DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2018/2019

Instruções:

1. Cada questão respondida corretamente vale **1 (um) ponto**.
2. Cada questão respondida incorretamente vale **-1 (menos um) ponto**.
3. Cada questão deixada em branco vale 0 (zero) pontos
4. Pelo menos 9 (nove) questões devem ser respondidas pelo aluno
5. A nota final será a soma dos pontos (negativos e positivos) de todas as questões
6. As opções escolhidas devem ser assinaladas na folha de respostas no final da prova.

A prova tem duração de 3 horas.

É proibido: usar celular, consultar referências bibliográficas diferentes das que estão estabelecidas no edital de seleção, emprestar calculadoras e/ou livros para consulta de outros candidatos durante a prova.

`Nome do candidato(a): ________________________________________________`

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2018/2019

Informações que podem ser úteis:

- Z_δ = quantil da $N(0,1)$ com área δ à esquerda
  $Z_{0,9987} = 3$, $Z_{0,7734} = 0,75$, $Z_{0,9332} = 1{,}5$, $Z_{0,8643} = 1{,}1$, $Z_{0,8159} = 0{,}9$, $Z_{0,9101} = 1{,}3416$, $Z_{0,5478} = 0{,}12$, $Z_{0,99999832} = 4{,}6576$, $Z_{0,975} = 1{,}96$, $Z_{0,8133} = 0{,}89$, $Z_{0,8749} = 1{,}15$, $Z_{0,9772} = 2$.

- $t_{\delta;v}$ = quantil da t-Student com v graus de liberdade (área δ à esquerda)
  $t_{0,9915;8} = 3$, $t_{0,7626;8} = 0{,}75$, $t_{0,9140;8} = 1{,}5$, $t_{0,8335;4} = 1{,}1$, $t_{0,7905;4} = 0{,}9$, $t_{0,9750;15} = 2{,}131$, $t_{0,9750;30} = 2{,}042$

Questão 1. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal com média 2 e variância 1. O valor de $P(2X > Y)$ é

a. $0,9772$

b. $0,1867$

c. $0,8749$

d. $0,8133$

Questão 2 Um pacote com 10 componentes eletrônicos contém 2 itens defeituosos e 8 itens não defeituosos. Se X é o número de componentes eletrônicos defeituosos em uma amostra escolhida aleatoriamente e sem reposição com 3 itens, a probabilidade de ter pelo menos um item defeituoso na amostra é

a. $\frac{7}{15}$

b. $\frac{4}{60}$

c. $\frac{14}{15}$

d. $\frac{16}{30}$

Questão 3. Denote por X o número de vezes em que uma pessoa contrai um resfriado em um dado ano. Assuma que X é uma variável aleatória Poisson com média 5. Suponha que com o uso de uma determinada droga (baseada em grande quantidade de vitamina C), tal número segue distribuição Poisson com média 3 para 75% da população e para os 25% restantes da população, a droga não faz efeito e, portanto, neste caso, o número de resfriados anual tem distribuição Poisson com média 5. Dado que uma pessoa escolhida aleatoriamente teve 1 resfriado em um determinado ano com a utilização da droga, qual é a probabilidade de que a droga tenha surtido efeito? (Utilize arredondamento de quatro casas decimais).

a. 0,9301

b. 0,8886

c. 0,7500

d. 0,1680

Questão 4. A função geradora de momentos da variável aleatória X é dada por $M_X(t) = E(e^{tX}) = \exp(2e^t - 2)$ e a da variável aleatória Y é dada por $M_Y(t) = E(e^{tY}) = (\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4})^3$. Se X e Y são independentes, o valor de $E(X + Y)$ é:

a. $\frac{17}{4}$

b. $\frac{11}{4}$

c. $\frac{5}{16}$

d. $\frac{13}{16}$

Questão 5. Sejam X e Y variáveis aleatórias conjuntamente contínuas com função de densidade conjunta dada por $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}$, para $x > 0$ e $y > 0$. A distribuição de $Z = X + Y$ é

a. $\Gamma(1,1)$

b. $\Gamma(1,2)$

c. $\Gamma(1,3)$

d. $\Gamma(1/2,1/2)$

Obs: Uma variável aleatória W tem distribuição $\Gamma(\beta,\alpha)$ se sua função densidade de probabilidade é dada por $g(w) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1}e^{-\beta w}$, para $w > 0$ e $\beta, \alpha > 0$.

Questão 6. Assuma que $X_1, \ldots, X_{20}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de densidade dada por $f(x) = 2e^{-2x}$, para $x > 0$. Seja N uma variável aleatória discreta e independente de $X_1, \ldots, X_{20}$, com função de probabilidade $P(N = k) = \dbinom{20}{k}\dfrac{1}{2^{20}}$ para $k = 0, 1, \ldots, 20$. Defina $S_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ (em que $S_0 \equiv 0$). A esperança $E(S_N)$ é igual a

a. 1

b. 5

c. 10

d. 20

Questão 7. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes tais que $M_X(t) = E(e^{tX}) = \exp(\frac{t^2}{2} - 0{,}5\,t)$ e $M_Y(t) = E(e^{tY}) = \exp(\frac{t^2}{2} + 0{,}5\,t)$. O valor de $P(X + Y < 0)$ é

a. 0,8133

b. 0,1867

c. 0,5

d. 0

Questão 8. Um programa de computador, ao somar números, arredonda cada número para o inteiro mais próximo. Admita que todos os erros de arredondamento sejam independentes e uniformemente distribuídos em $[-0{,}5; 0{,}5]$. Se 1500 números forem somados, a probabilidade aproximada de que o erro total absoluto ultrapasse 15 é igual a:

a. 0,9044

b. 0,1798

c. $3{,}36 \times 10^{-6}$

d. 0,8202

Questão 9. Considere as distribuições de probabilidade com função de densidade ou função de probabilidade abaixo.

