DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA -UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/UFMG - 2014-2015

Instruções:

1. Cada questão respondida corretamente vale **1 (um) ponto**.
2. Cada questão respondida incorretamente vale **-1 (menos um) ponto**.
3. Cada questão deixada em branco vale 0 (zero) ponto.
4. Pelo menos 9 (nove) questões devem ser respondidas pelo candidato.
5. A nota final será a soma dos pontos (negativos e positivos) de todas as questões.
6. As opções escolhidas devem ser assinaladas na folha de respostas no final da prova.

A prova tem duração de 3 horas.

É proibido usar celular; consultar referências bibliográficas diferentes daquelas que estão estabelecidas no edital de seleção; emprestar calculadoras e/ou livros para a consulta de outros candidatos durante a prova.

Questão 1. Maria e José jogam o seguinte jogo: de uma urna que contém 5 bolas pretas e 2 bolas brancas eles retiram bolas alternadamente, sem reposição. O vencedor é aquele que retirar uma bola branca primeiro. Determine a probabilidade de que Maria ganhe o jogo, supondo a seguinte ordem para as retiradas: Maria retira a primeira bola, depois José, e assim por diante.

a. 2/3.

b. 1/3.

c. 4/7.

d. 3/7.

Questão 2. Sejam $X_1, \dots, X_{n_1}$ uma amostra aleatória da distribuição normal com média μ e variância 9000 e $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ uma amostra aleatória da distribuição normal com média μ e variância 4000. Suponha que as amostras são independentes entre si. Dado que $n_1 = 100$ e $n_2 = 200$, considere o seguinte estimador não viciado para μ, dado por $\bar{Z} = a\bar{X} + (1-a)\bar{Y}$, onde $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são as médias amostrais. Encontre o valor de a que minimiza a variância de $\bar{Z}$

a. 0,18.

b. 0,31.

c. 0,50.

d. 0,44.

Questão 3. Seja $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma distribuição normal com média θ e variância 1, onde $\theta \geq 0$. O estimador de máxima verossimilhança de θ é

a. $\hat{\theta} = \bar{Y}$.

b. $\hat{\theta} = \begin{cases} \bar{Y}, & se \quad \bar{Y} \geq 0 \\ 0, & se \quad \bar{Y} < 0 \end{cases}$.

c. $\hat{\theta} = \begin{cases} -\bar{Y}, & se \quad \bar{Y} \geq 0 \\ \bar{Y}, & se \quad \bar{Y} < 0 \end{cases}$.

d. $\hat{\theta} = |\bar{Y}|$.

Questão 4. Um dado honesto é lançado quatro vezes. Qual é a probabilidade de que cada um dos números 1, 2 e 3 saiam pelo menos uma vez?

a. 5/36.

b. 1/12.

c. 5/12.

d. 1/24.

Questão 5. O consumidor requer que a fração defeituosa numa etapa crítica de fabricação de semicondutores não exceda 0,05, e que o fabricante demonstre esta capacidade através de um teste de hipóteses, com nível de 0,05 de significância, e que tenha probabilidade do erro tipo II de 0,10 quando a fração defeituosa é de 0,03. O tamanho da amostra necessária é

a. 1253.

b. 832.

c. 421.

d. 411.

Questão 6. Com uso do software estatístico R suponha que uma amostra de 10.000 valores é gerada aleatoriamente de uma distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10 e os valores gerados são arquivados em uma coluna denominada A. De forma independente, uma segunda amostra de 50.000 valores é gerada de uma distribuição normal com média 200 e desvio padrão 20 e arquivada em uma nova coluna denominada B. Em seguida as coluna A e B são empilhadas em outra coluna denominada C, que agora contém 60.000 valores. Qual será o desvio padrão aproximado para os dados contidos na coluna C?

a. 52,44.

b. 18,33.

c. 13,54.

d. 41,70.

Questão 7. A caixa I contém 1 bola azul e 3 bolas vermelhas e a caixa II contém 1 bola azul e 1 bola vermelha. Uma bola é selecionada aleatoriamente da caixa I e transferida para a caixa II e, então, duas bolas são selecionadas aleatoriamente da caixa II. Qual é a probabilidade de que a bola transferida para caixa II seja vermelha, dado que duas bolas de cores diferentes tenham sido selecionadas da caixa II?

a. 3/4.

b. 4/9.

c. 1/6.

d. 5/6.

