

**PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO – MESTRADO/UFMG – 2009**

Instruções:

- a) Cada questão respondida corretamente vale 1 (um) ponto.
- c) Cada questão respondida incorretamente vale -1 (menos um) ponto.
- b) Cada questão deixada em branco vale 0 (zero) pontos (neste caso marque TODAS as alternativas).
- d) Pelo menos 9 (nove) questões devem ser respondidas pelo candidato.
- e) A nota final será a soma dos pontos (negativos e positivos) de todas as questões.
- f) As opções escolhidas devem ser assinaladas na folha de respostas no final da prova.

Questão 1: Encontre o estimador de momentos (EM) para θ baseado no primeiro momento de variáveis aleatórias i.i.d. que seguem a distribuição de probabilidade com a função de probabilidade abaixo:

$$f(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1}, \text{ para } x = 1, 2, 3, \dots \text{ e } \theta \in (0, 1).$$

Encontre também o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de θ .
Assinale a opção abaixo que é **verdadeira**.

- A) O EMV deve ser obtido através de procedimentos numéricos.
- B) O EM é \bar{x} .

C) O EMV é igual a $\frac{n}{\sum x_i - 1 + n}$.

- D) Todas as opções são falsas.

Questão 2: Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com média μ e variância σ^2 . Em relação ao seguinte teste de hipótese $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_a: \mu < \mu_0$, verifique se cada uma das afirmativas seguintes é verdadeira (V) ou falsa (F):

- I. Se o p -valor do teste for menor que o nível de significância, α , a hipótese H_0 deve ser rejeitada.
- II. Se a variância σ^2 for conhecida, a estatística do teste segue a distribuição t-Student. Caso contrário, a distribuição do teste será a normal padrão.
- III. Dados os parâmetros da população: $\mu_0 = 50$ e $\sigma^2 = 900$, suponha que a média de uma amostra aleatória de tamanho 36 retirada desta população seja $\bar{X} = 47$. Neste caso, o nível de significância do teste, α , será igual a 0,2743.
- IV. A função-potência para este teste de hipótese será uma função decrescente da média μ .
- V. Se a hipótese alternativa fosse $H_a: \mu > \mu_0$, ainda assim a função-potência seria decrescente com a média μ .

Escolha a opção correta da seqüência de 'V' e 'F' para as cinco afirmativas anteriores:

- A) FFFFF
- B) VVFVV
- C) VVFFV
- D) VFFVF

Questão 3: Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade que depende do parâmetro desconhecido θ , tal que $E(X) = \theta$. Seja também x_1, x_2, \dots, x_n uma amostra aleatória de X . Assinale a opção abaixo que é **incorreta**.

- A) Para amostras suficientemente grandes e sob condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança de θ segue uma distribuição Normal.
- B) Se $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ é um estimador de θ , este não será viciado desde que $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. Além disto, $\hat{\theta}$ terá variância mínima se $c_i = 1/n$ para todo i .
- C) Se a variável aleatória X é uniformemente distribuída no intervalo $[0, \theta]$, com $\theta > 0$, então $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} \text{máximo}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é um estimador não-viciado de θ .
- D) Se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores do parâmetro θ em que $E(\hat{\theta}_1) = \theta$ e $E(\hat{\theta}_2) \neq \theta$ mas $\text{Var}(\hat{\theta}_2) < \text{Var}(\hat{\theta}_1)$, então o estimador $\hat{\theta}_2$ deve ser preferível a $\hat{\theta}_1$.

Questão 4: Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória da densidade Normal(0, θ) e seja $T = 1/n \sum_{i=1}^n X_i^2$.

Verifique se cada uma das afirmativas seguintes é verdadeira (V) ou falsa (F):

- I. T é o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de θ .
- II. T é um estimador tendencioso (ou viciado) de θ .
- III. A variável aleatória $Z = \sum_{i=1}^n X_i^2 / \theta$ tem distribuição Qui-Quadrado com n graus de liberdade.
- IV. $E(X_1^2 X_2^3) = \theta^2$.
- V. T é um estimador eficiente de θ .

Escolha a opção correta da seqüência de 'V' e 'F' para as cinco afirmativas anteriores:

- A) FFFFF
 B) VVFVV
 C) VVFFV
 D) VFVFV

Questão 5: Seja Y uma variável aleatória com distribuição Binomial(n, p) onde n é conhecido. Sejam \hat{p} e \tilde{p} dois estimadores do parâmetro p :

$$\hat{p} = \frac{Y}{n} \quad \tilde{p} = \frac{Y+1}{n+1}.$$

- I. \hat{p} é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro p .
- II. Sob o critério do erro quadrado médio, que minimiza a esperança da diferença ao quadrado entre o estimador e o parâmetro, para pequenas amostras, não há supremacia de um estimador sobre o outro.
- III. O vício do estimador \tilde{p} é dado por $[(1-p)/(1+n)]$.

Escolha a opção correta da seqüência de 'V' e 'F' para as três afirmativas anteriores:

- A) VFF
 B) VFV
 C) VVF
 D) FVV

Questão 6: Seja p a probabilidade de sair cara em um lançamento de uma moeda e seja X a diferença entre o número de caras e de coroas obtidos em três lançamentos independentes desta moeda. O valor médio de X para $p=0,2$; $p=0,4$ e $p=0,7$, é, respectivamente,

- A) 0,6; 1,2 e 2,1.
- B) -1,8; -0,6 e 1,2.
- C) -0,6; 1,2 e 0,6.
- D) -1,8; 2,1 e 1,2.

Questão 7: Os alunos formandos de um certo curso são submetidos a um "exame de diagnóstico", que determinará os 10% estudantes com pior aproveitamento e os 5% com melhor aproveitamento. Assumindo que as notas dos estudantes seguem a distribuição Normal com média 80 e variância 100, escolha qual das alternativas corresponde, respectivamente,

- I. ao valor que delimita os estudantes com pior aproveitamento;
- II. ao valor que delimita os estudantes com melhor aproveitamento;
- III. à probabilidade de, entre três alunos escolhidos independentemente e ao acaso, pelo menos dois estarem classificados entre os de pior aproveitamento,

- A) 60,5; 90,3 e 0,972.
- B) 60,5; 96,4 e 0,972.
- C) 60,5; 90,3 e 0,028.
- D) 67,2; 96,4 e 0,028.

Questão 8: Um funcionário de uma lanchonete mistura acidentalmente três salgados estragados junto com quatro em bom estado. Se duas amigas compram, cada uma, um desses salgados, marque qual das alternativas corresponde, respectivamente, às probabilidades de

- I. as duas comparem salgados estragados;
- II. uma comprar um salgado estragado e a outra não.

- A) $1/7$; $4/7$.
- B) $18/49$; $12/49$.
- C) $9/49$; $12/49$.
- D) $2/7$; $4/7$.

Questão 9: Suponha que a duração, em minutos, de uma chamada telefônica é distribuída exponencialmente, com média de 5 minutos, e que o minuto de ligação custe 20 centavos. A probabilidade de uma chamada durar entre 2 e 7 minutos, a mediana da duração da chamada e o custo médio da chamada valem, respectivamente,

- A) $e^{-2/5} - e^{-7/5}$, $1/2$ e R\$ 1,50.
- B) $e^{-2/5} - e^{-7/5}$, $1/2$ e R\$ 1,00.
- C) $e^{-2/5}(1 - e^{-1})$, $\ln(32)$ e R\$ 1,00.
- D) $e^{-7/5} - e^{-2/5}$, $\ln(32)$ e R\$ 1,50.

Questão 10: Seja $f(x,y)=c(x+y)$, $0 < x < y < 2$, e 0, caso contrário, a função de densidade conjunta de duas variáveis X e Y . Neste caso, $P(Y > 2X)$ e $\text{Var}(X)$ valem, respectivamente:

- A) $7/12$ e $43/180$.
- B) $7/12$ e $14/15$.
- C) $1/4$ e $14/15$.
- D) $1/4$ e $43/180$.

Questão 11: Uma máquina de refrigerantes foi regulada para que o volume de refrigerante dispensado tenha distribuição aproximadamente Normal com média $\mu=200$ mililitros e desvio padrão $\sigma=15$ mililitros. A máquina é periodicamente testada, retirando-se uma amostra de 9 copos do refrigerante, medindo-se o volume dispensado em cada copo e verificando se a média dos conteúdos amostrados pertence ao intervalo [191;209] mililitros, situação na qual se conclui que $\mu=200$; caso contrário, conclui-se que $\mu \neq 200$. Supõe-se que não haverá mudança no desvio padrão.

Assinale a opção abaixo que é **incorreta**.

- A) A probabilidade de se cometer um erro tipo I com este teste é menor que 0,05.
- B) Se tiver ocorrido uma mudança para $\mu=215$ mililitros, a probabilidade de se cometer um erro tipo II com este teste é menor que 0,15.
- C) Se tiver ocorrido uma mudança para $\mu=185$ mililitros, a probabilidade de se cometer um erro tipo II com este teste é menor que 0,15.
- D) Se, neste teste, for usado o intervalo [185;304] mililitros ao invés do intervalo atual, a probabilidade de se cometer o erro tipo I do teste irá ser menor do que aquele do teste atual.

Questão 12: Um químico deseja saber se a quantidade de sólidos suspensos em um sistema de limpeza por carvão (Y, em gramas) é influenciada pelo pH do sistema (X) e pelo tipo de polímero (1, 2 ou 3). Quanto maior a quantidade de sólidos suspensos, mais eficiente é o sistema de limpeza. A figura abaixo mostra o diagrama de dispersão dos dados coletados. Ele ajustou um modelo de regressão linear, cujos resultados são mostrados abaixo. O tipo de polímero foi introduzido no modelo através das variáveis:

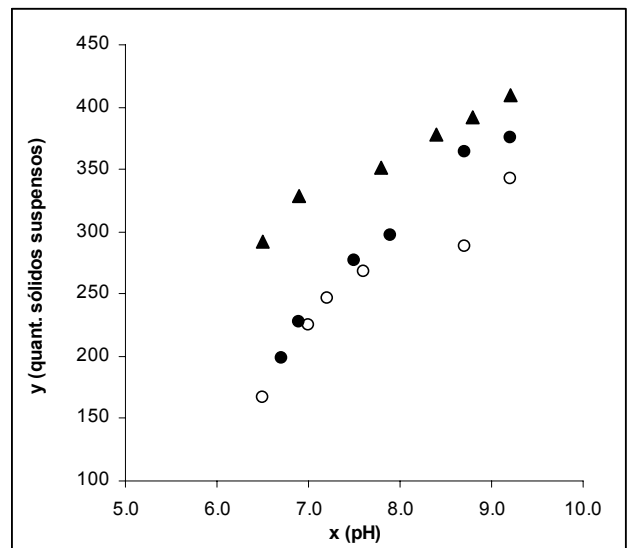
$$Z_1 (=1, \text{ se polímero tipo 1; } =0, \text{ c.c.}) \text{ e } Z_2 (=1, \text{ se polímero tipo 2; } =0, \text{ c.c.}).$$

The regression equation is
 $y = -162 + 54.3 x + 90.0 z_1 + 27.2 z_2$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-161.90	37.43	-4.32	0.001
x	54.30	4.76	11.41	0.000
z1	90.00	11.05	8.14	0.000
z2	27.17	11.01	2.47	0.027

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	80182	26727	73.68	0.000
Residual Error	14	5079	363		
Total	17	85260			



▲ polímero 1 ● polímero 2 ○ polímero 3

Verifique se cada uma das afirmativas seguintes é verdadeira (V) ou falsa (F):

- I. O *valor-p* (probabilidade de significância) do teste de significância de cada coeficiente da regressão foi calculado na distribuição *t-Student* com 14 graus de liberdade.
- II. O coeficiente de correlação múltipla (R^2) é maior que 90%.
- III. Todos os termos do modelo são significantes a 5%.
- IV. Para um valor de pH fixo, estima-se que o polímero 1 aumente a quantidade de sólidos suspensos em relação ao polímero 3 em, em média, 90 gramas.

