Prova - Seleção Mestrado - 2022

PPG em Estatística - UFMG

Horário: 14:00 as 17:00 horas

A nota obtida na prova será determinada pelo número de questões respondidas corretamente, de acordo com a seguinte tabela.

Resposta corretas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nota	0	10	20	30	40	50	60	70	80	85	90	95	100

INSTRUÇÕES

- Será permitida a consulta à livros didáticos.
- É vedado o uso de equipamentos eletrônicos durante a realização da prova.
- Pode-se utilizar calculadoras (mas não é permitido utilizar celular)
- **IMPORTANTE: Preencher a folha de respostas que se encontra no final da prova**

QUESTÃO 1

Uma urna contém 3 bolas vermelhas, 5 bolas azuis e 4 bolas verdes. Uma amostra de quatro bolas é retirada sem reposição, i.e., quatro bolas são retiradas aleatoriamente da urna sem reposição. Determine a probabilidade de que exatamente duas bolas vermelhas ou exatamente duas bolas azuis sejam retiradas.

(a) $\frac{106}{165}$

(b) $\frac{32}{55}$

(c) $\frac{13}{495}$

(d) $\frac{4}{165}$

(e) $\frac{53}{1980}$

QUESTÃO 2

Uma caixa contém três moedas. Uma é honesta, outra é uma moeda que dá cara com probabilidade $\frac{1}{4}$ e a terceira é uma moeda que dá cara com probabilidade $\frac{3}{4}$. Uma moeda é selecionada aleatoriamente e lançada duas vezes. Determine a probabilidade de que ambos os lançamentos resultem em cara.

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{7}{8}$

(c) $\frac{3}{32}$

(d) $\frac{7}{24}$

(e) $\frac{1}{2}$

QUESTÃO 3

Seja X_1, X_2 uma amostra independente e identicamente distribuída de tamanho 2 de uma distribuição $N(1,1)$ e Z_1, Z_2 uma amostra independente e identicamente distribuída de tamanho 2 de uma distribuição $N(0,1)$. Suponha que X_i's são independentes de Z_j's. Determine a distribuição de

$$\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{\frac{(X_2-X_1)^2+(Z_2-Z_1)^2}{2}}}.$$

(a) t com 2 graus de liberdade.

(b) t com 1 grau de liberdade.

(c) Normal com média 0 e variância $\sqrt{2}$.

(d) exponencial dupla ou distribuição de Laplace.

(e) Normal com média 0 e variância 2.

QUESTÃO 4

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra independente e identicamente distribuída de tamanho n de uma distribuição exponencial com média 1. Defina $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Determine, aproximadamente, o valor de n para que

$$P\left(\left|\bar{X}_n - 1\right| > 0,01\right) = 0,05.$$

(a) 58081

(b) 63001

(c) 38416

(d) 66564

(e) 27225

QUESTÃO 5

O consumo de combustível é uma variável aleatória com parâmetros dependendo do tipo de veículo. Suponha que, para certo automóvel, o desvio padrão do consumo seja conhecido e igual a 2 km/l, e a montadora afirma que o consumo médio desse modelo seja igual a 10 km/l. Para verificar a veracidade dessa afirmação ($H_0 : \mu = 10$ *versus* $H_1 : \mu \neq 10$) uma revista especializada obteve uma amostra do consumo de 25 automóveis desse modelo, encontrado um consumo médio de 9,1 km/l. Teste as hipóteses de interesse utilizando o intervalo de confiança de 95% para μ. Qual a sua conclusão?

(a) Como o $IC(\mu; 95\%) = [9,216; 10,784]$ não contém $\bar{X} = 9,1$, temos evidências para rejeitar $H_0 : \mu = 10$.

(b) Como o $IC(\mu;95\%) = [8,316;9,884]$ contém $\bar{X} = 9,1$, não temos evidências para rejeitar $H_0 : \mu = 10$.

(c) Como o $IC(\mu;95\%) = [9,216;10,784]$ contém $\mu = 10$, não temos evidências para rejeitar $H_0 : \mu = 10$.

(d) Como o $IC(\mu;95\%) = [9,216;10,784]$ não contém $\bar{X} = 9,1$, não temos evidências para rejeitar $H_0 : \mu = 10$.

(e) Como o $IC(\mu;95\%) = [8,316;9,884]$ não contém $\mu = 10$, temos evidências para rejeitar $H_0 : \mu = 10$.