Questão 8. Para estimar a renda média μ de uma população, foram propostos dois estimadores não-viesados e independentes, $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$, tal que $Var(\hat{\mu}_1) = \frac{Var(\hat{\mu}_2)}{3}$. Considere os seguintes estimadores ponderados de μ: $T_1 = (\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)/2$; $T_2 = (4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)/5$; $T_3 = (\hat{\mu}_1 + 7\hat{\mu}_2)/8$. A alternativa que apresenta os três estimadores T_1, T_2 e T_3 em ordem decrescente de erro quadrático médio é

a. T_2, T_1, e T_3.

b. T_1, T_2, e T_3.

c. T_3, T_2, e T_1.

d. T_3, T_1, e T_2.

Questão 9. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde ambos μ e σ^2 são desconhecidos. Um pesquisador propõe um estimador $T_1 = \bar{X}^2$ para μ^2, onde $\bar{X}$ denota a média amostral. O vício desse estimador é

a. $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

b. $\frac{\sigma^2}{n^2}$.

c. $\frac{\sigma^2}{n}$.

d. 0.

Questão 10. Sabe-se que o tempo de vida, em horas, de uma bateria segue aproximadamente uma distribuição normal com média μ e desvio padrão $\sigma = 1,25$ horas. Uma amostra aleatória de 10 baterias é selecionada e o tempo de vida médio amostral é $\bar{x} = 40,5$ horas. Um teste de hipóteses é realizado para verificar se as baterias têm um tempo médio de vida maior que 40 horas. Use um nível de significância de 5% e considere $\Phi(k)$ a função distribuição acumulada da normal-padrão avaliada no ponto k. A probabilidade do erro tipo II para esse teste, se $\mu = 42$ horas, é

a. $\Phi(-3,41)$.

b. $\Phi(-1,96)$.

c. $\Phi(1,65)$.

d. $\Phi(-10,78)$.

Questão 11. Considere a estimação da variância de uma distribuição normal com média desconhecida. Se uma amostra de tamanho n=10 é considerada, o erro quadrático médio (EQM) do estimador de máxima verossimilhança representa a seguinte porcentagem do EQM do estimador não viciado $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

a. mais que 100,0%.

b. 90,0%.

c. 85,5%.

d. 81,0%.

Questão 12. A função de densidade conjunta que descreve o comportamento probabilístico das variáveis aleatórias X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{se } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine $P(X + Y < 1)$.

a. 1/3.

b. 2/3.

c. 1/2.

d. 1/6.

Questão 13. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição uniforme no intervalo $(0, L)$. Determine o valor esperado do minimo de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

a. $\frac{L}{n+1}$.

b. $\frac{nL}{n+1}$.

c. $\frac{L}{n(n+1)}$.

d. $\frac{L}{n}$.

Questão 14. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas independentes cujas funções geradoras de momentos são $M_X(t) = e^{(e^t-1)}$ e $M_Y(t) = 1/2(e^t + 1)$, respectivamente. Encontre $P(XY = 0)$.

a. e^{-1}.

b. $\frac{1}{2} + e^{-1}$.

c. $\frac{1}{2}(e^{-1} + 1)$.

d. $\frac{1}{2}e^{-1}$.

Questão 15. Suponha que a variação do preço de uma ação está em acordo com o seguinte modelo simplificado: em cada dia o preço da ação sobe uma unidade com probabilidade p ou cai uma unidade com probabilidade $1-p$. Assuma que as variações nos diferentes dias sejam independentes. Se $p = 1/2$, determine a probabilidade que após dois dias a ação retorne ao valor inicial.

a. $\frac{2}{3}$.

b. $\frac{3}{4}$.

c. $\frac{1}{4}$.

d. $\frac{1}{2}$.

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA -UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/UFMG - 2014-2015

Assinale no quadro abaixo as opções escolhidas para cada questão:

Questão	a	b	c	d
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

NOME: ____

ASSINATURA: ______________________________________

Carteira de Identidade / Passaporte: