

**DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2019/2020**

Instruções:

1. Cada questão respondida corretamente vale **1 (um) ponto**.
2. Cada questão respondida incorretamente vale **-1 (menos um) ponto**.
3. Cada questão deixada em branco vale 0 (zero) pontos.
4. Pelo menos 9 (nove) questões devem ser respondidas pelo aluno.
5. A nota final será a soma dos pontos (negativos e positivos) de todas as questões.
6. As opções escolhidas devem ser assinaladas na folha de respostas no final da prova.

A prova tem duração de 3 horas.

É proibido: usar celular; consultar referências bibliográficas diferentes das que estão estabelecidas no edital de seleção; emprestar calculadoras e/ou livros para consulta de outros candidatos durante a prova.

**DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/ UFMG - 2019/2020**

Nome do Candidato(a):

Informações úteis

- $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição acumulada da distribuição normal padrão.
- $X_{\delta;v}^2$ = quantil da Qui-quadrado, v graus de liberdade, com área δ à esquerda
 $X_{0,38;14}^2 = 11,79$, $X_{0,42;14}^2 = 12,38$, $X_{0,45;13}^2 = 11,79$, $X_{0,50;13}^2 = 12,38$

Questão 1. Suponha uma amostra aleatória simples X_1, \dots, X_{2n} , tal que $E(X_1) = \mu$ e $Var(X_1) = \sigma^2$. Considere os seguintes estimadores para μ :

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{2n} X_i}{2n}, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad \hat{\mu}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n-3}, \quad \hat{\mu}_4 = \frac{\sum_{i=1}^{2n} X_i}{(2n)^2}.$$

Afirma-se:

- I. Os estimadores $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_4$ são não viciados e os estimadores $\hat{\mu}_2$ e $\hat{\mu}_3$ são viciados.
- II. Todos os estimadores são assintoticamente não viciados.
- III. Todos os estimadores são consistentes.
- IV. Apenas os estimadores $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$ são não viciados.
- V. Apenas os estimadores $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ e $\hat{\mu}_3$ são consistentes.

Estão corretas as seguintes afirmações:

- a. II e III
- b. I e III
- c. IV e V
- d. III e IV

Questão 2. Seja uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, com $0 \leq f(x) \leq B \quad \forall x \in [0, 1]$ e $B > 0$. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, tais que $X \sim \text{Uniforme}[0, 1]$ e $Y \sim \text{Uniforme}[0, B]$. Considere os seguintes estimadores para estimar $\int_0^1 f(x)dx$:

$$I = \begin{cases} B, & \text{se } Y \leq f(X), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$J = f(X).$$

Pode-se afirmar que:

- a. $Var(I) \leq Var(J)$.
- b. $Var(J) \leq Var(I)$.
- c. $Var(I) = Var(J)$.
- d. Dependendo da função f , o estimador I pode ter variância maior ou menor do que o estimador J .

Questão 3. Uma urna contém 3 bolas vermelhas, 4 bolas azuis e 2 bolas verdes. Um conjunto de cinco bolas é retirado aleatoriamente da urna, sem reposição. Determine a probabilidade de que exatamente duas bolas vermelhas ou exatamente duas bolas azuis sejam retiradas.

- a. $2/3$
- b. $20/21$
- c. $1/14$
- d. $17/21$

Questão 4. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de uma população com distribuição de probabilidade dada por $P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$, para $x = k, k+1, k+2, \dots$, $0 < p < 1$ e $k > 1$, onde $\binom{x-1}{k-1} = \frac{(x-1)!}{(k-1)!(x-k)!}$. Supondo k conhecido, o estimador de máxima verossimilhança de p é:

- a. $\frac{k}{\sum_{i=1}^n X_i}$
- b. $\frac{nk}{\sum_{i=1}^n X_i}$
- c. $\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$
- d. $\frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i}$

Questão 5. Sejam X_1, \dots, X_5 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \text{Uniforme}(0, 1)$. Qual é a probabilidade de que o segundo maior valor dentre estas variáveis seja menor do que $1/2$?

- a. $1/5$
- b. $2/15$
- c. $3/16$
- d. $5/32$

Questão 6. A urna I contém 1 bola azul e 1 bola vermelha, a urna II contém 1 bola azul e 2 bolas vermelhas e a urna III contém 2 bolas azuis e 4 bolas vermelhas. Jogamos um dado equilibrado: se sair a face 1 retiramos aleatoriamente uma bola da urna I; se saírem as faces 2 ou 3 retiramos aleatoriamente uma bola da urna II; se saírem as faces 4 ou 5 ou 6 retiramos aleatoriamente uma bola da urna III. Dado que a bola retirada é vermelha, qual é a probabilidade de que tenha ocorrido as faces 2 ou 3 no dado?

- a. $1/3$
- b. $8/69$
- c. $8/23$
- d. $4/23$

Questão 7. Seja X_1, \dots, X_{35} uma amostra aleatória simples de uma população com distribuição dada pela seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 5x^4, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \text{ e } x > 1. \end{cases}$$

A probabilidade de que a média amostral seja maior que 0,78 é aproximadamente igual a:

- a. $\Phi(2, 10)$
- b. $\Phi(0, 79)$
- c. $\Phi(-2, 10)$
- d. $\Phi(-0, 79)$

Questão 8. Seja X o número de tentativas necessárias até se obter um número maior que 4 em lançamentos sucessivos de um dado equilibrado. A probabilidade de que X seja divisível por 4 é

- a. $8/65$
- b. $1/8$
- c. $8/63$
- d. $7/64$

Questão 9. Um homem e uma mulher combinam um encontro em certo lugar às 19:30. O homem chega em um horário uniformemente distribuído entre 19:10 e 19:50. A mulher chega em um horário uniformemente distribuído entre 19:00 e 20:00. Assumindo que os horários de chegada do homem e da mulher são independentes, determine a probabilidade de que o primeiro a chegar não espere mais que 10 minutos.

- a. $2/3$
- b. $1/6$
- c. $1/2$
- d. $1/3$

Questão 10. A duração de um tipo de equipamento é uma variável aleatória com distribuição Normal com média 3,0 anos e desvio-padrão 1,05 anos. Considerando uma amostra aleatória simples de 14 equipamentos, as probabilidades $P(\bar{X} < 3,5)$ e $P(S < 1)$, onde $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{14} X_i}{14}$ e $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{14} (X_i - \bar{X})^2}{13}$, são dadas, respectivamente, por:

- a. $\Phi(1, 78)$ e 0,45

- b. $\Phi(1,78)$ e 0,50
- c. $\Phi(1,82)$ e 0,45
- d. $\Phi(1,82)$ e 0,50

Questão 11. João e Maria lançam, cada um, dois dados equilibrados. A probabilidade de que a soma dos dados lançados por Maria seja maior do que a soma dos dados lançados por João é

- a. $21/36$
- b. $143/432$
- c. $721/1296$
- d. $575/1296$

Questão 12. Maria lança uma moeda honesta 2 vezes. Ela ganha 1 real se ocorre pelo menos uma cara nos dois lançamentos da moeda. Suponha que Maria repita este jogo 300 vezes, independentemente. Obtenha uma aproximação para a probabilidade de que ela ganhe pelo menos 218 reais.

- a. $\Phi(1)$
- b. $\Phi(1,18)$
- c. $\Phi(-0,73)$
- d. $\Phi(1,8)$

Questão 13. Considere o teste de hipóteses $H_0 : p = 0,5$ contra $H_1 : p > 0,5$, onde p é a probabilidade de sair cara em um lançamento de uma moeda. Considere o critério que rejeita H_0 se a proporção de caras em 50 lançamentos da moeda for maior que 0,6. A probabilidade do erro tipo I para este critério é igual a:

- a. $\Phi(2,83)$
- b. $\Phi(-2,83)$
- c. $\Phi(1,41)$
- d. $\Phi(-1,41)$

Questão 14. Num grupo de 12 homens e 18 mulheres, quantos comitês de 8 pessoas podemos formar, contendo pelo menos um homem e uma mulher?

- a. $\binom{30}{8} - \binom{18}{12} - \binom{12}{8}$

b. $\binom{30}{8} - \binom{18}{8} - \binom{12}{8}$

c. $\binom{30}{12} + \binom{30}{8} - \binom{12}{8}$

d. $\binom{30}{12} - \binom{18}{12} - \binom{12}{8}$

Questão 15. Considere um sistema de atendimento com dois caixas e suponha que os tempos de serviço dos caixas são variáveis aleatórias exponenciais, independentes, com média $1/\lambda$. Três clientes, A, B e C, entram simultaneamente no sistema. Os clientes A e B tem prioridade para serem atendidos e o cliente C espera até que A ou B saia do sistema. Supondo que o sistema esteja vazio no instante que os três clientes chegam, qual é a probabilidade de que A ainda esteja no sistema depois que os clientes B e C já tenham saído?

a. $2/3$

b. $1/3$

c. $1/4$

d. $3/4$

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA -UFMG
PROVA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
SELEÇÃO - MESTRADO/UFMG - 2019/2020

Assinale no quadro abaixo as opções escolhidas para cada questão:

Questão	a	b	c	d
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

NOME:

ASSINATURA:

Carteira de Identidade / Passaporte: