DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2016/2017

Instruções:

1. Cada questão respondida corretamente vale **1 (um) ponto**.
2. Cada questão respondida incorretamente vale **-1 (menos um) ponto**.
3. Cada questão deixada em branco vale 0 (zero) pontos
4. Pelo menos 9 (nove) questões devem ser respondidas pelo aluno
5. A nota final será a soma dos pontos (negativos e positivos) de todas as questões
6. As opções escolhidas devem ser assinaladas na folha de respostas no final da prova.

A prova tem duração de 3 horas.

É proibido: usar celular; consultar referências bibliográficas diferentes das que estão estabelecidas no edital de seleção; emprestar calculadoras e/ou livros para consulta de outros candidatos durante a prova

`Nome do candidato(a): ________________________________________________`

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2016/2017

Informações que podem ser úteis:

- Z_δ = quantil da $N(0,1)$ com área δ à esquerda
  $Z_{0,95} = 1,64$, $Z_{0,975} = 1,96$.
- $t_{\delta;v}$ = quantil da t-Student com v graus de liberdade (área δ à esquerda)
  $t_{0,95;8} = 1,86$, $t_{0,975;8} = 2,31$, $t_{0,95;9} = 1,83$, $t_{0,975;9} = 2,26$.

Questão 1. Suponha que $X_1, ..., X_n$ é uma amostra da distribuição uniforme no intervalo $[\theta, 2\theta]$. O estimador de máxima verossimilhança, o estimador pelo método dos momentos e uma estatística suficiente minimal para θ são dados, respectivamente, por:

a. $\left[\frac{\max(X_1,...,X_n)}{2} \quad ; \quad \frac{2\bar{X}}{3} \quad ; \quad \big(\min(X_1,...,X_n), \max(X_1,...,X_n)\big)\right]$

b. $\left[\min(X_1,...,X_n) \quad ; \quad \frac{3\bar{X}}{2} \quad ; \quad \min(X_1,...,X_n)\right]$

c. $\left[\max(X_1,...,X_n) \quad ; \quad \bar{X} \quad ; \quad \big(\min(X_1,...,X_n), \max(X_1,...,X_n)\big)\right]$

d. $\left[\min(X_1,...,X_n) \quad ; \quad \bar{X} \quad ; \quad \max(X_1,...,X_n)\right]$

Questão 2. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson com parâmetro $\theta > 0$. Defina $T_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$. É correto dizer que $E(T_n)$ e $P(T_n = 0)$ são dados respectivamente por:

a. θ^n ; $1 - (1 + e^{-\theta})^n$

b. $n.\theta$; $1 - (1 - e^{-\theta})^n$

c. θ^n ; $1 - (1 - e^{-\theta})^n$

d. $n.\theta$; $1 - (1 + e^{-\theta})^n$

Questão 3. Suponha que $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_n$ são amostras independentes das distribuições Poisson com respectivas médias μ_1 e μ_2. Deseja-se testar H_0: $\mu_1 = \mu_2$ contra H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$. Seja $T = \frac{\hat{\mu}_1}{(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)}$, onde $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$ são, respectivamente, os estimadores de máxima verossimilhança de μ_1 e μ_2.

O teste da razão de verossimilhança de nível α é dado por:

a. $2\log[2T]^{(\bar{X}+\bar{Y})} > \chi^2_{n-1,1-\alpha}$

b. $2\log\left[2T(1-T)^{1-T}\right] > \chi^2_{n-1,1-\alpha}$

c. $2\log\left[2T^T(1-T)^{1-T}\right]^{n(\bar{X}+\bar{Y})} > \chi^2_{1,1-\alpha}$

d. $2\log[2T]^{n(\bar{X}+\bar{Y})} > \chi^2_{1,1-\alpha}$

Questão 4. Seja Y uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Defina $X = Y^n$. É correto afirmar que:

a. $E(X+1) = 1 + \dfrac{1}{n+1}$

b. $E(X+1) = \dfrac{n}{n+1}$

c. $E(X+1) = 1 + \dfrac{1}{n-1}$

d. $E(X+1) = \dfrac{n}{n-1}$

Questão 5. Suponha que X tem distribuição com densidade

$$f(x) = \begin{cases} \beta x^{\beta-1}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Considere os itens abaixo:

1. O teste mais poderoso, ao nível de 1%, para testar as hipóteses H_0: $\beta = 2$ e H_1: $\beta = 1$, rejeita H_0 quando $X < c$.
2. Considere a região de rejeição encontrada para o teste no item anterior como válida para testar H_0: $\beta \geq 2$ e H_1: $\beta < 2$. Defina $\pi(\beta)$ como sendo a função poder deste teste.

Então (c ; $\pi(\beta)$) são respectivamente:

a. (0,99 ; $(0,99)^{\beta}$)

b. (0,1 ; $(0,99)^{\beta}$)

c. (0,99 ; $(0,1)^{\beta}$)

d. (0,1 ; $(0,1)^{\beta}$)

