DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2017/2018

Instruções:

1. Cada questão respondida corretamente vale **1 (um) ponto**.
2. Cada questão respondida incorretamente vale **-1 (menos um) ponto**.
3. Cada questão deixada em branco vale 0 (zero) pontos
4. Pelo menos 9 (nove) questões devem ser respondidas pelo aluno
5. A nota final será a soma dos pontos (negativos e positivos) de todas as questões
6. As opções escolhidas devem ser assinaladas na folha de respostas no final da prova.

A prova tem duração de 3 horas.

É proibido: usar celular; consultar referências bibliográficas diferentes das que estão estabelecidas no edital de seleção; emprestar calculadoras e/ou livros para consulta de outros candidatos durante a prova

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2017/2018

Nome do Candidato(a):

Questão 1. Seja X uma variável aleatória normalmente distribuída com média μ e variância 9. Considere o teste de hipóteses $H_0 : \mu = 9$ vs $H_1 : \mu = 7$. Considere o teste que rejeita H_0 se a média amostral é menor ou igual a 8,5. Para uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 25$ de X, as probabilidades de erro tipo I e tipo II para esse teste são dadas respectivamente por:

a. 0,0062 e 0,2033

b. 0,0824 e 0,0000

c. 0,2033 e 0,0062

d. 0,0000 e 0,0824

Questão 2. Considere X e Y duas variáveis aleatórias independentes e defina $Z = X+Y$. Assuma que X possui distribuição Normal Padrão e Y tem distribuição de Poisson com média 2. A alternativa que fornece a probabilidade condicional $\mathbb{P}(Z < 0|Y < 4)$ é:

a. 0,167

b. 0,177

c. 0,117

d. 0,137

Questão 3. Um estatístico coletou 5 pares de dados (y, x) e ajustou um modelo linear $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ em que $\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Após ajustar o modelo, o estatístico obteve a seguinte tabela:

Obs	y	x	Resíduo
1	1,92	1,05	$-1{,}15$
2	5,80	2,21	1,41
3	6,67	4,42	$-0{,}23$
4	8,69	5,59	0,46
5	9,41	7,05	

O resíduo e o valor predito ($\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$) para a quinta observação são, respectivamente:

a. 2,36 e 9,90

b. 2,36 e 9,41

c. $-0{,}49$ e 9,41

d. $-0{,}49$ e 9,90

Questão 4. Cristina, Maria e Pedro participam de um jogo lançando moedas independentemente. Cristina inicia o jogo arremessando uma moeda honesta (probabilidade de cara igual a 0,5). Se der cara, ela vence o jogo, se der coroa, ela passa a a vez para Maria que jogará uma moeda viciada com probabilidade de cara igual a 0,6. Se Maria obtiver cara, vence o jogo, caso contrário passa a oportunidade para Pedro que jogará uma moeda viciada com probabilidade de cara igual a 0,7. Se Pedro obtiver cara, ele vencerá o jogo, caso contrário a oportunidade voltará para Cristina. O jogo continua até se ter um vencedor. A probabilidade de vitória de Pedro é:

a. 1/7

b. 28/188

c. 2/7

d. 42/188

Questão 5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população $N(\mu, \sigma^2)$. Para σ^2 desconhecido, considere que você deseja obter um **valor mínimo** para o tamanho da amostra n, a fim de garantir, com probabilidade 0,90, que um intervalo de confiança de 95% para μ terá comprimento não maior que σ. A alternativa correta para n é

a. 24

b. 30

c. 8

d. 12

Questão 6. Seja U uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Indique a fórmula correta para simular da distribuição da variável aleatória $Z = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ em que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ é uma amostra aleatória simples com distribuição exponencial de média $1/\alpha$, com $\alpha > 0$.

a. $-\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-U)^n$

b. $-\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-U^n)$

c. $-\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-U^{1/n})$

d. $-\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-U)^{1/n}$

Questão 7. Assuma que a prevalência de uma determinada doença na população é $100p\%$ e que um teste diagnóstico possua uma taxa de $100\alpha\%$ de falsos negativos e uma taxa de $100\beta\%$ de falsos positivos, em que $0 < \alpha, \beta, p < 1$. Uma pessoa é selecionada ao acaso dessa população e seu sangue é testado. Sabendo que o teste deu positivo para a doença de interesse, qual a expressão de probabilidade de que o indivíduo possua a doença?

