## PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
## SELEÇÃO – MESTRADO/UFMG – 2008

*Instruções para a prova:*
*a) Cada questão respondida corretamente vale um ponto.*
*b) Questões deixadas em branco valem zero pontos (neste caso marque todas alternativas).*
*c) Cada questão respondida incorretamente vale -1 ponto.*
*d) Pelo menos 9 questões devem ser respondidas pelo candidato.*
*e) A nota final será dada a partir da soma total dos pontos (negativos e positivos).*
*f) As opções escolhidas devem ser assinaladas na folha de respostas no final da prova.*

**Questão 1:** Observações ( $x_i ; y_i$ ) de duas variáveis econômicas satisfazem teoricamente o modelo linear $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,...,n$, onde os $x_i$ são fixos (não aleatórios), $\alpha$ e $\beta$ são parâmetros desconhecidos e os $\varepsilon_i$ são erros normais não diretamente observáveis, não correlacionados com média nula e mesma variância $\sigma^2$. Para uma amostra de tamanho 18 o método de mínimos quadrados produziu o modelo ajustado $\hat{Y}_i = a + bX_i$. O coeficiente de determinação ( $R^2$ ) resultou em 81%. Deseja-se: i) calcular a probabilidade de significância associada ao teste de hipóteses $H_0 : \beta = 0$ versus $H_1 : \beta \neq 0$; ii) a correlação (em valor absoluto) entre $Y_i$ e $\hat{Y}_i$. Escolha (adotando uma casa decimal) a resposta correta que corresponda, respectivamente, aos itens (i) e (ii).

a) 0 e 0,9
b) 0 e 0,7
c) 0,2 e 0,9
d) 0,2 e 0,7

**Questão 2:** Um banco faz operações via internet e, após um estudo sobre o serviço prestado, conclui o seguinte modelo teórico para o tempo de conexão (em minutos):

$$f(t) = \frac{1}{4} k e^{-\frac{1}{4}kt}, t > 0$$

com $k$ sendo 1 ou 2 dependendo do cliente ser pessoa física ou jurídica respectivamente. A porcentagem de pessoas físicas utilizando esse serviço é pequena e resultou em 20%. Calcule:
i) se cinco clientes (entre pessoas físicas e jurídicas) são selecionados aleatoriamente qual a probabilidade de que pelo menos dois clientes fiquem conectados mais do que três minutos?
ii) Se um cliente escolhido aleatoriamente ficou conectado mais do que três minutos qual a probabilidade dele ser pessoa física?
Escolha a resposta correta (trabalhando com duas casas decimais) que corresponda, respectivamente, aos itens (i) e (ii).

a) 0,59 e 0,35
b) 0,59 e 0,65
c) 0,41 e 0,35
d) 0,41 e 0,65

**Questão 3**: Um Estatístico decide realizar um experimento computacional. De uma distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10 gera 50.000 amostras aleatórias de tamanho 10 cada uma. Para cada amostra calcula a variância $\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2/(n-1)\right]$. Em seguida calcula o percentual de variâncias com resultados inferiores a 46,33. Assinale a alternativa que apresenta o resultado mais provável.

a) 5%
b) 0%
c) 20%
d) 10%

**Questão 4** – Considere que um carrinho (com capacidade de locomoção infinita) transita em uma pista descrita na figura 4. O carrinho move-se apenas horizontalmente ou verticalmente. Suponha que o carrinho é colocado inicialmente na posição A. A direção tomada pelo carrinho é aleatória e sua transição é decidida nos pontos A, C, H, E e F. Observe que no ponto A a probabilidade do carrinho seguir uma determinada direção é sempre ¼ enquanto que nos pontos C, H, E e F é sempre 1/3. Quando o carrinho atinge um dos pontos B, D, G e I o carrinho sairá da pista e o experimento terminará. Deseja-se calcular a média do número de transições para que o carrinho saia da pista (ou seja: atinja os pontos B ou D ou G ou I).

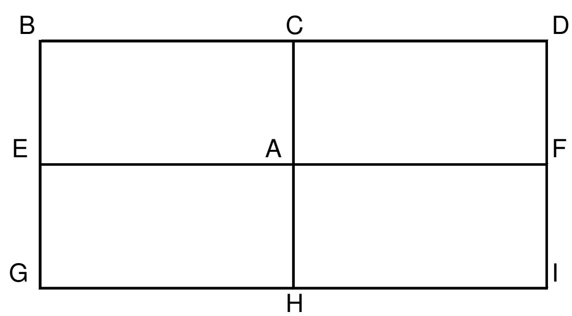


Figura 4: Representação das transições do carrinho

Escolha o item que apresenta a resposta correta.