QUESTÃO 6

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Calcule a média da variável aleatória X.

(a) $E(X) = -\infty$

(b) $E(X) = 0$

(c) $E(X) = 1$

(d) $E(X) = 2$

(e) $E(X) = +\infty$

QUESTÃO 7

O tempo entre chegadas de aeronaves a um determinado aeroporto é distribuído exponencialmente com média de 30 minutos. Dado que nenhuma aeronave chegou na primeira meia hora de funcionamento do aeroporto, qual a probabilidade de nenhuma aeronave chegar na próxima hora?

(a) 0,1353

(b) 0,0366

(c) 0,5940

(d) 0,0498

(e) 0,8647

QUESTÃO 8

Uma empresa não pode produzir menos do que 90% de peças não-defeituosas de um determinado artigo. Seja p a proporção de unidades não-defeituosas em um estoque qualquer. Suponha que, para um dado lote, 500 artigos foram sorteados para inspeção, e 60 unidades apresentaram defeito. Obtenha o p-valor e teste as hipóteses de interesse (H_0: a produção está adequada versus H_1: a produção está inadequada). Considere um nível de significância de 5% e assinale a afirmativa correta.

(a) Temos evidência para rejeitar H_0 uma vez que o p-valor $= 0.12 > 0.1$.

(b) Não temos evidência para rejeitar H_0 uma vez que o p-valor $= 0.0681 > 0.05$.

(c) Temos evidência para rejeitar H_0 uma vez que o p-valor $= 0.0681 > 0.05$.

(d) Temos evidência para rejeitar H_0 uma vez que o p-valor $= 0.6293 > 0.05$.

(e) Não temos evidência para rejeitar H_0 uma vez que o p-valor $= 0.88 < 0.9$.

QUESTÃO 9

Seja $X_1, X_2, X_3, \ldots$ uma amostra independente e identicamente distribuída de uma distribuição discreta com média $\mu \in \mathbb{R}$ e variância $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$. Defina $Y_i = \dfrac{X_{2i} + X_{2i-1}}{2}$, para $i = 1, 2, \ldots$. Defina $\bar{Y}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ e $S_n^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}$. Considere as seguintes afirmações:

(I) As variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ são independentes e identicamente distribuídas.

(II) O valor esperado de $\bar{Y}_n$ é $\dfrac{\mu}{2}$.

(III) $\bar{Y}_n$ converge quase certamente para μ.

(IV) S_n^2 é um estimador não viciado para σ^2.

Considerando V para verdadeiro e F para falso, a correta classificação das quatro afirmações acima é:

(a) I-V, II-F, III-V, IV-V.

(b) I-V, II-V, III-F, IV-V.

(c) I-V, II-V, III-F, IV-F.

(d) I-V, II-F, III-V, IV-F.

(e) I-F, II-F, III-V, IV-V.

QUESTÃO 10

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra independente e identicamente distribuída de uma distribuição Exponencial(λ), sendo $E[X_1] = \dfrac{1}{\lambda}$. Defina $\hat{\lambda}$ como sendo o estimador de máxima verossimilhança de λ e $\bar{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$. Marque a afirmação correta.

(a) $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$ é um estimador não-viciado para λ.

(b) $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\bar{X}_n}$ é um estimador viciado para λ.

(c) $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$ é um estimador viciado para λ.

(d) $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\bar{X}_n}$ é um estimador não-viciado para λ.

(e) $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\bar{X}_n^2}$ é um estimador viciado para λ.

QUESTÃO 11

Seja X uma variável aleatória com distribuição Bernoulli(p). Então, $(E[X], E[X^2], E[2X])$ é igual a:

(a) $(p, p^2, 2p)$

(b) $((1-p), p^2, 2p)$

(c) $(p, p, 2p)$

(d) (p, p, p^2)

(e) $((1-p), p^2, p)$

QUESTÃO 12

Seja Φ a função de distribuição acumulada da distribuição Normal padrão (média 0 e variância 1). Então, é correto afirmar que

(a) $\Phi(x) = \Phi(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\Phi(2x) = 2\Phi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\Phi(x-1) = \Phi(1-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) $\Phi(x^2) = (\Phi(x))^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

RESPOSTAS

Nome do candidato:

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Resposta												