a. $\frac{(1-\beta)p}{(1-\alpha)p^2}$

b. $\frac{(1-\beta)p}{(1-\beta-\alpha)p+\beta}$

c. $\frac{(1-\alpha)p}{(1-\beta-\alpha)p+\beta}$

d. $\frac{(1-\alpha)p}{(1-\alpha)p^2}$

Questão 8. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Normal com média μ e variância σ^2. O estimador de σ^2, denotado por S^2, é dado por $S^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$. Definimos o estimador $\hat{\sigma} = kS$. Encontrar a forma explicita de k para que este estimador seja um estimador não viesado de σ.

a. $\sqrt{\dfrac{n+1}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

b. $\sqrt{\dfrac{n-1}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

c. $\sqrt{\dfrac{n-1}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

d. $\sqrt{\dfrac{n+1}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Questão 9. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas uniformemente no intervalo $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Considere que $\hat{\theta}_M$ seja o estimador para θ via método dos momentos. O valor esperado e o erro quadrático médio de $\hat{\theta}_M$ são dados respetivamente por:

a. $\dfrac{n}{n+1}\theta$ e $\dfrac{1}{3n}\theta^2$

b. θ e $\dfrac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$

c. $\dfrac{n+1}{n}\theta$ e $\dfrac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$

d. θ e $\dfrac{1}{3n}\theta^2$

Questão 10. Suponha que uma variável aleatória X possua função densidade de probabilidade dada por $f(x) = \exp(-x)$, $x > 0$. Seja $Y = \sqrt{\theta X}$, onde θ é um número real positivo. Qual a função densidade de probabilidade de Y?

a. $f(y) = \frac{2y}{\theta} \exp\left(\frac{-y^2}{\theta}\right)$

b. $f(y) = \frac{1}{2\sqrt{\theta y}} \exp\left(\sqrt{\theta y}\right)$

c. $f(y) = \frac{y^2}{\theta} \exp\left(\frac{-y^2}{\theta}\right)$

d. $f(y) = \exp\left(\frac{-y^2}{\theta}\right)$

Questão 11. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 1/2$. Calcule o valor da soma

$$\sum_{k=0}^{10} k^2 \binom{10}{k}.$$

a. 29040

b. 28160

c. 28240

d. 29160

Questão 12. Observações $(y_i; x_{1i}; x_{2i})$ de três variáveis econômicas satisfazem teoricamente o modelo linear $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \epsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, em que x_{1i} e x_{2i} são fixos (não aleatórios), β_0, β_1 e β_2 são parâmetros desconhecidos e os ϵ_i são erros normais não diretamente observáveis, não correlacionados com média zero e mesma variância σ^2. Considere uma amostra aleatória de tamanho 6 em que observou-se os valores $(1; 2; 3; 4; 5$ e $6)$ para y. Com uso dos estimadores de mínimos quadrados, obteve-se os respectivos resíduos $(-1; 0; 1; -1; 0$ e $1)$. Baseado nessas informações calcule:

1. uma estimativa para σ^2 utilizando o estimador de máxima verossimilhança de σ^2.

2. o valor do coeficiente de determinação R^2.

A alternativa que fornece os valores corretos é:

a. 1,33 e 77,14%

b. 0,67 e 87,83%

c. 1,33 e 87,83%

d. 0,67 e 77,14%

Questão 13. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Qual das alternativas abaixo é uma estatística suficiente para α e β?

a. $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n (1 - X_i))$

b. $(\sum_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n (1 - X_i))$

c. $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ na qual $X_{(i)}$ corresponde a i-ésima estatística de ordem

d. $\left(X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i\right)$

Questão 14. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples da distribuição gama com densidade:

$$f(x; \sigma) = (2\pi\sigma^2 x)^{-1/2} e^{-x/2\sigma^2}, \quad x > 0, \quad \sigma > 0.$$

Se para $n = 50$ é observado $\bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i = 10$ um intervalo de **aproximadamente** 95% de confiança para σ é

a. (2,09; 3,91)

b. (1,29; 2,71)

c. (1,88; 3,13)

d. (2,68; 4,06)

Questão 15. Seja X uma variável aleatória discreta. A entropia da distribuição de probabilidade dessa variável é definda por:

$$S = \mathbb{E}[-\ln q(X)], \quad \text{onde} \quad q(x_k) = \mathbb{P}(X = x_k), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Considerar a distribuição geométrica com parâmetro p dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad 0 < p < 1, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Calcule a entropia da distribuição de X quando $p = 1/2$.

a. $2 \ln 2$

b. $\frac{\ln 2}{2}$

c. $\frac{\ln 3}{2}$

d. $2 \ln 3$

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2017/2018
Data: 21/11/2017

Instruções:

1. No quadro abaixo, assinale com um **X** a opção de resposta escolhida para cada questão.
2. USE **CANETA**.

	Resposta				
Questão	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	Pontuação
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

`Número de inscrição: ________________________`