DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2015/2016

Instruções:

1. Cada questão respondida corretamente vale **1 (um) ponto**.
2. Cada questão respondida incorretamente vale **-1 (menos um) ponto**.
3. Cada questão deixada em branco vale 0 (zero) pontos
4. Pelo menos 9 (nove) questões devem ser respondidas pelo aluno
5. A nota final será a soma dos pontos (negativos e positivos) de todas as questões
6. As opções escolhidas devem ser assinaladas na folha de respostas no final da prova.

A prova tem duração de 3 horas.

É proibido: usar celular; consultar referências bibliográficas diferentes das que estão estabelecidas no edital de seleção; emprestar calculadoras e/ou livros para consulta de outros candidatos durante a prova

`Nome do candidato(a): ________________________________________________`

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2015/2016

Informações que podem ser úteis:

- Z_δ = quantil da $N(0,1)$ com área δ à esquerda
  $Z_{0,9987} = 3$, $Z_{0,9332} = 1{,}5$, $Z_{0,9049} = 1{,}31$, $Z_{0,8643} = 1{,}1$, $Z_{0,8159} = 0{,}9$, $Z_{0,7734} = 0{,}75$.
- $t_{\delta;v}$ = quantil da t-Student com v graus de liberdade (área δ à esquerda)
  $t_{0,9915;8} = 3$, $t_{0,9140;8} = 1{,}5$, $t_{0,8867;8} = 1{,}31$, $t_{0,8483;8} = 1{,}1$, $t_{0,8028;8} = 0{,}9$, $t_{0,7626;8} = 0{,}75$.

Lista com algumas séries matemáticas:

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ para $|x| < 1$;
- $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ para $|x| < 1$;
- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) x^n = (1+x)^\alpha$ para $|x| < 1$;
- $-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = \log(1-x)$ para $|x| < 1$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} = \log(1+x)$ para $|x| < 1$;
- $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \exp\{x\}$ para todo x;

Questão 1. Seja X uniformemente distribuída no intervalo $(0,1)$ e $Y = X^n$. A função densidade e a esperança de Y são dadas, respectivamente, por:

a. $y^{1/n}$ e $\dfrac{1}{1+n}$

b. $\dfrac{1}{n} y^{(1/n)-1}$ e $\dfrac{1}{1+n}$

c. $y^{1/n}$ e $\dfrac{n}{1+2n}$

d. $\dfrac{1}{n} y^{(1/n)-1}$ e $\dfrac{n}{1+2n}$

Questão 2. Seja X uma variável aleatória normalmente distribuída com média μ e variância 4. Considere o teste de hipóteses $H_0 : \mu = 10$ contra $H_1 : \mu = 13$. Para uma amostra aleatória de tamanho $n = 9$ de X, considere o critério que rejeita H_0 se a média amostral é maior ou igual a 12. As probabilidade dos erros tipo I e tipo II para este critério são dadas, respectivamente, por:

a. 0,0013 e 0,0668

b. 0,0085 e 0,0860

c. 0,0013 e 0,0860

d. 0,0085 e 0,0668

Questão 3. Considere o teste de hipóteses $H_0 : p = 0{,}2$ contra $H_1 : p > 0{,}2$, onde p é a proporção populacional de itens defeituosos. Em uma amostra aleatória de 5 itens, observa-se uma proporção amostral de itens defeituosos igual a 0,4. O p-valor deste teste é igual a:

a. 0,1357

b. 0,1665

c. 0,1841

d. 0,2627

Questão 4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com função densidade dada por $f(x|\theta) = \theta\, c^\theta\, x^{-(\theta+1)}$ com $x \geq c > 0$ e $\theta > 0$. O estimador de máxima verossimilhança de θ é dado por:

a. $\dfrac{n}{\left(\sum_{i=1}^n \log(x_i)\right) - n\,\log(c)}$

b. $\dfrac{nc}{c\left(\sum_{i=1}^n \log(x_i)\right) - n}$

c. $\dfrac{n}{\log\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - n\,\log(c)}$

d. $\dfrac{nc}{c\,\log\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - n}$

Questão 5. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas independentes e k uma constante. Seja A o evento $X = k$, B o evento $Y = k$, C o evento $\max\{X, Y\} = k$ e D o evento $\min\{X, Y\} = k$. Se $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ e $P(C) = 0{,}2$, então $P(D)$ é igual a:

a. 0,1

b. 0,3

c. 0,5

d. 0,7

Questão 6. Considere que $X|Y \sim \text{Binomial}(Y, \theta)$ e que Y segue a distribuição Poisson com média λ. A variância da distribuição marginal de X é dada por:

a. $\lambda\theta^2$

b. $\lambda\theta(2 - \theta)$

c. $\lambda\theta(1 - \theta)$

d. $\lambda\theta$

Questão 7. Em um certo país, a polícia utiliza dois testes para verificar se um motorista consumiu ou não bebida alcoólica. O teste "A" é o primeiro a ser aplicado; saiba que ele acerta em 80% dos casos. Se o teste "A" detectar a presença de álcool, o policial irá então aplicar um teste "B". Este segundo teste nunca falha se o motorista estiver sóbrio; entretanto, ele erra em 10% dos casos de motoristas que beberam. Considere que 25% dos motoristas parados em uma blitz consumiram bebida alcoólica. Nesta blitz, qual é a probabilidade de que um motorista tenha realmente bebido visto que o teste "A" detectou álcool e o teste "B" não detectou?