a) 2,5
b) 4,0
c) 3,0
d) 3,5

**Questão 5** – Uma caixa contém 6 válvulas defeituosas e 5 perfeitas. As válvulas são verificadas extraindo-se (sem reposição) uma válvula ao acaso, ensaiando-a e repetindo-se o procedimento até que todas as 6 válvulas defeituosas sejam encontradas. Deseja-se calcular a probabilidade de que a sexta válvula defeituosa seja encontrada no nono ensaio. Escolha o item que apresenta a resposta correta.

a) 20/165
b) 8/165
c) 25/100
d) 20/100

**Questão 6** – Está se estudando a taxa de queima de um propulsor de foguetes (que supõe-se normalmente distribuída). As especificações exigem que a taxa média de queima seja 40 cm/s. Além disso, suponha que saibamos que o desvio padrão populacional da taxa de queima seja de 2 cm/s. O analista especifica um nível de significância de 5%. Por meio de uma amostra aleatória de tamanho igual a 25 deseja-se realizar o teste de hipóteses $H_0 : \mu = 40\ cm/s$ versus $H_1 : \mu \neq 40\ cm/s$. Calcule o erro tipo II, caso a verdadeira taxa de queima seja $\mu = 41\ cm/s$. Adote uma casa decimal. Assinale a alternativa que corresponda a resposta correta.

a) 0,3
b) 0,4
c) 0,1
d) 0,2

**Questão 7** - Um Estatístico decide realizar um experimento computacional. De uma distribuição uniforme $f(x) = 1$, 0<x<1 ele gera 50.000 amostras aleatórias de tamanho 100 cada uma. Para cada amostra calcula a média $\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$. Em seguida calcula o percentual de amostras que possuem média maior do que 0,6. Assinale a alternativa que apresenta o resultado mais provável.

a) 20%
b) 10%
c) 5%
d) 0%

**Questão 8 -** No processo de têmpera uma peça de aço em estado incandescente é submetida a um choque de temperatura colocando-a imersa em um líquido que se encontra a uma temperatura muito mais baixa se comparada à temperatura da peça de aço. O objetivo do processo de têmpera é aumentar a dureza do aço produzido. Com o objetivo de comparar a dureza média de barras de aço temperadas em dois tipos de banho de óleo (óleo A e óleo B) foram escolhidas aleatoriamente da produção de uma indústria $n = 10$ barras de aço. Em seguida cada barra foi cortada em duas partes iguais. Aleatoriamente uma das metades é escolhida para ser submetida a um processo de têmpera com o óleo A e a outra metade com o óleo B. As medidas de dureza em unidades apropriadas para as 10 barras submetidas à têmpera com o óleo A e o óleo B estão a seguir (considere que elas podem ser consideradas grandezas normais).

| BARRA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ÓLEO A | 37 | 33 | 33 | 34 | 38 | 33 | 32 | 38 | 35 | 34 |
| ÓLEO B | 36 | 33 | 35 | 33 | 38 | 32 | 34 | 39 | 34 | 35 |

Considerando-se um nível de significância de 5%, tem-se

(I) O valor da estatística de teste é $-1{,}08$.

(II) Não pode-se rejeitar que as durezas médias do aço produzido pelos 2 processos de têmpera são iguais.

Considerando os itens (I) e (II) acima escolha a alternativa correta:

a) Falso Falso

b) Falso Verdadeiro

c) Verdadeiro Falso

d) Verdadeiro Verdadeiro

**Questão 9 -** As tabelas a seguir contêm o número de pessoas a favor ou contra o aborto de acordo com o seu local de moradia, se na capital ou no interior de um determinado estado brasileiro.

| HOMENS | | | MULHERES | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | A FAVOR | CONTRA | | A FAVOR | CONTRA |
| CAPITAL | 10 | 45 | CAPITAL | 55 | 40 |
| INTERIOR | 18 | 90 | INTERIOR | 22 | 20 |

Usando estes dados, um estatístico resolveu testar se proporção de homens e a de mulheres favoráveis ao aborto dependia ou não do local de moradia. Considere que no caso dos Homens concluiu-se que NÃO DEPENDIA. Depois o estatístico realizou o mesmo teste combinando os dados dos homens e das mulheres em uma única tabela. Considerando que os testes foram realizados com um nível de 5% de significância e que no quadro a seguir a opção SIM significa que a proporção de favoráveis ao aborto DEPENDE SIM (rejeita-se a hipótese de independência) do local de moradia e a opção NÃO significa que a proporção de favoráveis ao aborto NÃO DEPENDE (não se rejeita a hipótese de independência) do local de moradia, escolha a alternativa correta:

| | HOMENS | MULHERES | HOMENS + MULHERES |
|---|---|---|---|
| a) | NÃO | NÃO | NÃO |
| b) | NÃO | NÃO | SIM |
| c) | NÃO | SIM | NÃO |
| d) | NÃO | SIM | SIM |

**Questão 10** - Na "Questão 9" qual seria a metodologia mais adequada para o teste realizado?

a) teste de homogeneidade qui-quadrado.

b) teste de comparação de proporções.

c) teste de independência qui-quadrado.

d) todas as opções acima.