Escolha a opção correta da seqüência de '**V**' e '**F**' para as quatro afirmativas anteriores:

- A) FVFV
- B) VVVV
- C) VVVF
- D) FFFF

Questão 13: Em um experimento industrial, um engenheiro está interessado em saber se há diferença na média da absorção de uma mistura de concreto entre 5 diferentes tipos de agregados. Ele realizou um experimento completamente aleatorizado, utilizando 6 porções de concreto para cada tipo de agregado. Os resultados (incompletos) da análise de variância são mostrados na tabela abaixo.

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado Médio	Estatística F
Agregados	85356	4		
Erro	124020			---
Total	209376		----	---

Verifique se cada uma das afirmativas seguintes é verdadeira (V) ou falsa (F):

- I. A Soma dos Quadrados do Erro tem 26 graus de liberdade.
- II. O Quadrado Médio do Erro é igual a 4770.
- III. No teste da hipótese de que as médias de absorção são iguais entre os tipos de agregados, o valor P da estatística F é maior que 0,1.
- IV. Ao nível de significância de 5%, o engenheiro conclui que não há diferença entre os tipos de agregados quanto à média de absorção.

Escolha a opção correta da seqüência de 'V' e 'F' para as quatro afirmativas anteriores:

- A) FV FV
- B) FF VV
- C) FFFF
- D) VV FF

Questão 14: Cada um dos noventa adultos em uma amostra aleatória foi classificado segundo seu gênero e o número de horas que assiste à televisão por semana. Os dados são mostrados na tabela abaixo.

Horas de Televisão	Gênero	
	Feminino	Masculino
Menos de 25	19	27
25 ou mais	29	15

Considere o uso do Teste do Qui-Quadrado para testar a hipótese de que o tempo gasto assistindo à televisão é independente do gênero da pessoa.

Escolha, dentre as alternativas abaixo, aquela que é *verdadeira*:

- A) Sob a hipótese de independência entre o tempo gasto assistindo à televisão e o gênero da pessoa, esperava-se, nesta amostra, um número menor que 15 pessoas do gênero masculino assistindo à televisão por 25 horas ou mais em uma semana.
- B) Sob a hipótese de independência entre o tempo gasto assistindo à televisão e o gênero da pessoa, esperava-se, nesta amostra, um número maior que 29 pessoas do gênero feminino assistindo à televisão por 25 horas ou mais em uma semana.
- C) Conclui-se que não há independência entre o tempo gasto assistindo à televisão e o gênero da pessoa ao nível de significância de 5%, mas a conclusão não é a mesma ao nível de significância de 1%.
- D) Conclui-se que não há independência entre o tempo gasto assistindo à televisão e o gênero da pessoa ao nível de significância de 1%, mas a conclusão não é a mesma ao nível de significância de 5%.

Questão 15: Sobre Teoria da Amostragem, assinale a opção abaixo que é *incorreta*.

- A) Na amostragem aleatória simples, todos os elementos da população têm probabilidade conhecida de pertencer à amostra.
- B) Na amostragem aleatória simples, todos os elementos da população têm a mesma probabilidade de pertencer à amostra.
- C) Em todo procedimento probabilístico de amostragem, todos os elementos da população devem ter a mesma probabilidade de pertencer à amostra.
- D) Na amostragem aleatória simples, a seleção dos elementos pode ser feita com ou sem reposição dos elementos já selecionados.

**PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO – MESTRADO/UFMG – 2009**

*No quadro abaixo, assinale com um **X** a opção de resposta escolhida para cada questão.
USE CANETA.*

QUESTÃO	RESPOSTA				PONTUAÇÃO
	A	B	C	D	
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
PONTUAÇÃO TOTAL :					

NOME COMPLETO: _____

IDENTIDADE/PASSAPORTE Nº: _____

ASSINATURA: _____