Questão 6. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra i.i.d. com distribuição Exponencial, cuja densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad x > 0,$$

onde $\lambda > 0$. O estimador não viciado de mínima variância para λ^2 é:

a. $\bar{X}^2$

b. $\dfrac{n\bar{X}^2}{n+1}$

c. $\dfrac{(n+1)\bar{X}^2}{n}$

d. $\dfrac{n\bar{X}^2}{n-1}$

Questão 7. Considere um ponto aleatório (X, Y) que tem distribuição uniforme no quadrado com vértices (1,1), (1,-1), (-1,1) e (-1,-1), cuja densidade conjunta é dada por $f(x, y) = \frac{1}{4}$ no quadrado. As probabilidades dos eventos $[X^2 + Y^2 < 1]$ e $[2X - Y > 0]$ são dadas, respectivamente, por:

a. $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$

b. $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{1}{4}$

c. $\dfrac{3\pi}{4}$ e $\dfrac{1}{4}$

d. $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{2}{4}$

Questão 8. Suponha $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra i.i.d. com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, com μ conhecido. Seja W_n um estimador não viciado de σ^2. Neste caso, podemos afirmar que:

a. $Var(W_n) \geq \dfrac{2\sigma^4}{n}$

b. $Var(W_n) \geq \dfrac{2\sigma^2}{n}$

c. $Var(W_n) \leq \dfrac{2\sigma^4}{n}$

d. $Var(W_n) \leq \dfrac{2\sigma^2}{n}$

Questão 9. Suponha que o número de carros em uma largada de corrida seja uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro λ. Suponha também que o número de paradas que cada piloto faz para troca de pneus sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição Uniforme discreta no conjunto $\{1, \ldots, N\}$ e independentes do número de carros que iniciam a corrida. Defina Y como o número de carros que param para troca de pneus exatamente N vezes. É correto afirmar que:

a. $E(Y) = \lambda + N \qquad Var(Y) = N^2$

b. $E(Y) = \dfrac{\lambda}{N} \qquad Var(Y) = \dfrac{\lambda}{N}\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)$

c. $E(Y) = \lambda + N \qquad Var(Y) = \lambda$

d. $E(Y) = \dfrac{\lambda}{N} \qquad Var(Y) = \dfrac{\lambda}{N}\left(1 + \dfrac{1}{N}\right)$

Questão 10. Para uma amostra i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ com densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\{-(x-\mu)/\sigma\}, \quad x \geq \mu,$$

onde $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, o estimador de máxima verossimilhança de $P(X_1 \geq t)$, $\ t > \mu$, é dado por:

a. $\exp\left(\dfrac{n(t-\bar{X})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)}}\right)$

b. $\min(X_1, ..., X_n)$

c. $\exp\left(\dfrac{n(t - \min(X_1, ..., X_n))}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \min(X_1, ..., X_n))}\right)$

d. $\exp\left(\dfrac{n(t-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})}\right)$

Questão 11. Considere $X_1, X_2, X_3, \ldots,$ uma sequência infinita de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme discreta no conjunto $\{1, 2, 3\}$. Dado que os resultados 1 e 2 aparecem antes do resultado 3, podemos dizer que a probabilidade condicional de X_1 e X_2 serem ambas iguais a 1 é:

a. $\frac{1}{6}$

b. $\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{4}{6}$

Questão 12. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Exponencial de parâmetro θ, $\theta > 0$, cuja função de distribuição acumulada é $F_{X_1}(x) = 1 - e^{-\theta x}$. Seja $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. É correto afirmar que:

a. $F_Y(a) = F_{X_1}(a)$ e $F_Z(a) = [F_{X_1}(a)]^n$

b. $F_Y(a) = F_{X_1}(an)$ e $F_Z(a) = [F_{X_1}(a)]^n$

c. $F_Y(a) = [F_{X_1}(a)]^n$ e $F_Z(a) = F_{X_1}(an)$

d. $F_Y(a) = F_{X_1}(a)$ e $F_Z = F_{X_1}(a)$

Questão 13. Suponha que $X_1, ..., X_9$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, onde μ e σ^2 são desconhecidos. Deseja-se testar a hipótese H_0: $\mu = 2$ e observou-se $\bar{X} = 4$ e $\sum_{i=1}^{9}(X_i - \bar{X})^2 = 72$. Considere os itens abaixo:

1. Em um teste para a hipótese alternativa H_1: $\mu = 3$, H_0 é rejeitada ao nível de 5%.
2. Em um teste para a hipótese alternativa H_1: $\mu \neq 2$, H_0 é rejeitada ao nível de 5%.
3. Um intervalo de 95% de confiança para μ é dado por [2,04 ; 5,96].

Escolha a resposta correta para os itens (1), (2) e (3), respectivamente:

a. V, F, F

b. V, V, V

c. F, F, V

d. F, V, F

Questão 14. Considere um conjunto com seis xícaras e seis pires em que: duas xícaras e dois pires são vermelhos, duas xícaras e dois pires são brancos, e duas xícaras e dois pires são azuis. Se seis pares compostos cada um por uma xícara e um pires são aleatoriamente formados, qual é a probabilidade de que nenhum par seja formado por um pires e uma xícara de mesma cor?

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{6}$

d. $\frac{1}{9}$

Questão 15. Um estudante é submetido a um teste de múltipla escolha, em que cada questão apresenta cinco alternativas de resposta, sendo apenas uma delas correta. Se o estudante sabe a questão, escolhe a alternativa certa. Se não sabe, escolhe ao acaso uma das alternativas. Suponha que ele saiba 75% das questões. Considere os dois itens abaixo:

a) Se responde corretamente a uma questão, qual a probabilidade do aluno saber a resposta?

b) Se a prova tem 20 questões e as respostas das questões distintas são dadas de maneira independente, qual é a probabilidade do estudante acertar 90% do teste?

As respostas para os itens (a) e (b) são, respectivamente,

a. 0,75 e 0,0669

b. 0,9375 e 0,2323

c. 0,9375 e 0,0669

d. 0,75 e 0,2323

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2016/2017
Data: 22/11/2016

Instruções:

- No quadro abaixo, assinale com um **X** a opção de resposta escolhida para cada questão.
- USE CANETA.

	Resposta				
Questão	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	Pontuação
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

`Número de inscrição: ______________________`