**Questão 11 -** Em um estudo elementar de sincronização de sinais de trânsito considere um sistema simples de 4 sinais. Suponha que a probabilidade do motorista ser parado pelo primeiro sinal é 0,60 e que

$$P(S_{j+1} \mid S_j) = 0{,}15 \quad \text{e} \quad P(S_{j+1} \mid \overline{S}_j) = 0{,}40$$

para $j = 1,2,3$, onde $S_j$ representa o evento: "o motorista é parado pelo $j$-ésimo sinal". Considere que a probabilidade de um sinal estar vermelho para o motorista depende apenas do estado do sinal imediatamente anterior, ou seja, o evento $S_{j+1}$ está condicionado apenas ao evento $S_j$. As probabilidades de que um motorista

- seja parado por todos sinais,
- seja parado no máximo por um dos sinais,
- seja parado alternadamente pelos sinais,

são respectivamente:

a) $2{,}03 \times 10^{-3}$ $0{,}38$ $0{,}19$

b) $2{,}45 \times 10^{-3}$ $0{,}49$ $0{,}27$

c) $2{,}03 \times 10^{-3}$ $0{,}49$ $0{,}23$

d) $2{,}45 \times 10^{-3}$ $0{,}42$ $0{,}23$

**Questão 12 -** Considere as variáveis aleatórias independentes $X$ e $Y$ com funções de densidade dada pela distribuição exponencial com média 1. Ou seja: $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$ e $f(y) = e^{-y}$, $y > 0$. Deseja-se calcular $E[\textit{mínimo}\ (X,Y)] + E[\textit{máximo}\ (X,Y)]$. Assinale a alternativa que corresponda a resposta correta.

a) 5/2
b) 3/2
c) 1/2
d) 2

**Questão 13 -** Três jogadores A, B e C, nessa ordem, lançam ao ar uma moeda honesta (a probabilidade de dar cara ou coroa é ½) até que apareça uma cara. Ganha o jogo quem a obtém primeiro. Quais são as probabilidades de ganhar de cada jogador? Seja $P_i$ com i = A,B,C a probabilidades de ganhar de A,B e C respectivamente. Assinale a alternativa que corresponda respectivamente a resposta correta.

a) 5/8, 2/8, 1/8
b) 4/7, 2/7, 1/7
c) 2/3, 8/9, 1/9
d) 1/3, 1/3, 1/3

**Questão 14 –** Um jogo consiste em lançar simultaneamente, e de forma independente, um dado equilibrado (os seis lados do dado são equiprováveis) e uma moeda honesta (a probabilidade de dar cara é ½). Se o dado mostra o número aleatório $\eta = i$ ganhamos $2i+1$ reais e se a moeda mostrar o evento aleatório $\omega = cara$, então dobramos este valor. Por outro lado se a moeda mostrar o evento aleatório $\omega = coroa$, então o valor se reduz pela metade. Seja $X$ o prêmio recebido no jogo, que é uma função de $\eta$ e $\omega$. Deseja-se calcular o valor esperado (média) de $X$. Assinale a alternativa que apresenta a resposta correta.

a) 14
b) 12
c) 10
d) 8

**Questão 15** - No modelo de regressão linear, indique qual das sentenças são verdadeiras (V) ou falsas (F). Se assumirmos:

1. $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$, $i=1,...,n$ ; $E(\varepsilon_i) = 0$; $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ e $Corr(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, com seu modelo estimado pelo método de mínimos quadrados dado por $\hat{Y}_i = a + bX_i$;

2. $X_1, X_2, ..., X_n$ são fixos (não aleatórios);
3. $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ (resíduo).

Então pode-se mostrar que:

i)a e b são estimadores não-viciados de $\alpha$ e $\beta$ e como conseqüência disto também $\hat{Y}_i$ é não-viciado;

ii) Se $s^2$ é um estimador de $\sigma^2$ então $s^2$ é viciado. $s^2$ é obtido pela expressão:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{1}{n-2}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\right].$$

iii)De todos os estimadores não-viciados de $\alpha$ e $\beta$ , a e b tem variância mínima.

Assinale a alternativa que corresponda respectivamente os itens i), ii) e iii).

a) V, V, F
b) V, F, V
c) V, V, V
d) V, F, F

## PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
## SELEÇÃO – MESTRADO/UFMG – 2008

Assinale no quadro abaixo as opções escolhidas para cada questão:

| Questão | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |
| 12 | | | | |
| 13 | | | | |
| 14 | | | | |
| 15 | | | | |

**NOME:**

---

**ASSINATURA:**

---

**Carteira de Identidade / Passaporte:**

---