(i) $f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right\}$, para $0 < x < \infty$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ desconhecidos.

(ii) $f(x;\alpha) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\alpha x}$, para $x > 0$ e $\alpha > 0$ desconhecido.

(iii) $P(X = x;\theta, r) = \frac{(r+x-1)!}{x!(r-1)!}\theta^r(1-\theta)^x$, para $x = 0, 1, \ldots$ e θ e r desconhecidos tal que $0 < \theta < 1$ e $r = 1, 2, \ldots$.

(iv) $P(X = x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, para $x = 0, 1, \ldots$, com $\lambda > 0$ desconhecido.

Quais dessas distribuições não pertencem à família exponencial?

a. (ii) e (iii)

b. Apenas (iii)

c. (i) e (iv)

d. Apenas (ii)

Questão 10. Seja $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade dada por $f(x) = \exp\{-(x-\theta)\}$, para $x > \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Defina $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, para $n \in \mathbb{N}$. Qual das afirmações abaixo é falsa?

a. $X_{(1)} - \dfrac{1}{n}$ é um estimador não-viesado de θ

b. A função densidade de $X_{(1)}$ é dada por $f_{X_{(1)}}(x) = n\exp\{-n(x-\theta)\}$, para $x > \theta$.

c. $X_{(1)}$ é um estimador consistente de θ.

d. $\mathrm{Var}(X_{(1)}) = \dfrac{1}{n}$.

Questão 11. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de densidade de probabilidade

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma}, \quad \mu < x < \infty, \quad 0 < \sigma < \infty.$$

Marque a opção que apresenta uma estatística suficiente bidimensional para (μ, σ).

a. $\left(\max\{X_1, \ldots, X_n\}, \ \sum_{i=1}^{n} X_i, \right)$

b. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \ \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

c. $\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\}, \ \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

d. $\left(n, \ \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

Questão 12. Considere $X_1, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$ com $\theta > 0$. O estimador de máxima verossimilhança para $h(\theta) = E(X_1)$ é

a. $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$

b. $\max\{X_1, \ldots, X_n\}/2$

c. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

d. $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Questão 13. Em um experimento destinado a testar os efeitos do álcool, registraram-se os erros em um teste de habilidade visual e motora para um grupo de 16 pessoas que bebeu uma bebida alcoólica e para outro grupo de 16 pessoas que bebeu uma bebida sem álcool. Para o grupo que recebeu bebida alcoólica, observou-se média de 9,2 erros e desvio padrão de 2,2 erros. Para o outro grupo, os valores observados para média e desvio padrão foram 5,71 e 0,7, respectivamente. Considere que a variância do número de erros é a mesma nos dois grupos e que, em ambos os grupos, a variável em estudo segue uma distribuição Normal. Deseja-se obter uma estimativa intervalar, com 95% de confiança, para a diferença do número médio de erros no teste entre quem consume bebida alcoólica e quem não consome. Assinale a alternativa que apresenta a estimativa intervalar correta.

a. $[1{,}566; 5{,}414]$

b. $[2{,}260; 4{,}720]$

c. $[2{,}359; 4{,}621]$

d. $[2{,}311; 4{,}669]$

Questão 14. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0.$$

Denote por LI o limite inferior da desigualdade de Cramér-Rao para a variância de estimadores não viciados de λ e denote por $\widehat{\lambda}$ o estimador de máxima verossimilhança de λ. Seja $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Assinale a opção correta.

a. $LI = \lambda^2/(2n)$ e $\widehat{\lambda} = 2\bar{X}^{-1}$

b. $LI = \lambda^2/2$ e $\widehat{\lambda} = 2\bar{X}^{-1}$

c. $LI = \lambda^2/(2n)$ e $\widehat{\lambda} = 2\bar{X}$

d. $LI = \lambda^2/2$ e $\widehat{\lambda} = \bar{X}/2$

Questão 15. Considere X uma variável aleatória com distribuição Poisson com média $\lambda > 0$. Queremos testar as hipóteses $H_0 : \lambda = 1$ contra $H_1 : \lambda = 3$. Defina $\alpha = P(\textit{Erro do Tipo I})$ e $\beta = P(\textit{Erro do Tipo II})$. Considere a seguinte região crítica para este teste: $RC = \{X : X > 2\}$. Marque a alternativa correta.

a. $\alpha = 2{,}5 \times 10^{-1}$, $\beta = 8{,}5 \times 10^{-3}$

b. $\alpha = 2 \times 10^{-1}$, $\beta = 4 \times 10^{-3}$

c. $\alpha = 4 \times 10^{-1}$, $\beta = 8 \times 10^{-3}$

d. $\alpha = 2 \times 10^{-1}$, $\beta = 8{,}5 \times 10^{-3}$

Nome do candidato(a): ____

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a															
b															
c															
d															