÊNDICE II

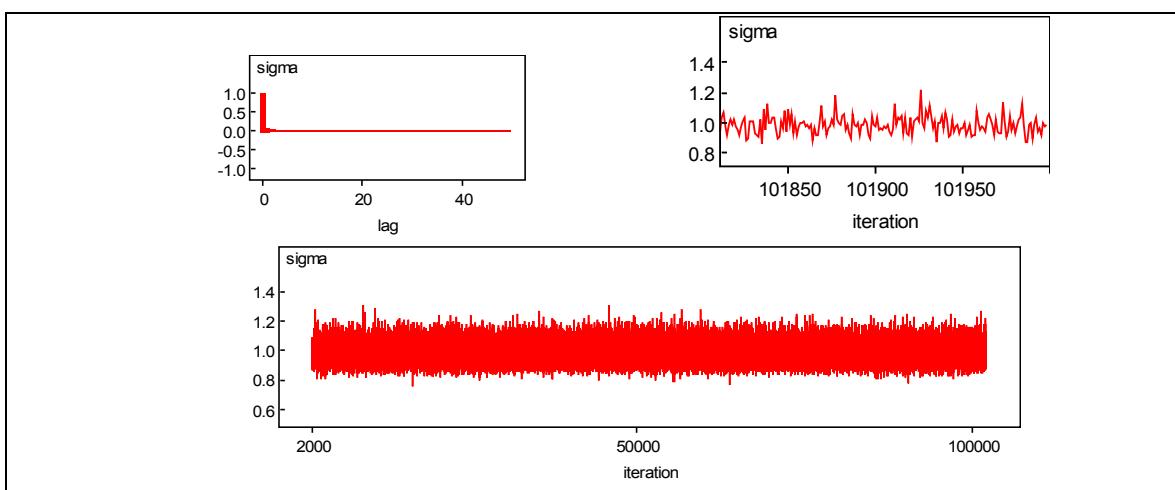
Exemplo 2:



Gráficos de verificação da convergência da cadeia para a dist. *a posteriori* de β



Gráficos de verificação da convergência da cadeia para a dist. *a posteriori* de λ



Gráficos de verificação da convergência da cadeia para a dist. *a posteriori* de σ

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Casella, G. & George, E. I. (1992), Explaining the gibbs sampler, *The American Statistician* 46(3), 167–174.

Freitas, M. A. & Colosimo, E. A. (1997). Confiabilidade: Análise de Tempo de Falha e Testes de Vida Acelerados. Série Ferramentas da Qualidade, vol. 12, Fundação Christiano Ottoni.

Gamerman, D. (1996). Simulação Estocástica de Cadeias de Markov. 12º SINAPE, ABE, Caxambu.

Gamerman, D. (1997). *Markov Chain Monte Carlo*. Stochastic simulation for Bayesian inference. Texts in Statistical Science. Chapman & Hall.

Gelfand, A. E. & Smith, A. F. M. (1990), Sampling-based approaches to calculating marginal densities, *Journal of the American Statistical Association* 85, 398–409.

Gelman, A. (1996). Inference and monitoring convergence. In: W.R. Gilks et al. (ed.). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. London, Chapman & Hall.

Geweke, J. (1992), Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to calculating posterior moments, in A. D. J. Bernardo, J. Berger & A. Smith, eds, 'Bayesian Statistics 4', University Press, Oxford, 169-193.

Gilks, W.R. et al. (1996). Introducing Markov Chain Monte Carlo. In: W.R. Gilks et al. (ed.). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. London, Chapman & Hall.

Hamada, M. (2005). Using Degradation Data to Assess Reliability. *Quality Engineering*, 17:615-620.

Migon, H.S. & Gamerman, D. *Statistical Inference: An Integrated Approach*. Londres, Arnold, 1999.

Oliveira, V. R. B., Colosimo, E. A. (2004). Comparison of Methos to Estimate the Time-to-failure Distribution in Degradation Tests. *Quality and Reliability Engineering International*. 20:363-373.

Spiegelhalter, D., Thomas, A., Best, N. (2000). *WinBUGS Version 1.3 User Manual*, available at <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/>.

Zuazola, I. P. L., da Silva, A. J. & Valle, R. B. A. (1996), Bayesian inference in errors in variables models under elliptical distribution, 12 SINAPE Anais.