a. 2/17

b. 2/7

c. 1/31

d. 1/11

Questão 8. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da Poisson com média θ e $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Qual deve ser o valor de k tal que $\exp\{-kY\}$ seja um estimador não viciado para $\exp\{-\theta\}$?

a. $\dfrac{n}{n-1}$

b. $\dfrac{n-1}{n}$

c. $\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$

d. $\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$

Questão 9. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes tal que $Y_i \sim \text{Normal}(\beta x_i, \sigma^2)$; considere x_i conhecido para $i = 1, \ldots, n$. Qual das opções abaixo representa uma estatística conjuntamente suficiente para β e σ^2?

a. $\left(\sum_{i=1}^n Y_i x_i \,,\, \sum_{i=1}^n Y_i^2\right)$

b. $\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 \,,\, \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$

c. $(\sum_{i=1}^n Y_i x_i \,,\, \sum_{i=1}^n Y_i)$

d. $\left(\sum_{i=1}^n Y_i \,,\, \sum_{i=1}^n Y_i^2 \,,\, \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$

Questão 10. Considere as densidades ou funções de probabilidade enumeradas a seguir:

(1) $p(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{n!}{\prod_{i=1}^n x_i!} \prod_{i=1}^n \theta_i^{x_i}$, com
$x_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\theta_i \in (0, 1)$, $\sum_{i=1}^n x_i = n$ e $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$.

(2) $f(x) = \dfrac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma[\nu/2]\, \sigma \sqrt{\nu\pi}} \left[1 + \dfrac{(x-\mu)^2}{\nu\sigma^2}\right]^{-(\nu+1)/2}$, com
$x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $\nu > 0$.

(3) $f(x) = \dfrac{\alpha\lambda^\alpha}{x^{\alpha+1}}$ com $x \geq \lambda$, $\lambda > 0$ e $\alpha > 0$.

Quais destas distribuições <u>NÃO</u> pertencem à família exponencial?

a. Apenas (1) e (2).

b. Apenas (1) e (3).

c. Apenas (2) e (3).

d. Todas elas pertencem à família exponencial.

Questão 11. A senha de um cartão de crédito é composta por duas letras distintas (alfabeto com 26 letras) seguidas por 3 dígitos distintos. Qual é a probabilidade de que um ladrão virtual acerte uma senha até a segunda tentativa aleatória?

a. $2{,}1367 \times 10^{-6}$

b. $4{,}5656 \times 10^{-12}$

c. $4{,}2735 \times 10^{-6}$

d. $2{,}5345 \times 10^{-12}$

Questão 12. Uma amostra aleatória de tamanho $n = 3$ do número de chamadas a uma central do SAMU, em 3 dias seguidos, resultou nas seguintes observações: $k_1 = 5$, $k_2 = 7$ e $k_3 = 9$. Suponha que as chamadas em um dia podem ser modeladas por uma variável aleatória Poisson com média λ. Encontre a estimativa de máxima verossimilhança para a probabilidade de que ocorram, no máximo, 2 chamadas em um dia (arredondado na 4^a casa decimal).

a. 0,0223

b. 0,0136

c. 0,0296

d. 0,0520

Questão 13. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ amostras aleatórias, independentes, ambas com distribuição Normal de média μ e variância σ^2. Seja $W = \bar{X} - \bar{Y}$. A variância de W e a esperança de $\bar{X}^2$ são, respectivamente:

a. $\sigma^2(\frac{n+m}{nm})$ e $\sigma^2 + n\mu^2$

b. $\sigma^2(\frac{n+m}{nm})$ e $\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

c. $(n+m)\sigma^2$ e $\sigma^2 + n\mu^2$

d. $(n+m)\sigma^2$ e $\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

Questão 14. Um dado com 6 faces igualmente prováveis é continuamente lançado até que a soma total de todas as jogadas exceda 300. A probabilidade de que sejam necessárias 80 jogadas é aproximadamente:

a. 0,0014

b. 0,0336

c. 0,9049

d. 0,0951

Questão 15. Suponha que X tenha função densidade de probabilidade dada por $f(x) = 2x$ para $0 \leq x \leq 1$. A função geradora de momentos de X é dada por:

a. $2\left(\dfrac{e^t}{t^2} - \dfrac{e^t}{t^2}\right)$

b. $2\left(\dfrac{e^t}{t} - \dfrac{e^t}{t^2} + \dfrac{1}{t^2}\right)$

c. $2\left(e^t t - e^t t^2 + t^2\right)$

d. $2\left(e^t t^2 - e^t t^2\right)$

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2015/2016
Data: 10/11/2015

Instruções:

- No quadro abaixo, assinale com um **X** a opção de resposta escolhida para cada questão.
- USE CANETA.

	Resposta				
Questão	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	Pontuação
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

`Número de inscrição: ______________________`